

На правах рукописи

ЛЕБЕДЕВ ИВАН МИХАЙЛОВИЧ

**Идентификация поперечных трещин и
трещиноподобных дефектов в стержне по
собственным частотам продольных и поперечных
колебаний**

Специальность 1.1.8 -

«Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН).

Научный руководитель: **Шифрин Ефим Ильич**
д.ф.-м.н., заведующий лабораторией механики
прочности и разрушения материалов и
конструкций ИПМех РАН

Официальные оппоненты: **Никитин Илья Степанович**
д.ф.-м.н., директор ФГБУН Института автоматизации
проектирования РАН

Сумбатьян Межлум Альбертович
д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической
и компьютерной гидроаэродинамики ФГАОУ ВО
«Южный федеральный университет»

Ведущая организация: МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-
математический факультет, кафедра теории упругости

Защита состоится 01 июня 2023 г. в 15-00 часов на заседании диссертационного
совета 24.1.098.01 на базе ИПМех РАН по адресу: 119526, г. Москва, проспект
Вернадского, д. 101, к. 1

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН
<https://ipmnet.ru/files/diss/2023/1/Lebedev-diss.pdf>.

Автореферат разослан

Ученый секретарь Диссертационного
совета 24.1.098.01, к.ф.-м.н.

Сысоева Е.Я.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Среди методов идентификации хорошо локализованных поперечных дефектов в стержнях распространены методы, основанные на анализе резонансных частот рассматриваемого стержня. При этом широко распространенной является модель, в которой трещины заменяются невесомыми пружинами. В случае продольных колебаний стержня они работают на растяжение-сжатие, а в случае поперечных колебаний - на поворот. В рамках этой модели идентификация дефектов сводится к обнаружению положения пружин и их податливостей. Долгое время используемые аналитические подходы не позволяли решать задачу идентификации дефектов в наиболее общем виде, когда отсутствуют какие-либо ограничения на количество возможных дефектов и их размеры. Для решения такой задачи прежде всего необходимо установить какие исходные данные однозначно определяют искомые величины, а затем разработать эффективный алгоритм для восстановления этих величин по исходным данным. Впервые этот вопрос для случая продольных колебаний стержня был рассмотрен в работах Е.И. Шифрина. В них было строго доказано, что любое число открытых трещин произвольного размера однозначно восстанавливается по двум спектрам продольных колебаний, отвечающим следующим условиям на концах: свободный-свободный и закрепленный-свободный. Для случая поперечных колебаний Е.И. Шифриным было доказано, что любое количество трещин произвольного размера однозначно восстанавливается по трем спектрам, отвечающим трем специальным типам краевых условий. Кроме того, был также предложен алгоритм идентификации дефектов для случая продольных колебаний стержня. Для случая поперечных колебаний в работах В. Барсилона и Г. Гладвелла была разработана конструктивная процедура восстановления искомым величин. К сожалению, применительно к рассматриваемым в диссертации задачам эти алгоритмы оказались малоэффек-

тивны, поскольку обладают низкой устойчивостью как к шуму в исходных данных, так и к количеству используемых при реализации алгоритмов собственных частот колебаний. Таким образом, имеется необходимость в разработке численных методов и алгоритмов, устойчивых к погрешностям в исходных данных, неизбежно возникающих при проведении экспериментов.

Целью исследования является разработка устойчивых к погрешностям в исходных данных численных методов и алгоритмов для решения задач идентификации трещин и трещиноподобных дефектов в стержне по собственным частотам продольных и поперечных колебаний.

Для достижения поставленной цели были сформулированы и решены следующие **основные задачи**:

1. Для случаев продольных и поперечных колебаний построить математические модели бездефектного стержня, жесткость которого зависит от координаты. Модели должны содержать неизвестную функцию, характеризующую поврежденность стержня, а процедура идентификации поперечных трещин должна сводиться к восстановлению введенной функции.
2. Для случаев продольных и поперечных колебаний стержня ввести соответствующие функционалы и сформулировать задачи их минимизации. Решением поставленных задач должна быть введенная функция поврежденности.
3. Для случаев продольных и поперечных колебаний стержня переменной жесткости построить конечно-элементные модели, обеспечивающие необходимую точность при вычислении собственных значений.
4. Разработать алгоритм локализации, выявляемых в стержне повреждений.
5. Реализовать необходимые для идентификации рассматриваемых дефектов стержня алгоритмы в собственном пакете программ.

Предметом исследования являются частоты продольных и поперечных колебаний стержня, ослабленного поперечными трещиноподобными дефектами, и их использование для однозначной идентификации имеющихся повреждений.

Методы исследования. Численная модель стержня переменной жесткости, а также собственные частоты такого стержня были получены с помощью метода конечных элементов. Поставленные в работе задачи оптимизации решались итерационным методом Левенберга-Марквардта. Верификация предлагаемого в работе алгоритма для случая продольных колебаний стержня осуществлялась с помощью эксперимента, в рамках которого использовались измеренные собственные частоты поврежденного образца. Количество дефектов варьировалось от одного до трех, глубина - от 1 мм до 1.5 мм.

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. На основе конечно-элементной модели стержня переменной жесткости разработан устойчивый численный алгоритм, позволяющий однозначно идентифицировать поперечные хорошо локализованные дефекты в стержне по двум спектрам собственных частот продольных колебаний. Количество таких дефектов, а также их размеры при этом могут быть произвольными.
2. Разработанный численный алгоритм адаптирован для случая поперечных колебаний стержня. В результате, модифицированный алгоритм позволяет идентифицировать произвольное количество поперечных хорошо локализованных дефектов в стержне по трем спектрам собственных частот поперечных колебаний. Размеры выявляемых дефектов также могут быть произвольными.
3. Для случая поперечных колебаний сделано предположение о том, что для однозначного обнаружения дефектов достаточно двух спектров. Для проверки

этой гипотезы разработана модификация исходного численного алгоритма. Полученные результаты дают основание полагать, что высказанное предположение справедливо.

4. Для случая продольных колебаний работа и устойчивость алгоритма протестированы на частотах, полученных в ходе эксперимента. Обработка экспериментальных данных показала, что модель, на которой основан алгоритм, достаточно хорошо описывает продольные колебания стержня с локальными повреждениями в широком диапазоне частот. С помощью разработанного алгоритма можно обнаружить и локализовать существующие дефекты даже относительно небольшого размера.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Численный алгоритм, разработанный на основе известных фундаментальных результатов из теории обратных задач Штурма-Лиувилля на отрезке, а также построенной конечно-элементной модели стержня переменной жесткости, позволяет однозначно идентифицировать поперечные хорошо локализованные дефекты в стержне по двум спектрам собственных частот продольных колебаний. Количество таких дефектов, а также их размеры при этом могут быть произвольными.
2. Разработанная для случая поперечных колебаний стержня модификация алгоритма, основанная на использовании известных фундаментальных результатов из теории обратных спектральных задач для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на отрезке, позволяет однозначно идентифицировать произвольное число поперечных хорошо локализованных дефектов произвольного размера по трем спектрам собственных частот.
3. С помощью разработанного алгоритма для случая поперечных колебаний

численно подтверждена гипотеза о том, что для однозначного обнаружения дефектов достаточно двух спектров.

4. Для случая продольных колебаний устойчивость разработанного алгоритма верифицирована с помощью частот, измеренных для алюминиевого стержня. Обработка полученных данных показала, что алгоритм позволяет обнаружить и локализовать существующие дефекты даже относительно небольшого размера.

Обоснованность полученных результатов обеспечивается строгим математическим аппаратом, лежащим в основе предложенного численного алгоритма, а также верификацией работы алгоритма на частотах, полученных в ходе эксперимента, для случая продольных колебаний стержня.

Практическая значимость. В диссертационной работе разработаны устойчивые численные алгоритмы идентификации поперечных хорошо локализованных дефектов в стержне по собственным частотам продольных и поперечных колебаний. Полученные в работе результаты могут быть использованы для усовершенствования методов неразрушающего контроля, использующих в своей основе анализ резонансных частот.

Апробация результатов исследования. Результаты настоящей работы докладывались на: Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" (Воронеж, ВГУ, 2018), XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, БашГУ, 2019), а также на научных семинарах лаборатории механики прочности и разрушения материалов и конструкций ИПМех РАН. Исследования были выполнены при поддержке гранта РФФИ 19-01-00100 "Разработка теоретических и экспериментальных методов решения геометрических и спектральных обратных задач теории упругости и термоупругости" (2019-2021 гг.)

Личный вклад автора. Автору удалось разработать и реализовать алгоритмы численного решения рассматриваемых в работе задач, устойчивый к погрешностям в исходных данных и количеству используемых в реализации частот. В совместных с Е.И. Шифриным публикациях алгоритмы были протестированы на модельных данных, в том числе искусственно зашумленных. В совместной публикации с А.Л. Поповым, Д.А. Челюбеевым, В.М. Козинцевым работа алгоритма была протестирована на экспериментальных данных, полученных для случая продольных колебаний стержня.

Публикации. Список трудов по диссертационной работе составляет 7 публикаций, 4 из которых входят в базу Web of Science, 5 из них - в рецензируемые научные издания и журналы из списка ВАК РФ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Объем диссертации составляет 131 страницу, в том числе 43 рисунка. Список литературы состоит из 116 наименований, включая работы диссертанта по теме исследования.

Содержание работы

Во **введении** формулируются актуальность темы, цель работы, научная новизна полученных результатов, основные положения, выносимые на защиту, приводятся обзор литературы, список публикаций и докладов по теме диссертации.

Первая глава посвящена задаче идентификации поперечных трещиноподобных дефектов в стержне по собственным частотам продольных колебаний. Задача рассматривается в общей постановке, в рамках которой не вводятся никаких предположений относительно количества дефектов и их размеров. Для описания колебаний стержня, ослабленного такими дефектами, используется модель, в которой дефекты моделируются невесомыми пружинами, работающими на растя-

жение сжатие. Математическая постановка прямой задачи в рамках указанной модели выглядит следующим образом. Пусть имеется упругий однородный стержень постоянного сечения A , ослабленный открытыми поперечными трещинами. Число трещин заранее неизвестно и равно n . Левый конец стержня расположен в точке с координатой $x_0 = 0$, правый конец - в точке $x_{n+1} = l$, а трещины расположены в точках с координатами x_1, x_2, \dots, x_n , причем $x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$. Тогда исходный стержень можно разбить на $n + 1$ стержней, связанных пружинами. Уравнение продольных гармонических колебаний каждого такого стержня имеет вид

$$u_j''(x) + \lambda u_j(x) = 0, \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, n + 1, \quad (1)$$

где $\lambda = \rho\omega^2/E$, ρ - плотность, E - модуль Юнга, ω - круговая частота. Для каждой пружины справедливы два условия сопряжения

$$u_j'(x_j) = u_{j+1}'(x_j), \quad u_{j+1}(x_j) - u_j(x_j) = \Delta_j = EAc_j u_j'(x_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (2)$$

где c_j - податливость j -й пружины, связанная с длиной соответствующей трещины. Податливость каждой из n пружин считается строго положительной величиной. Первое условие в (2) означает равенство усилий и вытекает из закона Ньютона. Второе условие означает, что растяжение пружины пропорционально действующей на нее силе. Задача рассматривается с двумя наборами граничных условий:

$$u_1'(0) = 0, \quad u_{n+1}'(l) = 0, \quad (3)$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_{n+1}(l) = 0 \quad (4)$$

Ненулевые собственные значения задач (1),(2),(3) и (1),(2),(4) обозначены $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ и $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$ соответственно.

Затем исходная постановка задачи сводится к обратной спектральной задаче

Штурма-Лиувилля на отрезке методом, предложенным Е.И. Шифриным:

$$w''(x) + \lambda \left[1 + \sum_{k=1}^n EA c_k \delta(x - x_k) \right] w(x) = 0 \quad (5)$$

с граничными условиями

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad (6)$$

$$w'(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad (7)$$

здесь $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака. В рамках такой задачи по известным спектрам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ и $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots$, отвечающим граничным условиям (6) и (7) соответственно, необходимо восстановить неизвестную функцию $[1 + \sum_{k=1}^n EA c_k \delta(x - x_k)]$. Из фундаментальных результатов по обратным задачам Штурма-Лиувилля на отрезке, полученных, в частности, советским математиком М.Г. Крейном, известно, что рассматриваемые спектры частот позволяют однозначно восстановить искомую функцию.

Для численного решения этой задачи используется другая модель поврежденного стержня. При ее построении вводится предположение, что наличие поперечного дефекта влияет на локальную жесткость стержня, но не влияет на его плотность. Поэтому модель стержня с пружинами можно заменить моделью бездефектного стержня, модуль Юнга которого $E^*(x)$ зависит от координаты. Пусть нам известен модуль Юнга E целого однородного стержня, тогда для неоднородного стержня уравнение продольных гармонических колебаний примет вид

$$(p(x)u'(x))' + \lambda u(x) = 0, \quad p(x) = \frac{E^*(x)}{E}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (8)$$

Значение функции $p(x)$ в точке x характеризует степень повреждения стержня и принадлежит отрезку $[0, 1]$. Как уже было отмечено, искомые дефекты можно однозначно идентифицировать по двум спектрам $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и μ_1, μ_2, \dots , поэтому

для определения функции $p(x)$ уравнение (8) рассмотрено совместно с граничными условиями (3) и (4).

Для вычисления собственных значений $\lambda_1(p(x)), \dots, \lambda_m(p(x))$ в задаче (8),(3) и $\mu_1(p(x)), \dots, \mu_m(p(x))$ в задаче (8),(4) используется конечно-элементная аппроксимация, в результате которой стержень длины l разбивается на N элементов одинаковой длины h^e , причем каждый конечный элемент обладает собственной жесткостью, то есть функция $E^*(x)$ принимает некоторое постоянное значение на каждом элементе. Следовательно, функция $p(x)$, определенная в (8) будет кусочно-постоянной и ее можно представить в виде вектора $\vec{p} = [p_1, p_2, \dots, p_N]$. В свою очередь задачи (8),(3) и (8),(4) сводятся к нахождению первых m собственных чисел следующих систем линейных уравнений

$$(K_1(\vec{p}) - \lambda(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0, \quad (9)$$

$$(K_2(\vec{p}) - \mu(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0 \quad (10)$$

Для восстановления вектора \vec{p} используется функция N переменных

$$F_m(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(\vec{p})}{\lambda_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\mu_i^* - \mu_i(\vec{p})}{\mu_i^*} \right)^2 \right], \quad (11)$$

в которой $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ и μ_1^*, \dots, μ_m^* - комплексы, определенные в (1) и построенные по экспериментально измеренным частотам, а $\lambda_1(\vec{p}), \dots, \lambda_m(\vec{p})$ и $\mu_1(\vec{p}), \dots, \mu_m(\vec{p})$ - собственные числа задач (9) и (10) соответственно.. Теперь для идентификации дефектов требуется найти вектор \vec{p}_{min} , минимизирующий функцию (11), причем искомый вектор \vec{p}_{min} зависит от количества используемых частот $2m$ и от числа конечных элементов N , на которые разбивается стержень. Так как заранее не известно какие значения этих параметров обеспечат устойчивость полученного решения, то при поиске дефектов рассматривается последовательность функций $F_1(\vec{p}), F_2(\vec{p}), \dots, F_m(\vec{p})$ при фиксированном N . Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет достигнута устойчивость результатов.

Минимизация целевой функции (11) осуществляется с помощью алгоритма Левенберга-Марквардта. Данный алгоритм представляет собой итерационную процедуру, в которой на каждом шаге для поиска приращения исходного вектора \vec{p} необходимо решать следующую систему уравнений

$$(J(\vec{p})^T J(\vec{p}) + \kappa I)\vec{h} = -J(\vec{p})^T \vec{r}(\vec{p}), \quad \vec{p}_{new} = \vec{p} + \vec{h}, \quad (12)$$

здесь $J(\vec{p})$ - матрица Якоби, элементы которой вычисляются по формулам

$$J_{ij}(\vec{p}) = \frac{\partial \vec{r}_i(\vec{p})}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(\vec{p})}{\lambda_i^*} \right) = -\frac{1}{\lambda_i^*} \frac{\partial \lambda_i(\vec{p})}{\partial p_j}, \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$$J_{ij}(\vec{p}) = \frac{\partial \vec{r}_i(\vec{p})}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{\mu_{i-m}^* - \mu_{i-m}(\vec{p})}{\mu_{i-m}^*} \right) = -\frac{1}{\mu_{i-m}^*} \frac{\partial \mu_{i-m}(\vec{p})}{\partial p_j}, \quad (14)$$

$$i = m + 1, m + 2, \dots, 2m, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

$\vec{r}(\vec{p})$ - вектор невязок

$$\vec{r}(\vec{p}) = \left[\frac{\lambda_1^* - \lambda_1(\vec{p})}{\lambda_1^*}, \dots, \frac{\lambda_m^* - \lambda_m(\vec{p})}{\lambda_m^*}, \frac{\mu_1^* - \mu_1(\vec{p})}{\mu_1^*}, \dots, \frac{\mu_m^* - \mu_m(\vec{p})}{\mu_m^*} \right], \quad (15)$$

\vec{h} - вектор приращения аргумента, I - единичная матрица, κ - параметр регуляризации, который пересчитывается на каждом шаге итерации. Если оказывается, что $F(\vec{p}_{new}) < F(\vec{p})$, то \vec{p} заменяется на \vec{p}_{new} , а при поиске следующего шага параметр κ заменяется на $\alpha\kappa$, причем $0 < \alpha < 1$. В случае когда $F(\vec{p}_{new}) > F(\vec{p})$ решение системы (12) находится заново, но уже с увеличенным параметром κ , который заменяется на $\beta\kappa$, $\beta > 1$. В реализации алгоритма используются параметры $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$. Начальное значение параметра регуляризации выбирается в виде $\kappa = \tau \max \{ \text{diag}(J(\vec{p})^T J(\vec{p})) \}$, где $\tau = 1 \cdot 10^{-3}$.

Так как алгоритм Левенберга-Марквардта может быть применен как к задачам без ограничений, так и с ограничениями, то в рассматриваемой задаче параметры p_i находятся внутри параллелепипеда $0 \leq p_i \leq 1$. Чтобы учесть это огра-

нение, на каждом шаге итерации алгоритма все параметры $p_i > 1$ заменяются на $p_i = 1$.

Для работы алгоритма необходимо вычислять матрицу Якоби J , элементами которой являются производные от собственных значений λ и μ по параметрам p_i . Производные можно вычислить, используя следующие аналитические формулы

$$\frac{\partial \lambda_m(\vec{p})}{\partial p_j} = \vec{d}_m^T(\vec{p}) \frac{\partial K_1(\vec{p})}{\partial p_j} \vec{d}_m(\vec{p}), \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mu_m(\vec{p})}{\partial p_j} = \vec{d}_m^T(\vec{p}) \frac{\partial K_2(\vec{p})}{\partial p_j} \vec{d}_m(\vec{p}) \quad (17)$$

Таким образом, отыскание функции $p(x)$, описывающей повреждения стержня, осуществляется путем минимизации функции (11). Эта функция соответствует системе $2m$ уравнений относительно N неизвестных. Практика показывает, что устойчивость решения обеспечивается условием $\frac{2m}{N} \geq 1.5$. Величина m зависит от числа экспериментально измеренных частот, а N есть число конечных элементов, на которое разбит рассматриваемый стержень. Как правило, эксперимент не позволяет получить большое количество данных, поэтому число уравнений системы будет существенно ограничено. Учитывая условие переопределения, мы получаем еще более жесткие ограничения на число элементов N . В свою очередь при малом N вычисляемые собственные числа будут обладать высокой погрешностью, а выявляемые дефекты будут плохо локализованы. Для устранения этого недостатка был разработан алгоритм локализации повреждений. Сначала стержень, состоящий из N конечных элементов, разбивается на s частей так, чтобы обеспечить условие $\frac{2m}{s} \geq 1.5$. Поскольку никаких предположений о количестве и местоположении дефектов не используется, то поиск решения ведется по всей длине стержня. Затем определяются индексы поврежденных участков $inds = \{k : p_k < 1.0\}$, все прочие участки считаются целыми и далее не рассматриваются. Чтобы улучшить локализацию найденных повреждений, исходное число участков разбиения s удваивается, с учетом этого удвоения индексы поврежденных участков заменяются на

новые $inds_{new} = \{2 \cdot inds\} \cup \{2 \cdot inds - 1\}$. Затем снова запускается алгоритм минимизации, но поиск решения осуществляется уже не по всему стержню, а только для участков, номера которых содержатся во множестве $inds_{new}$. Получив с помощью алгоритма Левенберга-Марквардта решение для выбранных участков, список индексов поврежденных участков формируется заново $inds = \{k : p_k < 1.0\}$. Для лучшей локализации описанная процедура повторяется нужное количество раз.

В рассмотренных ниже примерах приняты следующие параметры стержня: длина 1 м, прямоугольное поперечное сечение высоты 0.02 м и ширины 0.02 м, модуль Юнга $2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м², коэффициент Пуассона 0.27, плотность 7800 кг/м³. Для определения собственных частот колебаний стержень разбивался на 80 конечных элементов. В качестве начального шага процесса локализации использовалось разбиение стержня на 10 участков, то есть вектор $\vec{p}^{(0)}$ состоял из 10 компонент. При дальнейшей локализации дефектов путем последовательного удвоения числа участков, стержень разбивался на 20, 40 и 80 участков. Собственные значения $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ и μ_1^*, \dots, μ_m^* , являющиеся входными данными для решения обратной задачи, получены численно путем решения прямой задачи в исходной постановке.

Пример 1. Рассмотрим стержень с одиночной трещиной, расположенной в точке $x_1 = 0.67$ м. Относительная длина трещины s_1 , то есть отношение ее длины к высоте стержня составляет $s_1 = 0.1$. Результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 20$ собственным числам λ_i и μ_i представлены на (Рис. 1). По оси x отложены номера компонент вектора $\vec{p} = [p_1, p_2, \dots, p_s]$, а по оси y величины $1 - p$, соответствующие податливостям элементов. Результаты представлены для $s = 20, 40$ и 80 . В случае $s = 20$ падение жесткости возникает на участке под номером 14. Этот участок занимает положение $0.65 - 0.70$ м, то есть действительно содержит имеющийся дефект. В случае $s = 40$ падение жесткости возникает уже на двух соседних участках с номерами 27 и 28, которые соответствуют отрезкам $0.650 - 0.675$ м и $0.675 - 0.70$ м соответственно. Из рисунка видно, что паде-

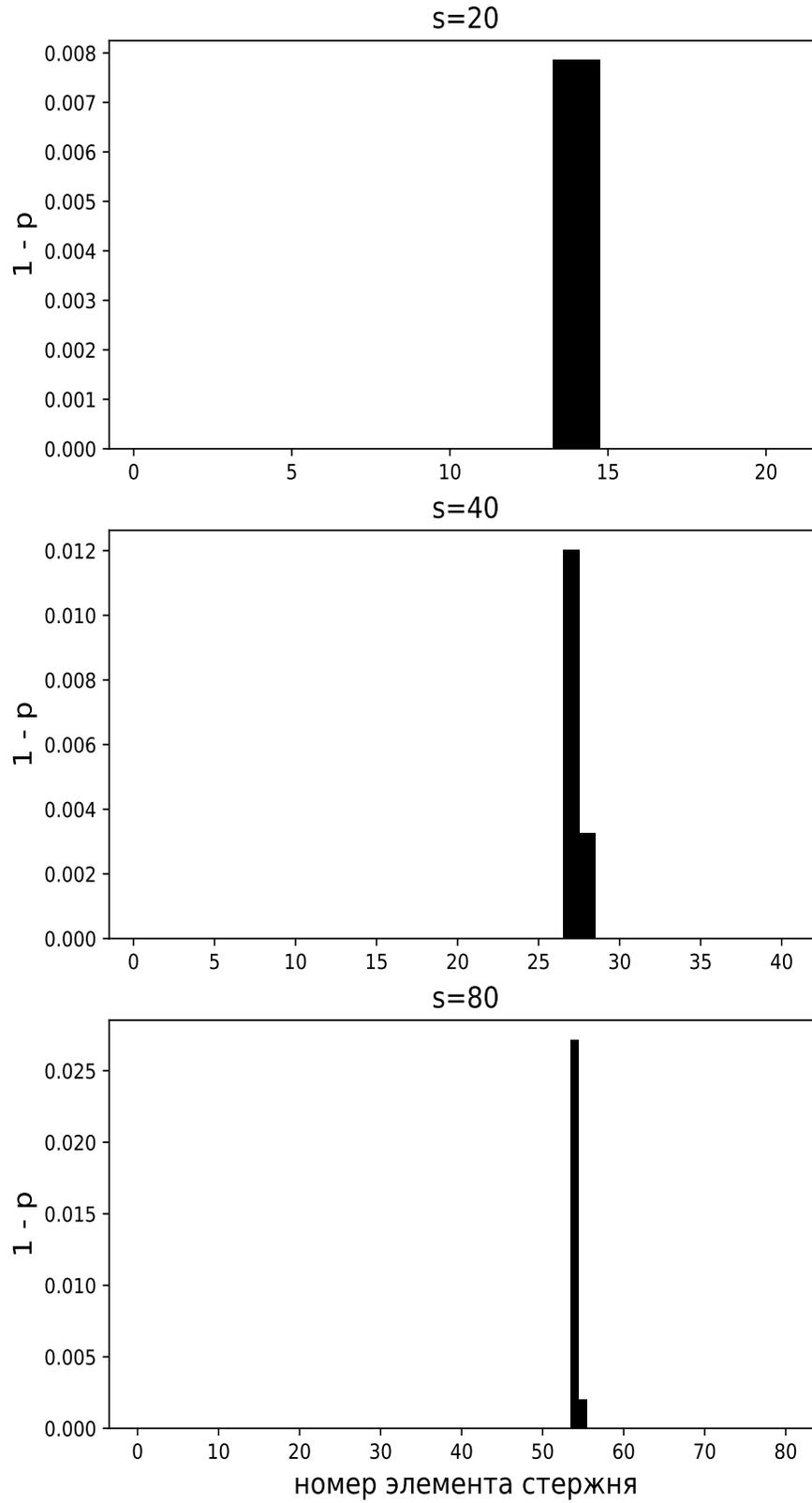


Рис. 1: Идентификация одиночной трещины

ние жесткости на 27-м участке, содержащим дефект, больше, чем на соседнем 28-м. Небольшое падение жесткости на соседнем от поврежденного участке будет встречаться довольно часто и возникать в тех случаях, когда координата имеющегося дефекта будет близка к точке, разделяющей два соседних участка. Поэтому небольшой паразитный всплеск может возникать как справа от поврежденного элемента, так и слева. В случае $s = 80$ число компонент вектора \vec{p} совпадает с количеством конечных элементов N . Результат расчета показывает увеличение податливости в 54-м и 55-м элементах, причем в первом из них податливость увеличилась намного сильнее. Этот элемент занимает отрезок $0.6625 - 0.6750$ м и действительно содержит имеющийся дефект.

Пример 2. Рассмотрим стержень, содержащий три трещины. Здесь к трещине, рассмотренной в примере 1, добавлены две трещины с параметрами: $x_2 = 0.22$ м, $s_2 = 0.15$ и $x_3 = 0.46$ м, $s_3 = 0.07$. В данном примере исследуется устойчивость результатов по отношению к количеству используемых экспериментальных собственных частот продольных колебаний стержня. Для этого были получены результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 8, 14$ и 20 собственным числам λ_i и μ_i . В данном примере рассматриваются результаты расчета только для случая $s = 80$. Результаты идентификации повреждений представлены на (Рис. 2). Во всех трех расчетах отчетливо проявились два крупных всплеска, один небольшой и несколько паразитных всплесков в соседних элементах. Крупные всплески соответствуют росту податливости в 18-м и 54-м элементах, занимающих области $0.2125 - 0.2250$ м и $0.6625 - 0.6750$ м соответственно, то есть каждый из этих элементов содержит по одному из имеющихся дефектов. Всплеск в 18-м элементе выше, чем в 54-м так как содержит более крупный дефект, что приводит к большему возрастанию податливости этого элемента. Кроме того, проявился небольшой всплеск в 37-м элементе, который занимает область $0.4500 - 0.4625$ м и соответствует трещине малого размера. Таким образом, предлагаемый алгоритм

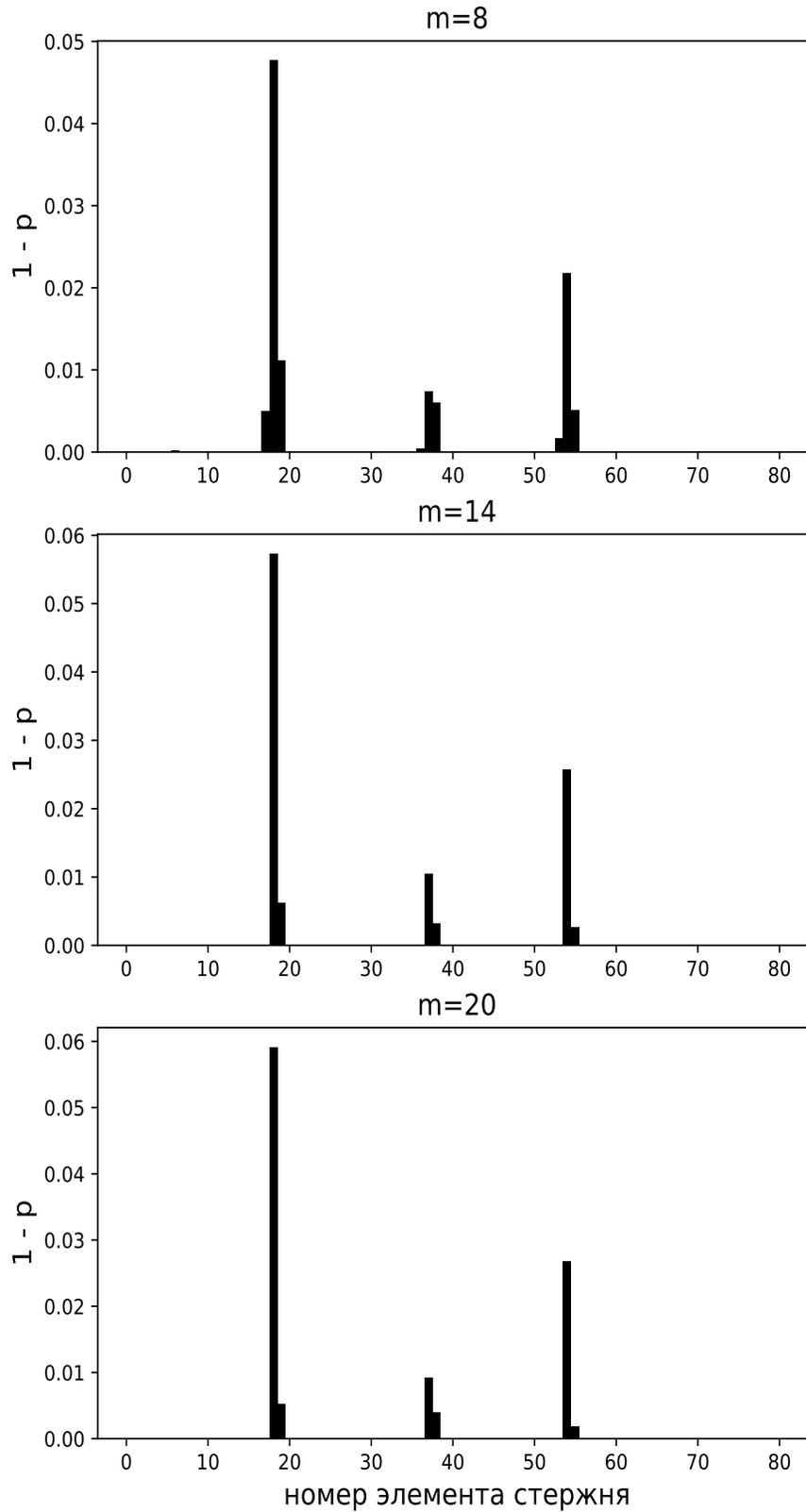


Рис. 2: Идентификация трех трещин

не только позволяет локализовать повреждения, но и сопоставлять между собой их относительные размеры. Из рисунка (Рис. 2) также видно, что предлагаемый алгоритм позволил обнаружить три трещины, причем, увеличение количества используемых в расчете частот способствует стабилизации результатов. Так, для случаев $m = 8$ и $m = 14$ результаты немного отличаются (при $m = 8$ паразитные всплески появляются справа и слева от поврежденного участка, а при $m = 14$ только справа), в то время как для случаев $m = 14$ и $m = 20$ результаты фактически совпадают.

Вторая глава посвящена задаче идентификации поперечных трещиноподобных дефектов в стержне по собственным частотам поперечных колебаний. Как и в первой главе задача рассматривается в общей постановке, в рамках которой не вводится никаких предположений относительно количества дефектов и их размеров. Для описания колебаний стержня, ослабленного такими дефектами, используется модель, в которой дефекты моделируются невесомыми пружинами, работающими на поворот. Математическая постановка прямой задачи аналогична задаче из первой главы, но теперь движения стержней, связанных пружинами, описываются уравнениями поперечных колебаний

$$y_j^{(4)}(x) = \lambda y_j(x), \quad x_{j-1} < x < x_j, \quad j = 1, \dots, n+1, \quad (18)$$

где $\lambda = \rho \omega^2 A / (EI)$, I - момент инерции поперечного сечения. Для каждой пружины справедливы четыре условия сопряжения

$$\begin{aligned} y_j(x_j) &= y_{j+1}(x_j) \\ y_j''(x_j) &= y_{j+1}''(x_j) \\ y_j'''(x_j) &= y_{j+1}'''(x_j) \\ y_{j+1}'(x_j) - y_j'(x_j) &= \Delta_j = c_j y_j''(x_j), \quad c_j > 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (19)$$

где c_j - податливость j -й пружины, связанная с длиной соответствующей трещины. Первые три условия в (19) означают равенства перемещений, изгибающих мо-

ментов и перерезывающих сил соответственно, а четвертое условие означает, что поворот пружины пропорционален действующему на нее изгибающему моменту. Задача рассматривается с шестью наборами граничных условий. В каждом из них правый конец балки предполагается свободным. В случае консольной балки граничные условия имеют вид

$$y_1(0) = y_1'(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (20)$$

Когда левый конец стержня является свободно-опертым, условия имеют вид

$$y_1(0) = y_1''(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (21)$$

Несимметричные условия для левого конца приводят к условиям

$$y_1'(0) = y_1''(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (22)$$

Другой тип несимметричных условий для левого конца имеет вид

$$y_1(0) = y_1'''(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (23)$$

Условия Рэлея(плавающей заделки) для левого конца имеет вид

$$y_1'(0) = y_1'''(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (24)$$

Наконец условия для стержня со свободными концами имеют вид

$$y_1''(0) = y_1'''(0) = 0, \quad y_{n+1}''(l) = y_{n+1}'''(l) = 0 \quad (25)$$

Собственные значения задач (18) и (19) совместно с граничными условиями (20), (21),(22),(23),(24) и (25) обозначены λ_i , μ_i , ν_i , ν_i , σ_i и ζ_i соответственно. Важно отметить, что собственные значения задач (18),(19),(22) и (18),(19),(23) совпадают, поэтому обозначены одним символом.

Затем исходная постановка задачи сводится к обратной спектральной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на отрезке методом, предложенным Е.И. Шифриным:

$$w^{(4)}(x) = \lambda m(x)w(x), \quad m(x) = \left[1 + \sum_{j=1}^n c_j \delta(x - x_j) \right], \quad (26)$$

где $m(x)$ - неизвестная функция, определяемая податливостями и местоположением искомых пружин, моделирующих дефекты. Граничные условия (20)-(25) переходят в условия

$$w''(0) = w'''(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (27)$$

$$w(0) = w''(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (28)$$

$$w(0) = w'''(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (29)$$

$$w'(0) = w''(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (30)$$

$$w'(0) = w'''(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0 \quad (31)$$

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w(l) = w'(l) = 0, \quad (32)$$

В рамках такой задачи по известным спектрам необходимо восстановить неизвестную функцию $m(x)$. Фундаментальные результаты по обратным спектральным задачам для уравнения четвертого порядка были получены в работах В. Барсилона и Г. Гладвелла. Из них известно, что существует три набора спектров, позволяющих получить однозначное решение задачи: первый - λ_i, μ_i, ν_i , второй - $\lambda_i, \sigma_i, \nu_i$ и третий - $\lambda_i, \mu_i, \sigma_i$.

Как и в случае продольных колебаний, при построении модели поврежденного стержня будем считать, что наличие поперечной трещины влияет на его локальную жесткость, но не влияет на плотность. Поэтому модель стержня с пружинами можно заменить моделью бездефектного стержня, модуль Юнга которого $E^*(x)$ зависит от координаты. В результате для неоднородного стержня уравнение по-

перечных гармонических колебаний примет вид

$$(p(x)y''(x))'' = \lambda y(x), \quad p(x) = \frac{E^*(x)}{E}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (33)$$

Для вычисления первых m собственных чисел также использовалась конечно-элементная аппроксимация соответствующих задач на собственные значения. В результате были получены следующие системы уравнений:

$$(K_\lambda(\vec{p}) - \lambda(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0, \quad (34)$$

$$(K_\mu(\vec{p}) - \mu(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0, \quad (35)$$

$$(K_\nu(\vec{p}) - \nu(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0, \quad (36)$$

$$(K_\sigma(\vec{p}) - \sigma(\vec{p})M) \vec{d}(\vec{p}) = 0 \quad (37)$$

Поскольку существует три набора спектров, позволяющих однозначно определить местоположение и размеры поперечных дефектов стержня, в диссертации рассмотрено три целевые функции, каждая из которых содержит необходимые для однозначного решения спектры:

$$F_m^{(\lambda, \mu, \nu)}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(\vec{p})}{\lambda_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\mu_i^* - \mu_i(\vec{p})}{\mu_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\nu_i^* - \nu_i(\vec{p})}{\nu_i^*} \right)^2 \right], \quad (38)$$

$$F_m^{(\lambda, \sigma, \nu)}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(\vec{p})}{\lambda_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_i^* - \sigma_i(\vec{p})}{\sigma_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\nu_i^* - \nu_i(\vec{p})}{\nu_i^*} \right)^2 \right], \quad (39)$$

$$F_m^{(\lambda, \mu, \sigma)}(\vec{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left[\left(\frac{\lambda_i^* - \lambda_i(\vec{p})}{\lambda_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\mu_i^* - \mu_i(\vec{p})}{\mu_i^*} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_i^* - \sigma_i(\vec{p})}{\sigma_i^*} \right)^2 \right] \quad (40)$$

Для минимизации функций (38)-(40) используется алгоритм Левенберга-Марквардта.

Производные $\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_j}, \frac{\partial \mu_i}{\partial p_j}, \frac{\partial \sigma_i}{\partial p_j}$ могут быть вычислены по формулам, аналогичным (16), (17).

В то же время производные $\frac{\partial \nu_i}{\partial p_j}$ не могут быть вычислены этим способом, так как

матрица жесткости K_ν не является симметричной. В этом случае для вычисления производных можно использовать следующее соотношение

$$\frac{\partial \nu_i(\vec{p})}{\partial p_j} = \vec{g}_i^T(\vec{p}) \frac{\partial K_\nu(\vec{p})}{\partial p_j} \vec{d}_i(\vec{p}), \quad (41)$$

где $\vec{g}_i(\vec{p})$ - собственный вектор, соответствующий следующей задаче на собственные значения

$$(K_\nu^T(\vec{p}) - \nu_i(\vec{p})M) \vec{g}_i(\vec{p}) = 0, \quad (42)$$

Локализация повреждений осуществляется таким же методом, как и в случае продольных колебаний.

Для численных примеров используется стержень с такими же параметрами как и для продольных колебаний, но теперь качестве дефектов рассматриваются поперечные односторонние трещины.

Пример 3. Рассмотрим стержень, ослабленный тремя трещинами, расположенными в точках $x_1 = 0.36$ м, $x_2 = 0.59$ м, $x_3 = 0.19$ м. Относительные длины трещин $s_1 = 0.14$, $s_2 = 0.08$, $s_3 = 0.21$. Для вычисления собственных частот стержень разбивался на 96 конечных элементов. Количество участков s на начальном этапе расчета составляло 12 и последовательным удвоением доводилось до 96-ти. Результаты восстановления жесткостей элементов по $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$ собственным числам λ_i , σ_i и μ_i представлены на (Рис. 3).

В случае $m = 10$ проявляется три крупных всплеска - в 19-м, 35-м элементе и в 57-м. Первый всплеск занимает участок 0.1875–0.198 м, второй - 0.354–0.365 м, третий - 0.583–0.594 м, т.е. все участки содержат искомые трещины. При $m = 15$ второй дефект лучше локализуется. При $m = 20$ результат фактически не изменяется. В целом, все трещины определяются достаточно четко и с ростом параметра m улучшается их локализация. Как и случае продольных колебаний меньшей трещине соответствует меньшее падение жесткости в содержащем трещину элементе.

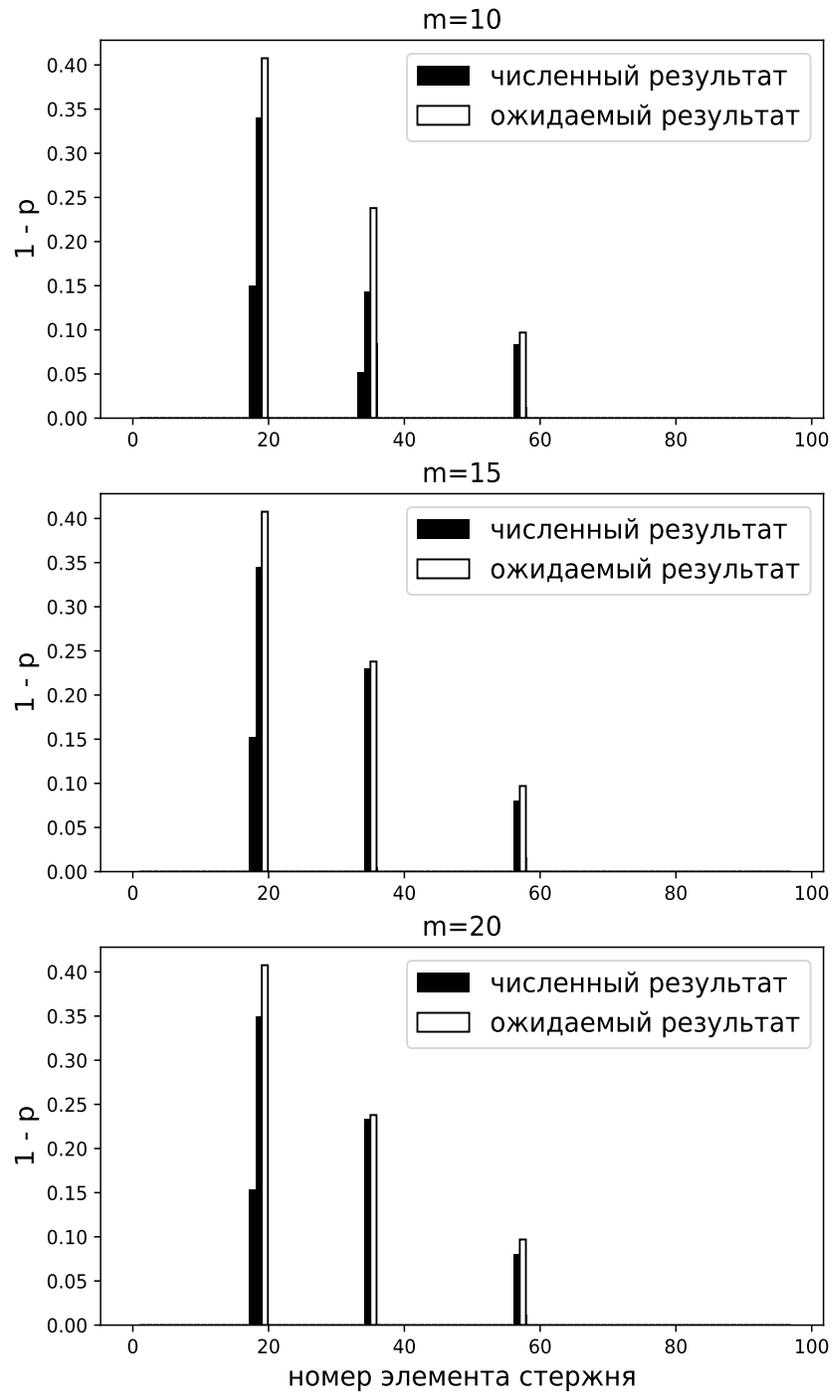
λ, σ, μ


Рис. 3: Идентификация трех трещин по спектрам λ , σ и μ

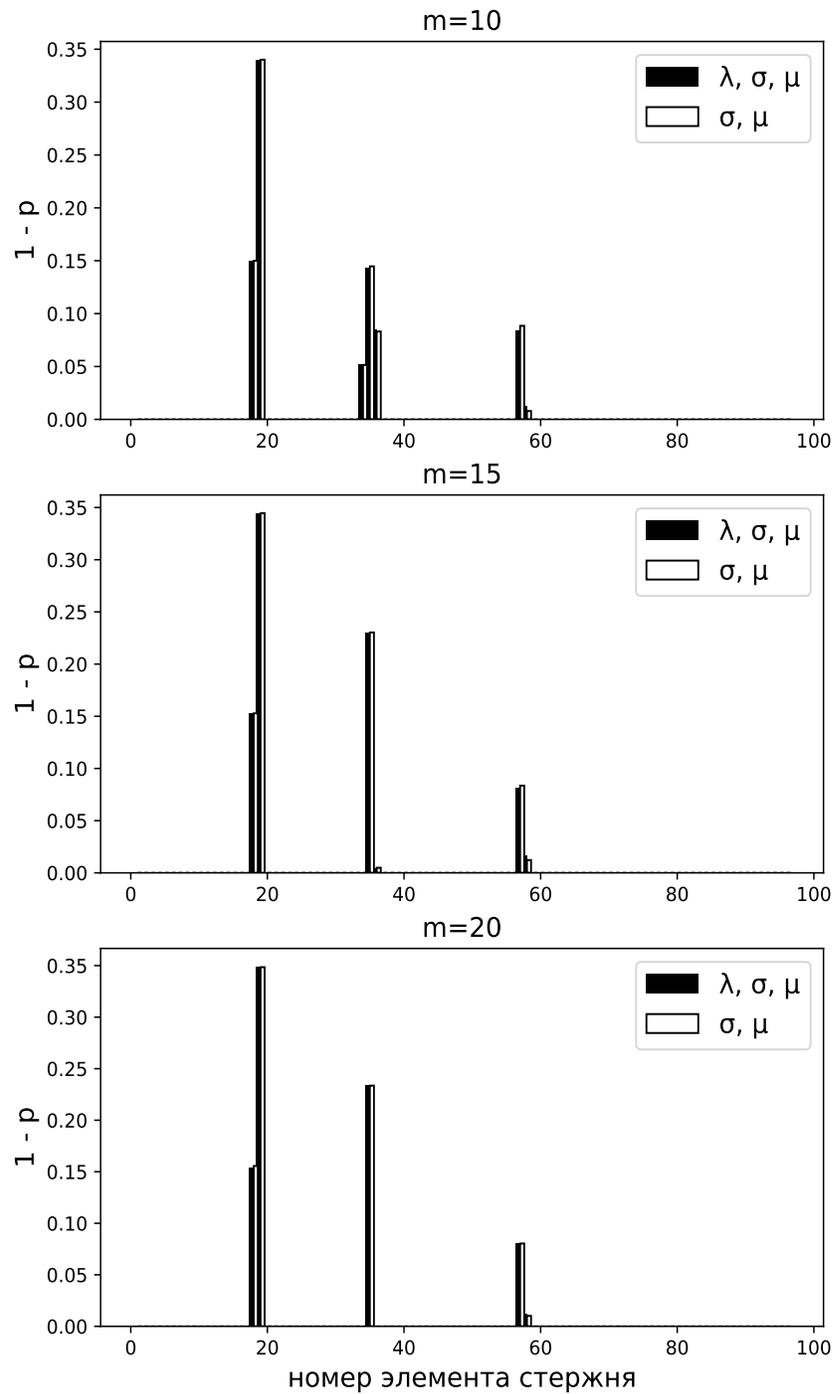


Рис. 4: Сравнение результатов идентификации трех трещин по спектрам λ, σ, μ и σ, μ

Результаты восстановления жесткостей элементов по спектрам λ_i , μ_i и ν_i и λ_i , σ_i и ν_i оказались аналогичны результатам, представленным на (Рис. 3).

Как уже было отмечено, исходная постановка задачи сводится к обратной спектральной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка на отрезке (26). В диссертации вводится предположение, что поскольку это уравнение содержит только одну неизвестную функцию, то для ее восстановления требуется два спектра. Это предположение проверяется численно с помощью предложенного алгоритма.

Пример 4. Рассмотрим задачу из примера 3 и сравним решение, полученное по спектрам λ_i , σ_i и μ_i , с решениями, построенными по трем возможными комбинациям из двух спектров: λ_i, μ_i , λ_i, σ_i и μ_i, σ_i . Так, например, решения, построенные по спектрам μ_i, σ_i при $m = 10$, $m = 15$ и $m = 20$, полностью повторяют соответствующие решения по трем спектрам (Рис. 4).

Аналогичные результаты были получены для двух оставшихся пар спектров: λ_i , σ_i повторяет решение, полученное для спектров λ_i , σ_i и ν_i , а пара λ_i , μ_i - решение для спектров λ_i , μ_i и ν_i . Таким образом, численный эксперимент показал, что если в качестве исходных данных нам известны спектры λ_i , σ_i и μ_i , то любая пара спектров из этой тройки может быть использована для идентификации дефектов.

Третья глава посвящена экспериментальной верификации метода идентификации дефектов в стержне по собственным частотам продольных колебаний. С этой целью была собрана экспериментальная установка, позволяющая определять частотный спектр поврежденного стержня. В качестве образца для исследования был выбран прямолинейный стержень круглого сечения из алюминиевого сплава D16 длиной 2006 мм и диаметром 24.8 мм.

Провести эксперименты по продольным колебаниям стержня со свободными концами проще, чем эксперименты со стержнем, один конец которого жестко закреплен. В связи с этим были проведены эксперименты со стержнем со свобод-

ными концами и парами дефектов, симметрично расположенными относительно середины стержня. Такое расположение дефектов позволило получить необходимые для работы предложенного алгоритма собственные частоты двух типов для стержня половинной длины. Частоты, соответствующие формам колебаний, симметричным относительно середины оси исходного стержня, равны собственным частотам половины стержня со свободными концами. Частоты, соответствующие формам колебаний, антисимметричным относительно середины оси исходного стержня, в свою очередь эквивалентны собственным частотам половины стержня, один из концов которого жестко закреплен, а другой свободен. В ходе экспериментов сначала измерялся спектр колебаний бездефектного стержня, затем выполнялись проточки и измерялся спектр колебаний стержня с дефектами.

Колебания создавались однократным ударом шарика из закаленной стали по одному из концов стержня и регистрировались с помощью направленного микрофона типа BSWA MA231, который имеет однородную частотную характеристику в диапазоне звуковых частот и достаточную осевую чувствительность для выделения дискретных составляющих сигнала в диапазоне до 50 кГц. Микрофон был установлен у противоположного конца стержня. Сигнал с микрофона передавался на спектроанализатор ZETLab A19-U2, а затем на компьютер, где он обрабатывался с помощью программного пакета ZETLab.

По полученным амплитудно-частотным зависимостям было определено до 28 собственных частот продольных колебаний выбранного стержня. Сначала определялись собственные частоты неповрежденного стержня. Полученные значения собственных частот $f_i = \omega_i / (2\pi)$ представлены в таблице 1. Затем по величине f_2 определялась скорость распространения продольной волны. Оказалось, что эта скорость равна $c = 5207,52$ м/с. Скорость нужна для вычисления собственных значений λ_i и μ_i из f_i .

Собственные частоты из таблицы 1 с четными индексами являются собствен-

Таблица 1: Собственные частоты неповрежденного стержня

$f_{1-7}(Hz)$	1297.86	2595.97	3893.23	5191.1	6488.47	7785.06	9080.93
$f_{8-14}(Hz)$	10377.11	11672.12	12965.28	14259.93	15551.00	16842.81	18133.02
$f_{15-20}(Hz)$	19422.66	20710.95	21997.13	23282.28	24566.94	25849.37	

ными частотами стержня половинной длины со свободными концами. Собственные частоты с нечетными индексами соответствуют собственным частотам стержня половинной длины с граничными условиями закрепленный-свободный. Изначально половинный стержень, состоящий из 80-ти конечных элементов, был разбит на 10 частей ($s = 10$). Далее по введенному алгоритму локализации количество частей было увеличено вдвое ($s = 20$). Эта процедура повторялась трижды. Результаты поиска дефектов при таком разбиении половины стержня показаны на (Рис. 5). Здесь по оси абсцисс указаны номера элементов. Элементы нумеруются слева направо. Точка 0 на оси x соответствует середине исходного стержня, а последний элемент - его правому концу. По оси ординат отложены значения $1 - p_k$, соответствующие податливостям элементов. Значения податливостей элементов показаны черными столбцами. Высота столбика соответствует значению податливости.

Как показано на (Рис. 5), на свободном конце стержня половинной длины обнаружен паразитный всплеск. Вероятно, это следствие того, что согласно данным, представленным в Таблице 1, отношение $f_n/(nf_1)$ с ростом n медленно уменьшается, хотя в соответствии с используемой моделью оно должно быть равно единице. В остальной части стержня, как и следовало ожидать, никаких повреждений алгоритм не обнаружил. Графически отличие экспериментально определенных собственных частот от теоретических показано на (Рис. 6а). По оси абсцисс отложены порядковые номера собственных частот колебаний стержня со свободными конца-

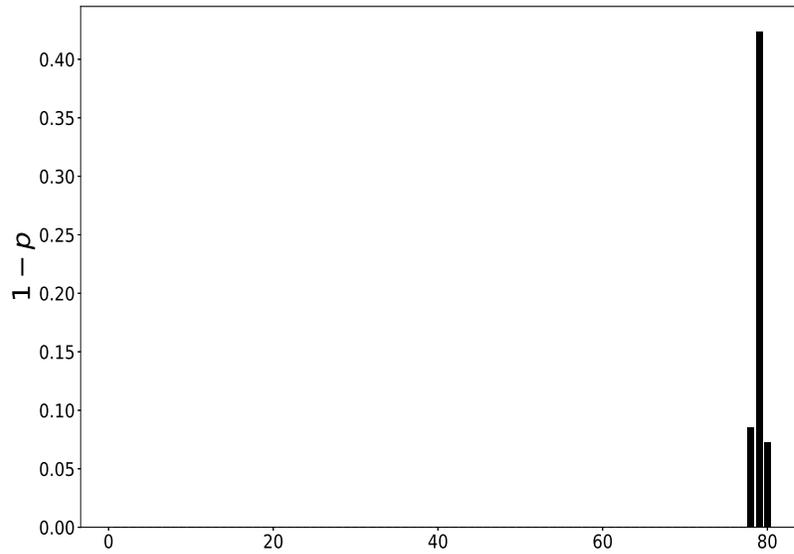


Рис. 5: Результат работы алгоритма для неповрежденного стержня

ми. По оси ординат отложены значения $\frac{\lambda_k^* - \lambda_k(\vec{p})}{\lambda_k^*}$, где величины $\lambda_k(\vec{p})$ и λ_k^* были определены в формуле (11). Для кривой, отмеченной знаком \times , значения $\lambda_k(\vec{p})$ соответствуют теоретическим значениям для неповрежденного стержня. Для кривой, отмеченной \bullet , значения $\lambda_k(\vec{p})$ получены после процедуры восстановления повреждений.

Затем на образец последовательно наносили пары кольцевых проточек шириной 0.6 мм и глубиной 1 мм. Первая пара проточек расположена симметрично относительно середины стержня на расстоянии 500 мм от концов исходного стержня. Такое расположение дефектов соответствует одной проточке в стержне половинной длины. Отличие экспериментально определенных собственных частот от теоретических для этого случая показано на (Рис. 6b). Вторая пара проточек была нанесена на расстоянии 100 мм от концов исходного стержня, соответствующие отклонения частот представлены на (Рис. 6с). После этого была нанесена третья пара проточек на расстоянии 900 мм от концов исходного стержня, получившие-

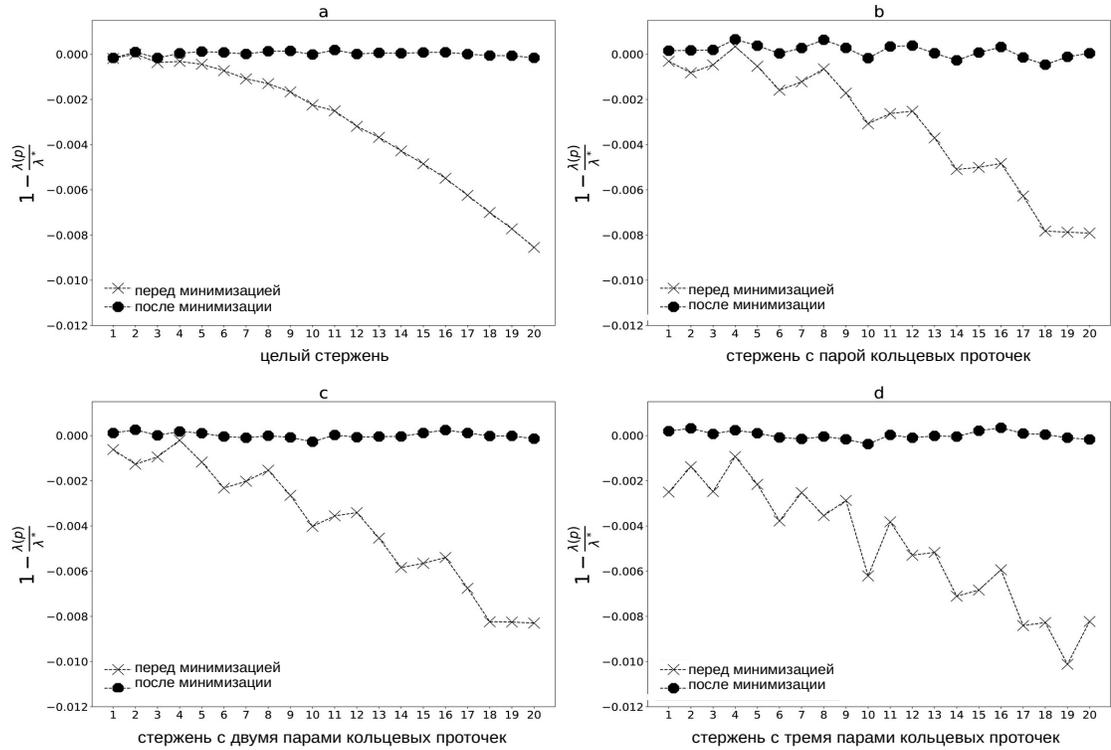


Рис. 6: Относительное отклонение экспериментальных собственных частот от вычисляемых в случае целого и поврежденного стержня.

ся относительные отклонения между измеренными и теоретическими частотами показаны на (Рис. 6d). Собственные частоты исходного стержня с тремя парами проточек представлены в таблице 2.

Обработка экспериментальных данных из таблицы 2 привела к результатам, представленным на (Рис. 7), на рисунке видно три больших всплеска: в 9-м участке, занимающем промежуток 100.3–112.8 мм, в 41-м участке, занимающем промежуток 501.5–514 мм и в 73-м участке, занимающем промежуток 902.7–915.2 мм. Каждый из этих участков действительно содержит нанесенные на правую половину образца проточки. При определении податливости поврежденных элементов возникает некоторая погрешность, так как податливость элементов несколько различается, несмотря на одинаковую глубину проточек.

На следующем этапе пара кольцевых проточек, расположенная на расстоя-

Таблица 2: Собственные частоты стержня с тремя парами симметричных кольцевых проточек

$f_{1-7}(Hz)$	1296.36	2594.18	3889.13	5189.52	6482.91	7773.22	9074.42
$f_{8-14}(Hz)$	10365.5	11665.1	12939.7	14250.6	15534.7	16830.3	18107.5
$f_{15-21}(Hz)$	19403.5	20706.3	21973.5	23267.6	24537.8	25853.5	27102.7
$f_{21-28}(Hz)$	28387.3	29656.0	30947.3	32209.3	33450.8	34746.6	35995.0

Таблица 3: Собственные частоты стержня с тремя парами симметричных кольцевых проточек различной глубины

$f_{1-7}(Hz)$	1295.693	2591.787	3887.05	5188.642	6479.374	7765.925	9069.323
$f_{8-14}(Hz)$	10363.74	11658.79	12927.63	14242.55	15532.19	16821.34	18090.56
$f_{15-21}(Hz)$	19392.25	20702.74	21962.14	23246.2	24523.47	25849.16	27088.93
$f_{21-28}(Hz)$	28361.3	29638.49	30942.16	32193.41	33420.63	34726.27	35988.73

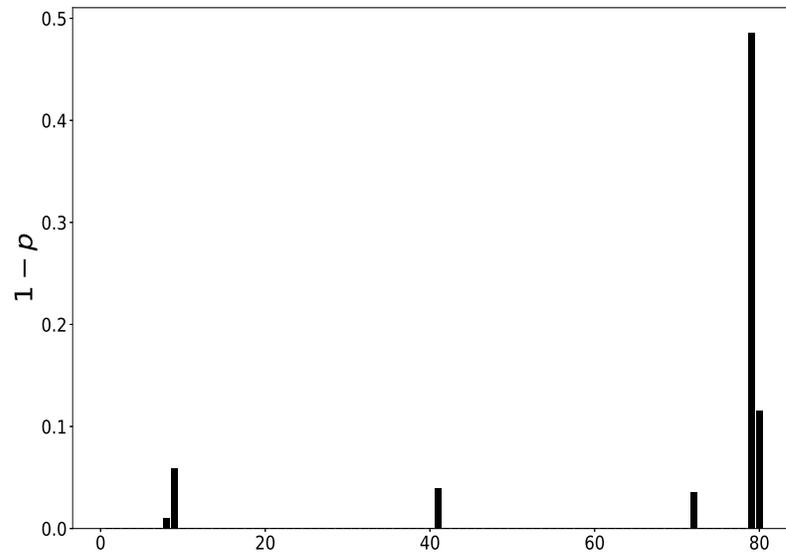


Рис. 7: Идентификация трех дефектов половинного стержня

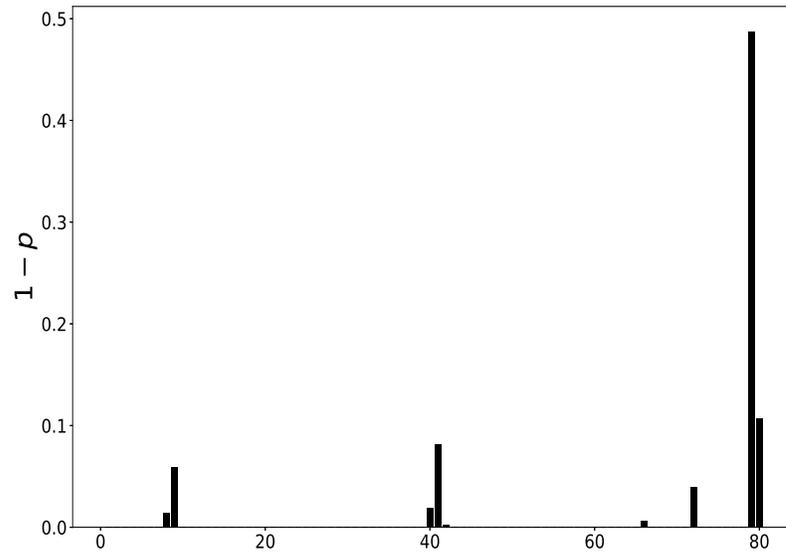


Рис. 8: Идентификация трех дефектов различной глубины половинного стержня
 нии 500 мм от концов исходного стержня была углублена до 1,5 мм. Соответствующие значения собственных частот представлены в таблице 3. Результаты обработки экспериментальных данных представлены на (Рис. 8). Здесь можно отметить, что по сравнению с (Рис. 7) соотношение высот столбцов, указывающих степень податливости элементов, изменилось. Высота столбика, соответствующая центральному дефекту, после его углубления стала максимальной. Таким образом, с помощью разработанного алгоритма можно не только точно определить положение дефектов, но и приближенно оценить их глубину.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

1. На основе конечно-элементной модели стержня переменной жесткости разработан устойчивый численный алгоритм, позволяющий однозначно идентифицировать поперечные хорошо локализованные дефекты в стержне по двум спектрам собственных частот продольных колебаний. Количество таких дефектов, а также их размеры при этом могут быть произвольными.

2. Разработанный численный алгоритм адаптирован для случая поперечных колебаний стержня. В результате, модифицированный алгоритм позволяет идентифицировать произвольное количество поперечных хорошо локализованных дефектов в стержне по трем спектрам собственных частот поперечных колебаний. Размеры выявляемых дефектов также могут быть произвольными.
3. Для случая поперечных колебаний сделано предположение о том, что для однозначного обнаружения дефектов достаточно двух спектров. Для проверки этой гипотезы разработана модификация исходного численного алгоритма. Полученные результаты дают основание полагать, что высказанное предположение справедливо.
4. Для случая продольных колебаний работа и устойчивость алгоритма протестированы на частотах, полученных в ходе эксперимента. Обработка экспериментальных данных показала, что модель, на которой основан алгоритм, достаточно хорошо описывает продольные колебания стержня с локальными повреждениями в широком диапазоне частот. С помощью разработанного алгоритма можно обнаружить и локализовать существующие дефекты даже относительно небольшого размера.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Shifrin E.I., Popov A.L., Lebedev I.M., Chelyubeev D.A., Kozintsev V.M.* Numerical and experimental verification of a method of identification of localized damages in a rod by natural frequencies of longitudinal vibration. // *Acta Mechanica*. — Germany, 2021. — т. 232, № 5. — с. 1797—1808.

2. *Shifrin E., Lebedev I.* Identification of multiple cracks in a beam by natural frequencies. // *European Journal of Mechanics, A/Solids*. — 2020. — т. 84. — с. 104076.
3. *Лебедев И. М., Шифрин Е. И.* Идентификация поперечных трещин в стержне по собственным частотам поперечных колебаний // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. — 2020. — № 4. — С. 50–70.
4. *Лебедев И. М., Шифрин Е. И.* Обнаружение множественных трещин в балке с помощью собственных частот поперечных колебаний // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия механика предельного состояния*. — 2020. — т. 44, № 2. — с. 19–26.
5. *Лебедев И. М., Шифрин Е. И.* Решение обратной спектральной задачи для стержня, ослабленного поперечными трещинами, с помощью оптимизационного алгоритма Левенберга-Марквардта // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. — 2019. — т. 4. — с. 8–26.
6. *Лебедев И. М., Шифрин Е. И.* Численный алгоритм идентификации множественных трещин в стержне по собственным частотам колебаний // *Сборник трудов Международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики"*. Воронеж, 17-19 декабря 2018 г. — 2019. — с. 1183–1190.
7. *Шифрин Е. И., Лебедев И. М.* Идентификация трещин с помощью собственных частот продольных и поперечных колебаний // *Сборник Трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. т. 3. — Уфа, 2019. — с. 223–225.