

На правах рукописи

**Ян Наинг У**

**КОЛЕБАНИЯ ТВЁРДЫХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ПОЛОСТИ,  
НАПОЛНЕННЫЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ  
ЖИДКОСТЬЮ**

Специальность 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Автореферат диссертации на соискание учёной степени  
Кандидата физико-математических наук

Москва – 2025 г.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана) на кафедре СМ-1 «Космические аппараты и ракеты-носители».

Научный руководитель: **Темнов Александр Николаевич**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры СМ-1 «Космические  
аппараты и ракеты-носители»,  
МГТУ им. Н. Э. Баумана

Официальные оппоненты: **Русских Сергей Владимирович**  
доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры 602 «Проектирование и  
прочность авиационно-ракетных и  
космических изделий»,  
Московский авиационный институт (МАИ)

**Иванов Данил Сергеевич**  
кандидат физико-математических наук,  
доцент, старший научный сотрудник  
ФГУ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего  
образования «Национальный  
исследовательский университет «МЭИ»,  
(ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»)

Защита состоится «\_\_\_» февраля 2025 г. в «\_\_\_» часов на заседании  
диссертационного совета 24.1.098.01 на базе Института проблем механики  
им. А.Ю. Ишлинского РАН по адресу: просп. Вернадского 101, корп. 1,  
Москва.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН  
<https://ipmnet.ru/diss/diss2/>

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2025 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета 24.1.098.01,  
к.ф.-м.н.

Е.Я. Сысоева

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Движение твёрдых тел, содержащих жидкости в полостях, представляет собой значительную проблему в области теоретической механики, учитывая её практическое значение для инженерных приложений. В частности, это касается вращательного движения космических аппаратов и теории движения роторов и гироскопов. Исследование колебаний твёрдых тел с жидкостью представляет собой классическую задачу механики, которая является предметом обширных исследований.

Задача о движении тела с полостью, полностью наполненной жидкостью, является классической проблемой механики. Впервые этой проблемой занимался Д.Г. Стокс (1842-1847 гг.), а затем Г.Ф. Гельмгольц (1860 г.) и Г. Лэмб (1873 г.). В 1885 году Н.Е. Жуковский провел первое систематическое изучение динамики твёрдого тела с полостями, заполненными однородной идеальной несжимаемой жидкостью. В 1950-х годах в связи с потребностями ракетно-космической техники возникла новая проблема: динамическое взаимодействие тела с жидкостью, полностью и частично заполняющей его полости. В разных странах мира появилось множество публикаций по этой теме. В СССР и России заметный вклад в решение этой проблемы внесли С.Л. Соболев, Н.Г. Четаев, Л.Н. Сретенский, Д.Е. Охоцимский, Г.С. Нариманов, А.Ю. Ишлинский, Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев, Ф.Л. Черноусько, М.Е. Темченко, С.В. Малашенко, Г.А. Микишев, Б.И. Рабинович, Л.В. Докучаев, К.С. Колесников, С.Г. Крейн, И.А. Луковский, П.В. Харламов и многие другие авторы. Важный вклад внесли и зарубежные ученые, такие как Н. Poincaré, S.S. Hough, L. Kelvin, A. E.H. Love, A.G. Webster, J.V. Serrin, H.P. Greenspan, J.W. Daily, L. Lichtenstein, A.V. Basset, A.G. Greenhill, J.W. Miles, K. Stewartson и др. Задачи, связанные с криогенной или стратифицированной жидкостью, рассматривались в работах С.А. Габова, С.В. Нестерова, Н.Д. Копачевского, В.С. Гонткевича, В.В. Булатова, А.Н. Темнова и Н.В. Дерендяева.

Среди многочисленных работ по изучению движения твёрдого тела с жидкостью наиболее представительными являются те, которые посвящены исследованию линейных колебаний твёрдого тела с полостями, полностью или частично заполненными однородной идеальной или вязкой жидкостью. Наиболее значимые результаты были получены для случая движения тела с полостями, полностью или частично заполненными несжимаемой однородной жидкостью.

Динамика твёрдых тел с полостями, содержащими жидкость, является актуальной областью исследования, особенно в контексте проектирования космических аппаратов. Поведение этих систем имеет решающее значение для понимания динамики космических аппаратов, имеющих жидкое топливо, а также для проектирования других сложных механических систем, таких как вращающиеся роторы, центрифуги и

гироскопы с жидким наполнением. Одновременно с изучением этих проблем возник интерес к устойчивости их движения. В ряде исследований было показано, что на устойчивость движения твёрдых тел с полостями существенно влияет наличие жидкости в полости и форма самой полости.

В ракетах на жидком топливе движение жидкости оказывает значительное влияние на устойчивость и управление полетом ракеты. Многие учёные изучали движение жидкости во вращающихся сосудах ракеты и показали, что неустойчивость может возникнуть во время полета из-за динамического взаимодействия движения жидкости и системы управления. Для исследования неустойчивости колебаний твёрдых тел необходимо точно определять динамические характеристики жидкости, такие как собственные частоты, формы мод, демпфирование. Точное определение динамических характеристик жидкости является не простой задачей из-за сложности гидродинамических уравнений движения.

В настоящее время, в связи с развитием ракетно-космической техники, значительно возросло использование стратифицированных жидкостей. Примечательной особенностью стратифицированных жидкостей является то, что их температура и плотность проявляют значительную неоднородность во всех режимах хранения и эксплуатации. В практических приложениях, связанных со стратифицированными жидкостями, наиболее значительное изменение плотности жидкости происходит в направлении действия поля массовых сил. В данной работе термины «стратифицированная», «неоднородная», и «криогенная», жидкость будут использоваться как синонимы.

**Актуальность** темы данной диссертации, связанной с разработкой методов расчёта динамики твёрдых тел, содержащих неоднородную жидкость, в частности стратифицированную жидкость. В данной диссертации исследуется устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей стратифицированную жидкость, а также рассматриваются свободные колебания вращающейся стратифицированной жидкости в цилиндрическом сосуде.

**Целью диссертационной работы** является исследование динамики вращающихся твёрдых тел, наполненных стратифицированной жидкостью, а также исследование влияния расслоения стратифицированной жидкости на динамику твёрдого тела с жидкостью.

Для достижения заданной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Исследование устойчивости вращения вокруг вертикальной оси динамической симметрии твёрдого тела, имеющего эллипсоидальную полость, полностью заполненную неоднородной идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.
2. Разработка алгоритмов расчёта собственных частот колебаний вращающейся стратифицированной жидкости, полностью или частично

заполняющей цилиндрическую полость в твёрдом теле при малой угловой скорости вращения.

3. Разработка алгоритмов расчёта собственных частот колебаний вращающейся стратифицированной жидкости в цилиндрической полости при большой скорости вращения.
4. Исследование устойчивости стационарного вращения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью или частично наполненной стратифицированной жидкостью.

**Методы исследования.** В работе использованы известные методы для решений задач динамики движения твёрдого тела с жидкостью. При решении задач, представленных в диссертации, применялись различные математические и вычислительные методы: метод Пуанкаре, метод разделения переменных, метод обобщенных потенциалов Ф.Л. Черноушко и метод Бубнова-Галёркина.

**Научную новизну** диссертационной работы имеют следующие результаты:

1. Исследованы уравнения сферического движения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной неоднородной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.
2. Получены достаточные условия устойчивости вращения вокруг вертикальной оси динамической симметрии твёрдого тела с эллипсоидной полостью, полностью заполненной неоднородной несжимаемой жидкостью.
3. Исследованы собственные колебания стратифицированной жидкости, частично или полностью заполняющей цилиндрическую полость в твёрдом теле при малой и большой угловых скоростях вращения.
4. Получены численные результаты собственных частот свободных колебаний вращающейся стратифицированной жидкости для внутренних и поверхностных волн.
5. Рассчитаны области неустойчивости стационарного вращения вокруг неподвижной точки твёрдого тела, имеющего цилиндрическую полость, полностью и частично наполненную стратифицированной жидкостью.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Исследование устойчивости вращения твёрдого тела, внутри которого находится эллипсоидальная полость, заполненная идеальной неоднородной несжимаемой жидкостью с линейным распределением плотности с использованием второго метода Ляпунова.
2. Результаты расчёта собственных частот свободных колебаний вращающейся стратифицированной жидкости с постоянной частотой плавучести, полностью или частично заполняющей цилиндрическую полость в поле сил тяжести.
3. Результаты расчёта собственных частот свободных колебаний быстровращающейся жидкости, частично заполняющей

цилиндрический сосуд и полностью заполняющей коаксиальный цилиндрический сосуд.

4. Построение областей неустойчивости стационарного вращения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с цилиндрической полостью, наполненной однородной и стратифицированной жидкостью, в безразмерных параметрах.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается:

- использованием в работе известных методов исследования устойчивости движения механических систем, таких как второй метод Ляпунова и метод Четаева для построения функции Ляпунова;
- реализацией разработанных алгоритмов в программе Maple с проверкой достоверности и сходимости на ряде тестовых задач;
- удовлетворительным согласованием результатов отдельных частей работы с известными аналитическими и численными решениями, полученными в предыдущих работах, связанных с колебаниями твёрдых тел, имеющих полости, наполненные полностью или частично однородной жидкостью.

**Практическая ценность.** Разработанная методика построения области неустойчивости стационарного вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, заполненной стратифицированной жидкостью может быть использована при анализе динамики и устойчивости движения ракет. Разработанное исследование устойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью может быть использовано при проектировании космических заправочных станций, космических танкеров и морских газовозов, а также при совершенствовании различных технологических процессов в машиностроении.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на всероссийских и международных профильных научных конференциях и семинарах:

1. VII-IX Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (г. Москва, декабрь 2021–2023);
2. 13-ая и 14-ая Международная конференция – школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (г. Москва, декабрь 2022–2023 гг.);
3. XLV Международная научная конференция «Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (г. Москва, апрель 2021 г.);
4. III Межвузовская конференция аспирантов, соискателей и молодых учёных «НАУКА, ТЕХНОЛОГИИ И БИЗНЕС», МГТУ им. Н. Э. Баумана, (г. Москва, апрель 2021 г.);

5. VI Международная научно-техническая конференция «Динамика и виброакустика машин», Самарский университет им. С.П. Королёва, (г. Самара, сентябрь 2022 г.);
6. Семинар «Прикладная механика сплошных сред» под руководством А.Н. Рожкова, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (г. Москва, 25 апреля 2024 г.);
7. Семинар «Динамические системы и механика» под руководством профессора Б.С. Бардина, Московский авиационный институт, (г. Москва, 30 мая 2024 г.);
8. Семинар «Теория управления и динамика систем» под руководством академика Ф.Л. Черноушко, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, (г. Москва, 26 сентября 2024 г.).

**Личный вклад соискателя.** Все работы, связанные с диссертацией [1-7], выполнены автором при редакторской поддержке научного руководителя Темнова А.Н. В этих работах автором совместно с научным руководителем были сформулированы постановка задачи и подробные уравнения задач. Все необходимые расчёты были проведены автором самостоятельно, а полученные результаты обсуждались совместно с научным руководителем Темновым А.Н. и научным консультантом Шкаповым П.М. В работах [1-3] автором совместно с Темновым А.Н. установлены интегральные соотношения, которые позволяют преобразовывать уравнения однородного вихревого движения тяжелой неоднородной жидкости в переменных Эйлера. Также были выведены достаточные условия устойчивости вращения твёрдого тела с жидкостью вокруг вертикальной оси динамической симметрии. В работах [4-5, 7] автором проведены расчёты собственных частот вращающейся стратифицированной жидкости в цилиндрическом сосуде. В работе [6] автором были построены области неустойчивости стационарного вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, наполненной стратифицированной жидкостью. Численные расчёты собственных частот колебаний жидкости и графики областей неустойчивости вращения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с жидкостью проводились лично автором с использованием программы Maple. Основные результаты работы были представлены на конференциях и семинарах лично соискателем.

**Публикации.** Основные результаты диссертации изложены в 15 научных работах. Из них 7 статей опубликованы в научных журналах, входящих в перечень ВАК РФ и удовлетворяют критериям, изложенным в Рекомендациях ВАК РФ от 26 октября 2022 г. – 5 публикаций входят в категорию К1 и 2 публикации в К2, и 8 работ – в сборниках материалов и тезисов научных конференций.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, 5 глав с краткими выводами по каждой главе, заключения, списка публикаций и литературы. Полный объём работы составляет 166 страниц

машинописного текста, включая 62 рисунков и 14 таблиц. Список литературы состоит из 139 наименований, включая работы диссертанта по теме исследования.

**Соответствие паспорту научной специальности.** По теме и содержанию материалов исследования диссертационная работа соответствует актуальному паспорту специальности 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин, в части п. 1 «Классическая механика и аналитическая динамика», п. 2 «Теория устойчивости движения. Прикладные проблемы устойчивости равновесия и движения механических систем» и п. 3 «Теория колебаний механических систем».

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** представлена актуальность темы диссертации, сформулирована цель, поставлены задачи работы, изложена научная новизна, практическая ценность и достоверность полученных результатов, описаны методы исследования, а также приведены данные о структуре и объеме диссертации, апробации работы и публикации.

В **первой главе** приведен литературный обзор современного состояния исследований динамики твёрдых тел с полостями, наполненными жидкостью, который условно разделен на три группы. К первой группе отнесены исследования динамики твёрдых тел с полостями, полностью и частично наполненными несжимаемой однородной идеальной или вязкой жидкостью. Вторая группа связана с исследованиями стратифицированных жидкостей, в частности, с анализом колебательного поведения стратифицированных и криогенных жидкостей в подвижных резервуарах. Третья группа касается исследований динамики стратифицированных и криогенных жидкостей в замкнутых и открытых областях.

Во **второй главе** исследована устойчивость сферического движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Получены уравнения движения и выведены достаточные условия устойчивости вращения вокруг вертикальной оси динамической симметрии твёрдого тела с эллипсоидной полостью, заполненной неоднородной жидкостью.

В постановке задачи твёрдое тело с эллипсоидной полостью вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$  вокруг неподвижной точки  $O$ , а неоднородная идеальная жидкость, полностью заполняющая эту полость, совершает в ней однородное вихревое движение с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$  (рис. 1).

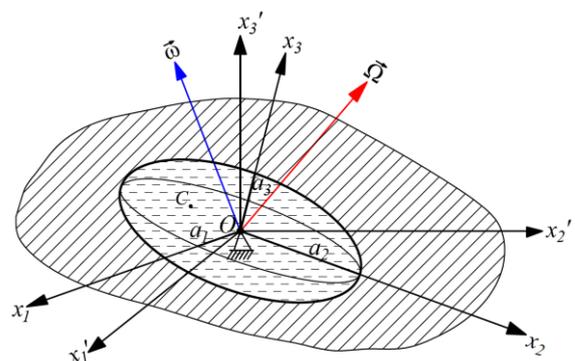


Рис. 1.

В рассматриваемом случае центр масс твёрдого тела совпадает с неподвижной точкой, которая также служит геометрическим центром эллипсоидальной полости. Плотность неоднородной жидкости изменяется по закону,  $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3$ .

По методу Пуанкаре получено представление абсолютного движения жидкости и выражение кинетической энергии  $T$  в виде:

$$v_1 = \frac{a_1}{a_3} \Omega_2 x_3 - \frac{a_1}{a_2} \Omega_3 x_2 + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2, \quad (1 \ 2 \ 3), \quad (1)$$

$$2T = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 + A_1\Omega_1^2 + B_1\Omega_2^2 + C_1\Omega_3^2 + 2F\omega_1\Omega_1 + 2G\omega_2\Omega_2 + 2H\omega_3\Omega_3, \quad (2)$$

где  $v_i (i=1,2,3)$  – абсолютная скорость движения жидкости в переменных Эйлера.  $A = A_0 + A_1$ ,  $(A \ B \ C)$  – сумма моментов инерции твёрдого тела и затвердевшей жидкости. Здесь  $m$  – масса неоднородной жидкости,  $A_1 = \frac{m}{5}(a_2^2 + a_3^2)$ ,  $(A_1 \ B_1 \ C_1)$ ;  $F = \frac{2}{5}ma_2a_3$ ,  $(F \ G \ H)$ .

Во втором пункте приведены уравнения движения вокруг неподвижной точки твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение.

$$\frac{d}{dt}(A\omega_1 + F\Omega_1) + \omega_2\omega_3(C - B) + H\omega_2\Omega_3 - G\omega_3\Omega_2 = mg(\gamma_2 c_3 - \gamma_3 c_2), \quad (3)$$

$(A \ B \ C; F \ G \ H; 1 \ 2 \ 3),$

$$\frac{d}{dt}(A_1\Omega_1 + F\omega_1) + \Omega_2\Omega_3(B_1 - C_1) + G\omega_2\Omega_3 - H\omega_3\Omega_2 = mg(\bar{\gamma}_2 \bar{c}_3 - \bar{\gamma}_3 \bar{c}_2), \quad (4)$$

$(A_1 \ B_1 \ C_1; F \ G \ H; 1 \ 2 \ 3),$

где  $\gamma_i$  – направляющие косинусы, определяющие ориентацию твёрдого тела в пространстве относительно направления однородного поля массовых сил, обладающих интенсивностью  $\vec{g}$ ;  $c_i$  – координаты центра масс неоднородной жидкости, определяемые по формуле  $c_i = \rho_i a_i^2 / 5\rho_0, (i=1,2,3)$ .

В третьем пункте исследована устойчивость движения твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной неоднородной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Исследована устойчивость движения по отношению к изменению переменных:  $\omega_i, \Omega_i^*, \gamma_i, c_i (i=1,2,3)$ . Предположим, что в возмущенном движении  $\omega_3 = \omega_0 + y_1, \quad \Omega_3^* = \Omega_0 + y_2, \quad \gamma_3 = 1 + y_3, \quad c_3 = z_0 + y_4$ . Здесь  $\Omega_1^* = \omega_1 + \frac{a_2^2 + a_3^2}{2a_2a_3}\Omega_1, (1 \ 2 \ 3)$  – переход от угловых скоростей твёрдого тела и жидкости к угловым скоростям эллиптического вращения, введенным Жуковским. Для решения вопроса об устойчивости вращения системы воспользуемся вторым методом Ляпунова. Приведенные ниже неравенства (5) и (6) являются достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения относительно переменных  $\omega_i, \Omega_i^*, c_i, \gamma_i (i=1,2,3)$ .

$$\Delta_3^{*A} = (C - A^*)\omega_0^2 + C_2\Omega_0\omega_0 - mgz_0 > 0, \quad (5)$$

$$\Delta_3^{*A} \frac{a_3^2}{a_1^2} [(\Omega_0 - \omega_0)\Omega_0 A_2 C_2 - (\Omega_0 - \omega_0)^2 C_2^2 \frac{a_3^2}{a_1^2} - A_2 mgz_0] - A_2 [(\Omega_0 - \omega_0)C_2\omega_0 \frac{a_3^2}{a_1^2} - mgz_0]^2 > 0. \quad (6)$$

Здесь  $A = A_0 + A_3$ , ( $A \ B \ C$ ) – сумма моментов инерции твёрдого тела и эквивалентного тела,  $A_2 = A_1 - A_3$ , ( $A_2 \ B_2 \ C_2$ ) – момент инерции, равный разности между моментом инерции затвердевшей жидкости ( $A_1$ ) и эквивалентного тела ( $A_3$ ).

$$A_3 = \frac{m}{5} \frac{(a_2^2 - a_3^2)^2}{a_2^2 + a_3^2}, \quad A_1 = \frac{m}{5} (a_2^2 + a_3^2), \quad A_2 = \frac{4}{5} m \frac{a_2^2 a_3^2}{a_2^2 + a_3^2}, \quad A^* = A_0 + A_3 + A_2.$$

В частном случае ( $\Omega_0 = \omega_0$ ),  $z_0 = 0$  неравенства (5) и (6) принимают вид условий:  $C^* - A^* > 0$ ,  $A^* - C^* > 0$ , которые совпадают с достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения по инерции твёрдого тела с однородной жидкостью. При  $z_0 < 0$ , невозмущённое движение системы будет устойчиво, если выполняются неравенства:

$$(C^* - A^*)\omega_0^2 + mgz_0 > 0, \quad (7)$$

$$(A^* - C^*)\omega_0^2 - mgz_0 \frac{a_3^2 - a_1^2}{a_3^2} > 0. \quad (8)$$

Если оболочка очень тонкая и считаем, что её моменты инерции можно пренебречь ( $A_0 = B_0 = C_0 \approx 0$ ). Тогда для тонкой оболочки неравенства (7) и (8) при  $z_0 \neq 0$  превращаются в следующие условия:

$$(a_1^2 - a_3^2)\omega_0^2 - 5gz_0 > 0, \quad (9)$$

$$a_3^2\omega_0^2 + 5gz_0 > 0. \quad (10)$$

При  $z_0 > 0$  неравенства (9) и (10) выполняются, только когда  $a_1 > a_3$ , что указывает на выполнение условий для сплюснутого эллипсоида вращения. В случае  $z_0 < 0$  достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения являются следующие:

$$(a_1^2 - a_3^2)\omega_0^2 + 5gz_0 > 0, \quad (11)$$

$$a_3^2\omega_0^2 - 5gz_0 > 0, \quad (12)$$

которые, выполняются в случаях  $a_1 > a_3$  и  $a_3 > a_1$ .

В третьей главе рассмотрены свободные колебания вращающейся стратифицированной жидкости, полностью или частично заполняющей цилиндрический сосуд при малой угловой скорости вращения, т. е. выполняется условие  $(\omega_0^2 r_0 / g \ll 1)$ , см. рис. 2.

Представлены численные расчёты собственных частот свободных колебаний вращающейся стратифицированной жидкости для внутренних волн при полном заполнении полости и для внутренних и поверхностных волн при частичном заполнении полости.

Уравнения возмущенного движения вращающейся неоднородной жидкости и граничные условия в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\vec{\omega}_0 \times \vec{u} - \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p \quad \text{в } \tau, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad (14)$$

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau; \quad \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{на } S, \quad (15)$$

здесь  $\Pi_0 = -U_0 = -gx_3$ ,  $\Pi_0$  – потенциальная энергия,  $\rho_0$  – плотность жидкости в невозмущенном движении, закон изменения плотности жидкости,  $\rho_0(x_3) = \rho_0^* (1 - \beta x_3)$ ,  $\rho_0^*$  – постоянное среднее значение плотности жидкости;  $\vec{u}$ ,  $p$ ,  $\rho$  – скорость, давление и плотность жидкости в возмущенном движении считаем величинами первого порядка малости. Пусть все переменные по времени изменяются пропорционально  $e^{\lambda t}$ :  $\vec{u} = \vec{v} e^{\lambda t}$ ,  $p = \varphi e^{\lambda t}$ ,  $\rho = \psi e^{\lambda t}$ , где  $\lambda = i\omega$  – комплексное число,  $\omega$  – частота колебаний жидкости.

Во втором пункте третьей главы рассмотрены свободные колебания стратифицированной жидкости, полностью заполняющей цилиндрическую полость при малой скорости вращения. В цилиндрических координатах  $(r, \eta, x_3)$ , при положении начало координат на поверхности жидкости  $\Gamma$ , краевая задача, отвечающая первому уравнению (15), запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + (1 - \sigma^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0, \quad (16)$$

а граничное условие, отвечающее второму уравнению (15) при полном заполнении полости будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{i\chi}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } r = r_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{при } x_3 = 0, x_3 = -H, \quad (17)$$

где  $\chi = 2\omega_0 / \omega$ ,  $\sigma^2 = \frac{N^2 - 4\omega_0^2}{N^2 - \omega^2}$ ,  $Fr^2 = \frac{N^2}{4\omega_0^2}$ ,  $N^2 = -\frac{g}{\rho_0^*} \frac{d\rho_0}{dx_3} = g\beta$  – квадрат частоты плавучести или квадрат частоты Брента-Вейсяля.

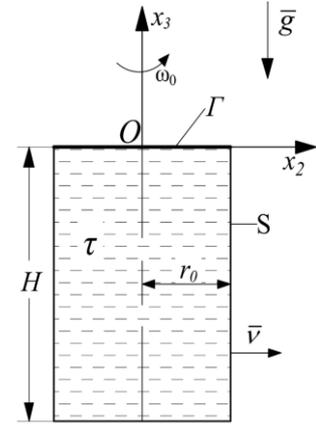


Рис. 2.

Частоты колебаний жидкости выражаются через собственные числа  $q_n (n=1,2,3,\dots)$  по формуле  $q_n = \omega_n / 2\omega_0$ . Решения уравнения (16) должны удовлетворять граничным условиям на стенке и дне сосуда, а также на верхней поверхности жидкости (17). Каждое главное колебание характеризуется собственной частотой  $\omega_n$  и собственной функцией  $\varphi_n$  колебаний жидкости. При полном заполнении полости возникают внутренние волны и выражение функции  $\varphi_n$  краевой задачи (16) и (17) имеет вид:

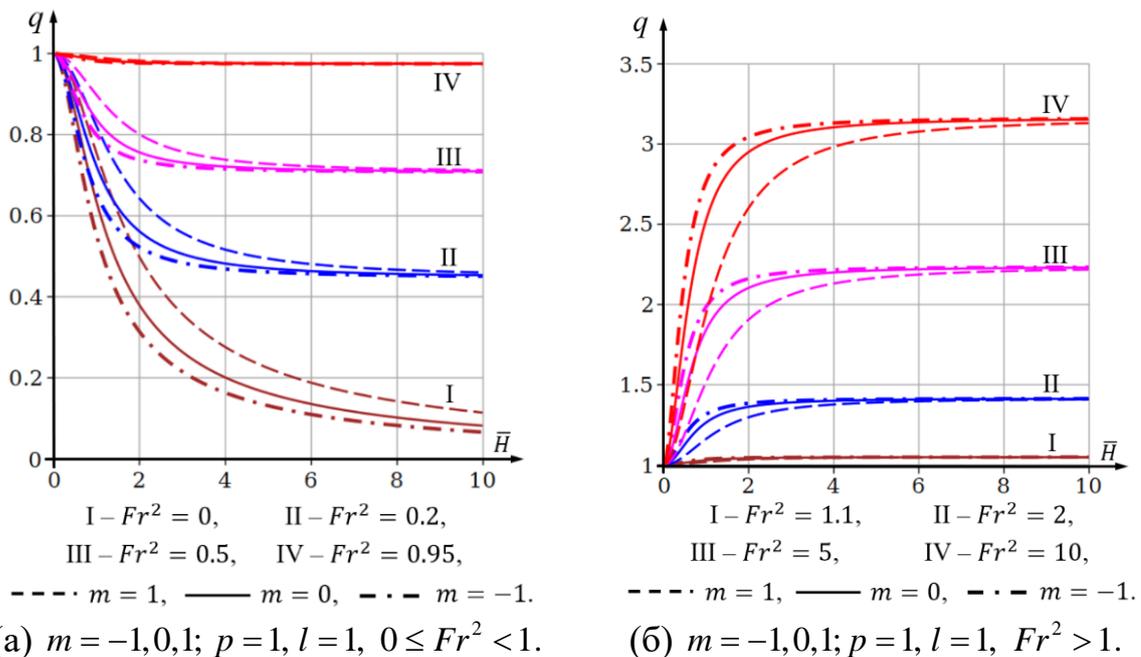
$$\varphi_{lmp} = \frac{J_m(\xi_{mp}\bar{r})}{J_m(\xi_{mp})} e^{im\eta} \cos k_l x_3, \quad (18)$$

Безразмерные собственные частоты (собственные числа)  $q_{lmp} = \omega_{lmp} / 2\omega_0$  внутренних волн находятся по формуле

$$q_{lmp} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 + \xi_{lmp}^2 Fr^2}{\bar{k}_l^2 + \xi_{lmp}^2}}. \quad (19)$$

В формулах (18) и (19)  $J_m(\xi\bar{r})$  – функция Бесселя 1-го рода  $m$ -го порядка,  $\bar{r} = r/r_0$ ,  $k_l = l\pi/H$ ,  $\xi = kr_0$ ,  $k = k_l\sqrt{\sigma^2 - 1}$ ,  $\bar{k}_l = k_l r_0$ ,  $l = 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$ .

Из полученных результатов следует, что вращающаяся стратифицированная жидкость имеет два типа внутренних бегущих волн ( $m > 0$  – прямые и  $m < 0$  – обратные волны) и стоячие волны ( $m = 0$ ). На рис. 3 представлена зависимость собственных чисел  $q_{lmp}$  от безразмерного параметра  $\bar{H} = H/r_0$  (относительной глубины жидкости) при различных числах  $Fr^2$ , ( $Fr^2 = 0 \div 10$ ), в случае полного заполнения полости.



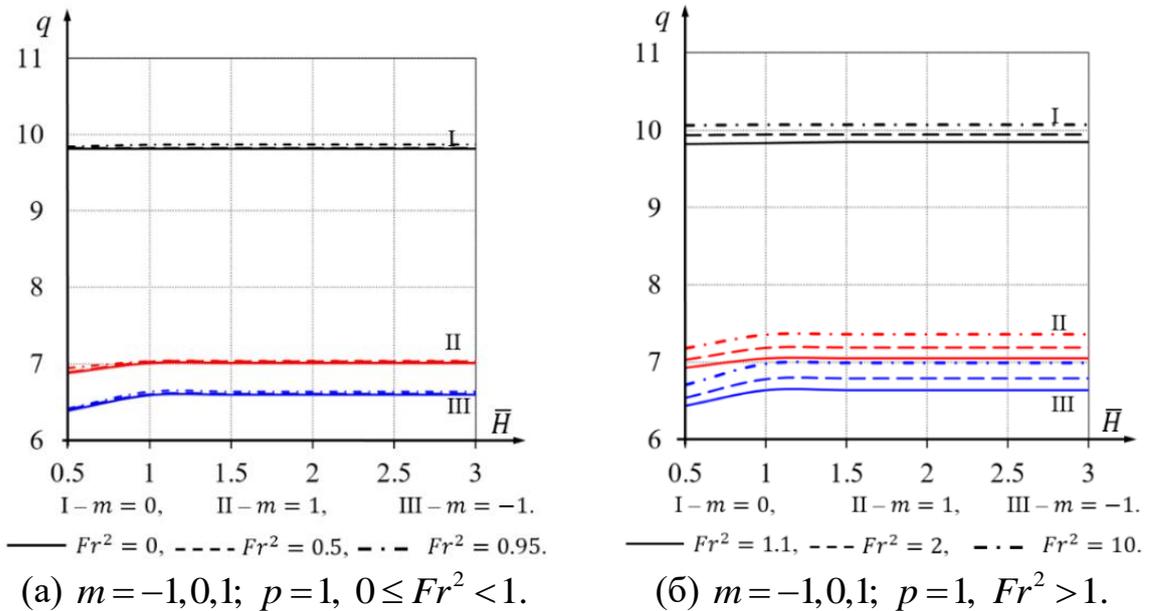
**Рис. 3.** Зависимость собственных частот  $q_{lmp} = \omega_{lmp} / \omega_0$  внутренних волн от параметра  $\bar{H}$ .

В третьем пункте третьей главы рассмотрены свободные колебания стратифицированной жидкости, частично заполняющей цилиндрическую полость при малой скорости вращения. Полученные значения собственных чисел  $q_{lmp}$  для внутренних волн при частичном заполнении полости очень близки к значениям, полученным при полном заполнении полости жидкостью.

Для безразмерной собственной частоты  $q_{mp} = \omega_{mp}/2\omega_0$  поверхностных волн при фиксированных значениях  $m$ ,  $p$  и  $Fr^2$  имеют формулу

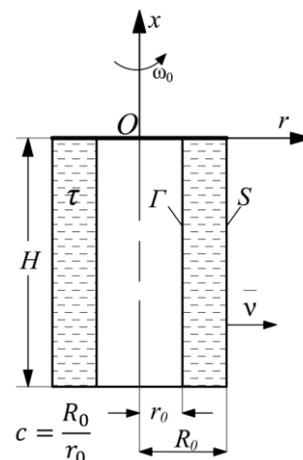
$$q_{mp} = \sqrt{\frac{\bar{\mu}^2 - \xi_{mp}^2 Fr^2}{\bar{\mu}^2 - \xi_{mp}^2}}, \quad z = \bar{\mu} \bar{H}, \quad \bar{\mu} = \mu r_0. \quad (20)$$

На рис. 4 приведена зависимость собственных частот  $q_{mp}$  поверхностных волн от параметра  $\bar{H} = H/r_0$  при различных числах  $Fr^2$ , ( $Fr^2 = 0 \div 10$ ), в случае частичного заполнения полости.



**Рис. 4.** Зависимость собственных частот  $q_{mp} = \omega_{mp}/\omega_0$  поверхностных волн от параметра  $\bar{H}$ .

В четвертой главе исследованы свободные колебания стратифицированной жидкости в цилиндрическом сосуде при большой скорости вращения. Получены собственные функции жидкости и собственные частоты свободных колебаний быстровращающейся жидкости, частично заполняющей цилиндрическую полость и полностью заполняющей коаксиальную цилиндрическую полость твёрдого тела.



**Рис. 5.**

В первом пункте данной главы представлена постановка задачи. При достаточно больших значениях угловой скорости  $\omega_0$  для стационарного вращения жидкости, центробежные силы инерции значительно больше гравитационных сил, т.е.  $(\omega_0^2 r_0 / g \gg 1)$ . Поэтому потенциальная энергия на единицу массы жидкости равна  $P_0 = \omega_0^2 r^2 / 2$ . В результате свободная поверхность  $\Gamma$  вращающейся жидкости в закрытом сосуде имеет форму цилиндра с внутренней радиусом  $r_0$  (рис. 5).

Во втором пункте четвертой главы рассмотрены свободные колебания вращающейся стратифицированной жидкости в цилиндрическом сосуде со свободной поверхностью. Уравнение для определения собственных колебаний жидкости в возмущенном движении, запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1 - Fr^2 \chi^2) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + [1 - \chi^2 (1 + Fr^2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (21)$$

а граничные условия для быстровращающегося цилиндра со стратифицированной жидкостью будут

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 4 \frac{1 - \chi^2 (1 + Fr^2)}{\chi^2} \varphi - i \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = r_0, \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial r} - i \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \quad \text{при } r = R_0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = 0, \quad x = -H. \end{aligned} \quad (22)$$

При наличии свободной поверхности имеются внутренние и поверхностные волны. Используя метод разделения переменных, решение краевой задачи (21), (22) для внутренних волн запишется в виде,

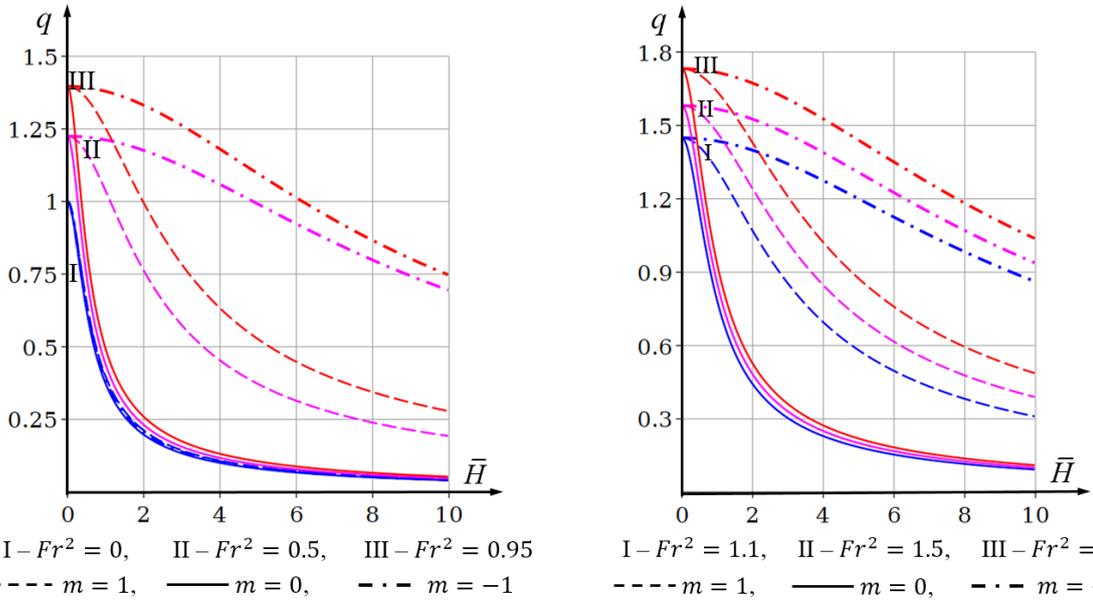
$$\varphi_{lmp} = [AJ_m(\xi_{lmp} \bar{r}) + BY_m(\xi_{lmp} \bar{r})] e^{\frac{im\eta}{\sqrt{1 - Fr^2 \chi^2}}} \cos k_l x, \quad (23)$$

где  $J_m(\xi_{lmp} \bar{r})$  и  $Y_m(\xi_{lmp} \bar{r})$  – функции Бесселя 1-го и 2-го родов  $m$ -го порядка,  $\xi = kR_0$ ,  $\bar{r} = r/R_0$ ,  $k = k_l \sqrt{\chi^2 (1 + Fr^2) - 1}$ ,  $k_l = l\pi/H$ ,  $\chi = 2\omega_0/\omega_{lmp}$ ,  $\bar{k}_l = k_l R_0$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots$ .

Безразмерные собственные частоты  $q_{lmp} = \omega_{lmp} / 2\omega_0$  внутренних волн при фиксированных значениях  $l, m, p$  и  $Fr^2$  определяются формулой:

$$q_{lmp} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 (1 + Fr^2)}{\bar{k}_l^2 + \xi_{lmp}^2}}. \quad (24)$$

На рис. 6 приведена зависимость собственных частот  $q_{lmp}$  внутренних волн от безразмерного параметра  $\bar{H} = H/R_0$  (относительной глубины жидкости) при большой скорости вращения.



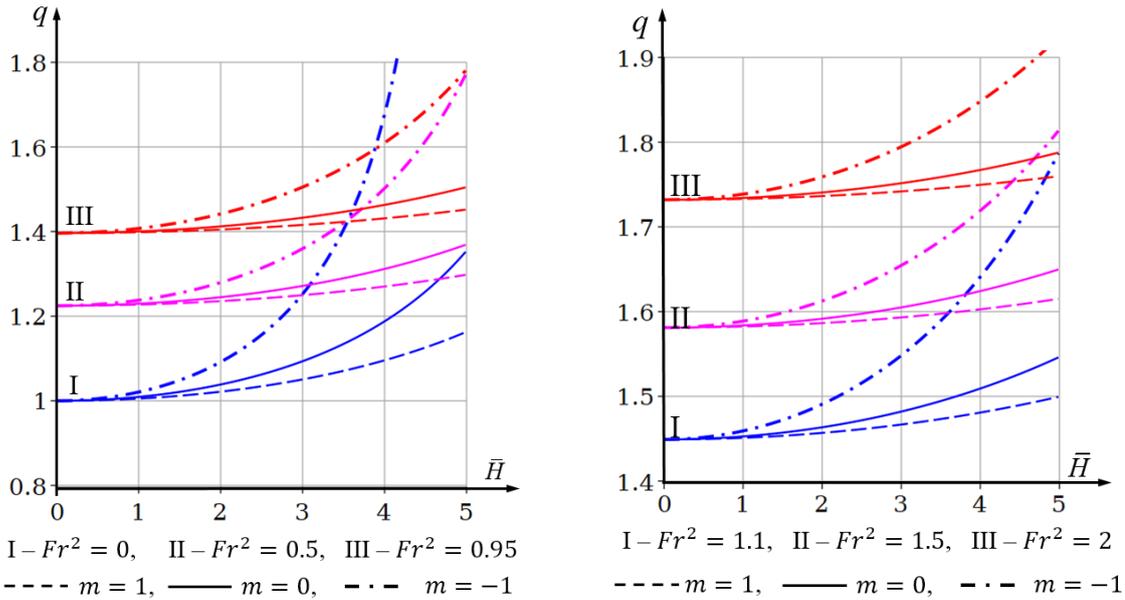
(а)  $m = -1, 0, 1$ ;  $p = 1, l = 1, c = 0.5, 0 \leq Fr^2 < 1$ . (б)  $m = -1, 0, 1$ ;  $p = 1, l = 1, c = 0.5, Fr^2 > 1$ .

**Рис. 6.** Зависимость собственных частот  $q_{lmp} = \omega_{lmp} / \omega_0$  внутренних волн от параметров  $\bar{H}$ .

Собственные функции жидкости для поверхностных волн можно представить в виде,

$$\varphi_{lm} = [CI_m(\mu_{lm}\bar{r}) + DK_m(\mu_{lm}\bar{r})] e^{\frac{im\eta}{\sqrt{1-Fr^2}\chi^2}} \cos \kappa_l x, \quad (25)$$

где  $I_m(\mu_{lm}\bar{r})$  и  $K_m(\mu_{lm}\bar{r})$  – функции Бесселя мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя)  $m$ -го порядка,  $\bar{r} = r/R_0$ ,  $\kappa_l = l\pi/H$ ,  $\mu = \kappa R_0$ ,  $\kappa = \kappa_l \sqrt{1 - \chi^2(1 + Fr^2)}$ ,  $\chi = 2\omega_0/\omega_{lm}$ ,  $\bar{\kappa}_l = \kappa_l R_0$ ,  $l = 1, 2, 3, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots$ ,  $c = r_0/R_0$ .



(а)  $m = -1, 0, 1$ ;  $l = 1, c = 0.5, 0 \leq Fr^2 < 1$ . (б)  $m = -1, 0, 1$ ;  $l = 1, c = 0.5, Fr^2 > 1$ .

**Рис. 7.** Зависимость собственных частот  $q_{lm} = \omega_{lm} / \omega_0$  поверхностных волн от параметров  $\bar{H}$ .

Безразмерные собственные частоты  $q_{lm} = \omega_{lm}/2\omega_0$  поверхностных волн при фиксированных значениях  $l, m$  и  $Fr^2$  определяются формулой:

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_l^2(1 + Fr^2)}{\bar{\kappa}_l^2 - \mu_m^2}}. \quad (26)$$

На рис. 7 приведена зависимость собственных частот  $q_{lm}$  поверхностных волн от безразмерного параметра  $\bar{H} = H/r_0$  при большой скорости вращения.

В третьем пункте четвертой главы, для сравнения результатов внутренних волн, рассмотрено колебательное движение жидкости в коаксиальном цилиндрическом сосуде с внутренним радиусом  $r_0$  и внешним радиусом  $R_0$ . При большой скорости вращения полученные собственные частоты  $q_{lmp}$  всех типов внутренних волн ( $m = -1, 0, 1$ ) в цилиндрическом сосуде при наличии свободной поверхности и в коаксиальном цилиндрическом сосуде при отсутствии при свободной поверхности мало отличаются.

**В пятой главе** исследована устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью или частично заполненной стратифицированной жидкостью. Приведены области неустойчивости стационарного вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью или частично заполненной (а) однородной жидкостью и (б) стратифицированной жидкостью, в безразмерных параметрах.

В постановке задачи, твёрдое тело с цилиндрической полостью, полностью заполненное стратифицированной жидкостью совершает стационарное вращение с угловой скоростью  $\vec{\omega}_0$  вокруг вертикальной оси, проходящей через неподвижную точку  $O_1$ , являющейся центром масс всей механической системы. Геометрический центр полости  $O_1^*$  находится на оси  $O_1x_3$  на расстоянии  $d$  от неподвижной точки  $O_1$  (рис. 8). Предполагаем, что в невозмущенном движении свободная поверхность жидкости расположена перпендикулярно вектору  $\vec{g}$  и удовлетворяется условие  $(\omega_0^2 \ell / g \ll 1)$ .

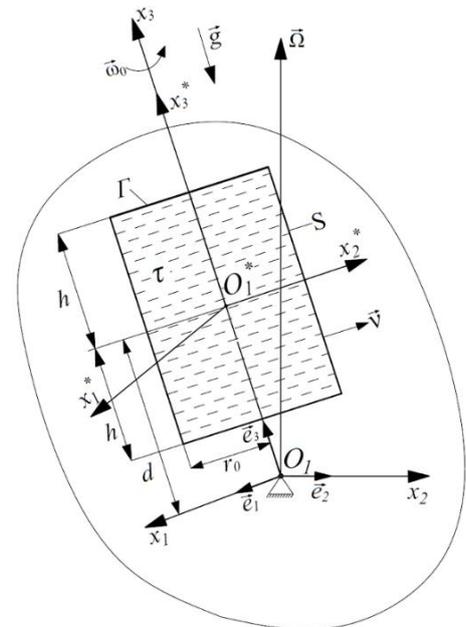


Рис. 8.

При возмущенном движении, угловая скорость тела  $\vec{\omega}_T = \vec{\omega}_0 + \vec{\Omega} = \omega_0 \vec{e}_3 + \vec{\Omega}$ , где  $\vec{\Omega}$  – отклонение угловой скорости твёрдого тела

от значений  $\bar{\omega}_0$  невозмущённого движения, являющаяся величиной первого порядка малости по сравнению с  $\bar{\omega}_0$ . Введем вектор малых углов поворота  $\vec{\theta}(t)$ ,  $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\theta}} = d\vec{\theta}/dt$ . Плотность жидкости в невозмущенном движении изменяется по закону  $\rho_0 = \rho_0^*(1 - \beta x_3^*) = \rho_0^*[1 - \beta(x_3 - d)]$ .

Уравнения возмущённого движения стратифицированной жидкости в системе  $O_1x_1x_2x_3$  с точностью до второго порядка малости имеют вид

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + 2\bar{\omega}_0 \times \vec{u} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r} - \frac{\rho}{\rho_0^*} \nabla \Pi_0 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p - g(\vec{e}_3 \times \vec{\theta}) \quad \text{в } \tau, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad (28)$$

$$\text{с граничным условием,} \quad \text{div } \vec{u} = 0 \quad \text{в } \tau, \quad \vec{u} \cdot \vec{\nu} = 0 \quad \text{на } S. \quad (29)$$

Краевая задача, соответствующая первому уравнению (29) в цилиндрических координатах  $(r, \eta, x)$ , будет иметь вид (16). Важно отметить, что не все тона колебаний равноценны по своему значению. При исследовании совместных колебаний жидкости и корпуса летательного аппарата важны лишь асимметричные колебания, соответствующие значению  $m=1$ , так как только они создают поперечные силы и моменты, действующие на корпус. Кроме того, первостепенное значение имеет основной тон колебаний. В том числе, для случая  $m=1$  функции  $\varphi_{lmp}$  будут представлены в виде произведения,  $\varphi_p = \varphi_n = g_n(x, r)e^{in}$ . Тогда решение краевой задачи (16) для случая  $m=1$  будет получено в виде,

$$g_n = g_{lp}(x, r) = \frac{J_1(\xi_{lp} \bar{r})}{J_1(\xi_{lp})} \sin k_l(x - d), \quad (30)$$

где  $\bar{r} = r/r_0$ ,  $k_l = \frac{(2l+1)\pi}{2h}$ ,  $\xi_{lp} = \bar{k}_l \sqrt{\frac{\chi_{lp}^2 - 1}{1 - Fr^2 \chi_{lp}^2}}$ ,  $\chi_{lp} = \sqrt{\frac{\bar{k}_l^2 + \xi_{lp}^2}{\bar{k}_l^2 + \xi_{lp}^2 Fr^2}}$ ,  $\bar{k}_l = k_l r_0$ ,

$l=0,1,2,\dots$ ,  $p=1,2,3,\dots$ ,  $J_1(\xi_{lp} r)$  – функция Бесселя 1-го рода 1-го порядка.

Применяя метод Бувнова-Глёркина, представим вектор скорости жидкости в виде разложения по собственной функции краевой задачи (16),

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{s}_n(t) \vec{v}_n(x_1, x_2, x_3), \quad (31)$$

После подстановки выражения (31) в уравнение (27) возмущённого движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью задача сводится к решению бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$N_n^2(\ddot{s}_n - i\omega_n \dot{s}_n) + N_{3n}^2\left(\frac{i}{\omega_n} \dot{s}_n + s_n\right) + \vec{a}_n^* \cdot \ddot{\vec{\theta}} + \vec{d}_n^* \cdot \vec{\theta} = 0, \quad (n=1,2,3,\dots). \quad (32)$$

Здесь  $\dot{s}_n(t)$  – коэффициенты в разложения (31), которые теперь зависят от времени.

Уравнения возмущенного движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью, находящегося в однородном поле массовых сил интенсивности  $j$ , имеют следующий вид

$$J \cdot \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \times J \cdot \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_0 \times J \cdot \vec{\Omega} + \int_{\tau} \rho_0 \vec{r} \times \vec{u} d\tau + \int_{\tau} \rho_0 \vec{\omega}_0 \times (\vec{r} \times \vec{u}) d\tau + \int_{\tau} \dot{\rho} (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau - \int_{\tau} \rho (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau = \vec{M}, \quad (33)$$

здесь  $J = J^0 + J'$ ,  $J^0$  – тензор инерции твёрдого тела без жидкости,  $J'$  – тензор инерции затвердевшей жидкости,  $\vec{M}$  – момент внешних сил.

Уравнение (33) с учетом разложения скорости (31) будет иметь вид

$$J \cdot \vec{\theta} + \vec{\theta} \times J \cdot \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_0 \times J \cdot \vec{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} [\dot{s}_n \vec{a}_n + \dot{s}_n (\vec{\omega}_0 \times \vec{a}_n - \vec{b}_n) + s_n c_n] = \vec{M}, \quad (34)$$

Коэффициенты в уравнениях (32) и (34) выражаются через собственные функции  $\vec{v}_n$  и  $\vec{V}_n^*$ ,

$$\vec{a}_n = \int_{\tau} \rho_0 (\vec{r} \times \vec{v}_n) d\tau, \quad \vec{b}_n = \int_{\tau} \nabla \rho_0 \vec{v}_n (\vec{r} \times \vec{\omega}_0 \times \vec{r}) d\tau, \quad \vec{c}_n = \int_{\tau} \nabla \rho_0 \vec{v}_n (\vec{r} \times \vec{j}) d\tau, \\ \vec{d}_n = g \int_{\tau} \rho_0 (\vec{v}_n \times \vec{e}_3) d\tau, \quad N_n^2 = \int_{\tau} \rho_0 (\vec{v}_n \cdot \vec{v}_n^*) d\tau, \quad N_{3n}^2 = N^2 \int_{\tau} \rho_0 (v_{3n} \cdot v_{3n}^*) d\tau.$$

Здесь  $\vec{V}_n^*$  является комплексно-сопряжённым с вектором  $\vec{v}_n$ .

Если ось  $Ox_3$  является главной осью инерции системы и осью вращения, и момент внешних сил  $\vec{M} = 0$ , то после несложных, но громоздких преобразований уравнение (31) может быть записано в виде

$$\bar{A} \bar{\alpha}^2 + (\bar{C} - \bar{A}) \bar{\omega}_0 \bar{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\bar{a}_n \bar{\alpha}^2 - \bar{d}_n)}{\left( \bar{N}_n^2 \bar{\alpha} + \bar{N}_{3n}^2 \frac{1}{\bar{\omega}_n} \right) (\bar{\omega}_n - \bar{\alpha})} [\bar{a}_n \bar{\alpha}^2 + (\bar{b}_n - \bar{a}_n \bar{\omega}_0) \bar{\alpha} - \bar{c}_n] = 0. \quad (35)$$

В уравнении (35) безразмерные параметры равны:  $\bar{A} = \frac{A}{\rho_0^* r_0^5}$ ,  $\bar{C} = \frac{C}{\rho_0^* r_0^5}$ ,

$$\bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{g}}, \quad \bar{\omega}_n = \frac{\omega_n}{\sqrt{g}}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{g}}, \quad \bar{a}_n = \frac{a_n}{\rho_0^* r_0^4}, \quad \bar{b}_n = \frac{b_n}{\rho_0^* r_0^4 \sqrt{g}}, \quad \bar{c}_n = \frac{c_n}{\rho_0^* r_0^4 g},$$

$$\bar{d}_n = \frac{d_n}{\rho_0^* r_0^4 g}, \quad \bar{N}_n^2 = \frac{N_n^2}{\rho_0^* r_0^3}, \quad \bar{N}_{3n}^2 = \frac{N_{3n}^2}{\rho_0^* r_0^3 g}, \quad \bar{g} = \frac{g}{r_0}. \quad \text{Здесь } A = A^0 + A' = J_{11}^0 + J_{11}',$$

$C = C^0 + C' = J_{33}^0 + J_{33}'$ .  $A^0$  и  $A'$  – моменты инерции твёрдого тела без жидкости и затвердевшей жидкости относительно поперечной оси  $O_1 x_1$ .  $C^0$  и  $C'$  – относительно оси  $O_1 x_3$ .

В первом приближении, когда вместо бесконечной суммы в (35) можно оставить один главный член ( $n=1$ ), получаем уравнение границы области устойчивости для однородной жидкости ( $Fr^2 = 0$ ) в безразмерных параметрах

$$\Delta = -\bar{E}_1 - (\bar{A} - 2\bar{E}_1)\delta_1 \pm 2\sqrt{\bar{E}_1\delta_1(\bar{A} - \bar{E}_1)(1 - \delta_1)}, \quad (36)$$

здесь  $\Delta = \bar{C} - \bar{A}$ ,  $\delta_1 = 2/\chi_1$ .

Далее выведем условия устойчивости для цилиндрической полости со стратифицированной жидкостью ( $Fr^2 \neq 0$ ). При этом в первом приближении, когда ( $n=1$ ), получим уравнение

$$y_0\bar{\alpha}^4 + y_1\bar{\alpha}^3 + y_2\bar{\alpha}^2 + y_3\bar{\alpha} + y_4 = 0, \quad (37)$$

$$\text{здесь } y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{\bar{A}\bar{N}_1^* - (\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_1^2\bar{\omega}_0 + 2(\bar{a}_1\bar{b}_1 - \bar{a}_1^2\bar{\omega}_0)}{2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2},$$

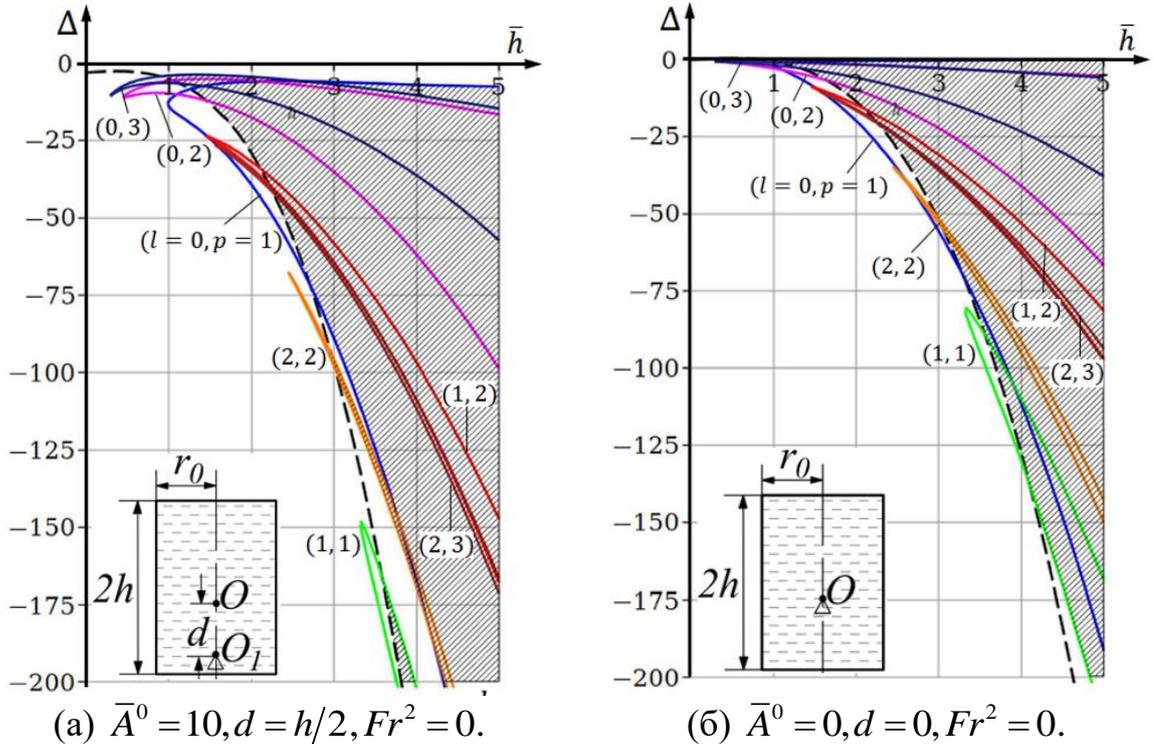
$$y_2 = \frac{\bar{A}\bar{N}_{31}^2 + (\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_1^*\bar{\omega}_0 - 2\bar{a}_1(\bar{c}_1 + \bar{d}_1)}{2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2}, \quad y_3 = \frac{(\bar{C} - \bar{A})\bar{N}_{31}^2\bar{\omega}_0 + 2\bar{d}_1(\bar{a}_1\bar{\omega}_0 - \bar{b}_1)}{2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2},$$

$$y_4 = \frac{2\bar{c}_1\bar{d}_1}{2\bar{a}_1^2 - \bar{A}\bar{N}_1^2}, \quad \bar{N}_1^* = \bar{N}_1^2\delta_1\bar{\omega}_0 - \bar{N}_{31}^2\frac{1}{\delta_1\bar{\omega}_0}.$$

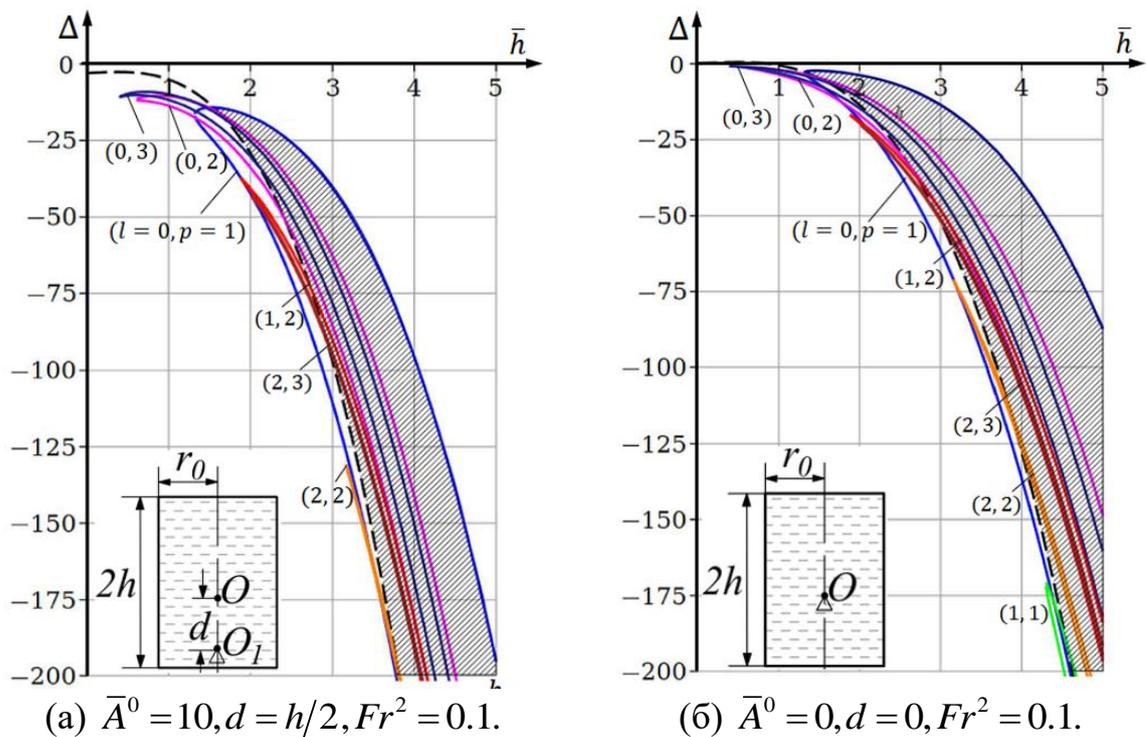
Приравняв дискриминант уравнения (37) ( $D=0$ ), получим уравнение 4-го порядка относительно разности моментов инерции ( $\bar{C} - \bar{A}$ ),

$$z_1(\bar{C} - \bar{A})^4 + z_2(\bar{C} - \bar{A})^3 + z_3(\bar{C} - \bar{A})^2 + z_4(\bar{C} - \bar{A}) + z_5 = 0. \quad (38)$$

Области неустойчивости твёрдого тела с однородной жидкостью ( $Fr^2=0$ ) представлены на рис. 9 и со стратифицированной жидкостью ( $Fr^2=0.1$ ) на рис. 10 в безразмерных переменных  $\Delta$  и  $\bar{h} = h/r_0$  при различных значениях корней  $l$  и  $p$  ( $l=0 \div 2$ ;  $p=1 \div 3$ ).



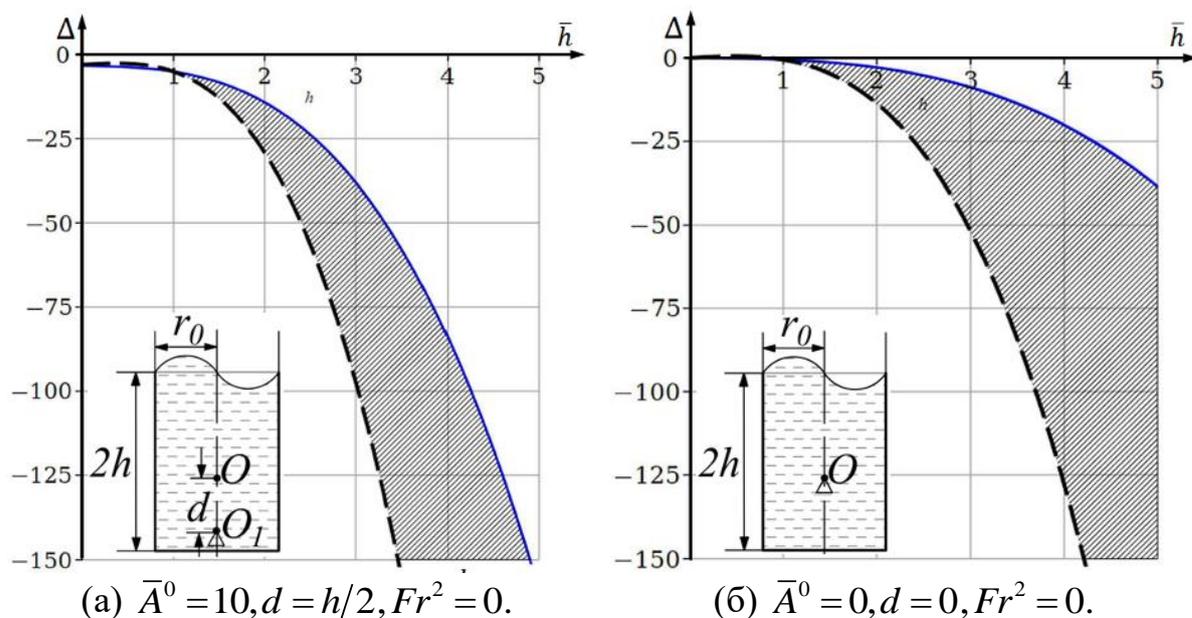
**Рис. 9.** Области неустойчивости вращательного движения твёрдого тела с однородной жидкостью при различных корнях  $l$  и  $p$ .



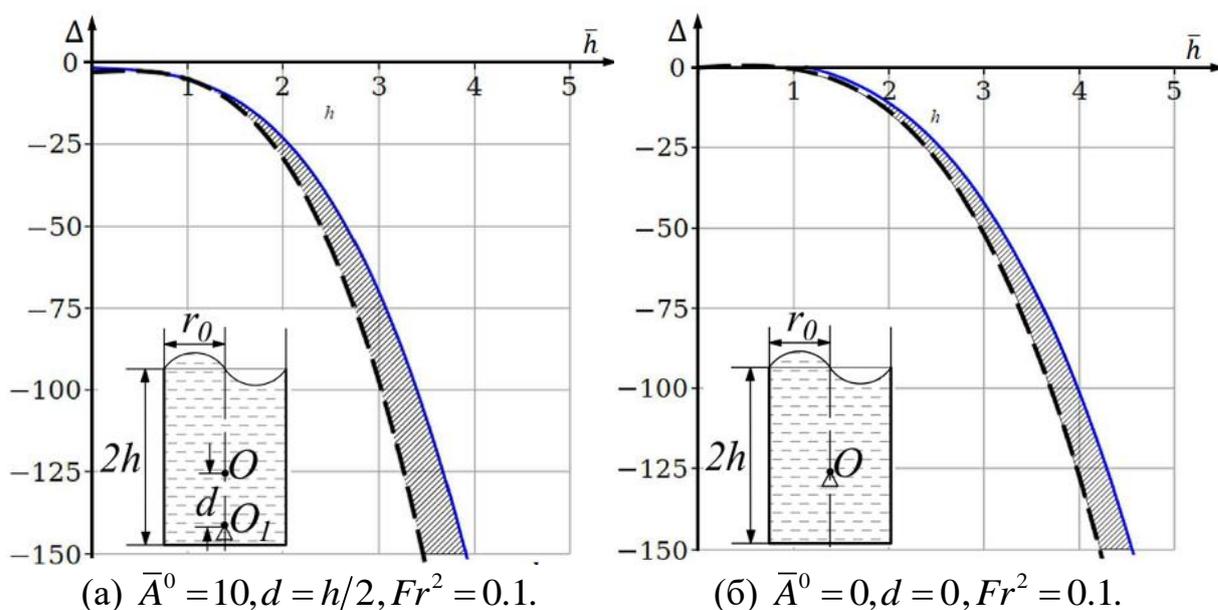
**Рис. 10.** Области неустойчивости вращательного движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью при различных корнях  $l$  и  $p$ .

Области неустойчивости на рис. 9. (а) и рис. 10. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах  $\bar{A}^0 = 10, d = h/2$ ; на рис. 9. (б) и 10. (б) – для жидкости без твёрдого тела, т.е. при  $\bar{A}^0 = 0, d = 0$ . Здесь зоны неустойчивости заштрихованы. Пунктирная линия представляет собой границу на плоскости параметров  $\Delta$  и  $\bar{h}$  физически возможных значений моментов инерции тела с жидкостью  $(\bar{C} - \bar{A})$ . Область под этой линией соответствует отрицательным значениям моментов инерции и, следовательно, должна быть исключена из рассмотрения.

Во втором пункте пятой главы исследована устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с полостью, частично заполненной стратифицированной жидкостью. Результаты показывают, что при малых скоростях вращения полученные кривые об области неустойчивости для случаев полного и частичного заполнения с учетом внутренних волн имеют минимальные расхождения.



**Рис. 11.** Области неустойчивости вращательного движения твёрдого тела с однородной жидкостью с учетом поверхностных волн.



**Рис. 12.** Области неустойчивости вращательного движения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью с учетом поверхностных волн.

На рис. 11 и 12 представлены области неустойчивости твёрдого тела с однородной жидкостью ( $Fr^2 = 0$ ) и со стратифицированной жидкостью ( $Fr^2 = 0.1$ ) с учетом поверхностных волн. Области неустойчивости, изображенные на рис. 11. (а) и 12. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах  $\bar{A}^0 = 10, d = h/2$ . На рис. 11. (б) и 12. (б) – для жидкости без твёрдого тела, т.е. при  $\bar{A}^0 = 0, \bar{C}^0 = 0, d = 0$  (зоны неустойчивости заштрихованы).

В третьем пункте пятой главы исследована устойчивость стационарного вращения твёрдого тела с полостью, частично заполненной стратифицированной жидкостью при большой скорости вращения. При достаточно больших значениях угловой скорости  $\omega_0$  удовлетворяет условию  $(\omega_0^2 \ell / g \gg 1)$  и центробежные силы значительно больше гравитационных сил. Потенциальная энергия на единицу массы жидкости будет  $\Pi_0 = \omega_0^2 r^2 / 2$ . Предположим, что свободная поверхность  $\Gamma$  вращающейся жидкости в закрытом сосуде имеет форму цилиндрической поверхности с внутренним радиусом  $r_0$  (рис. 13).

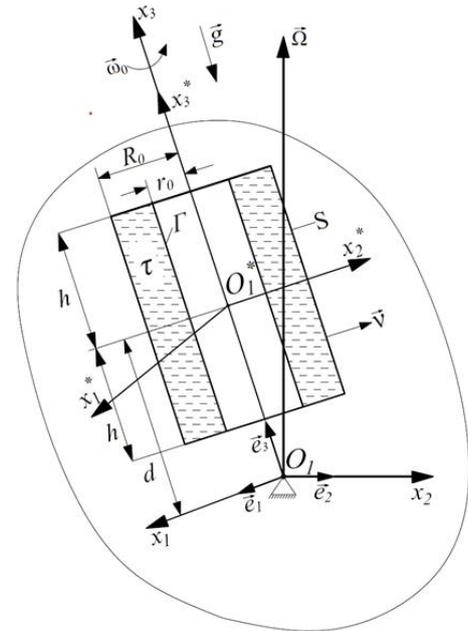


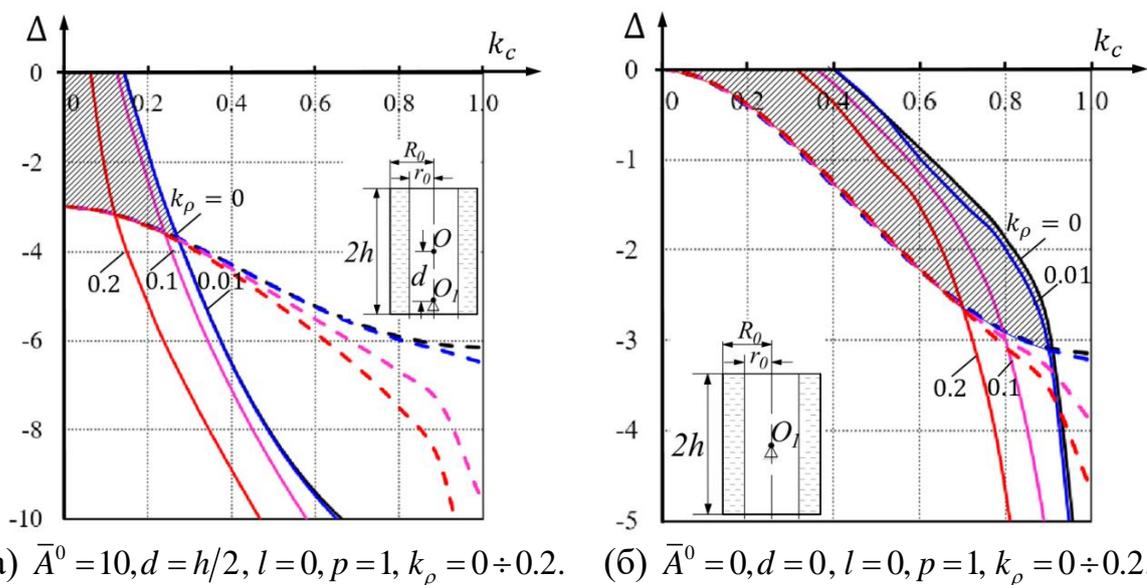
Рис. 13.

Пусть в невозмущенном движении жидкости закон изменения плотности имеет вид  $\rho_0(r) = \rho_0^* (1 + k_\rho \ln r / r_0)$ , где  $k_\rho$  – число стратификации, т.е. постоянная, зависящая от соотношения плотностей жидкости.

В первом приближении, когда главной член ( $n=1$ ), получим уравнение границы области устойчивости для твёрдого тела с жидкостью в безразмерных параметрах:

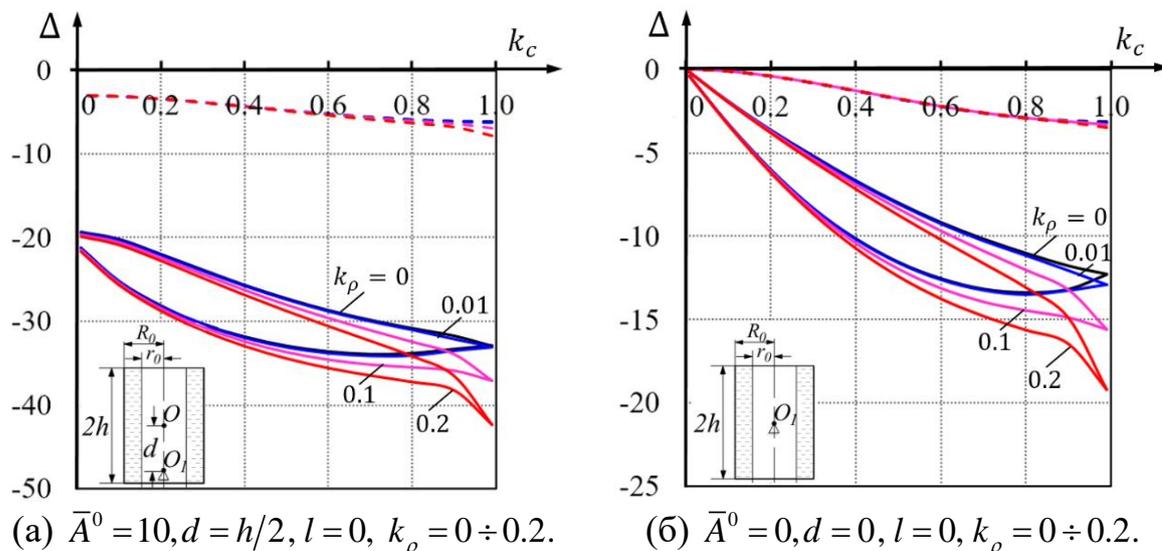
$$\Delta = \frac{1}{\bar{N}_1^2} \left\{ (4\delta_1 - 2)\bar{a}_1^2 + 2\bar{a}_1\bar{b}_1 - \bar{A}\bar{N}_1^2\delta_1 \pm 2\sqrt{2}\sqrt{(\bar{A}\bar{N}_1^2 - 2\bar{a}_1^2) - \bar{a}_1\delta_1[a_1(\delta_1 - 1) + b_1]} \right\}. \quad (39)$$

На рис. 14 показаны области неустойчивости для твёрдого тела со стратифицированной жидкостью с учетом внутренних волн при различных числах стратификации ( $k_\rho$ ) с постоянными корнями  $l=0, p=1$ , здесь  $k_c = 1 - r_0/R_0$  – коэффициент заполнения полости. Области неустойчивости, изображенные на рис. 14. (а) построены для твёрдого тела с жидкостью при заданных параметрах  $\bar{A}^0 = 10, d = h/2$ ; рис. 14. (б) – для жидкости без твёрдого тела, то есть при  $\bar{A}^0 = 0, d = 0$  (зоны неустойчивости заштрихованы).



**Рис. 14.** Области неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью с учетом внутренних волн.

Проведенные результаты (рис. 14) показывают, что при большой скорости вращения увеличение числа стратификации ( $k_p$ ) с учетом внутренних волн приводит к уменьшению областей неустойчивости на плоскости переменных  $\Delta$  и  $k_c$ .



**Рис. 15.** Графическое исследование уравнения границ области устойчивости (39) с учетом поверхностных волн.

Графическое решение (рис. 15) показывает, что области неустойчивости отсутствуют, так как ветви границ областей для однородной ( $k_p = 0$ ) и стратифицированной ( $k_p \neq 0$ ) жидкости с учетом поверхностных волн, затухающих в радиальном направлении, находятся под пунктирной линией и должны быть исключены из рассмотрения. В этом случае можно сделать вывод, что при быстром вращении жидкости поверхностные волны не влияют на устойчивость вращения твёрдого тела с жидкостью.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена задача о свободных колебаниях вращающегося тела с полостью, полностью и частично наполненной стратифицированной жидкостью, относительно стационарного вращения. На основе предложенного в работе метода изучен круг вопросов, связанных с выявлением свойств колебательного движения вращающейся жидкости и влиянием на устойчивость движения тела.

**Основные выводы** диссертационной работы заключаются в следующем:

- Исследовано сферическое движение твёрдого тела с неоднородной несжимаемой жидкостью, полностью заполняющей эллипсоидальную полость.
- Получены достаточные условия устойчивости вращения твёрдого тела с неоднородной жидкостью вокруг вертикальной оси динамической симметрии.
- Выполнены численные результаты собственных частот свободных колебаний стратифицированных жидкостей для внутренних и поверхностных волн при малых и больших угловых скоростях.
- Результаты расчётов показывают, что наличие стратификации приводит к увеличению частот свободных колебаний жидкости как для внутренних, так и для поверхностных волн.
- Построены области неустойчивости вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью и частично наполненной стратифицированной жидкостью, при вращении вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром масс рассматриваемой механической системы.
- На устойчивость вращения твёрдого тела с вращающейся стратифицированной жидкостью существенно влияют трёхмерные (внутренние) волны.
- Расчёты областей неустойчивости вращения твёрдого тела со стратифицированной жидкостью показывают, что устойчивая стратификация жидкости приводит к уменьшению областей неустойчивости вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, полностью или частично наполненной жидкостью.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доценту Темнов Александру Николаевичу и научному консультанту доценту Шкапову Павлу Михайловичу за постоянное внимание к работе, полезные консультации, обсуждения и советы.

## СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Ян Наинг У, Темнов А.Н.* Механический аналог движений неоднородной жидкости // *Инженерный журнал: наука и инновации.* 2022. Вып. 7(127). С. 1–16.
2. *Ян Наинг У, Темнов А.Н.* Вращение вокруг неподвижной точки твёрдого тела с эллипсоидальной полостью, полностью наполненной неоднородной жидкостью // *Труды МАИ.* 2023. № 128. С. 1–30.
3. *Ян Наинг У, Вин Ко, Темнов А.Н.* Устойчивость сферического движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение // *Инженерный журнал: наука и инновации.* 2023. Вып. 1(133). С. 1–18.
4. *Ян Наинг У.* Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // *Труды МАИ.* 2023. № 130. С. 1–28.
5. *Ян Наинг У, Темнов А.Н.* Колебания стратифицированной вращающейся жидкости в поле центробежных сил инерции // *Труды МАИ.* 2023. № 132. С. 1–37.
6. *Ян Наинг У, Темнов А.Н.* Об устойчивости стационарного вращения твёрдого тела с полостью, содержащей криогенную жидкость // *Труды МАИ.* 2023. № 133. С. 1–30.
7. *Ян Наинг У, Темнов А.Н., Шкапов П.М.* Свободные колебания криогенной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // *Труды МАИ.* 2024. № 135. С. 1–33.
8. *Ян Наинг У, Вин Ко Ко, Темнов А.Н.* Движение твёрдого тела с жидкостью, совершающей однородное вихревое движение // *Сборник тезисов. XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021 г. Т. 3. С. 328–330.*
9. *Ян Наинг У.* Движение твёрдого тела с жидкостью, совершающей однородное вихревое движение // *Сборник материалов конференции. Наука, технологии и бизнес: III Межвузовская конференция аспирантов, соискателей и молодых ученых, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021 г. С. 209–222.*
10. *Ян Наинг У, Темнов А.Н.* Механический аналог движений неоднородной жидкости // *Сборник материалов конференции. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021 г. Ч. 2. С. 76–85.*
11. *Ян Наинг У, Темнов А.Н.* Гидродинамический аналог движений тяжелого твёрдого тела // *Сборник докладов. Шестая международная научно-*

- техническая конференция «Динамика и виброакустика машин» (DVM2022). Самарский университет, 2022 г. С. 115–117.
12. *Ян Наинг У.* Нормальные колебания вращающейся стратифицированной жидкости // Сборник материалов школы. 13-ая международная конференция – школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», ИПМех. им. А.Ю. Ишлинского РАН, 2022 г. С. 309–312.
  13. *Ян Наинг У, Темнов А.Н.* Устойчивость сферического движения твёрдого тела с неоднородной жидкостью вокруг вертикальной оси динамической симметрии // Сборник материалов конференции. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022 г. Ч. 2. С. 63–64.
  14. *Ян Наинг У.* Свободные колебания стратифицированной вращающейся жидкости в цилиндрической полости // Сборник материалов школы. 14-ая международная конференция – школа молодых ученых «Волны и вихри в сложных средах», ИПМех. им. А.Ю. Ишлинского РАН, 2023 г. С. 336–340.
  15. *Ян Наинг У, Темнов А.Н.* Устойчивость вращения твёрдого тела с цилиндрической полостью, наполненной криогенной жидкостью // Сборник материалов конференции. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023 г. С. 291–304.

**Ян Наинг У**

**КОЛЕБАНИЯ ТВЁРДЫХ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ПОЛОСТИ,  
НАПОЛНЕННЫЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ  
ЖИДКОСТЬЮ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать \_\_\_\_ . \_\_\_\_ . 2025 г. Заказ № \_\_\_\_\_

Формат 60x90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж \_\_\_\_\_ экз

Отпечатано на ризографе Института проблем механики  
им А.Ю. Ишлинского РАН

119526, Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1