

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской
академии наук (ИПМех РАН)**

На правах рукописи

Гандилян Давид Ваганович

**ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВИЙ УПРУГОЙ ЗАДЕЛКИ В ЗАДАЧАХ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

Д.ф.-м.н., доцент

Устинов Константин Борисович

**Москва
2025**

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ПОКРЫТИЙ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ВЛИЯНИЕ ОСНОВАНИЯ (ПОДЛОЖКИ) 14	
ГЛАВА 2. ОБЩАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК.....	22
2.1. Основные положения и геометрические сведения в теории оболочек..	22
2.2. Уравнения деформаций и перемещений	24
2.3. Напряженное состояние. Закон Гука.....	27
2.4. Усилия и моменты	28
2.5. Потенциальная энергия деформации оболочки	30
2.6. Граничные условия.....	31
ГЛАВА 3. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОГО ПОКРЫТИЯ ПОСЛЕ УТЕРИ КОНТАКТА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ; ОТСЛОЕНИЕ, РАСПОЛОЖЕННОЕ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ	32
3.1. Геометрия, основные соотношения	32
3.2. Вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы отслоения.....	38
3.3. Раскрытие трещины, коэффициенты интенсивности напряжений	40
3.4. Значение коэффициентов матрицы жесткости.....	41
3.5. Результаты численных расчетов	42
3.6. Краткие выводы по разделу.....	48
ГЛАВА 4. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОГО ПОКРЫТИЯ ПОСЛЕ УТЕРИ КОНТАКТА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ; ОТСЛОЕНИЕ, РАСПОЛОЖЕННОЕ В ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ.....	50
4.1. Постановка задачи, общие соотношения	50
4.2. Вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы отслоения.....	55
4.3. Результаты численных расчетов	59
4.4. Краткие выводы по разделу.....	63

ГЛАВА 5. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ, С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПОДАТЛИВОСТИ ОСНОВАНИЯ (ПОДЛОЖКИ)....	65
5.1. Формулировка задачи.....	65
5.1.1. Постановка задачи.....	65
5.1.2. Оценки коэффициентов матрицы упругой заделки. Аналитические и численные решения.....	70
5.1.3. Оценки коэффициентов матрицы упругой заделки. МКЭ решение ...	71
5.2. Модели, допускающие аналитическое решение задачи.....	73
5.2.1. Модель пластины без учета растягивающих усилий.....	73
5.2.2. Мембранная модель	76
5.2.3. Модель Фешля — фон Кармана в приближении постоянства продольных усилий.....	78
5.3. Полуаналитическое решение задачи. Решение с помощью рядов.....	81
5.4. Численный метод решения задачи.....	82
5.5. Результаты расчетов; сравнение результатов, полученных различными методами. Некоторые численные оценки влияния коэффициентов податливости и относительной толщины на параметры деформации	88
5.6. Краткие выводы по разделу.....	113
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	115
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	117

ВВЕДЕНИЕ

С приходом новых технологий, вопросы, связанные с исследованиями в области механики деформируемого твердого тела, в частности с деформацией и разрушением тонкостенных конструкций, включая отслоение тонких пленок, покрытий, вызывают все больший интерес в научных исследованиях и промышленности. Одним из распространенных видов тонкостенных элементов являются системы «покрытие-подложка», которые используют во многих областях промышленности, в частности в микро- и нанoeлектронике, с помощью которых обеспечивается повышение твердости, износостойкости, устойчивости к коррозии и температурным изменениям приборов и устройств. Поэтому важно корректно и с достаточной степенью точности исследовать процессы деформирования и разрушения данных элементов. Для анализа данных процессов применяются методы из теории тонких оболочек и пластин, основной вклад в который внесли как отечественные (В.З. Власов, Х.М. Муштари, С.П. Тимошенко, В.В. Новожилов, А.С. Вольмир, Я.М. Григоренко, С.А. Амбарцумян, А.Л. Гольденвейзер и др.) так и зарубежные (А.О. Фёппль, Т. фон Карман, Л.Г. Доннелл, Ф. Сьярле, С. Войновский-Кригер, и др.) ученые. Вопросам исследования и моделирования напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций и конструкций типа пленки/покрытия/пластины с учетом влияния основания (подложки) посвящено большое количество работ. Теоретическому изучению вопросов, связанных с деформированием покрытий вследствие потери устойчивости с отслоением и без занимались такие исследователи, как Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик, Панин В.Е., В. Audoly, А. Boudaoud и другие. Однако с развитием науки и техники для более точного анализа помимо использования основных соотношений необходимо также учитывать специфику граничных условий, учитывающих влияние основания. В последнее время особое внимание уделяется граничным условиям обобщенной упругой заделки, которые позволяют более точно моделировать взаимодействие пленок/покрытий/пластин и подложек, учитывая различные механические характеристики. Результаты отечественных и зарубежных исследований в данной области отражены в работах Р.Л. Салганик, Р.В. Гольдштейн, К.Б. Устинов, J.W. Hutchinson, D.S. Balint, M.D. Thouless, Z. Chen, В. Cotterell, S. Faulhaber, А. Andrews, L. Barbieri, R. Massabo и других. Настоящая работа посвящена исследованию влияния граничных условий упругой заделки на параметры отслоения пологих цилиндрических покрытий от подложки и деформирования круглых пластин, сопряженных по контуру с подложкой.

Актуальность темы

В настоящее время тонкие и сверхтонкие пластины и оболочки играют одну из ключевых ролей в современной высокотехнологичной

промышленности, находя применение в различных областях, таких как авиакосмическая промышленность, машиностроение, энергетика, медицинская, химическая промышленность и др., а также служат одним из основных элементов различных приборов и устройств в микро- и нанoeлектронике, солнечной энергетике, оптоэлектронике и т.д. В частности, они используются в качестве элементов конструкции при создании масок рентгеновской нанолитографии, применение которой позволит перейти к созданию наноструктур с минимальными топологическими размерами на уровне от 10 нм и ниже. Сверхтонкие пленки также важны для создания защитных покрытий, которые помогают существенно повысить твердость, износостойкость, коррозионную и термическую стойкость эксплуатируемых приборов. Например, в авиадвигателях и турбинах электростанций используются покрытия для защиты металлических компонентов, подвергающихся воздействию достаточно высоких температур, представляющие собой пористые керамические слои с низкой теплопроводностью, причем они являются многофункциональными, поскольку также служат в качестве окислительного барьера.

В процессе эксплуатации, особенно в сложных термомеханических условиях, покрытия могут сталкиваться с развитием дефектов. Механические напряжения, возникающие в покрытиях во время эксплуатации деталей, оказывают существенное влияние на их долговечность и надежность. В частности, растягивающие или сжимающие напряжения могут способствовать повреждению поверхностных защитных покрытий путем их растрескивания, краевому отслоению и скалыванию, либо приводить к их короблению (выгибанию) или гофрированию (образованию волнообразных складок или рифлений на материале). Данные явления наблюдаются для широкого круга пар материалов, образующих систему «покрытие-основание» («покрытие-подложка»); примерами являются металлические или полимерные пленки, нанесенные на керамические подложки.

Также, помимо исследования процессов отслоения покрытий от основания, важно исследовать процессы деформирования тонкостенных пластин, сопряженных по контуру с основанием (подложкой), поскольку такие системы, включая литографические маски для печатных плат (PCB — printed circuit board), критически важны для развития новых технологий рентгеновской литографии, что требует корректного анализа форм деформирования тонкостенных элементов литографических масок при их эксплуатации.

Ключевым аспектом для гарантии стабильной работы таких структур является достаточно точное и корректное описание механического поведения покрытия/пленки/пластины, с учетом влияния основания и условий эксплуатации, что становится особенно актуальным при уменьшении размеров используемых приборов (например, МЭМС — Микроэлектромеханические системы).

В настоящее время тонкостенные элементы конструкций, сопряженные с массивными телами, чаще всего моделируются в рамках различных двумерных или одномерных моделей: балок, пластин, оболочек. При этом в качестве граничных условий обычно используют условие жесткого защемления, оправдывая это «массивностью» тел, с которыми рассматриваемые тонкостенные элементы сопрягаются. Однако, более детальное рассмотрение показывает, что условие жесткого защемления выполняется лишь приближенно, и что более точными являются условия упругой заделки, когда кинематические параметры — компоненты смещения средней плоскости и углы поворота, связываются с силовыми параметрами — продольными и поперечными усилиями и изгибающими моментами посредством матрицы податливости. Подобные задачи возникают при идентификации экспериментально определяемых параметров ультратонких элементов МЭМС, используемых, в частности, в проекционных литографических системах.

Цели и задачи

Цель диссертации — аналитическое, численное исследование рассматриваемых задач механики оболочек, с учетом влияния основания (подложки), а именно, исследование недостаточно изученного эффекта влияния присоединенной массы (основания) на напряженно-деформированное состояние тонких пластин и пологих оболочек; развитие положений этого раздела механики деформируемого твердого тела; уточнение уже известных решений и получение новых научных результатов на основе достаточно известных математических моделей, а также определение области применимости полученных решений.

Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

— Выбор наиболее подходящих математических моделей для описания напряженно-деформированного состояния пластин и пологих оболочек;

— Разработка аналитических и численных методов решения задач об отслоении тонких покрытий. Сведение задачи к задачам, учитывающим изгиб пластин и пологих оболочек, с учетом влияния основания (подложки);

— Разработка алгоритма на ЭВМ. Вычисление параметров деформации покрытия;

— Исследование влияния основания и других факторов на напряженно-деформированное состояние покрытия;

— Выявление основных закономерностей формирования отслоений и потери устойчивости отслоившихся покрытий;

— По результатам диссертации дать рекомендации по использованию разработанных подходов решения.

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

— Получены решения задач об отслоении тонких пологих цилиндрических покрытий от основания (подложки), заключающиеся в исследовании отслоившегося участка покрытия, используя математические модели нелинейной теории оболочек, где в качестве граничных условий используются граничные условия типа обобщенно-упругой заделки, которая учитывает свойства основания.

— Выявлены закономерности механического поведения отслоений: для пологих цилиндрических покрытий исследованы зависимости скорости высвобождения энергии, моды I коэффициента интенсивности напряжений, угла поворота в точке заделки, а также компонент смещения покрытия от относительной податливости подложки и ее кривизны;

— Выполнен численный расчет и анализ влияния некоторых факторов на напряженно-деформированное состояние отслоившегося участка покрытия, в частности влияния кривизны и податливости основания;

— Предложены аналитические (основанные на модели Софи Жермен, мембранной модели), полуаналитические (через функции Бесселя, а также в рядах), а также численный метод, аналогичный «методу стрельбы» решения задачи деформирования круговой пластины, сопряженной по контуру с основанием.

Теоретическая и практическая значимость работы:

Представлены методы, позволяющие смоделировать механическое поведение тонких покрытий с учетом влияния основания (подложки). Определены закономерности деформирования, роста и потери устойчивости отслоений при механическом воздействии, а также влиянии различных факторов, результаты которых могут быть использованы при создании систем с покрытиями в различных областях промышленности, в частности в микро- и нанoeлектронике.

Получены решения задач об отслоении покрытия от пологого цилиндрического основания, а также задач деформирования круговой пластины. Данные решения находят применение не только для расчетов параметров отслоения покрытия, но и в других областях, таких как анализ поведения металлических, оксидных и полупроводниковых покрытий в области авиационной промышленности, машиностроения, в строительной механике и др. Также получены аналитические и численное решение задачи о деформировании круговой пластины, сопряженной по контуру с основанием. Полученные решения особенно важны для производства и эксплуатации микроэлектроники, поскольку в процессе фотолитографии данные элементы часто применяются для создания различных микро- и наносхем, а также в производстве полупроводниковых устройств.

Методология и методы исследования:

В рамках диссертации для решения поставленных задач были использованы методы механики деформируемых твердых тел. При исследовании вопросов, связанных с отслоением покрытий, использовалась нелинейная теория оболочек и пластин, где в качестве граничных условий использовались граничные условия типа обобщенной упругой заделки, которые учитывают влияние основания, описываемые с помощью матрицы коэффициентов упругости.

При решении задач использовались аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений и их систем, а также систем нелинейных уравнений. Численные расчеты проводились с помощью методов компьютерного программирования.

Положения, выносимые на защиту:

- 1). Математические модели, позволяющие рассчитывать параметры напряженно-деформированного состояния отслоившегося участка покрытия с учетом влияния основания (подложки) с помощью теории нелинейных пологих оболочек и пластин.
- 2). Алгоритмы решения поставленных задач с помощью аналитических и численных методов.
- 3). Влияние различных факторов, таких как кривизна и податливость основания на отслоение покрытия.
- 4). Закономерности напряженно-деформированного состояния и потери устойчивости отслоений при механическом нагружении.
- 5). Сравнение с известными решениями, не учитывающими влияние податливости основания с полученными решениями.
- 6). Области применимости полученных методов решения задач.

Достоверность результатов

диссертации обусловлена математической обоснованностью вывода основных соотношений, описывающих напряженно-деформированное состояние покрытий, с использованием нелинейной теории тонких оболочек и пластин, строгостью постановки задач, построением ряда точных аналитических решений в рамках предложенных моделей, сравнением с известными частными случаями, полученными как автором диссертации, так и другими авторами, корректностью использования численных методов, а также соответствием качественных результатов физической картине исследуемых процессов.

Апробация результатов исследования:

Основные результаты исследований представлены на:

— XLVII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», г. Москва, Россия, 12-23 апреля 2021 (секционный доклад);

— Актуальные проблемы механики сплошной среды. Материалы VIII международной конференции, Цахкадзор, Армения, 1-5 октября 2023 (стендовый доклад);

— XVIII Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций», Екатеринбург, Россия, 27-31 мая 2024 (секционный доклад);

— XIII Всероссийская конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» с международным участием, посвященная памяти академика А.Ф.Сидорова, пос. Джанхот, Россия, 2-8 сентября 2024 (стендовый доклад).

Работы по теме диссертации отмечены наградой:

Диплом с присуждением III премии за научную работу в конкурсе на лучшие научные работы среди молодых ученых и студентов ИПМех РАН за 2024 год.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 10 работ [1–10], в том числе 5 статей опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ (из которых 3 — в изданиях, входящих в базу цитирования Scopus, 1 — в издании, входящем в базу цитирования Web of Science).

Личный вклад соискателя

Соискателем предложены решения задач нелинейной теории упругости в областях теории оболочек. Соискателем проведены теоретические исследования параметров деформирования оболочек и пластин, определены влияние параметров модели на механическое поведение деформации тела, в том числе влияние основания (подложки).

В работах [1–10] автору принадлежат: уточнение моделей деформирования и разработка алгоритма определения параметров деформации с учетом влияние податливости основания. В работах [4–6] исследована модель полой цилиндрической оболочки с учетом влияния основания. Проанализированы зависимость кривизны оболочки, податливости основания на параметры деформации оболочки. В работах [7–10] исследованы некоторые модели решения задач круглой пластины,

сопряженной по контуру с основанием, также предложены полуаналитический и численный метод решения задачи.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 126 страницы, в том числе 116 страниц основного текста, включая 41 рисунок и 10 таблиц. Список литературы содержит 138 наименований на 10 страницах.

Во **введении** отражены актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследования, научная новизна, положения, значимость работы, представлена структура диссертации.

В **первой главе** сделан обзор и анализ материалов, посвященных исследованию напряженно-деформированного состояния покрытий, сопряженных с основанием (подложкой). Намечены основные проблемы, выбраны основные направления исследований.

Представлен общий подход к решению задач об отслоении покрытий, заключающийся в исследовании отслоившегося участка покрытия с помощью использования теории тонких оболочек, а также граничных условий типа обобщенно упругой заделки, которая учитывает влияние подложки на отслоение покрытия.

Вторая глава посвящена обозначению математической модели исследования напряженно-деформированного состояния тонких оболочек. Приводятся основные положения теории тонких оболочек, также представлены основные уравнения, зависимости и пределы применимости теории тонких оболочек, в частности приведены соотношения для случая пологих оболочек.

Третья глава посвящена формулированию и решению задачи об отслоении от цилиндрического основания (подложки) участка тонкой пленки, возникающего за счет наличия сжимающих напряжений, где отслоение расположено в осевом направлении.

Решение задачи получено с использованием теории пологих цилиндрических оболочек с граничными условиями типа обобщенной упругой заделки. Получены распределения смещений отслоившегося участка и скорости высвобождения энергии при росте отслоения вдоль прямолинейной и криволинейной границ.

Проведено сравнение значений скорости высвобождения энергии и компонент смещения с учетом и без учета влияния поперечных сил. Исследованы зависимости скорости высвобождения энергии, моды I коэффициента интенсивности напряжений, угла поворота в точке заделки, а

также компонент смещения покрытия от относительной податливости подложки и ее кривизны. Показано, что при увеличении податливости подложки величина выпучивания отслоения, как и скорость высвобождения энергии существенно возрастают. Наличие выпуклости также приводит к возрастанию скорости высвобождения энергии. Выявлено несколько причин, по которым отслоение прекращает развиваться вдоль ее прямолинейной границы (за счет расширения) и возникает эффект «туннелирования». Показано, что для достаточно податливых подложек при малой предварительной деформации существует некоторая критическая ширина отслоения при которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться в осевом направлении. Наличие положительной кривизны и увеличение податливости подложки приводит к уменьшению этой критической ширины. На основе анализа результатов для угла поворота в точке заделки, а также отрывной моды коэффициента интенсивности напряжений следует, что причиной наблюдаемого эффекта «туннелирования» может быть не только различие скоростей высвобождения энергии при распространении отслоения за счет расширения и удлинения (туннелирования), но и запрет на перекрытие граней покрытия и подложки.

В четвертой главе рассмотрена задача об отслоении от цилиндрического основания, расположенном в окружном направлении. Решение задачи также получено в рамках теории пологих цилиндрических оболочек. В качестве уравнений равновесия использовались уравнения Муштари – Доннелла – Власова, а в качестве граничных условий — условия типа обобщенной упругой заделки. Получены выражения для компонент смещения покрытия и скорости высвобождения энергии при отслоении вдоль прямолинейной и криволинейной границы отслоения.

Получены профили отслоившегося участка покрытия. Выявлена роль, вносимая податливостью основания и ее кривизны в значении скорости высвобождения энергии и угла поворота в точке заделки, а также в изменении формы профиля покрытия. Показано, что при увеличении податливости основания, а также (положительной) кривизны, значения скорости высвобождения энергии и величины нормальной компоненты смещения покрытия существенно возрастают. Установлено, что при значительных значениях кривизны основания в профиле отслоившегося участка покрытия наблюдается эффект гофрирования. Это, в свою очередь, приводит к возникновению локальных экстремумов в графике зависимости скорости высвобождения энергии от длины отслоения. Данного эффекта не наблюдалось при исследовании отслоения, расположенном в продольном направлении (в третьей главе). Также показано, что для достаточно податливых оснований существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться за счет удлинения, чем за счет расширения. При увеличении положительной кривизны и податливости основания значение критической

ширины уменьшается. Также рассмотрено альтернативное условие существования критической ширины отслоения, заключающееся в исследовании величины угла поворота в точке заделки, соответствующей перекрытию поверхностей покрытия и основания при значении угла равного нулю.

В пятой главе решена задача о деформировании под действием равномерной поперечной нагрузки круговой пластины, сопряженной по контуру с массивным основанием.

В то же время условие сопряжения пластины с основанием моделируется использованием граничных условий типа обобщенной упругой заделки, т.е. связи изгибающего момента и усилий на краю пластины со смещениями и углом поворота посредством матрицы податливости. Целью задачи является исследование влияния упругости заделки на упругий отклик пластины. Решение задачи получено в постановке линейной теории пластин, теории мембран в приближении однородности продольных усилий, теории Феппля — фон Кармана, также в приближении предположения однородности продольных усилий, кроме того теории Феппля — фон Кармана с помощью разложения в степенные ряды поперечных смещений и продольных усилий, представленных в цилиндрической системе координат, а также численным решением системы уравнений Феппля — фон Кармана, с последовательным уточнением граничных условий, аналогично «методу стрельбы». Значения коэффициентов матрицы податливости получены с помощью метода конечных элементов для вспомогательной задачи и сравнены со значениями коэффициентов, полученных для близких задач аналитическими методами. Получены выражения для компонент смещения круговой пластины. Численные результаты получены для пластины из алюминия на кремниевом основании. Проведено сравнение полученного решения с решением, полученным для условия жесткой заделки для всех использованных моделей. Выявлена роль, вносимая податливостью подложки в изменение формы профиля круговой пластины, действующих продольных усилий и изгибающих моментов. Показано, что в случае больших прогибов (несколько толщин пластины) учет податливости основания становится существенным. Также изучено влияние такого фактора, как относительная толщина круговой пластины на ее напряженно-деформированное состояние. Исследованы области применимости рассмотренных методов.

В заключительной части, в результате анализа аналитических, численных данных сформулированы теоретические положения и практические выводы, вытекающие из полученных в настоящей работе научных результатов.

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук» (ИПМех РАН).

Благодарности

Выражаю глубокую и искреннюю благодарность моему научному руководителю, доктору физ.-мат. наук, доценту К.Б. Устинову, инициировавшему исследования по теме диссертации, за ту научную, методическую и личную поддержку и тот объём знаний и советов, которые были переданы автору в ходе написания диссертации.

Также хочу поблагодарить заведующего лабораторией Механики технологических процессов Д.С. Лисовенко, также Е.А. Лямину и всех сотрудников лаборатории, которые поддерживали и делились своими знаниями и опытом в науке.

Отдельно хочу поблагодарить всех моих родных и близких, в частности родителей и мою сестру Рипсиму за моральную помощь и поддержку при подготовке диссертации.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ПОКРЫТИЙ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ВЛИЯНИЕ ОСНОВАНИЯ (ПОДЛОЖКИ)

В настоящее время одним из важных элементов для многих современных приборов и конструкций являются тонкие пленки, с помощью которых можно существенно увеличить твердость, износостойкость, коррозионную и термическую устойчивость деталей. Данные элементы находят широкое применение в таких областях, как авиакосмическая промышленность, машиностроение, в энергетике и т.д. Они также выполняют роль ключевых конструктивных элементов в различных устройствах и приборах микро- и наноэлектроники, солнечной энергетике и оптоэлектроники. Несмотря на то, что существуют различные типы пленок, большинство из них можно разделить на два типа: органические и неорганические. Органические пленки, как правило, состоят из материалов на основе углерода. Они часто используются в таких приложениях, как органическая электроника, фотохимия и электрохимия. Эти пленки могут быть гибкими и легкими, что делает их пригодными для различных применений, в том числе для производства органических светодиодов (OLED – organic light-emitting diode) и органических солнечных элементов [124]. Неорганические пленки изготавливают из материалов, которые обычно состоят из металлов, оксидов металлов или соединений на основе кремния.

Существует широкий спектр задач, касающихся деформации и разрушения тонких пленок, пластин и покрытий. Вопросы, связанные с отслоением покрытий, вызывают в последнее время повышенный интерес в различных областях науки и техники, поэтому при моделировании процессов деформирования и разрушения тонких покрытий, слоев и границ раздела материалов возникает необходимость корректного описания и исследования данных процессов, что является достаточно сложной задачей. Тонкие пленки и покрытия в процессе осаждения и во время эксплуатации, особенно в сложных термомеханических условиях часто подвержены механическим напряжениям (особенно остаточным напряжениям), оказывающие существенное влияние на их эксплуатационные характеристики, надежность и долговечность. Возникновение остаточных напряжений характерно для множества пар материалов, образующих систему «покрытие-подложка». Основными причинами появления остаточных напряжений могут служить различия в коэффициентах теплового расширения, где при изменении температуры покрытие и подложка могут расширяться или сжиматься с разной скоростью, нарушения при нанесении покрытия на подложку, влияние окружающей среды: влажность, химическая активность, что может повлиять на свойства материала покрытия и вызвать остаточные напряжения. В качестве примера данных систем можно назвать керамическое покрытие на

металлической подложке, либо металлическое покрытие на полимерной подложке. Подобная система используется в различных деталях и конструкциях, например, оксидные слои (Al_2O_3 на сплавах Ni-Cr-Al и Fe-Cr-Al) в термоизоляторах [37], пленка $\text{SiO}_2/\text{Si}_3\text{N}_4$ /пленка металла/поликремния для фотолитографии [48-50], покрытия для защиты от высокой температуры и химических воздействий (коррозии) [41-43], прозрачные покрытия на оптических полимерах [44].

Растягивающие напряжения могут вызывать повреждение покрытий путем их растрескивания, отслоения от подложки и скалывания (рис. 1.1 а) [28-30]. Например, растягивающие напряжения возникают в покрытиях, таких как краски и лаки, из-за испарения растворителя, что приводит к усадке покрытия, если оно не связано с подложкой. Во многом таким же образом растягивающие напряжения возникают в плотном слое грязи при высыхании [123]. Сжимающие напряжения могут также способствовать краевому отслоению и скалыванию покрытий [31, 32], либо приводить к их короблению или гофрированию (рис 1.1 б, в) [33-35]. Отметим, что процесс отслоения покрытия наблюдается при пониженной адгезионной прочности на границе раздела системы «покрытие-подложка» [49]. Данные явления могут привести к негативным последствиям, вплоть до разрушения деталей и конструкций. Часто для предотвращения растрескивания или отслоения разрабатываются такие покрытия, которые в рабочем температурном режиме находятся в состоянии сжатия [47], по аналогии с предварительно напряженным железобетоном. Тем не менее, именно избыток сжимающих напряжений может стать причиной выпучивания покрытия и его отслоению. Это подчеркивает важность глубокого и всестороннего изучения данного явления для разработки технологий и условий эксплуатации, которые помогут избежать подобных нежелательных последствий.

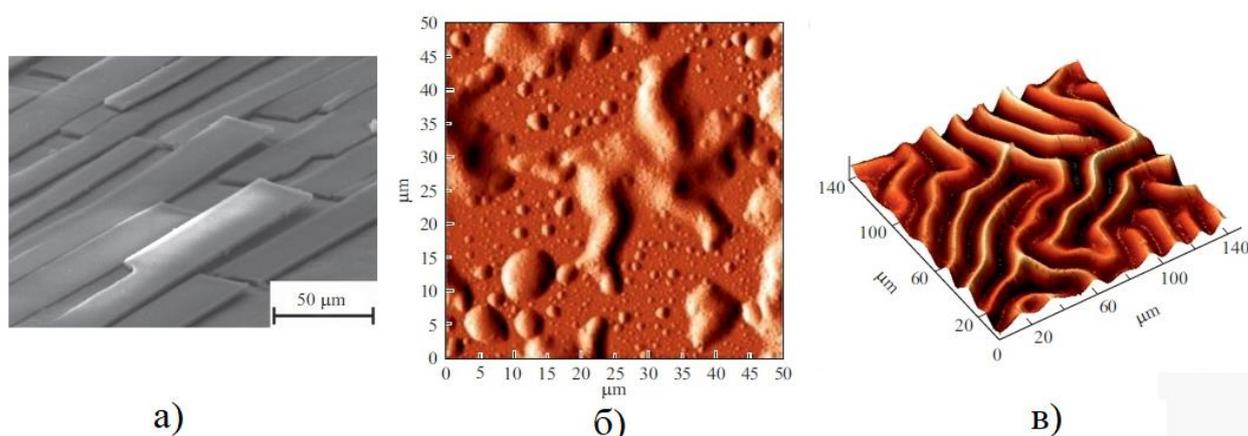


Рис. 1.1. Виды деформаций и разрушений тонких пленок под действием напряжений [27]

Помимо вопросов, касающихся непосредственно механики деформирования покрытий, отслоения изучаются в контексте

экспериментальной оценки адгезии. Существует достаточно большое количество работ, посвященных исследованию различных подходов [81-84, 93-97 и др.], в том числе методу «blister test» (или тест на образование пузырей) — это метод, используемый для оценки адгезии покрытий и их устойчивости к коррозии. В частности, данный тест часто применяется в оценке качества лакокрасочных материалов, защитных покрытий и в других областях, где важно знать, как материалы взаимодействуют между собой и с окружающей средой. При проведении теста на поверхности материала создают небольшие контролируемые дефекты, после чего образец помещают в определенные условия (например, в среду с повышенной влажностью или при воздействии определенных химических веществ). Затем наблюдают за образованием «пузырей», которые могут возникнуть под покрытием, что свидетельствует о потере адгезии или повреждении слоя. Такой тест позволяет исследовать долговечность и качество покрытий, выявлять потенциальные проблемы до того, как они могут привести к серьезным повреждениям. Проблема деформации тонких слоев также рассматривается в контексте механического поведения многослойных конструкций [98-100].

В работах Б. Одоли [125-127] были исследованы процессы потери устойчивости покрытий без процесса образования отслоений. В них изучалось деформирование пластины, сопряженной с податливой подложкой, подверженной различным значениям двухосного сжимающего остаточного напряжения. Несмотря на то, что геометрия тонкой упругой пластины достаточно проста, она может привести к множеству различных мод потерей устойчивости в зависимости от условий нагрузки. В указанных работах был проведен линейный и нелинейный анализ потери устойчивости, приводящие к образованию различных видов гофр: от относительно простых волнистых полос, до достаточно сложных зигзагообразных узоров (узоры «елочка»).

Для моделирования процесса отслоения покрытий, возникающих при понижении адгезивной прочности покрытия, применяются методы механики разрушения, что требует анализа распространения трещин по границам раздела двух сред и исследования процессов потери устойчивости в областях, где произошло отслоение.

Вопросам исследования и моделирования напряженно-деформированного состояния отслоения покрытий и потери устойчивости отслоившихся участков покрытий посвящено большое количество работ. В частности, экспериментальные исследования явлений потери устойчивости покрытий с отслоением отражены в работах [102-107], а в работах Н.Ф. Морозова, П.Е. Товстика и соавторов [108-111], Дж. Хатчинсона и соавторов [33, 47, 54, 60, 80] представлены теоретические исследования вопросов, связанных с деформированием покрытий вследствие потери устойчивости. В данных работах применяют энергетический критерий определения потери устойчивости, как в линейной, так и в нелинейной постановке, а именно вычисляют параметр скорости высвобождения энергии, с помощью которого,

можно предсказать, при каких условиях может начаться отслоение покрытия (т.е. произойти потеря устойчивости), и какие факторы могут ухудшить его адгезию к подложке.

На микро- и нано уровне вопросы потери устойчивости и нелинейного деформирования атомных слоев обычно решают применением методов молекулярной динамики, с помощью которых непосредственно моделируется зарождение и распространение трещин/отслоений, например, [51-53]. На макроуровне используются методы теории механики сплошных сред, например, [54-60]. В частности, в работе [55] для решения задачи отслоения покрытия использовалась упрощенная модель в линейной теории упругости (балочное приближение). Однако для более точного описания процессов отслоения покрытия от подложки одной линейной теории недостаточно. Необходимо учитывать составляющую изгиба, из-за чего уравнения, описывающие процесс деформирования, становятся нелинейными. Для этого используют теорию тонких оболочек, существенный вклад в разработку и развитие которой внесли: В.З. Власов [13, 14], А.С. Вольмир [19, 20], А.Л. Гольденвейзер [11], Х.М. Муштари [17], С.П. Тимошенко [15, 61], В.В. Новожилов [12, 23], Л.Г. Доннелл [16], С.А. Амбарцумян [101] и многие другие. Обычно для решения задач теории оболочек используют гипотезу Кирхгофа — Лява, которая накладывает некоторые ограничения на поля деформаций и напряжений, с помощью которой можно перейти от трехмерной задачи к двумерной. Существуют различные варианты (частные случаи) теории тонких оболочек: уравнения Эйлера — Бернулли для поперечного изгиба балок, уравнения Софи — Жермен, в которой не учитываются продольные усилия в пластине, уравнения Фёппля — фон Кармана для продольно-поперечного изгиба, уравнения Муштари — Донелла — Власова для изгиба с учетом малой начальной кривизны и т.д.

Верность соотношений, полученных с помощью теории оболочек зависит от малого порядка величины (малого параметра) отношения толщины оболочки к характерному размеру ее срединной поверхности (длины, радиуса кривизны и т.д.) [12], где в некоторых случаях [61-64, 128] точность соотношений может дойти вплоть до второго порядка данной величины. Например, в работе Ф. Сьярле [128] показано, что определяющие уравнения теории пластин могут достигать второго порядка точности по малому параметру, а в [62] приведены строгие математические выводы справедливости уравнений Фёппля — фон Кармана для продольно-поперечного изгиба пластин. В работе И.И. Воровича [65] также представлено математическое обоснование теории пологих оболочек, (оболочки с относительно малой начальной кривизной), имеющей первый порядок точности, в которой также приведен исторический обзор работ, посвященных данному классу задач. Справедливость и пределы применимости уравнений Муштари — Донелла — Власова приведены в работах [13, 16, 17]. Тем не менее, не для всех типов задач имеются строгие

доказательства асимптотической точности, однако большой теоретический и практический опыт применения теории тонких оболочек свидетельствует о ее эффективности.

При применении теории тонких оболочек и оценке точности полученных решений важно учитывать, что не только определяющие уравнения, но и граничные условия должны записываться с необходимой точностью, а именно как минимум с той же точностью, что и определяющие уравнения. В качестве граничных условий обычно используют условие жесткой заделки, оправдывая это «массивностью» основания (подложки), с которым рассматриваемое тонкостенное покрытие сопряжено. Однако, более детальное рассмотрение показывает, что условие жесткой заделки выполняется лишь приближенно, в частности при моделировании отслоения пластины при тех же упругих свойствах отслоившегося участка и «массивной» подложки обеспечивается лишь первый порядок точности по малому параметру отношения толщины к характерному размеру тела [66-68]. Если такая точность оказывается недостаточной, необходимо применять более точные условия упругой заделки, которая подразумевает предположение о линейной взаимосвязи между углом наклона пластины в месте начала отслоения к изгибающему моменту, действующему в данном сечении. Более общими являются условия обобщенной упругой заделки, которые описывают линейную зависимость между производной прогиба и тангенциальным смещением в точке заделки от продольной силы и изгибающего момента, действующих в этой точке посредством матрицы (размерностью 2×2) податливости [58, 59, 69-78]. В частности, в работах [58, 59] с помощью данных граничных условий была решена задача об отслоении покрытия от плоской подложки. Отслоившийся участок покрытия моделировался как сопряженная с основанием по краям пластина. Было проведено исследование о потере устойчивости отслоившегося участка покрытия в зависимости от податливости подложки с прямолинейной границей отслоения. В результате было определено критическое напряжение, при котором происходит потеря устойчивости, величина прогиба, скорости высвобождения энергии вдоль криволинейной и прямолинейной границы отслоения, а также коэффициенты интенсивности напряжений K_I и K_{II} на самой границе отслоения. Хотя лишь коэффициент пропорциональности между углом поворота и изгибающего момента вносит поправку, не выходящую за рамки точности, обеспечиваемой теорией пластин, тем не менее, исследования [66-68] показывают, что учет всех четырех коэффициентов податливости может улучшить точность расчетов. Для более сложных моделей можно расширить условие обобщенно упругой заделки, например, в работах [4-6] для решения задачи теории цилиндрических оболочек используются граничные условия, при котором компоненты смещения срединной поверхности и угла поворота линейно зависят продольному, поперечному усилиям и изгибающему моменту посредством матрицы податливости размерности 3×3 .

Если у покрытия и подложки различаются упругие характеристики, то погрешность, возникающая при применении условий жесткой заделки, увеличивается с увеличением податливости подложки [58]. Даже в случае абсолютно жестких подложек граничные условия жесткой заделки вносит некоторую погрешность [58], это объясняется тем, что соединение покрытия осуществляется по его нижней грани поверхности, а не по его торцу, что в условиях отсутствия закрепления противоположной грани вызывает поворот сечения при приложении момента (рис. 1.2).

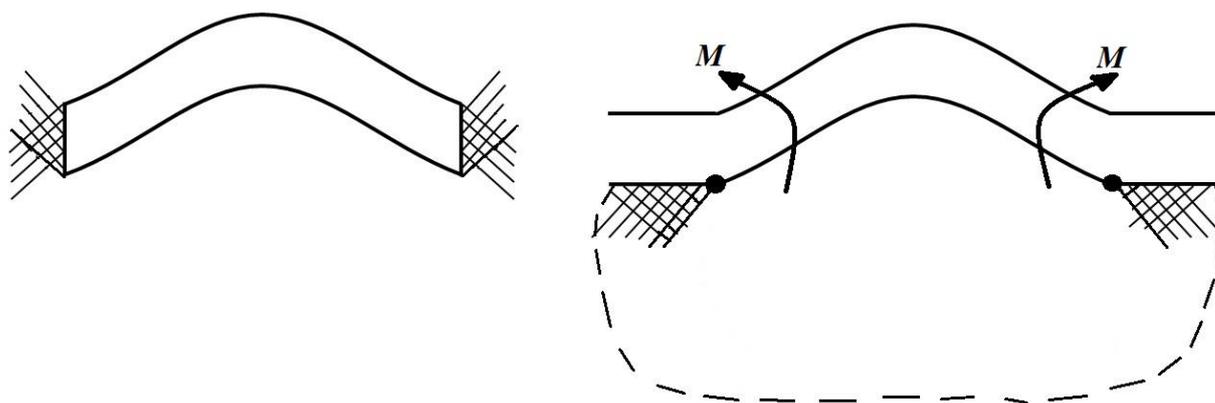


Рис. 1.2. Схемы граничного условия жесткой заделки и области сопряжения отслоившегося участка с подложкой

Исследование воздействия податливости подложки было проведено в работах [58, 59, 69-79]. В частности, в работах [59, 79] рассматривалось влияние относительной податливости подложки на параметры отслоения: деформирование отслоившейся области покрытия, напряжение, соответствующее потери устойчивости без учета влияния на эти параметры ширины отслоения. В работе [58] проводился анализ совместного влияния относительной податливости подложки и отношения ширины отслоения к ее толщине на величину напряжения потери устойчивости. При этом профиль отслоения представлялась в виде пластины, для которого граничные условия записывались в виде граничных условий обобщенно упругой заделки, т.е. условия пропорциональности величин производной прогиба (угла поворота) и продольного смещения в точке заделки продольной силе и изгибающему моменту, действующим в точке заделки с помощью матрицы податливости (коэффициентов упругой заделки). Коэффициенты вычислялись при помощи численных методов решения системы интегральных уравнений в зависимости от указанных параметров [80].

Важно отметить, что, несмотря на достаточно тщательное изучение вопроса деформации пластин на упругих основаниях в линейной постановке, исследования по решению нелинейных задач, особенно аналитических решений при сложных граничных условиях типа «упруго-податливая заделка» в современной литературе встречаются редко. Большинство исследований сосредоточено на спектральных задачах, касающихся колебаний пластин с податливой заделкой по краям [129-133], включая

влияние трансверсальной податливости, основанной на модели Миндлина [129]. При этом в основном рассматриваются прямоугольные пластины [130-132]. Необходимо отметить, что в линейных задачах некоторые авторы учитывают неоднородность констант упругого закрепления пластин [131, 133], а также рассматривается ортотропный материал [133]. Также изучаются задачи, связанные с потерей устойчивости плоской формы равновесия пластин под воздействием нагрузок в их плоскости [134, 136]. Кроме того, существуют решения задач о колебаниях оболочек с реперной поверхностью канонической формы с учётом податливости закрепления краев [137]. В работе [138] получено численное решение задачи об изгибе круговой пластины переменной толщины с учётом трансверсальной податливости на сдвиг методом коллокаций.

Существует множество работ по определению коэффициентов упругой заделки [54, 58, 80-88 и др.]. Для их определения решаются задачи о распространении трещины по границе раздела двух упругих сред. Отметим, что в большинстве работ, при решении задач об отслоении (распространении трещины) особое внимание уделялось поведению решения в окрестности вершины трещины, что связано с вычислением коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Однако для полного исследования недостаточно расчета КИНа. В задачах, касающихся отслоения покрытий и потери устойчивости, важно также изучать поведение отслоения вдали от вершины трещины. При наличии ненулевых усилий и моментов, воздействующих на отслоившийся участок покрытия, ведущие члены асимптотики смещений в окрестности трещины будут соответствовать смещениям балки (пластины), подвергающейся воздействию указанных усилий и моментов с определёнными граничными условиями. Как упоминалось, эти граничные условия не соответствуют условию жесткой заделки в месте вершины трещины, а представляют собой условия обобщенной упругой заделки.

В работах [85-92] для определения коэффициентов упругой заделки решаются задачи об отслоении полосы от полуплоскости. Данные задачи решались в различных постановках как аналитически, так и полуаналитически, а также численно. Например, в работе [59] коэффициенты упругой заделки для разных случаев были получены с помощью метода конечных элементов, а в [80] с учетом некоторых упрощающих предположений с помощью численного решения системы интегральных уравнений. В работах К.Б. Устинова [85-87] рассматривается общая постановка плоской задачи о полубесконечной трещине, расположенной на границе между полуплоскостью и полосой другого материала. С использованием соотношений теории упругости была установлена взаимосвязь между нормальными и касательными напряжениями на поверхности контакта материалов и производными от скачков смещения. С помощью полученных соотношений были получены значения коэффициентов матрицы податливости 3×3 . Полученные результаты

использовались для решения ряда задач. Однако аналитические решения, доведенные до интегральных выражений, соответствуют только случаю полубесконечных трещин, либо модели полуплоскости и полосы для материалов с одинаковыми упругими свойствами [87, 89-92], либо введением дополнительных упрощений, таких как рассмотрение отслаиваемой полосы как балки или стержня.

Также кроме податливости основания (подложки) на отслоение покрытия влияют его геометрические характеристики. В частности, начальная кривизна цилиндрической подложки или радиус основания круговой подложки влияют на процесс отслоения покрытий. В работах [47, 60] исследовалось влияние начальной кривизны на процесс отслоения, однако в данных работах не учитывалась податливость подложки. Кроме того в работах К.Б. Устинова (напр. [113]) исследовалось одновременное влияние кривизны и податливости подложки для случая теории слабо-искривленных пластин. Одна из задач текущего исследования заключается в анализе совокупного влияния указанных факторов на процесс отслоения покрытия с изначально большей кривизной.

Стоит подчеркнуть, что, используя граничные условия жесткой заделки в задачах теории тонких оболочек можно получить аналитические решения, например, для моделей деформирования балки или пластины [15, 20], однако при использовании граничных условий обобщенно упругой заделки практически невозможно получить аналитическое представление решения. Поэтому при использовании граничных условий обобщенно упругой заделки, тем самым повышая точность, необходимо применить эффективный численный метод решения задачи.

Таким образом, на основе сказанного, сформулируем подход к решению задач об отслоениях. Отслоившиеся участки покрытия будут моделироваться в рамках теории тонких оболочек с граничными условиями типа обобщенно упругой заделки, т.е. линейной зависимости компонент смещения и угла поворота с компонентами усилий и изгибающему моменту посредством коэффициентов упругой заделки, которые получаются из аналитических решений об отслоении от основания полубесконечных пластин либо при помощи численных методов (метода конечных элементов).

ГЛАВА 2. ОБЩАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Современные достижения в науке и технике предъявляют строгие требования к точности математических моделей процессов. Разработка адекватной математической модели позволяет воспроизвести реальное поведение тонкостенных конструкций в условиях эксплуатации при различных статических и динамических нагрузках. Поскольку классическая теория оболочек представлена в ряде фундаментальных работ, в этом разделе будут кратко перечислены основные положения, уравнения и соотношения, которые будут использоваться для решения соответствующих задач.

2.1. Основные положения и геометрические сведения в теории оболочек

Оболочка представляет собой тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, в частности для тонкой оболочки расстояние между данными поверхностями мало, по сравнению с другими его размерами. Геометрическое место точек, находящихся на равном расстоянии от этих поверхностей, называется срединной поверхностью оболочки.

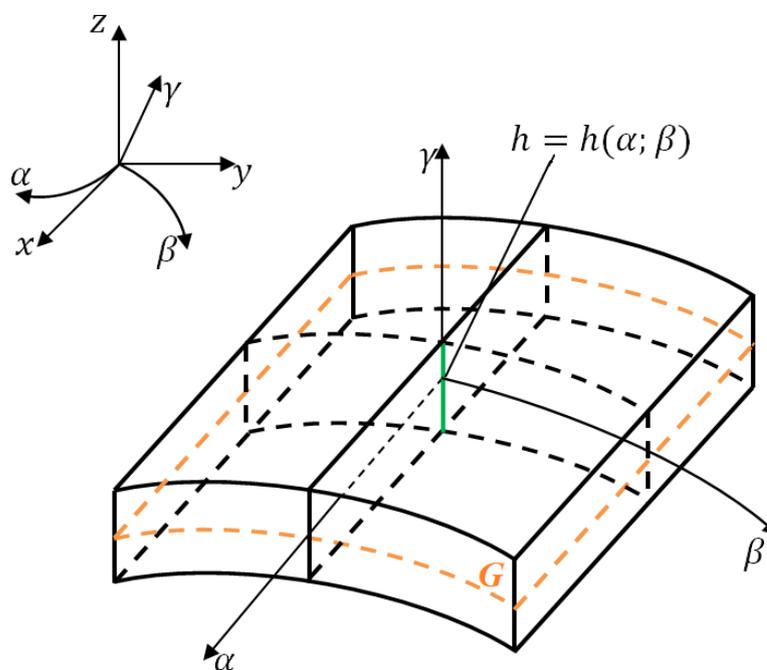


Рис. 2.1. Геометрическая модель оболочки, G – срединная поверхность оболочки

Геометрия оболочки полностью определена, если заданы ее срединная поверхность и толщина (точнее функция изменения толщины) (рис. 2.1).

В общем случае в качестве системы координат обычно используют криволинейную ортогональную систему координат (α, β, γ) , причем направление γ совпадает с нормалью к срединной поверхности, а при $\gamma = 0$ определяется сама срединная поверхность оболочки с помощью двух оставшихся координат (α, β) . В теории оболочек трехмерная задача сводится к двумерной [11-13], т.е. трехмерной оболочке ставится в соответствие ее срединная поверхность, т.е.

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow g(\alpha, \beta)$$

Для данного перехода принимаются гипотезы Кирхгофа – Лява, которые состоят из двух компонент

- кинематическая (геометрическая) гипотеза: прямолинейный нормальный к срединной поверхности элемент оболочки (до деформации) остается прямолинейным и нормальным после деформации, при этом длина данного элемента не меняется;
- силовая гипотеза: нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности, можно пренебречь

Следовательно, математически гипотеза Кирхгофа – Лява имеет вид:

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0, \quad \sigma_{33} = 0. \quad (2.1)$$

Стоит отметить, что в общем случае для описания напряженно-деформированного состояния оболочки используют отсчетную поверхность, которая является базовой поверхностью, относительно которой определяются все перемещения и деформации в теле. При выборе отсчетной поверхности обычно учитывают следующие аспекты: геометрическая форма и симметрия оболочки, условия применяемой нагрузки, удобство математического описания. В данной работе в рассмотренных задачах отсчетная поверхность соответствует срединной поверхности.

Известно [12], что погрешность гипотезы Кирхгофа – Лява в теории оболочек составляет величина порядка h/R , где R — характерный размер срединной поверхности, например, в случае цилиндрической оболочки и круглой пластины R — радиус основания.

Несмотря на некоторые погрешности, теория оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа – Лява, активно используется для решения различных линейных и нелинейных статических задач механики деформируемого твердого тела.

Обычно считается [11-13], что оболочка является тонкой, если выполняется условие $h/R \leq 1/20$. Необходимо подчеркнуть, что использование гипотезы Кирхгофа – Лява не всегда приводит к удовлетворительным результатам при работе с оболочками из неоднородных материалов, в частности для композитов, особенно в задачах, связанных с поведением вблизи точек приложения сосредоточенных сил, а также при анализе высокочастотных и нестационарных процессов, происходящих в короткие временные промежутки. В таких ситуациях применяются другие,

более уточненные теории оболочек, к примеру, уточненная классическая теория С.П. Тимошенко, а также различные «неклассические» методы. Основные принципы этих теорий освещены в трудах таких авторов, как С.П. Тимошенко, В.В. Новожилов, В.З. Власов, А.С. Вольмир, Х.М. Муштари, К.З. Галимов и других.

В работах [11-20 и др.] было показано, что, несмотря на введенные предположения в гипотезе, теория тонких оболочек, а также теория пологих оболочек для изотропных материалов предоставляет достаточно точные результаты, которые близки к экспериментальным данным при расчете напряженно-деформированного состояния оболочки. Настоящая работа сосредоточена на изучении вопросов, которые соответствуют и не выходят за рамки гипотезы Кирхгофа – Лява.

2.2. Уравнения деформаций и перемещений

Согласно геометрической (кинематической) составляющей гипотезы Кирхгофа – Лява следует, что компоненты перемещений u_j , $j = 1, 2, 3$ точки в оболочке распределяются по толщине оболочки согласно линейному закону [22]:

$$\begin{aligned} u_1(\alpha, \beta, \gamma) &= u(\alpha, \beta) + \gamma\theta(\alpha, \beta), \\ u_2(\alpha, \beta, \gamma) &= v(\alpha, \beta) + \gamma\psi(\alpha, \beta), \\ u_3(\alpha, \beta, \gamma) &= w(\alpha, \beta) + \gamma\chi(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где u, v, w — перемещения точек срединной (нейтральной) поверхности; θ, ψ, χ — пока еще неизвестные функции. Параметры θ, ψ, χ характеризуют углы поворота нормали к рассматриваемой точке в направлениях соответствующих координат (α, β, γ) .

В общем случае нелинейной теории упругости в принятой криволинейной ортогональной системе координат деформированное состояние сплошного тела описывается шестью компонентами деформаций (компоненты тензора деформации Коши – Грина) [23, 24]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2} \left[e_{11}^2 + \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right)^2 \right], \\ \varepsilon_{12} &= e_{12} + e_{11} \left(\frac{1}{2} e_{12} - \omega_3 \right) + e_{22} \left(\frac{1}{2} e_{12} + \omega_3 \right) + \left(\frac{1}{2} e_{13} - \omega_2 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} e_{23} + \omega_1 \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} u_2 + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} u_3, \\
e_{12} = e_{21} &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_1}{H_1} \right) \\
2\omega_1 &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} (H_3 u_3) - \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 u_2) \right],
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где H_1, H_2, H_3 — параметры Ламе, а остальные компоненты деформаций выражаются аналогично с помощью циклической перестановки индексов $(1, 2, 3)$, (α, β, γ) . Стоит отметить, что в случае линейной теории упругости параметры e_{ij} и ω_k из (2.4) соответствуют деформациям и углу поворота вокруг соответствующей координаты.

Если координатные линии срединной поверхности (α, β) совпадают с линиями главных кривизн, то параметры Ламе будут представляться в следующем виде

$$H_1 = A \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right), \quad H_2 = B \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right), \quad H_3 = 1, \tag{2.5}$$

где R_α, R_β — главные радиусы кривизны, A, B — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности [25], которые связывают приращения дуг координатных линий ds_α, ds_β с приращениями соответствующих им криволинейных координат: $ds_\alpha = A d\alpha, ds_\beta = B d\beta$. В частности, для круговой

цилиндрической оболочки радиуса R имеем: $H_1 = 1, H_2 = \left(1 + \frac{\gamma}{R} \right)$, а для

пластины: $H_1 = 1, H_2 = 1$. Подставив формулы из (2.2) в соотношения для компонент деформаций $\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$ из (2.3) с учетом гипотезы Кирхгофа – Лява, а также (2.5), применив соотношения Кодацци – Гаусса в главных координатах [22], предположив, что параметры e_{ij} и поворот ω_3 элемента оболочки относительно нормали γ к срединной поверхности являются малыми величинами более высокого порядка, чем повороты ω_1, ω_2 относительно осей α, β , и отбросив малые величины, то найдем [22, 26]:

$$\theta \approx -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha}, \quad \psi \approx -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_\beta}, \quad \chi \approx 0. \tag{2.6}$$

В итоге

$$\begin{aligned}
u_1(\alpha, \beta, \gamma) &= u(\alpha, \beta) + \gamma \left(-\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha} \right), \\
u_2(\alpha, \beta, \gamma) &= v(\alpha, \beta) + \gamma \left(-\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_\beta} \right), \\
u_3(\alpha, \beta, \gamma) &= w(\alpha, \beta).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Определим остальные компоненты деформаций $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$. Подставив полученные соотношения (2.7) в (2.4), получим

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \frac{e_1 + \gamma \chi_1}{1 + \gamma/R_\alpha}, \quad e_{22} = \frac{e_2 + \gamma \chi_2}{1 + \gamma/R_\beta}, \\
e_{12} = e_{21} &= \frac{\omega_1^0 + \gamma \tau_1}{1 + \gamma/R_\alpha} + \frac{\omega_2^0 + \gamma \tau_1}{1 + \gamma/R_\beta} = \frac{1}{\left(1 + \gamma/R_\alpha\right)\left(1 + \gamma/R_\beta\right)} \cdot \\
&\cdot \left[\left(1 - \frac{\gamma^2}{R_\alpha R_\beta}\right) \omega_{12} + 2 \left(1 + \left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta}\right) \frac{\gamma}{2}\right) \gamma \tau \right],
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha}, \quad e_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta}, \\
\omega_{12} &= \omega_1^0 + \omega_2^0 = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right), \\
\chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta_2, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta_1, \\
2\tau &= \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta_2 + \\
&+ \frac{1}{R_\alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right) + \frac{1}{R_\beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right), \\
\theta_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_\beta}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Оставаясь в рамках концепции тонких оболочек, отбросив величины более высокого порядка малости, получим соответствующие компоненты деформаций [22]:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 + \gamma K_1, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \gamma K_2, \quad \varepsilon_{12} = \omega + \gamma K_{12}, \tag{2.10}$$

где

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= e_1 + \frac{1}{2}\theta_1^2, & \varepsilon_2 &= e_2 + \frac{1}{2}\theta_2^2, \\
\omega &= \omega_{12} + \theta_1\theta_2, \\
K_1 &= \chi_1, & K_2 &= \chi_2, & K_{12} &= 2\tau,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ являются нормальными деформациями срединной поверхности оболочки в направлениях α, β , ω — сдвиговая составляющая деформации срединной поверхности, K_1, K_2 отвечают за изменения кривизны (искривление), K_{12} — отвечает за кручение срединной поверхности оболочки, т.е. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ — компоненты тангенциальной деформации, K_1, K_2, K_{12} — компоненты изгибной деформации.

Для случая пологих оболочек допускается, что в формулах (2.6) для углов поворота отбрасываются слагаемые, содержащие тангенциальные перемещения u и v . Следовательно, составляющие (2.11) из соотношений компонент деформаций (2.10) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_\alpha}, & e_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta}, \\
\omega_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right), \\
\theta_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}, & \theta_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\
\chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta_2 = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right), \\
\chi_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta_1 = -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \cdot \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right), \\
2\tau &= \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \theta_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_1}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta_2 = \\
&= -\frac{2}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

2.3. Напряженное состояние. Закон Гука.

Так как мы рассматриваем модель однородного изотропного упругого тела, то компоненты напряжений связаны с компонентами деформаций обобщенным законом Гука [12, 13, 18, 22 и др.]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.13)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. В рамках теории тонких оболочек, используя гипотезу Кирхгофа – Лява (а именно тем, что $\sigma_{33} \approx 0$), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \delta_{33} \right) = \\ &= \frac{\nu E}{(1+\nu)} \left(\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right) = \\ &= \frac{\nu E}{(1+\nu)} \left(\frac{(1-\nu)\varepsilon_{33}}{(1-2\nu)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right) \approx 0 \Rightarrow \varepsilon_{33} \approx -\frac{\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_{11} &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{2(1-\nu)} \varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.4. Усилия и моменты

В теории оболочек вместо привычных понятий из общей физики «сила» и «момент» используются такие интегральные характеристики как «усилие» и «погонный момент». Пусть $N_1 = N_1(\alpha, \beta)$, $N_{12} = N_{12}(\alpha, \beta)$ – нормальные и сдвигающие усилия, действующие на площадке нормального сечения тела оболочки $\alpha = const$; $N_2 = N_2(\alpha, \beta)$, $N_{21} = N_{21}(\alpha, \beta)$ – нормальные и сдвигающие усилия, действующие на площадке другого нормального сечения тела оболочки $\beta = const$; эти усилия представляют собой силу, отнесенную к единице длины соответствующей координатной линии (рис.

2.2). Соответственно размерность усилий будет $\left[\frac{H}{M} \right]$.

Пусть также $M_1 = M_1(\alpha, \beta)$, $M_{12} = M_{12}(\alpha, \beta)$, $Q_1 = Q_1(\alpha, \beta)$ обозначают соответственно изгибающий момент, крутящий момент и поперечное усилие, приложенные на площадке $\alpha = const$ с внешней нормалью, направленной в сторону положительной касательной к линии α срединной поверхности, $M_2 = M_2(\alpha, \beta)$, $M_{21} = M_{21}(\alpha, \beta)$, $Q_2 = Q_2(\alpha, \beta)$ – изгибающий момент, крутящий момент и поперечное усилие, приложенные на другой площадке $\beta = const$ с внешней нормалью, направленной соответственно в сторону положительной касательной к линии β срединной поверхности. Аналогично моменты и

поперечные силы относятся к единице длины соответствующей координатной линии (рис. 2.2). Соответственно размерность погонных моментов будет $\left[\frac{H \cdot M}{M} \right]$.

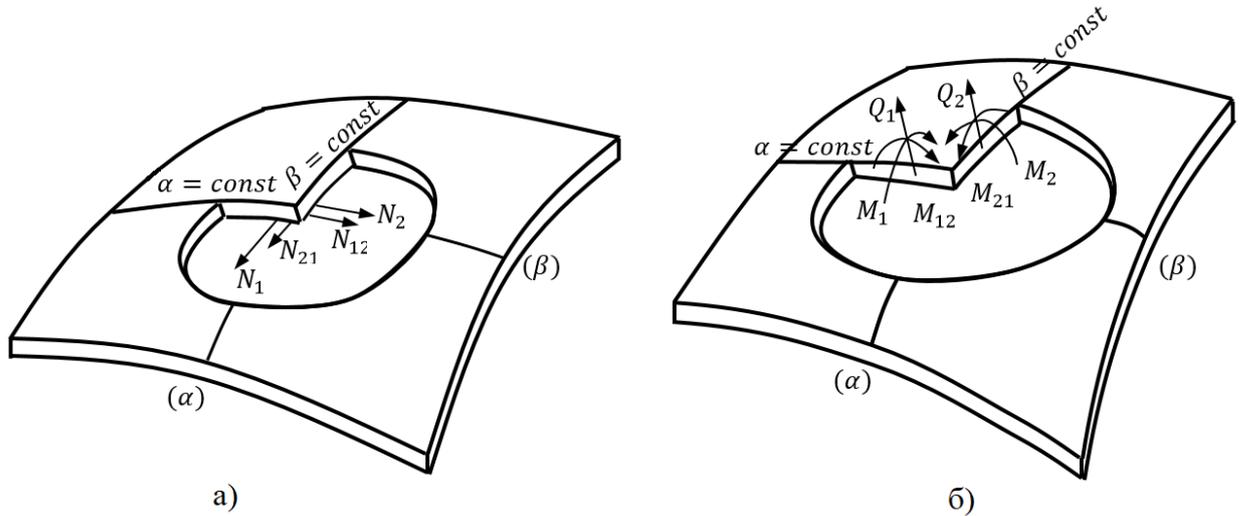


Рис. 2.2. Компоненты усилий и моментов, действующих на элемент оболочки

Данные характеристики определяются через напряжения оболочки по следующим соотношениям [12, 13, 22]:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right) d\gamma, & N_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right) d\gamma, \\
 N_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right) d\gamma, & N_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right) d\gamma, \\
 Q_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right) d\gamma, & Q_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right) d\gamma, \\
 M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right) \gamma d\gamma, & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{22} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right) \gamma d\gamma, \\
 M_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta} \right) \gamma d\gamma, & M_{21} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21} \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha} \right) \gamma d\gamma.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Из данных выражений можно вывести соотношения упругости, устанавливающие связь между статическими и геометрическими параметрами, а именно внутренними усилиями, моментами, а также компонентами полной деформации. Их можно получить путем подстановки соотношений из (2.10) в (2.15), а затем непосредственного интегрирования:

$$\begin{aligned}
N_1 &= D_N (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad N_2 = D_N (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \\
N_{12} &= D_N \frac{(1-\nu)}{2} \left(\omega + \frac{h^2}{6R_\beta} K_{12} \right), \quad N_{21} = D_N \frac{(1-\nu)}{2} \left(\omega + \frac{h^2}{6R_\alpha} K_{21} \right), \\
M_1 &= D_M (K_1 - \nu K_2), \quad M_2 = D_M (K_2 - \nu K_1), \\
M_{12} &= \frac{1}{2} D_M (1-\nu) K_{12}, \quad M_{21} = \frac{1}{2} D_M (1-\nu) K_{21},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

где D_N , D_M — тангенциальная и изгибная (цилиндрическая) жесткости соответственно:

$$D_N = \bar{E}h, \quad D_M = \frac{\bar{E}h^3}{12}, \quad \bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}. \tag{2.17}$$

2.5. Потенциальная энергия деформации оболочки

В случае идеально упругой деформации рассматриваемое тело, подверженное воздействию внешних сил, обладает свойством накапливания энергии в обратимой форме, т.е. при устранении внешних сил данная энергия расходуется на восстановление первоначальной формы тела, при этом работа, затраченная на деформацию, не зависит от того, по какому закону изменяются смещения, прежде чем они достигли своих окончательных значений.

Энергию, накапливаемую при деформации в единичном объеме материала, выделенном около определенной точки, называют удельной потенциальной энергией деформации или упругим потенциалом в окрестности рассматриваемой точки. Упругий потенциал имеет следующий вид [22, 24]:

$$P = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \cdot \varepsilon_{33} + \sigma_{12} \cdot \varepsilon_{12} + \sigma_{23} \cdot \varepsilon_{23} + \sigma_{13} \cdot \varepsilon_{13}). \tag{2.18}$$

Для элементарного объема $dV = H_1 H_2 H_3 d\alpha d\beta d\gamma$ потенциальная энергия деформации имеет вид

$$dU = PdV. \tag{2.19}$$

Соответственно потенциальная энергия, накопленное во всем упругом теле объема V будет

$$U = \iiint_V PdV. \tag{2.20}$$

В рамках теории оболочек, в соответствии с гипотезой Кирхгофа – Лява, из выражения потенциальной энергии для упругого тела (2.18) с учетом (2.1) и (2.5) получим

$$dV = H_1 H_2 H_3 d\alpha d\beta d\gamma = A \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right) B \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right) d\alpha d\beta d\gamma, \quad (2.21)$$

$$U = \frac{1}{2} \iint_G \left(\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{11} \cdot \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \cdot \varepsilon_{12}) \left(1 + \frac{\gamma}{R_\alpha}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{R_\beta}\right) d\gamma \right) AB d\alpha d\beta,$$

где G – область срединной поверхности (рис. 2.1).

2.6. Граничные условия

Помимо уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние оболочки, также должны быть заданы граничные условия на контурах, ограничивающих оболочку. В общем случае на каждом контуре оболочки должны быть заданы четыре граничных условия.

Достаточно часто в задачах исследования систем «покрытие-подложка» используют граничные условия типа жесткой заделки, которая через компоненты смещений имеют вид [22]

$$\begin{aligned} \text{на контуре } \alpha = const: \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \theta_1 = 0, \\ \text{на контуре } \beta = const: \quad & u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \theta_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где параметры θ_1, θ_2 определяются соотношениями (2.9), а в случае пологих оболочек из (2.12).

Однако для учета влияния податливости подложки необходимо использовать граничные условия типа обобщенно упругой заделки

$$\begin{aligned} \text{на контуре } \alpha = const: \quad & \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{33} \\ M_{11} \end{pmatrix}, \\ \text{на контуре } \beta = const: \quad & \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{33} \\ M_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $a_{ij}, (i, j = 1, 2, 3, 4)$ – коэффициенты упругой заделки (коэффициенты матрицы податливости), причем $a_{ij} = a_{ji}$. В частности, для цилиндрической оболочки при условии симметричной нагрузки размерность матрицы упругой заделки сводится к 3×3 за счет обнуления одной из тангенциальных компонент смещения.

ГЛАВА 3. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОГО ПОКРЫТИЯ ПОСЛЕ УТЕРИ КОНТАКТА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ; ОТСЛОЕНИЕ, РАСПОЛОЖЕННОЕ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ

3.1. Геометрия, основные соотношения

Согласно общему подходу к решению задач об отслоении, сформулированному в главе 1, рассмотрим процесс деформирования покрытия, соединенного с подложкой, представляющую собой в недеформированном состоянии тонкую пологую цилиндрическую оболочку радиуса R и толщиной h . Для решения задачи будем использовать криволинейную систему координат (рис. 3.1), где α — осевая координата, β — окружная координата (определяющую расстояние вдоль окружности и выражающуюся через обычные цилиндрические координаты (θ, r, z) как $\beta = r \cdot \theta$), γ — нормальная координата; смещение в срединной поверхности оболочки имеет, соответственно, тангенциальные компоненты $v(\alpha, \beta)$, $u(\alpha, \beta)$ и нормальную компоненту $w(\alpha, \beta)$.

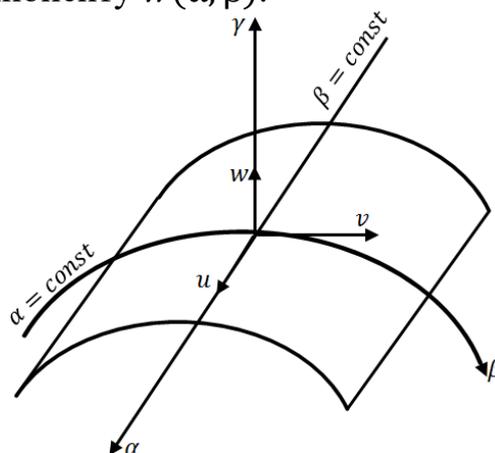


Рис. 3.1. Используемая система координат

До отслоения покрытие было полностью сопряжено с подложкой (условие отсутствия разрывов всех компонент смещения и компонент напряжения $\sigma_{\gamma i}, i = \alpha, \beta, \gamma$), при этом на покрытие действовали сжимающие усилия вдоль координат β и γ (силы, отнесенные к единице длины соответствующей координатной линии) (рис. 3.2) соответственно равные

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma h, & \sigma > 0, \\ N_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где b — полуширина отслоившего участка покрытия, при этом подложка испытывала действие напряжения (рис. 3.2)

$$p_0 = \sigma \frac{h}{R}.$$

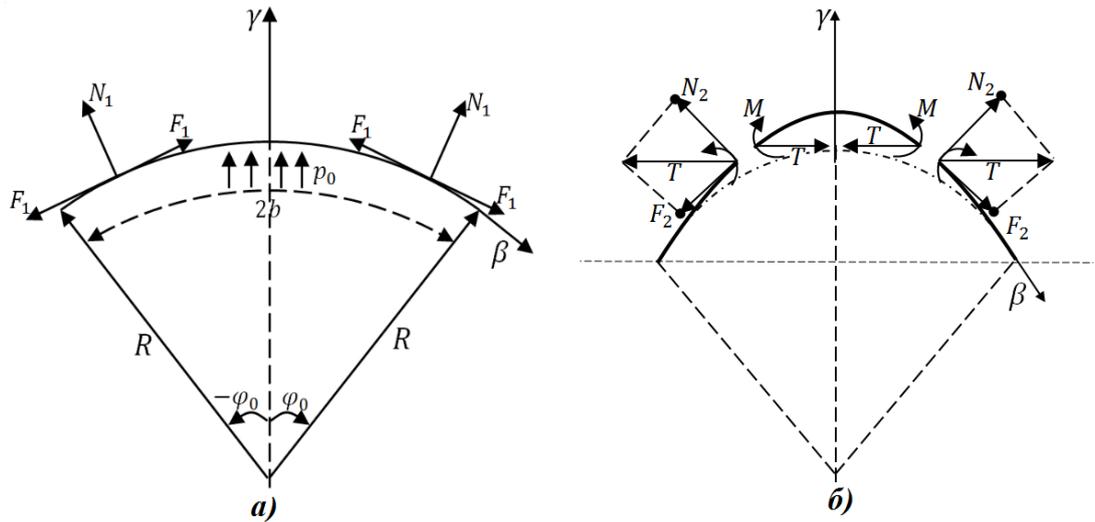


Рис. 3.2. Распределение усилий: (а) - до отслоения покрытия, (б) - после отслоения покрытия

После отслоения покрытие утрачивает связь с подложкой, что соответствует условиям $\sigma_{\gamma i} = 0, i = \alpha, \beta, \gamma$ на границе подложка-покрытие на отслоившемся участке, что соответствует условиям интерфейсной трещины. При этом на отслоившийся участок действует горизонтально сжимающее усилие равное T ($T > 0$) (рис. 3.2), проекции которой на координаты β и γ соответственно равны

$$\begin{aligned} F_2 &= T \cos \varphi_0, & T > 0, & \varphi_0 = \frac{b}{R}, \\ N_2 &= T \sin \varphi_0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

Также в точке заделки действует изгибающий момент M .

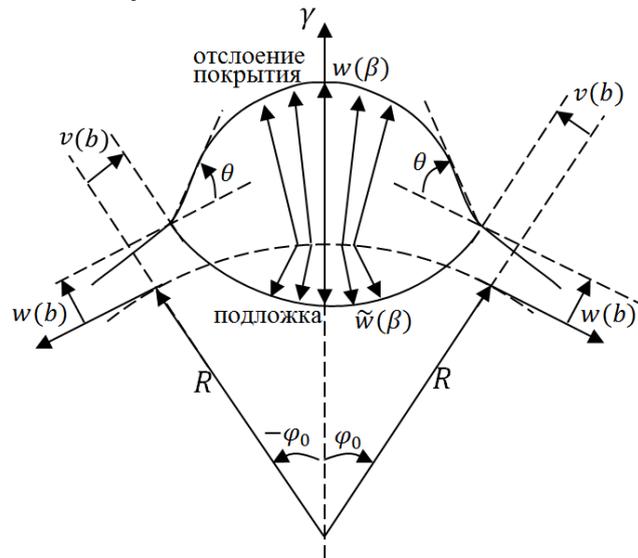


Рис. 3.3. Конфигурация отслоения покрытия

Разница между силовыми характеристиками после и до отслоения покрытия имеет вид

$$F = F_2 - F_1 = T \cos \varphi_0 - \sigma h. \quad (3.3)$$

$$N = N_2 - N_1 = T \sin \varphi_0 - 0 = T \sin \varphi_0. \quad (3.4)$$

$$\Delta p = -p_0, \quad (3.5)$$

где Δp — разница напряжений в подложке после и до отслоения. Из неравенств $\sigma > 0, T > 0, \sigma h > T \cos \varphi_0$, следует, что $F < 0, N > 0$.

Для сечений, расположенных вдали от краев отслоения, напряженное состояние может быть описано в приближении плоской деформации, из чего следует, что одна из тангенциальных компонент смещений будет отсутствовать, т.е. $u(\alpha, \beta) \equiv 0$, а остальные компоненты будут зависеть только от одной переменной: $v = v(\beta), w = w(\beta)$. В дальнейшем анализе будут использованы следующие параметры (отмечены на рис. 3):

$$\theta = -w'(\beta)\Big|_{\beta=b} \text{ — угол поворота отслоения в точке заделки;}$$

$$\tilde{w}(\beta) \text{ — смещение поверхности подложки.}$$

Дифференциальные уравнения изгибаемой по образующей пологой цилиндрической поверхности имеют вид [13-17, 60]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{F_2}{R} = 0, \quad D = D_M = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta} = 0. \quad (3.7)$$

где D — изгибная жесткость покрытия, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона покрытия. Данные уравнения обычно называют уравнениями Муштари – Доннелла – Власова [13, 16, 17].

Граничные, а также начальные условия (условие симметрии) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \beta}(\beta = 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3}(\beta = 0) = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}(\beta = b) = \frac{M}{D}, \quad w(\beta = b) = w_b. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подчеркнем, что в данной задаче неизвестными являются изгибающий момент M , смещение в точке заделки w_b , усилия F_2 и N_2 .

Для доопределения постановки задачи и учета влияния подложки воспользуемся граничными условиями, соответствующими условию обобщенной упругой заделки, т.е. пропорциональности продольного и нормального смещения и угла поворота в точке заделки действующим в этой точке продольной и поперечной силам и изгибающему моменту (модель, в рамках которой влиянием поперечных смещений и перерезывающих сил в точке заделки пренебрегалось была рассмотрена в [113])

$$\bar{E} \begin{pmatrix} v(b) \\ h\theta \\ w(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ h^{-1}M \\ N \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \frac{E}{(1 - \nu^2)}, \quad (3.9)$$

где F, N определяются из соотношений (3.3), (3.4), a_{ij} (где $a_{ij} = a_{ji}$) — матрица коэффициентов упругой заделки (матрица жесткости).

С учетом выражений (3.3), (3.4) граничные условия (3.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{E}v(b) &= a_{11}(T \cos \varphi_0 - \sigma h) + a_{12}h^{-1}M + a_{13}T \sin \varphi_0, \\ -\bar{E}hw'(b) &= a_{12}(T \cos \varphi_0 - \sigma h) + a_{22}h^{-1}M + a_{23}T \sin \varphi_0, \\ \bar{E}w(b) &= a_{13}(T \cos \varphi_0 - \sigma h) + a_{23}h^{-1}M + a_{33}T \sin \varphi_0.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Решая дифференциальное уравнение (3.6) с учетом условия (3.7) и граничных условий (3.8), получим

$$w(\beta) = w_b + \frac{(\beta^2 - b^2)}{2R} + \left(\frac{M}{D} - \frac{1}{R}\right) \left(\frac{D}{T \cos \varphi_0}\right) \left(1 - \frac{\cos(\lambda\beta/b)}{\cos \lambda}\right), \quad (3.11)$$

где параметр λ определяется выражением

$$\lambda = b \sqrt{\frac{T \cos \varphi_0}{D}}. \quad (3.12)$$

Первая и вторая производная смещения (3.11) будут иметь вид

$$\frac{dw}{d\beta} = \frac{\beta}{R} + \left(\frac{M}{D} - \frac{1}{R}\right) \left(\frac{D}{T \cos \varphi_0}\right) \frac{\lambda \sin(\lambda\beta/b)}{b \cos \lambda}, \quad (3.13)$$

$$\frac{d^2w}{d\beta^2} = \frac{1}{R} + \left(\frac{M}{D} - \frac{1}{R}\right) \frac{\cos(\lambda\beta/b)}{\cos \lambda}. \quad (3.14)$$

В частности, из решения (3.11) следует, что прогиб в центре выпучивания покрытия равен

$$w(\beta = 0) = w_b - \frac{b^2}{2R} + \left(\frac{M}{D} - \frac{1}{R}\right) \left(\frac{D}{T \cos \varphi_0}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos \lambda}\right), \quad (3.15)$$

В (3.11) параметры M, T, w_b по-прежнему не определены (также как и параметр λ , выражаемый через T). Для их определения воспользуемся тремя граничными условиями (3.10).

До отслоения на покрытие действовали напряжения $\sigma_{\beta\beta}^0$, а после отслоения $\sigma_{\beta\beta}$:

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta\beta}^0 &= -\frac{F_1}{h} = -\sigma, \\ \sigma_{\beta\beta} &= -\frac{F_2}{h} = -\frac{T \cos \varphi_0}{h}, \\ \Delta\sigma_{\beta\beta} &= \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\beta\beta}^0 = \frac{-T \cos \varphi_0 + \sigma h}{h} = \frac{-F}{h}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Связь между дополнительными деформациями и смещениями [13, 21, 60] в принятой постановке задачи, где одна из компонент смещения тождественно равна нулю $u(\alpha, \beta) \equiv 0$, имеет вид

$$\Delta\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{dv}{d\beta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\beta}\right)^2. \quad (3.17)$$

Подстановка (3.16) в выражение для дополнительных деформаций (3.17) дает

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{\Delta\sigma_{\beta\beta}}{E} = \frac{-F}{Eh} = \frac{-T \cos \varphi_0 + \sigma h}{Eh} = \frac{dv}{d\beta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dv}{d\beta} = \frac{-F}{Eh} - \frac{w}{R} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Интегрирование данного выражения от 0 до b дает разность тангенциального смещения в точках b и 0. Поскольку в силу симметрии тангенциальное смещение в нуле равно нулю $v(\beta = 0) = 0$, то:

$$v(b) = \frac{-Fb}{Eh} - \int_0^b \left(\frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\beta} \right)^2 \right) d\beta. \quad (3.19)$$

После подстановки в последнее выражение формулы (3.11) и интегрирования, получаем

$$v(b) = \frac{-Fb}{Eh} + \frac{b^3}{6R^2} - w_b \frac{b}{R} - \frac{\lambda}{\cos^2 \lambda} (2\lambda - \sin 2\lambda) \frac{(D - MR)^2}{8b(T \cos \varphi_0)^2 R^2}. \quad (3.20)$$

Для удобства дальнейшего анализа введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned}f &= \frac{F}{\sigma h}, & n &= \frac{N}{\sigma h}, \\ m &= \frac{M}{\sigma h^2}, & \varepsilon &= \frac{\sigma}{E},\end{aligned}\quad (3.21)$$

Откуда с учетом (3.3), (3.4) получаем

$$\begin{aligned}T \cos \varphi_0 &= (f + 1)\sigma h, \\ n &= (f + 1) \tan \varphi_0.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Из неравенств $\sigma > 0$ и $T > 0$, следует $(f + 1) > 0$. А из неравенства $|\sigma h| > |T \cos \varphi_0|$, т.е. $f < 0$, суммируя сказанное получаем $-1 < f < 0$. Параметр λ также удобно выразить через безразмерные величины

$$\lambda = b \sqrt{\frac{T \cos \varphi_0}{D}} = b \sqrt{\frac{(f + 1)\sigma h 12}{Eh^3}} = \frac{b}{h} \sqrt{(f + 1)12\varepsilon} = \eta \pi \sqrt{(f + 1)}, \quad (3.23)$$

где η — отношение полуширины отслоения, к критической полуширине, соответствующей потере устойчивости отслоения от прямолинейной границы в предположении граничных условий типа жесткой заделки

$$\eta = \frac{b}{b_0}, \quad (3.24)$$

$$b_0 = \frac{h\pi}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}} \sqrt{\frac{E}{\sigma}} = \frac{h\pi}{\sqrt{12\varepsilon}}, \quad (3.25)$$

также введем безразмерную величину

$$k = \frac{b_0}{R} \Rightarrow \varphi_0 = \frac{b}{R} = \eta k. \quad (3.26)$$

Выражение (3.20) в безразмерных величинах запишется следующим образом

$$\frac{v(b)}{h} = -\frac{f\eta\varepsilon\pi}{\sqrt{12\varepsilon}} - \eta k \frac{w_b}{h} + \frac{\eta^3 k^2 \pi}{6\sqrt{12\varepsilon}} - \frac{\lambda}{\cos^2 \lambda} (2\lambda - \sin 2\lambda) \left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\eta^3 k^2 \pi}{8\sqrt{12\varepsilon}} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{mk\eta}{4(f+1)} + \frac{m^2 \sqrt{12\varepsilon}}{8\eta\pi(f+1)^2} \right). \quad (3.27)$$

Граничные условия (3.10) в безразмерных величинах будут иметь вид

$$\frac{v(b)}{h} = a_{11} \frac{F}{Eh} + a_{12} h^{-1} \frac{M}{Eh} + a_{13} \frac{N}{Eh} = a_{11} f\varepsilon + a_{12} m\varepsilon + a_{13} (f+1) \tan(\eta k) \varepsilon, \quad (3.28)$$

$$-\frac{dw(b)}{d\beta} = a_{12} \frac{F}{Eh} + a_{22} h^{-1} \frac{M}{Eh} + a_{23} \frac{N}{Eh} = a_{12} f\varepsilon + a_{22} m\varepsilon + a_{23} (f+1) \tan(\eta k) \varepsilon, \quad (3.29)$$

$$\frac{w(b)}{h} = a_{13} \frac{F}{Eh} + a_{23} h^{-1} \frac{M}{Eh} + a_{33} \frac{N}{Eh} = a_{13} f\varepsilon + a_{23} m\varepsilon + a_{33} (f+1) \tan(\eta k) \varepsilon. \quad (3.30)$$

Подстановка (3.27) в первое из граничных условий (3.28), а также подстановка третьего граничного условия (3.30) в (3.27) приведет к следующему выражению

$$\eta k (a_{13} f\varepsilon + a_{23} m\varepsilon + a_{33} (f+1) \tan(\eta k) \varepsilon) + \frac{f\eta\varepsilon\pi}{\sqrt{12\varepsilon}} + a_{11} f\varepsilon + a_{12} m\varepsilon + a_{13} (f+1) \tan(\eta k) \varepsilon - \frac{\eta^3 k^2 \pi}{6\sqrt{12\varepsilon}} + \frac{\lambda}{\cos^2 \lambda} (2\lambda - \sin 2\lambda) \left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\eta^3 k^2 \pi}{8\sqrt{12\varepsilon}} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{mk\eta}{4(f+1)} + \frac{m^2 \sqrt{12\varepsilon}}{8\eta\pi(f+1)^2} \right) = 0. \quad (3.31)$$

Подставив выражение (3.13) в безразмерных величинах во второе граничное условие (3.29), получим

$$\eta k + (m\pi\sqrt{12\varepsilon} - k)\eta \frac{\tan \lambda}{\lambda} + a_{12} f\varepsilon + a_{22} m\varepsilon + a_{23} (f+1) \tan(\eta k) \varepsilon = 0. \quad (3.32)$$

Полученная нелинейная система трех уравнений (3.30), (3.31), (3.32) позволяет определить три неизвестные m , f , w_b . Данная система сводится к более простому виду [113], после разложения тригонометрических функции по малому параметру аргумента в ряды, с оставлением только первых членов. Для решения полученной системы используются известные численные (итерационные) методы [116].

3.2. Вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы отслоения

Скорость высвобождения энергии при распространении отслоения в направлении криволинейного фронта (обозначенного как G_{SS}) может быть посчитана как высвобождающаяся упругая энергия единицы длины отслоившегося участка, поделенная на его ширину равную $2b$. Эта энергия состоит из энергии, высвободившейся из изгибаемого участка покрытия ΔU_1 , неотслоившегося участка покрытия ΔU_2 и энергии, высвободившейся из основания ΔU_3 .

Первую из данных величин можно посчитать как разницу упругой энергии отслоившегося участка до и после отслоения

$$\Delta U_1 = U_{1before} - U_{1after}. \quad (3.33)$$

Используя соотношение (2.18) для удельной потенциальной энергии деформации, обозначим как \tilde{U}_1 (энергия на единицу объема) в рассматриваемой постановке задачи выражение для нее упроститься до вида

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{2} \sigma_{\beta\beta} \varepsilon_{\beta\beta}. \quad (3.34)$$

Запишем удельные потенциальные энергии деформации до и после отслоения через дополнительные напряжения и деформации, т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta\beta} &= \sigma_{\beta\beta}^0 + \Delta\sigma_{\beta\beta}, \quad \varepsilon_{\beta\beta} = \varepsilon_{\beta\beta}^0 + \Delta\varepsilon_{\beta\beta}, \\ \tilde{U}_{1before} &= \frac{1}{2} \sigma_{\beta\beta}^0 \varepsilon_{\beta\beta}^0, \\ \tilde{U}_{1after} &= \frac{1}{2} (\sigma_{\beta\beta}^0 + \Delta\sigma_{\beta\beta}) (\varepsilon_{\beta\beta}^0 + \Delta\varepsilon_{\beta\beta}) = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{\beta\beta}^0 \varepsilon_{\beta\beta}^0 + \sigma_{\beta\beta}^0 \Delta\varepsilon_{\beta\beta} + \Delta\sigma_{\beta\beta} \varepsilon_{\beta\beta}^0 + \Delta\sigma_{\beta\beta} \Delta\varepsilon_{\beta\beta}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Потенциальную упругую энергию, отнесенную на единицу длины координаты α можно вычислить как интеграл от удельной энергии

$$\begin{aligned} \Delta U_1 = U_{1before} - U_{1after} &= \int_{-b}^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{U}_{1before} d\gamma d\beta - \int_{-b}^b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{U}_{1after} d\gamma d\beta = \\ &= \frac{(\sigma h)^2}{Eh} b - \frac{(T \cos \varphi_0)^2 b}{Eh} - D \int_0^b \left(\frac{d^2 w}{d\beta^2} \right)^2 d\beta. \end{aligned} \quad (3.36)$$

В правой части полученной формулы первый член соответствует энергии сжатия до потери устойчивости, второй — энергии сжатия после потери устойчивости, третий — энергии, связанной с изгибом. Заметим, что полученное выражение по структуре совпадает с формулой работы [58].

Второе слагаемое ΔU_2 вычислим через работу сил, прикладываемых к не отслоившимся участкам покрытия

$$\begin{aligned}\Delta U_2 &= (\sigma h + T \cos \varphi_0)(-v(\beta = b)) - M(-w'(\beta = b)) - T \sin \varphi_0 w(\beta = b) = \\ &= (f + 2)\sigma h(-v(\beta = b)) - m\sigma h^2(-w'(\beta = b)) - \\ &\quad - (f + 1)\sigma h \tan(\eta k) w(\beta = b).\end{aligned}\quad (3.37)$$

Третье слагаемое ΔU_3 учитывает влияние подложки на покрытие до ее отслоения. Энергию ΔU_3 удобно представить в виде

$$\Delta U_3 = \Delta U_3^B + \Delta U_3^H, \quad (3.38)$$

где ΔU_3^B — вклад от верхней части рассматриваемого тела, ΔU_3^H — вклад от нижней части. Величину ΔU_3^H можно оценить как

$$\Delta U_3^H = \frac{1}{2} \int_{-b}^b p_0 \tilde{w}(\beta) d\beta = \frac{\sigma h}{2R} S, \quad (3.39)$$

где площадь раскрытия трещины S имеет вид [112]

$$S := \int_{-b}^b \tilde{w}(\beta) d\beta = \frac{1}{2} \frac{4}{\bar{E}_s} \int_0^b q \sqrt{b^2 - \beta^2} d\beta = \frac{\pi}{\bar{E}_s} b^2 p_0, \quad \bar{E}_s = \frac{E_s}{(1 - \nu_s^2)}, \quad (3.40)$$

где E_s, ν_s — модуль Юнга и коэффициент Пуассона подложки. В итоге получаем

$$\Delta U_3^H = \frac{1}{2} q S = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\bar{E}_s} b^2 p_0^2 = \frac{(\sigma h)^2 b^2}{2R^2} \frac{\pi}{\bar{E}_s}. \quad (3.41)$$

Аналогично, вклад от верхней части можно оценить, как

$$\Delta U_3^B = \frac{(\sigma h)^2 b^2}{2R^2} \frac{\pi}{\bar{E}}. \quad (3.42)$$

Итак, энергия, высвободившаяся из основания, имеет вид

$$\Delta U_3 = \Delta U_3^B + \Delta U_3^H = \frac{(\bar{E} + \bar{E}_s) (\sigma h)^2}{\bar{E} \cdot \bar{E}_s} \frac{b^2}{2R^2} \pi. \quad (3.43)$$

Удельная упругая энергия покрытия до отслоения есть

$$G_0 = \frac{(1 - \nu^2) \sigma^2 h}{2} \frac{\sigma^2 h}{E} = \frac{\sigma^2 h}{2\bar{E}}. \quad (3.44)$$

Непосредственно скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы примет вид

$$G_{ss} = \frac{\Delta U}{2b} = \frac{(\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3)}{2b}. \quad (3.45)$$

Подстановка $w(\beta)$ из (3.11), и кинематических величин, входящих в (3.37) из (3.10) дает скорость высвобождения энергии (отнесенную к энергии покрытия до потери устойчивости)

$$\begin{aligned}\frac{G_{ss}}{G_0} &= \frac{(\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3)}{2bG_0} \\ &= (1 - (f + 1)^2) - \frac{k^2}{\pi^2 \varepsilon} - \frac{6\lambda}{(f + 1)^2} \frac{k^2}{\varepsilon \pi^6 \eta^4} \left(1 - \sqrt{12\varepsilon m} \frac{\pi}{k}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[\frac{\lambda^2}{12} \left(\frac{\lambda}{\cos^2 \lambda} + \tan \lambda \right) \left(1 - \sqrt{12\epsilon m} \frac{\pi}{k} \right) - \frac{\pi^2}{3} (f+1) \eta^2 \tan \lambda \right] + \\ & \frac{(\bar{E} + \bar{E}_s)}{\bar{E}_s} k^2 \eta \sqrt{3\epsilon} + \frac{\sqrt{12\epsilon}}{\pi \eta} \left(-(f+2)(a_{11}f + a_{12}m + a_{13}(f+1) \tan(\eta k)) - \right. \\ & \quad \left. -m(a_{12}f + a_{22}m + a_{23}(f+1) \tan(\eta k)) - \right. \\ & \quad \left. -(f+1) \tan(\eta k) (a_{13}f + a_{23}m + a_{33}(f+1) \tan(\eta k)) \right). \quad (3.46) \end{aligned}$$

Данное выражение отличается от соответствующего выражения [60] четвертым и пятым слагаемыми, учитывающими влияние подложки, а также наличием зависимости от поперечной силы посредством коэффициентов a_{13} , a_{23} , a_{33} , и переходит в него при $a_{13} \rightarrow 0$, $a_{23} \rightarrow 0$, $a_{33} \rightarrow 0$ и при $h/R \rightarrow 0$.

Скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль прямолинейного фронта (обозначим как G), можно вычислить двумя способами: либо через коэффициенты интенсивности напряжений [4, 80, 113] либо через непосредственное вычисление изменения упругой энергии при увеличении длины отслоения [58, 60, 4, 113]. Будем определять ее вторым способом

$$\begin{aligned} \frac{G}{G_0} &= \frac{d}{db} \left(\frac{\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3}{2G_0} \right) = \frac{d}{db} \left(b \frac{G_{ss}}{G_0} \right) = \\ &= b \frac{d}{db} \left(\frac{G_{ss}}{G_0} \right) + \left(\frac{G_{ss}}{G_0} \right) = \left| \frac{b = \eta b_0}{db = b_0 d\eta} \right| = \eta \frac{d}{d\eta} \left(\frac{G_{ss}}{G_0} \right) + \left(\frac{G_{ss}}{G_0} \right), \quad (3.47) \end{aligned}$$

где G_{ss}/G_0 определяется по формуле (3.48).

3.3. Раскрытие трещины, коэффициенты интенсивности напряжений

При наблюдении отслоения покрытия можно заметить эффект «туннелирования» [58], причиной которого может быть не только различие скоростей высвобождения энергии при распространении отслоения за счет расширения и удлинения (туннелирования) отслоения, но и возможное смыкание граней отслоившегося покрытия и подложки (перекрытие берегов). Одним из способов определения смыкания является вычисление коэффициента интенсивности напряжений K_I , характеризующий нормальный отрыв. Раскрытие трещины уменьшается при уменьшении K_I и становится отрицательным при отрицательном K_I , что соответствует перекрытию, и не является физическим. Поэтому условие $K_I = 0$ можно рассматривать как критерий остановки отслоения покрытия. В некоторых работах [58, 69, 71, 75] рассматривается аналогичная величина $\arctan(K_{II}/K_I)$, критическое значение которой при $K_I = +0$ соответствует $\pi/2$. Однако в нашем случае проще и информативнее рассчитать коэффициент интенсивности напряжений K_I

$$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{h}} = c_{11}f + c_{12}m + c_{13}n, \quad (3.48)$$

где значения параметров c_{11} , c_{12} , c_{13} приведены в [73].

Другим способом определения смыкания является вычисление угла θ из (3.9), при положительных значениях соответствующего раскрытию, а при отрицательных соответствует физически бессмысленному перекрытию берегов [4]. Поэтому условие $\theta = 0$ также можно рассматривать как альтернативный критерий максимальной ширины отслоившегося покрытия. Данные критерии соответствуют рассмотрению на различных масштабных уровнях и не обязательно должны давать одинаковую критическую ширину, но оба могут использоваться для ее оценки.

3.4. Значение коэффициентов матрицы жесткости

В работе [58] значение коэффициентов матрицы жесткости a_{ij} было получено численно. Значение коэффициента a_{11} с достаточной степенью точности аппроксимируется следующим выражением [114]:

$$a_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}} + \frac{3}{2} \left[\frac{b}{h} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s} \right)^3 \right]^{1/4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}} + \frac{3}{2} \left[\frac{\eta\pi}{\sqrt{12\varepsilon}} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s} \right)^3 \right]^{1/4}. \quad (3.49)$$

Значение коэффициента a_{12} , согласно [114], может быть аппроксимировано формулой

$$a_{12} = \sqrt{3} + 0.27 \left(\frac{h \bar{E}}{b \bar{E}_s} \right)^{2/3} = \sqrt{3} + 0.27 \left(\frac{\sqrt{12\varepsilon} \bar{E}}{\eta\pi \bar{E}_s} \right)^{2/3}. \quad (3.50)$$

Выражения для a_{22} , a_{13} , a_{23} получены аналитически в работах [73, 86, 115]

$$a_{22} = 12\delta, \quad a_{13} = 1 + \sqrt{3}\delta, \quad a_{23} = \frac{3}{2} + 6\delta^2, \quad (3.51)$$

где δ имеет вид

$$\delta = 0.635 \left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s} \right)^{1/3}.$$

Коэффициент a_{33} определяется из решения [115] посредством удержания в разложении поля смещения одного дополнительного члена ряда

$$\begin{aligned} a_{33} &= \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s} \right) \left[\frac{1}{3} + \tilde{\gamma} + \frac{8\sqrt{3}\pi}{27} + \ln \left(\left(6 \frac{\bar{E}_s}{\bar{E}} \right)^{1/3} \frac{b}{h} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s} \right) \left[\frac{1}{3} + \tilde{\gamma} + \frac{8\sqrt{3}\pi}{27} + \ln \left(\left(6 \frac{\bar{E}_s}{\bar{E}} \right)^{1/3} \frac{\eta\pi}{\sqrt{12\varepsilon}} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.52)$$

где $\tilde{\gamma} = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера.

3.5. Результаты численных расчетов

Зависимость относительной скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы G_{ss}/G_0 , а также вдоль прямолинейной границы G/G_0 , коэффициента интенсивности напряжений $K_I/\sigma\sqrt{h}$, угла поворота θ , нормальной компоненты смещения в центре отслоения $w^{(0)}/h$ от параметра b/b_0 для различных отношений модулей упругости покрытия и основания, а также для различных кривизн представлены на рис. 3.4-3.11, на рис. 3.12 представлены профили отслоившегося участка при различных значениях b/b_0 .

Коэффициенты a_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$) при $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ определялись из соотношений (3.49)-(3.52), а в случае жесткой подложки были приняты более точные значения [78], а именно $a_{11} = 1.252$, $a_{12} = \sqrt{3}$, $a_{22} = 5.004$. Также при $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ используется более точное значение $a_{22} = 7.44$ [73]. Для расчета K_I по формуле (49) в качестве c_{ij} , ($i, j = 1, 2$) были приняты следующие значения [73, 78]: $c_{11} = 0.7$, $c_{12} = 2.47$, $c_{13} = 0.417c_{12} + \sqrt{3}c_{11}$ для жесткой подложки; $c_{11} = 0.435$, $c_{12} = 1.932$, $c_{13} = 0.62c_{12} + \sqrt{3}c_{11}$ для $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$; $c_{11} = 0.122$, $c_{12} = 0.955$, $c_{13} = 1.306c_{12} + \sqrt{3}c_{11}$ для $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$, $c_{11} = 0.064$, $c_{12} = 0.643$, $c_{13} = 1.802c_{12} + \sqrt{3}c_{11}$ для $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$.

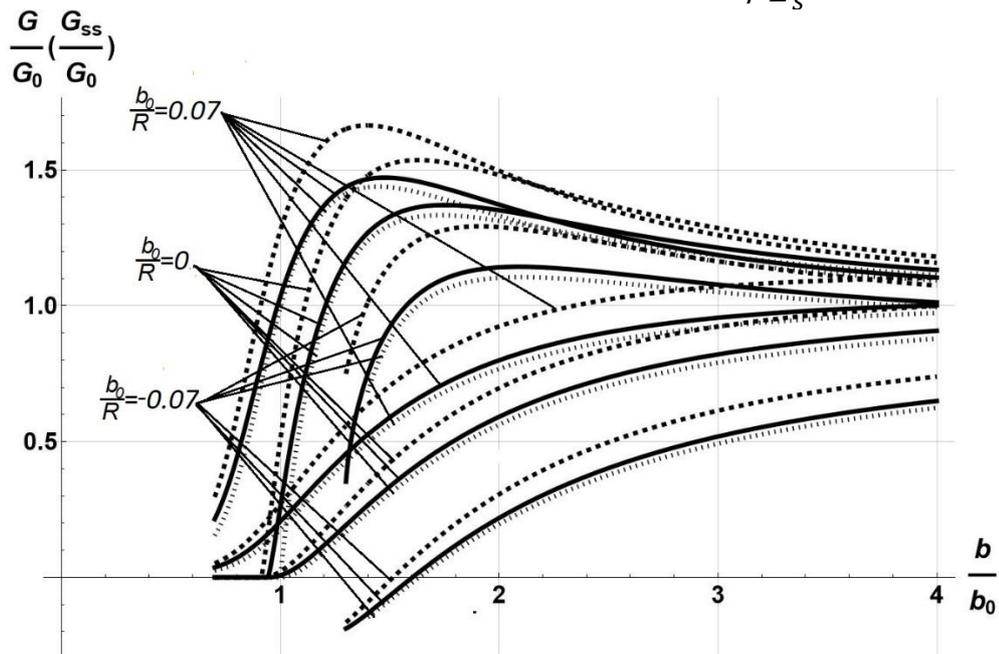


Рис. 3.4. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы (монотонные ветви) и вдоль

прямолинейной границы (ветви с максимумами) от b/b_0 при $\sigma/\bar{E} = 0.02$ и при $b_0/R = 0, +0.07, -0.07$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии; условие жесткого защемления - точечные линии.

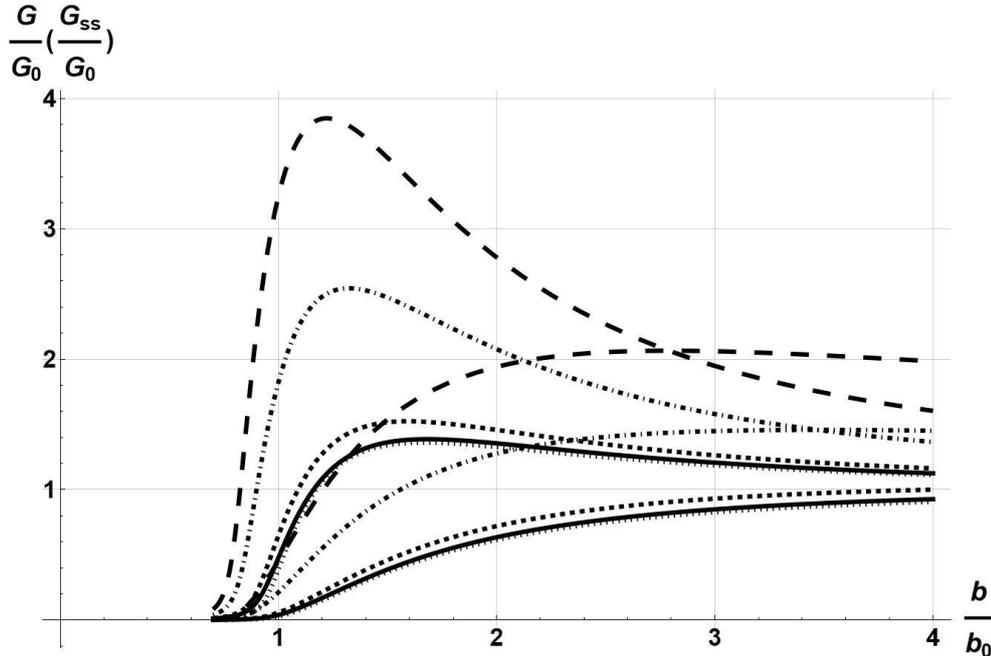


Рис. 3.5. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы (монотонные ветви) и вдоль прямолинейной границы (ветви с максимумами) от b/b_0 при $\sigma/\bar{E} = 0.01$ и при $b_0/R = 0.01$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии (короткие штрихи); $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ - штрих-пунктирные линии, $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ - пунктирные линии (длинные штрихи); условие жесткого защемления - точечные линии.

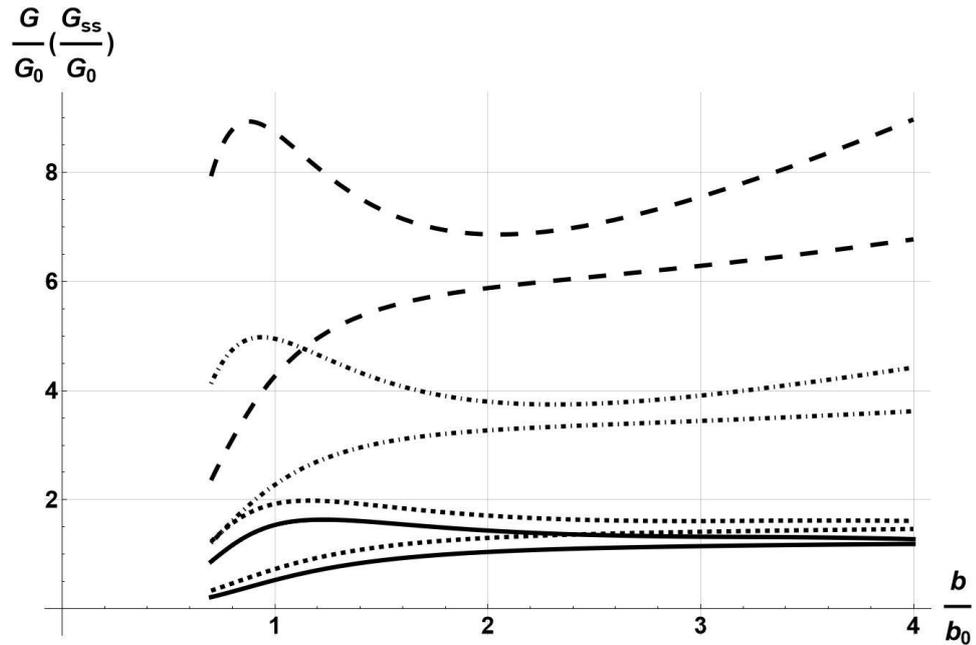


Рис. 3.6. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы (монотонные ветви) и вдоль прямолинейной границы (ветви с максимумами) от b/b_0 при $\sigma/\bar{E} = 0.05$ и при $b_0/R = +0.3$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии (короткие штрихи); $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ - штрих-пунктирные линии, $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ - пунктирные линии (длинные штрихи).

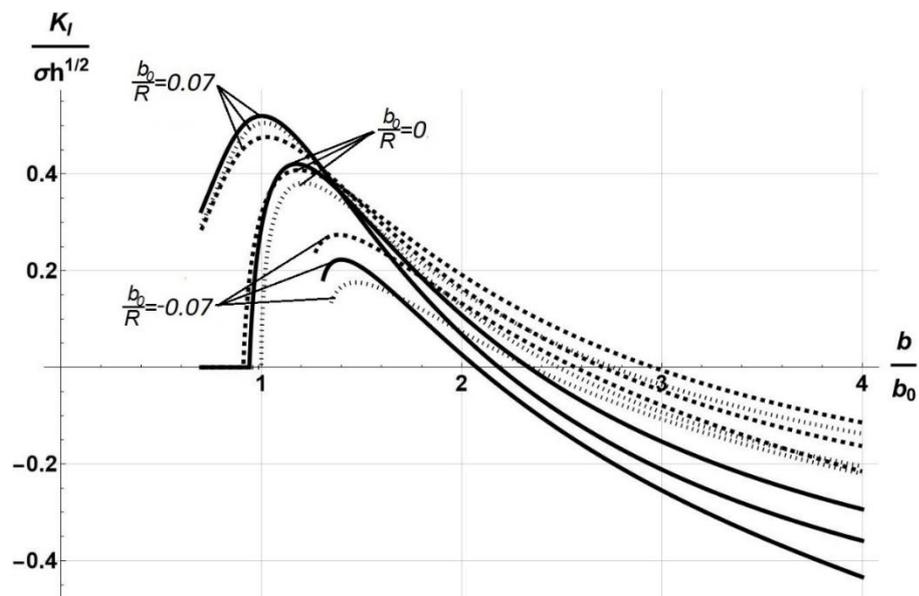


Рис. 3.7. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от b/b_0 при $b_0/R = 0, +0.07, -0.07$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии; условие жесткого защемления - точечные линии.

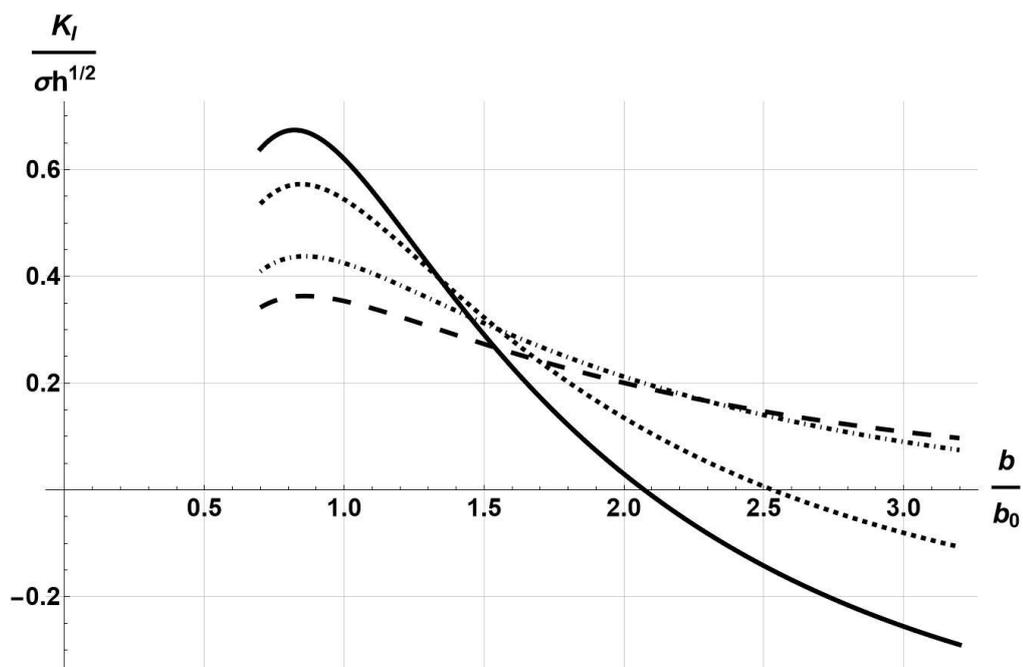


Рис. 3.8. Зависимость коэффициента интенсивности напряжений от b/b_0 при $b_0/R = +0.3$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии (короткие штрихи); $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ - штрих-пунктирные линии, $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ - пунктирные линии (длинные штрихи).

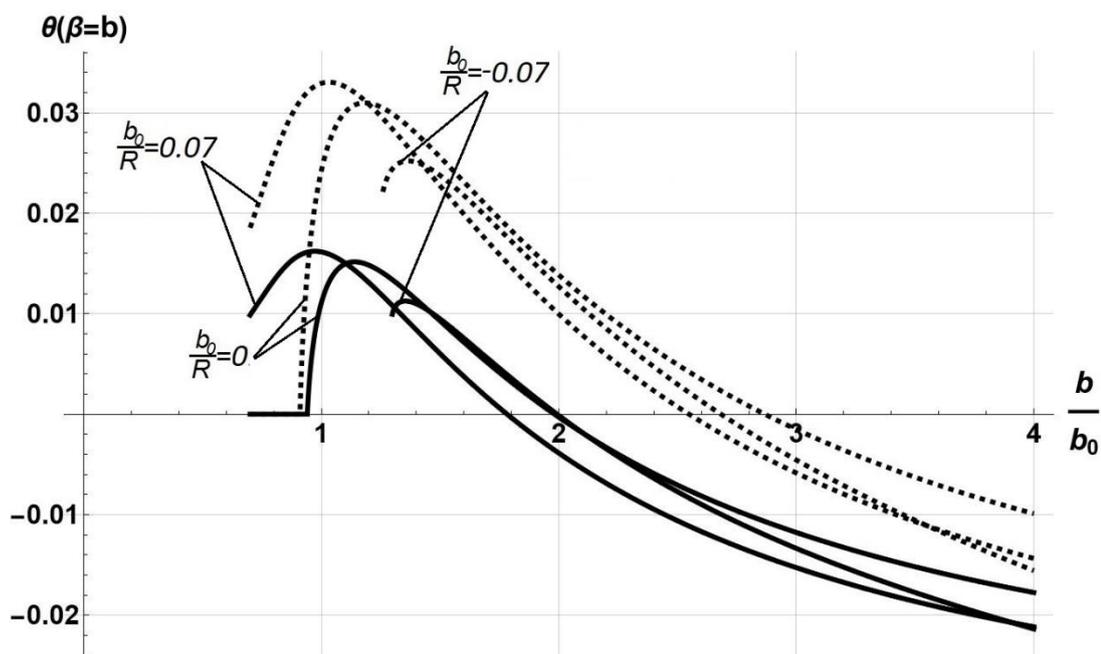


Рис. 3.9. Зависимость угла поворота θ от b/b_0 при $b_0/R = 0, +0.07, -0.07$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии.

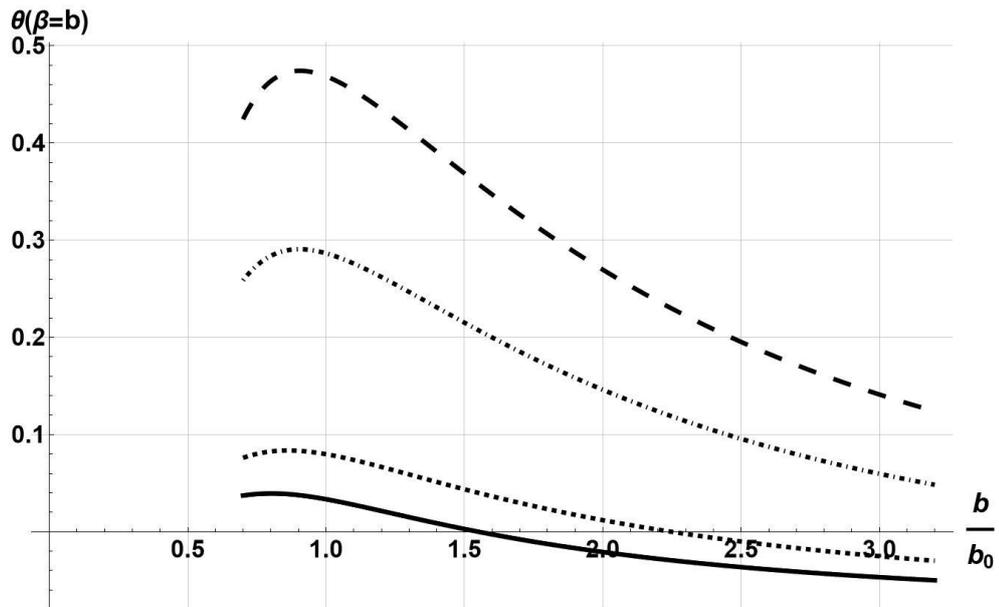


Рис. 3.10. Зависимость угла поворота θ от b/b_0 при $b_0/R = +0.3$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии (короткие штрихи); $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ - штрих-пунктирные линии, $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ - пунктирные линии (длинные штрихи).

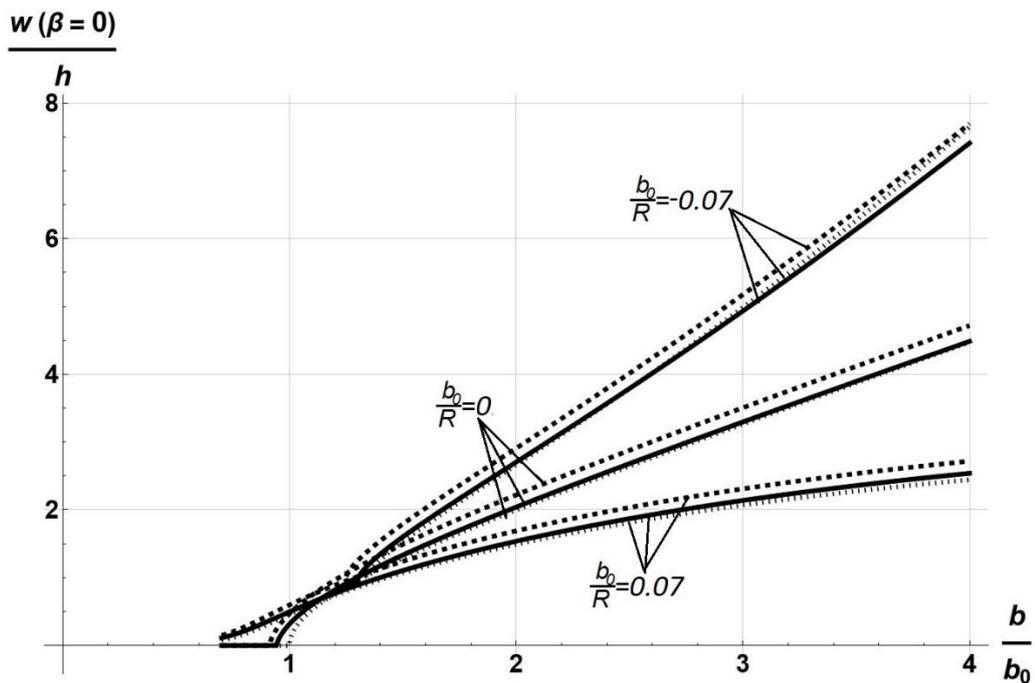


Рис. 3.11. Зависимость смещения в центре отслоения $w(0)/h$ от b/b_0 при $b_0/R = 0, +0.07, -0.07$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии; условие жесткого защемления - точечные линии.

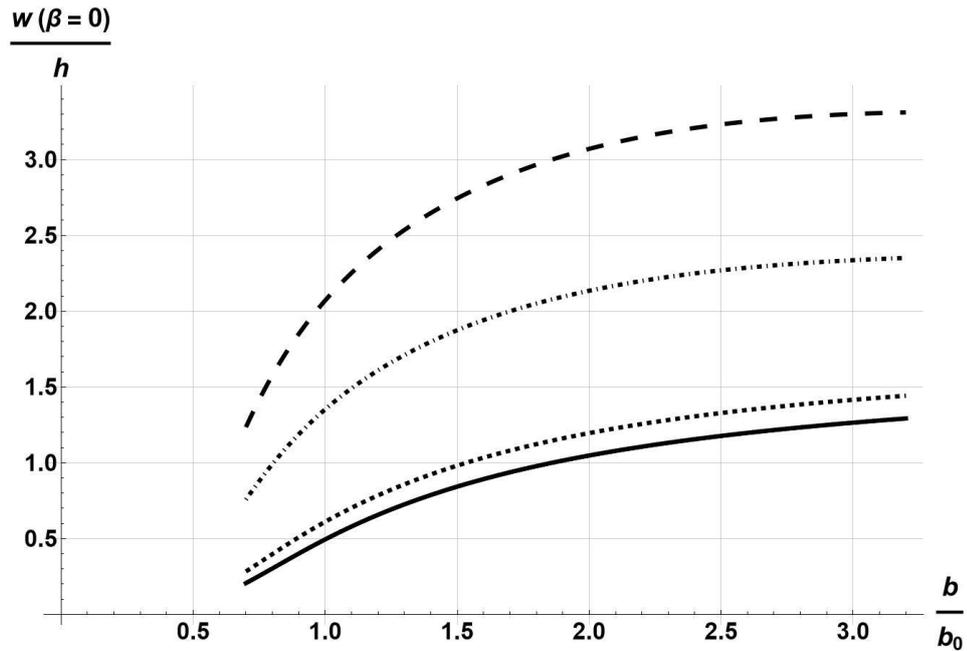


Рис. 3.12. Зависимость смещения в центре отслоения $w^{(0)}/h$ от b/b_0 при $b_0/R = +0.05$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии (короткие штрихи); $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ - штрих-пунктирные линии, $\bar{E}/\bar{E}_s = 25$ - пунктирные линии (длинные штрихи).

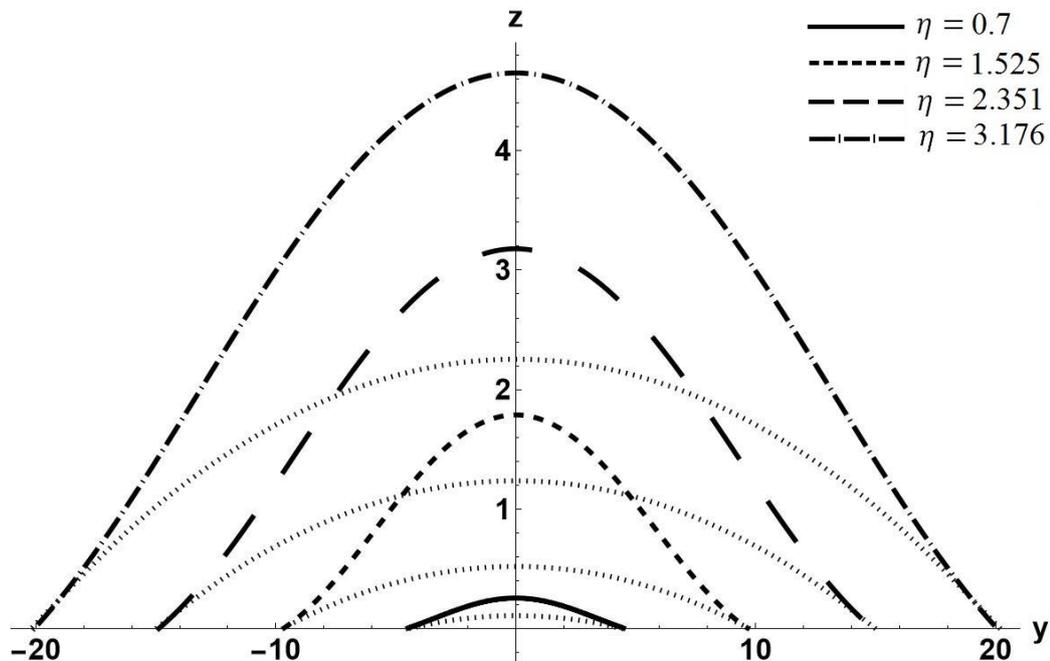


Рис. 3.13. Профиль отслоения покрытия для различных значений $\eta = b/b_0$ при $b_0/R = +0.07$, $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ в проекции на двумерное пространство; в недеформированном состоянии - штриховые линии.

Из соотношения (3.47) следует, что кривые, соответствующие росту отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы, должны пересекаться в максимуме первого. Это условие должно соблюдаться независимо от конкретного вида зависимости скорости высвобождения энергии от ширины отслоения.

Можно заметить (рис. 3.6), что для достаточно больших значений кривизны b_0/R и деформации ε скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной границы постоянно возрастает, т.е. отсутствует максимум, и чем податливее подложка, тем быстрее возрастает данный параметр, вследствие чего не происходит пересечения кривых.

Наличие положительной кривизны у подложки делает возможным формирование отслоений при напряжениях ниже уровня потери устойчивости (скорости высвобождения энергии положительны на любом промежутке для b/b_0 , рис. 3.4 - 3.6, коэффициенты интенсивности напряжений и углы поворота также положительны, рис. 3.7 - 3.10). Данный факт был установлен в случае жесткой заделки ранее [60]. Наличие податливости у подложки только усиливает этот процесс.

Из представленных данных видно, что расхождение между результатами, полученными в данной работе при учете влияния поперечных сил и перемещений ($a_{i3} \neq 0$), и упрощенной моделью ($a_{i3} = 0$), становится заметным для кривизн $|b_0/R| > 0.1 \dots 0.2$, а расхождение с результатами работы [4, 113], в которой использовалась упрощенная модель для слабо-искривленных пластин и учитывались поперечные силы и перемещения ($a_{i3} \neq 0$), становится заметным для кривизн $|b_0/R| > 0.2 \dots 0.3$, и $\varepsilon > 0.01$, т.е. когда использование теории слабо-искривленных пластин [113] становилось недостаточно точно.

3.6. Краткие выводы по разделу

На основе теории пологих цилиндрических оболочек, исследовано совместное влияние кривизны и податливости основания на параметры деформирования отслоившейся тонкой пленки. Податливость основания учитывалась заданием граничных условий типа обобщенной упругой заделки, а именно пропорциональности компонент смещения и угла поворота в точке заделки действующим в данной точке усилиям и изгибающему моменту. Исследования проводились с использованием уточненной модели, учитывающей конечность кривизны (в отличие от используемых ранее моделей, напр. [113], где влияние кривизны рассматривалось в первом приближении) и позволяющей исследовать напряженно-деформированное

состояние отслоившегося участка покрытия с изначально большей кривизной. Получены выражения для компонент смещения отслоившегося участка покрытия и скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль прямолинейной и криволинейной границы. Показано, что при увеличении податливости подложки смещение покрытия, как и скорость высвобождения энергии существенно возрастает. Из результатов численных расчетов скорости высвобождения энергии также следует, что существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоение прекращает развиваться вдоль ее криволинейной границы и возникает эффект «туннелирования», заключающееся в образовании узких продольных отслоений (для плоских подложек это отмечалось и ранее [58]). Кроме того, из представленных данных расчета видно, что наличие положительной кривизны (выпуклости) и увеличение относительной податливости подложки при малой предварительной деформации приводит к уменьшению этой критической ширины, и, тем самым, способствует образованию «вытянутых» отслоений. Также рассмотрены два критерия распространения отслоения, заключающиеся в сравнении знака угла поворота в точке заделки отслоения, либо коэффициента интенсивности напряжений характеризующий нормальный отрыв, с нулем. Достижение величиной этого угла, либо коэффициентом интенсивности напряжений нулевых значений, соответствует перекрытию и предотвращению дальнейшего отслоения покрытия. Сравнение результатов, полученных с помощью рассмотренной модели, с результатами, полученными с помощью упрощенных моделей [4, 113], показывает, что влияние поперечных сил становится существенным при увеличении относительной податливости подложки и уменьшения радиуса кривизны подложки.

ГЛАВА 4. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОГО ПОКРЫТИЯ ПОСЛЕ УТЕРИ КОНТАКТА С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ; ОТСЛОЕНИЕ, РАСПОЛОЖЕННОЕ В ОКРУЖНОМ НАПРАВЛЕНИИ

4.1. Постановка задачи, общие соотношения

Рассмотрим деформирование отслоившегося участка покрытия толщины h , соединенного с пологим цилиндрическим основанием радиуса R . Аналогично как в главе 3 для решения данной задачи воспользуемся криволинейной системой координат (α, β, γ) (рис. 3.1), компоненты смещений в срединной поверхности покрытия также обозначим: $v(\alpha, \beta)$, $u(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$.

До отслоения на покрытие, вдоль координатных линий α, β, γ (рис. 4.1 а)), действовали сжимающие усилия

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma h, \\ P_1 &= \sigma h, \quad \sigma > 0, \\ N_1 &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где l — полуширина отслоившего участка покрытия. На основание действовало растягивающее напряжение

$$p_0 = \sigma \frac{h}{R}.$$

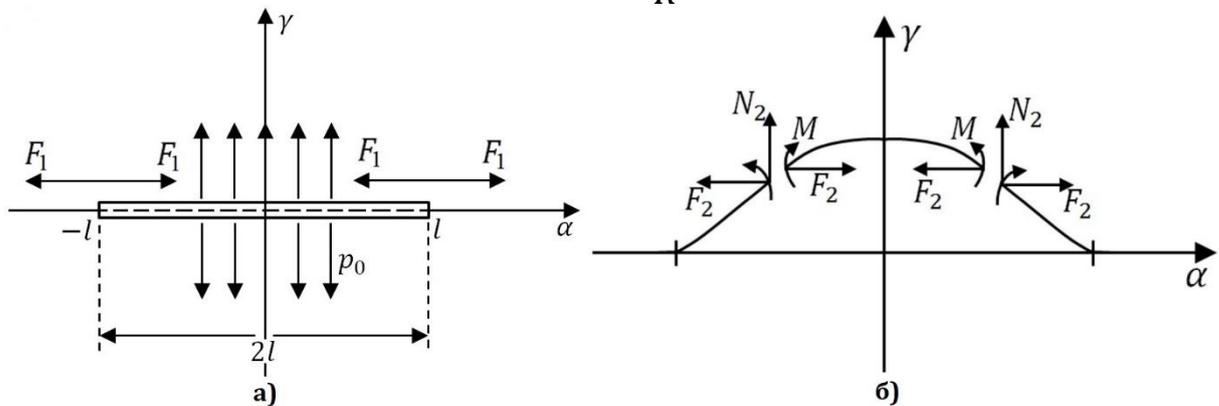


Рис. 4.1. Распределение силовых параметров: (а) - до отслоения покрытия, (б) - после отслоения покрытия

После отслоения на покрытие, вдоль координатных линий α, β, γ (рис. 4.1 б)), действуют усилия F_2, P_2, N_2 и изгибающий момент M в точке заделки.

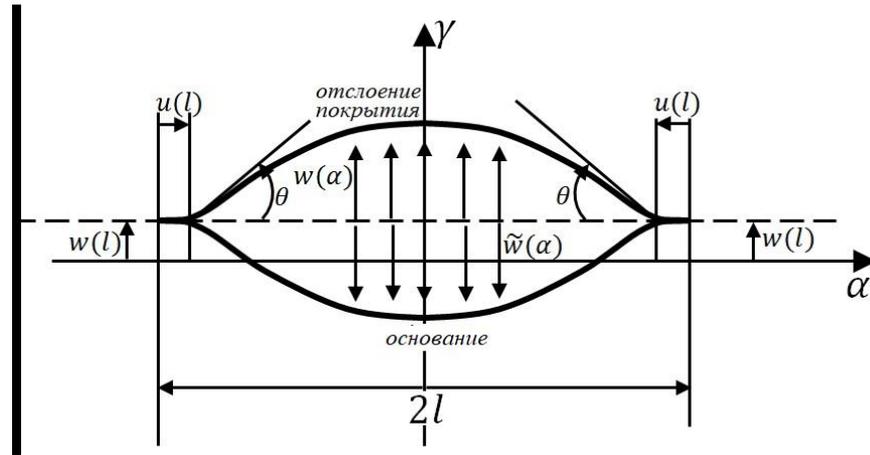


Рис. 4.2. Геометрия отслоения покрытия

Также для достаточно протяженного отслоения сечения, расположенные вдали от концов, могут быть рассмотрены в приближении плоской деформации, при этом одна из тангенциальных компонент смещений отсутствует, т.е. $v(\alpha, \beta) = 0$, а остальные компоненты зависят только от одной переменной: $u = u(\alpha)$, $w = w(\alpha)$. В дальнейшем анализе используются следующие параметры (рис. 4.2):

$\theta = -w'(\alpha)|_{\alpha=l}$ — угол поворота отслоения в точке заделки;

$\tilde{w}(\alpha)$ — смещение поверхности основания.

Дифференциальные уравнения изгибаемой по образующей цилиндрического покрытия имеют вид [13-17, 21]:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + F_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\nu}{R} F_2 + (\nu - 1) \frac{\sigma h}{R} + Eh \left(\frac{w}{R^2} \right) = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (4.2)$$

$$\frac{dF_2}{d\alpha} = 0. \quad (4.3)$$

где D — изгибная жесткость покрытия, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона покрытия.

Начальные и граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\alpha}(\alpha = 0) = 0, \quad \frac{d^3 w}{d\alpha^3}(\alpha = 0) = 0, \\ \frac{d^2 w}{d\alpha^2}(\alpha = l) = \frac{M}{D}, \quad w(\alpha = l) = w_l, \end{aligned} \quad (4.4)$$

Неизвестными в рассматриваемой задаче являются изгибающий момент M , смещение в точке заделки w_l и усилия F_2, N_2 .

Из условий баланса сил, а также закона Гука следует, что компоненты F_2, P_2, N_2 имеют вид [4, 113] (для удобства обозначим $F_2 = T, T > 0$)

$$F_2 = T,$$

$$P_2 = \nu F_2 - (\nu - 1)\sigma h - (1 - \nu^2)\bar{E}h \left(\frac{w}{R} \right), \quad (4.5)$$

$$N_2 = \frac{1}{R} \int_0^l P_2 d\alpha = \frac{1}{R} \left(\nu F_2 l - (\nu - 1)\sigma h - (1 - \nu^2)\bar{E}h \int_0^l \left(\frac{w}{R} \right) d\alpha \right).$$

Аналогично, граничные условия примем в виде условий обобщенной упругой заделки

$$\bar{E} \begin{pmatrix} u(l) \\ -hw'(l) \\ w(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ h^{-1}M \\ N \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad (4.6)$$

где эффективные продольные F и поперечные (перерезывающие) N усилия определяются следующим образом

$$F = F_2 - F_1 = T - \sigma h, \\ N = N_2 - N_1 = \frac{1}{R} \left(\nu F_2 l + (1-\nu)\sigma h l - (1-\nu^2)\bar{E}h \int_0^l \left(\frac{w}{R}\right) d\alpha \right) - 0 = \\ = \frac{1}{R} \left(\nu T l + (1-\nu)\sigma h l - (1-\nu^2)\bar{E}h \int_0^l \left(\frac{w}{R}\right) d\alpha \right). \quad (4.7)$$

С учетом выражений (4.7) граничные условия (4.6) записываются в виде

$$\begin{aligned} \bar{E}u(l) &= a_{11}(T - \sigma h) + a_{12}h^{-1}M + a_{13}N, \\ -\bar{E}hw'(l) &= a_{12}(T - \sigma h) + a_{22}h^{-1}M + a_{23}N, \\ \bar{E}w(l) &= a_{13}(T - \sigma h) + a_{23}h^{-1}M + a_{33}N. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Решение дифференциального уравнения (4.2) с учетом условия (4.3) и граничных условий (4.4) есть

$$w(\alpha) = (\nu T - (\nu - 1)\sigma h) \frac{R}{Eh} + C_1 \cos(b_1 \alpha) + C_2 \cos(b_2 \alpha), \quad (4.9)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{b_1^2 \cos(b_1 l)} \left(-\frac{M}{D} - \frac{b_2^2}{(1 - (b_2/b_1)^2)} \left(w(\alpha = l) - (\nu T - (\nu - 1)\sigma h) \frac{R}{Eh} + \frac{M}{b_1^2 D} \right) \right), \quad (4.10)$$

$$C_2 = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2\right) \cos(b_2 l)} \left(w(\alpha = l) - (\nu T - (\nu - 1)\sigma h) \frac{R}{Eh} + \frac{M}{b_1^2 D} \right), \quad (4.11)$$

$$b_1 = \frac{\lambda}{l\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4EhD}{T^2 R^2}}}, \quad (4.12)$$

$$b_2 = \frac{\lambda}{l\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4EhD}{T^2 R^2}}}, \quad (4.13)$$

параметр λ есть

$$\lambda = l \sqrt{\frac{T}{D}}. \quad (4.14)$$

Из (4.9) следует, что прогиб в центре отслоения покрытия равен

$$w(\alpha = 0) = (vT - (v - 1)\sigma h) \frac{R}{Eh} + C_1 + C_2. \quad (4.15)$$

Для определения параметров M , T , w_l в (4.9) воспользуемся граничными условиями (4.6).

До отслоения на покрытие действовали напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}^0$ и $\sigma_{\beta\beta}^0$, а после отслоения — $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^0 &= -\frac{F_1}{h} = -\sigma, \\ \sigma_{\beta\beta}^0 &= -\frac{P_1}{h} = -\sigma, \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= -\frac{F_2}{h} = -\frac{T}{h}, \\ \sigma_{\beta\beta} &= -\frac{P_2}{h}, \\ \Delta\sigma_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha} - \sigma_{\alpha\alpha}^0 = \frac{-T + \sigma h}{h} = \frac{-F}{h}, \\ \Delta\sigma_{\beta\beta} &= \sigma_{\beta\beta} - \sigma_{\beta\beta}^0 = \frac{-P_2 + \sigma h}{h}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Выражения для компонент дополнительных деформаций [47, 60] в принятой постановке задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{du}{d\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\alpha} \right)^2, \\ \Delta\varepsilon_{\beta\beta} &= \frac{w}{R}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Подстановка (4.16) в выражение для дополнительных деформаций (4.17) дает

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\sigma_{\alpha\alpha}}{\bar{E}} &= \Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + \nu\Delta\varepsilon_{\beta\beta} = \frac{-F}{\bar{E}h} = \frac{-T + \sigma h}{\bar{E}h} = \frac{du}{d\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\alpha} \right)^2 + \nu \frac{w}{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{du}{d\alpha} = \frac{-F}{\bar{E}h} - \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\alpha} \right)^2 - \nu \frac{w}{R}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Интегрирование данного выражения от 0 до l дает разность тангенциального смещения в точках l и 0. В силу симметрии $u(\alpha = 0) = 0$, следовательно:

$$u(l) = \frac{-F}{\bar{E}} \frac{l}{h} - \int_0^l \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\alpha} \right)^2 + \nu \frac{w}{R} \right) d\alpha. \quad (4.19)$$

Подстановка (4.9) в (4.19) и интегрирование дает

$$\begin{aligned} u(l) &= \frac{(-T + \sigma h) l}{\bar{E}} - \frac{l\nu R}{R \bar{E}h} (vT - (v - 1)\sigma h) - \\ &- \left(\frac{C_1 \nu \sin(b_1 l)}{b_1 R} + \frac{C_2 \nu \sin(b_2 l)}{b_2 R} + \frac{1}{8} b_1 C_1^2 (2b_1 l - \sin(2b_1 l)) \right) \\ &+ \frac{1}{8} b_2 C_2^2 (2b_2 l - \sin(2b_2 l)) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(b_1 l)(b_2 l)C_1 C_2 (b_2 l \cos(b_2 l) \sin(b_1 l) - b_1 l \cos(b_1 l) \sin(b_2 l))}{l^3 (b_1^2 - b_2^2)}. \quad (4.20)$$

Аналогично введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} f &= \frac{F}{\sigma h} & n &= \frac{N}{\sigma h}, \\ m &= \frac{M}{\sigma h^2} & \varepsilon &= \frac{\sigma}{\bar{E}}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

После чего с учетом (4.7) имеем

$$T = (f + 1)\sigma h,$$

$$n = \frac{1}{R} \left(\nu l (f + 1) + (1 - \nu)l - (1 - \nu^2) \frac{1}{\varepsilon} \int_0^l \left(\frac{w}{R} \right) d\alpha \right). \quad (4.22)$$

Из условия положительности параметров σ, T , а также того, что $\sigma h > T$ следует, что $-1 < f < 0$. Параметр λ в безразмерных величинах примет вид

$$\lambda = l \sqrt{\frac{T}{D}} = l \sqrt{\frac{(f + 1)\sigma h 12}{\bar{E} h^3}} = \frac{l}{h} \sqrt{(f + 1)12\varepsilon} = \eta \pi \sqrt{(f + 1)}, \quad (4.23)$$

где η — отношение полуширины отслоения, к критической полуширине, соответствующей потери устойчивости отслоения от прямолинейной границы при условии граничных условий типа жесткой заделки:

$$\eta = \frac{l}{l_0}, \quad (4.24)$$

$$l_0 = \frac{\pi}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}} \sqrt{\frac{E}{\sigma}} = \frac{h\pi}{\sqrt{12\varepsilon}}, \quad (4.25)$$

В безразмерных величинах выражения (4.9), (4.20) запишутся следующим образом

$$\frac{w(l)}{h} = (\nu f + 1) \frac{\varepsilon}{(1 - \nu^2) k \sqrt{12\varepsilon}} + \left(\frac{C_1}{h} \right) \cos(b_1 l) + \left(\frac{C_2}{h} \right) \cos(b_2 l), \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{u(l)}{h} &= -\frac{f\eta\varepsilon\pi}{\sqrt{12\varepsilon}} - \frac{\eta\pi}{\sqrt{12\varepsilon}} \frac{\nu\varepsilon}{(1 - \nu^2)} (\nu f + 1) - \frac{(C_1/h)\nu\sin(b_1 l)\eta k}{b_1 l} - \\ &- \frac{(C_2/h)\nu\sin(b_2 l)\eta k}{b_2 l} - \frac{1}{8} (b_1 l) \left(\frac{C_1}{h} \right)^2 (2b_1 l - \sin(2b_1 l)) \frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\eta} - \\ &- \frac{1}{8} (b_2 l) \left(\frac{C_2}{h} \right)^2 (2b_2 l - \sin(2b_2 l)) \frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\eta} - \frac{\sqrt{12\varepsilon} (b_1 l)(b_2 l)(C_1/h)(C_2/h)}{l^2 (b_1^2 - b_2^2)} \cdot \\ &\cdot (b_2 l \cos(b_2 l) \sin(b_1 l) - b_1 l \cos(b_1 l) \sin(b_2 l)), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где

$$\frac{C_1}{h} = \frac{1}{(b_1 l)^2 \cos(b_1 l)} \left(-m \eta^2 \pi^2 - \left(\frac{C_2}{h} \right) (b_2 l)^2 \cos(b_2 l) \right),$$

$$\frac{C_2}{h} = \frac{1}{(1 - (b_2/b_1)^2) \cos(b_2 l)} \left(\frac{w(l)}{h} - \frac{(v f + 1) \pi \varepsilon}{(1 - v^2) k \sqrt{12 \varepsilon}} + \frac{m \eta^2 \pi^2}{(b_1 l)^2} \right),$$

$$(b_1 l) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4(1 - v^2)}{\pi^2 (f + 1)^2 \varepsilon} k^2}},$$

$$(b_2 l) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4(1 - v^2)}{\pi^2 (f + 1)^2 \varepsilon} k^2}},$$

$$k = \frac{l_0}{R}.$$

Также с учетом (4.21), граничные условия (4.8) представим в более удобном виде

$$\frac{u(l)}{h} = a_{11} \frac{F}{\bar{E} h} + a_{12} \frac{M}{\bar{E} h^2} + a_{13} \frac{N}{\bar{E} h} = a_{11} f \varepsilon + a_{12} m \varepsilon + a_{13} n \varepsilon, \quad (4.28)$$

$$-\frac{dw(l)}{d\alpha} = a_{12} \frac{F}{\bar{E} h} + a_{22} \frac{M}{\bar{E} h^2} + a_{23} \frac{N}{\bar{E} h} = a_{12} f \varepsilon + a_{22} m \varepsilon + a_{23} n \varepsilon, \quad (4.29)$$

$$\frac{w(l)}{h} = a_{13} \frac{F}{\bar{E} h} + a_{23} \frac{M}{\bar{E} h^2} + a_{33} \frac{N}{\bar{E} h} = a_{13} f \varepsilon + a_{23} m \varepsilon + a_{33} n \varepsilon. \quad (4.30)$$

Вычислим производную от смещения $w(\alpha)$, которая определяется через выражение (4.9)

$$\frac{dw}{d\alpha} = -C_1 b_1 \sin(b_1 \alpha) - C_2 b_2 \sin(b_2 \alpha), \quad (4.31)$$

в безразмерных величинах принимающая вид

$$\frac{dw(\alpha = l)}{d\alpha} = -\frac{\sqrt{12 \varepsilon}}{\pi \eta} \left(\frac{C_1}{h} \right) (b_1 l) \sin(b_1 l) - \frac{\sqrt{12 \varepsilon}}{\pi \eta} \left(\frac{C_2}{h} \right) (b_2 l) \sin(b_2 l). \quad (4.32)$$

Подстановка полученных выражений для $u(\alpha)$, $w(\alpha)$, $w'(\alpha)$ (4.26), (4.27), (4.32) в граничные условия (4.28) - (4.30) дает нелинейную систему из трех уравнений, определяющую значения трех неизвестных переменных m , f , w_l , которая также решается численно [116].

4.2. Вычисление скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы отслоения

Аналогично как в главе 3 [5], скорость высвобождения энергии при распространении отслоения в направлении криволинейной границы G_{SS} вычисляется как высвобождающаяся упругая энергия единицы длины

отслоившегося участка, деленная на его ширину, равную $2l$, состоящая из энергии, высвободившейся из изгибаемого участка покрытия ΔU_1 , неотслоившегося участка покрытия ΔU_2 и энергии, высвободившейся из основания ΔU_3 .

Первая из данных величин вычисляется как разница упругой энергии отслоившегося участка до и после отслоения

$$\Delta U_1 = U_{1before} - U_{1after}. \quad (4.33)$$

Также используя соотношение удельной потенциальной энергии деформации (2.18) (энергия на единицу объема) в данной постановке задачи она примет вид

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{2} (\sigma_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} \varepsilon_{\beta\beta}). \quad (4.34)$$

Удельная потенциальная энергия деформации до и после отслоения выражается через дополнительные компоненты напряжения и деформации в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha}^0 + \Delta\sigma_{\alpha\alpha} & \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}, \\ \sigma_{\beta\beta} &= \sigma_{\beta\beta}^0 + \Delta\sigma_{\beta\beta} & \varepsilon_{\beta\beta} &= \varepsilon_{\beta\beta}^0 + \Delta\varepsilon_{\beta\beta}, \\ \tilde{U}_{1before} &= \frac{1}{2} (\sigma_{\alpha\alpha}^0 \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \sigma_{\beta\beta}^0 \varepsilon_{\beta\beta}^0), \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\tilde{U}_{1after} = \frac{1}{2} ((\sigma_{\alpha\alpha}^0 + \Delta\sigma_{\alpha\alpha})(\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}) + (\sigma_{\beta\beta}^0 + \Delta\sigma_{\beta\beta})(\varepsilon_{\beta\beta}^0 + \Delta\varepsilon_{\beta\beta})).$$

Учитывая связь между компонентами напряжений и деформаций, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{1before} &= \frac{1}{2} (\bar{E}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \nu\varepsilon_{\beta\beta}^0)\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \bar{E}(\varepsilon_{\beta\beta}^0 + \nu\varepsilon_{\alpha\alpha}^0)\varepsilon_{\beta\beta}^0), \\ \tilde{U}_{1after} &= \frac{1}{2} (\bar{E}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \nu\varepsilon_{\beta\beta}^0)\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \bar{E}(\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + \nu\Delta\varepsilon_{\beta\beta})\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \\ &+ \bar{E}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \nu\varepsilon_{\beta\beta}^0)\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + \bar{E}(\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + \nu\Delta\varepsilon_{\beta\beta})\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + \bar{E}(\varepsilon_{\beta\beta}^0 + \nu\varepsilon_{\alpha\alpha}^0)\varepsilon_{\beta\beta}^0 + \\ &+ \bar{E}(\Delta\varepsilon_{\beta\beta} + \nu\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha})\varepsilon_{\beta\beta}^0 + \bar{E}(\varepsilon_{\beta\beta}^0 + \nu\varepsilon_{\alpha\alpha}^0)\Delta\varepsilon_{\beta\beta} + \bar{E}(\Delta\varepsilon_{\beta\beta} + \nu\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha})\Delta\varepsilon_{\beta\beta}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Выражение для высвободившейся удельной потенциальной энергии деформации принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{U}_1 &= \tilde{U}_{1before} - \tilde{U}_{1after} = -\frac{1}{2} \bar{E} (2\Delta\varepsilon_{\beta\beta}(\nu\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \varepsilon_{\beta\beta}^0) + \\ &+ 2\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \nu\varepsilon_{\beta\beta}^0) + (\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + \nu\Delta\varepsilon_{\beta\beta})\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + (\Delta\varepsilon_{\beta\beta} + \nu\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha})\Delta\varepsilon_{\beta\beta}). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Потенциальная упругая энергия, отнесенная на единицу длины координаты β вычисляется через интегрирование удельной энергии

$$\begin{aligned} \Delta U_1 &= U_{1before} - U_{1after} = \int_{-l}^l \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{U}_{1before} d\gamma d\alpha - \int_{-l}^l \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{U}_{1after} d\gamma d\alpha = \\ &= \int_{-l}^l \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\tilde{U}_1 d\gamma d\alpha = \int_{-l}^l \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \bar{E} (2\Delta\varepsilon_{\beta\beta}(\nu\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \varepsilon_{\beta\beta}^0) + \\ &+ 2\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \nu\varepsilon_{\beta\beta}^0) + (\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + \nu\Delta\varepsilon_{\beta\beta})\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} + (\Delta\varepsilon_{\beta\beta} + \nu\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha})\Delta\varepsilon_{\beta\beta}) d\gamma d\alpha. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Используя соотношения для деформаций в теории тонких пологих оболочек (2.10) – (2.12), связь между дополнительными полными деформациями и компонентами смещений имеет вид [21, 60]

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_1 + \gamma K_1, \\ \Delta\varepsilon_{\beta\beta} &= \varepsilon_2 + \gamma K_2. \\ \varepsilon_1 &:= \frac{du}{d\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{d\alpha} \right)^2, & K_1 &:= \frac{d^2w}{d\alpha^2}, \\ \varepsilon_2 &:= \frac{w}{R}, & K_2 &:= \frac{d^2w}{d\beta^2} = 0.\end{aligned}\quad (4.39)$$

Подставляя последнее соотношение в (4.38) с использованием выражения (4.16), получаем

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= -\frac{1}{2} \bar{E} \int_{-l}^l \int_{-h/2}^{h/2} (2\varepsilon_2(v\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \varepsilon_{\beta\beta}^0) + 2(\varepsilon_1 + \gamma K_1)(\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + v\varepsilon_{\beta\beta}^0) + \\ &+ ((\varepsilon_1 + \gamma K_1) + v\varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \gamma K_1) + (\varepsilon_2 + v(\varepsilon_1 + \gamma K_1))\varepsilon_2) d\gamma d\alpha = \\ &= -\frac{1}{2} \bar{E} \int_{-l}^l (2\varepsilon_2(v\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + \varepsilon_{\beta\beta}^0)h + 2\varepsilon_1(\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + v\varepsilon_{\beta\beta}^0)h + \\ &+ (\varepsilon_1^2 + 2v\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2)h + \frac{h^3}{12} K_1^2) d\alpha = \\ &= \left| \begin{array}{l} F_1 = -\sigma_{\alpha\alpha}^0 h = -\bar{E}(\varepsilon_{\alpha\alpha}^0 + v\varepsilon_{\beta\beta}^0)h = \sigma h \\ P_1 = -\sigma_{\beta\beta}^0 h = -\bar{E}(\varepsilon_{\beta\beta}^0 + v\varepsilon_{\alpha\alpha}^0)h = \sigma h \\ -\frac{F}{\bar{E}h} = \frac{(-T + \sigma h)}{\bar{E}h} = \varepsilon_1 + v\varepsilon_2 \end{array} \right| = \\ &= -\int_{-l}^l \left(-\varepsilon_2 \sigma h - \varepsilon_1 \sigma h + v\varepsilon_1 \varepsilon_2 \bar{E} h + \frac{h^3}{24} \bar{E} K_1^2 + \frac{1}{2} \bar{E} h \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} \bar{E} h \varepsilon_2^2 \right) d\alpha = \\ &= \frac{(\sigma h)^2}{\bar{E} h} l - \frac{T^2 l}{\bar{E} h} + \\ &+ \int_0^l \left(2\sigma h(1-v) \frac{w}{R} - \left(\frac{w}{R} \right)^2 (1-v^2) \bar{E} h \right) d\alpha - D \int_0^l \left(\frac{d^2w}{d\alpha^2} \right)^2 d\alpha. \quad (4.40)\end{aligned}$$

Энергию ΔU_2 определим как работу сил, действующих на не отслоившиеся участки покрытия

$$\begin{aligned}\Delta U_2 &= (T + \sigma h)(-u(\alpha = l)) - M(-w'(\alpha = l)) - \\ &- \frac{1}{R} \left(vTl + (1-v)\sigma hl - (1-v^2)\bar{E}h \int_0^l \left(\frac{w}{R} \right) d\alpha \right) w(\alpha = l) = \\ &= (f + 2)\sigma h(-u(\alpha = l)) - m\sigma h^2(-w'(\alpha = l)) - n\sigma h w(\alpha = l). \quad (4.41)\end{aligned}$$

Энергия ΔU_3 , учитывающее влияние основания на покрытие до ее отслоения, записывается в виде [5, 84, 112]

$$\Delta U_3 = \frac{(\bar{E} + \bar{E}_s)(\sigma h)^2}{\bar{E}\bar{E}_s} l^2 \pi. \quad (4.42)$$

Удельная упругая энергия не отслоившегося покрытия имеет следующий вид

$$G_0 = \frac{(1 - \nu^2) \sigma^2 h}{2 E} = \frac{\sigma^2 h}{2 \bar{E}}. \quad (4.43)$$

Скорость высвобождения энергии (отнесенная к энергии покрытия до потери устойчивости), с учетом выражения (4.9), а также величин (4.8), входящих в (4.41) есть

$$\begin{aligned} \frac{G_{ss}}{G_0} &= \frac{(\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3)}{2lG_0} = \\ &= (1 - (f + 1)^2) + 2(1 - \nu) \frac{k\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\varepsilon} \left((1 + \nu f) \frac{\varepsilon\pi}{(1 - \nu^2)k\sqrt{12\varepsilon}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(C_1/h) \sin(b_1 l)}{b_1 l} + \frac{(C_2/h) \sin(b_2 l)}{b_2 l} \right) - (1 - \nu^2) \frac{3k^2}{\varepsilon\pi^2} \cdot \\ &\quad \cdot \left(4(1 + \nu f)^2 \frac{\varepsilon\pi^2}{12(1 - \nu^2)^2 k^2} + 2 \left(\frac{C_1}{h} \right)^2 + 2 \left(\frac{C_2}{h} \right)^2 + \frac{8 \sin(b_1 l)}{b_1 l} \left(\frac{C_1}{h} \right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left((1 + \nu f) \frac{\varepsilon\pi}{(1 - \nu^2)k\sqrt{12\varepsilon}} + \frac{(b_1 l)^2 \cos(b_2 l)}{l^2(b_1^2 - b_2^2)} \left(\frac{C_2}{h} \right) \right) + \left(\frac{C_1}{h} \right)^2 \frac{\sin(2b_1 l)}{b_1 l} + \\ &\quad + \frac{8 \sin(b_2 l)}{b_2 l} \left(\frac{C_2}{h} \right) \left((1 + \nu f) \frac{\varepsilon\pi}{(1 - \nu^2)k\sqrt{12\varepsilon}} + \frac{(b_2 l)^2 \cos(b_1 l)}{l^2(b_2^2 - b_1^2)} \left(\frac{C_1}{h} \right) \right) + \\ &\quad + \left(\frac{C_2}{h} \right)^2 \frac{\sin(2b_2 l)}{b_2 l} \right) - \frac{3}{\eta^4 \pi^4} \left(2(b_1 l)^4 \left(\frac{C_1}{h} \right)^2 + 2(b_2 l)^4 \left(\frac{C_2}{h} \right)^2 + \right. \\ &\quad + (b_1 l)^3 \left(\frac{C_1}{h} \right)^2 \sin(2b_1 l) + (b_2 l)^3 \left(\frac{C_2}{h} \right)^2 \sin(2b_2 l) + \frac{8(b_1 l)^3 (b_2 l)^2}{l^2(b_1^2 - b_2^2)} \left(\frac{C_1}{h} \right) \left(\frac{C_2}{h} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left. \cos(b_2 l) \sin(b_1 l) + \frac{8(b_1 l)^2 (b_2 l)^3}{l^2(b_2^2 - b_1^2)} \left(\frac{C_1}{h} \right) \left(\frac{C_2}{h} \right) \cos(b_1 l) \sin(b_2 l) \right) + \\ &\quad + \frac{(\bar{E} + \bar{E}_s)}{\bar{E}_s} k^2 \eta \sqrt{3\varepsilon} - \frac{\sqrt{12\varepsilon}}{\pi\eta} ((f + 2)(a_{11}f + a_{12}m + a_{13}n) + \\ &\quad + m(a_{12}f + a_{22}m + a_{23}n) + n(a_{13}f + a_{23}m + a_{33}n)). \quad (4.44) \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это делалось в задаче в главе 3 [5], скорость высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль прямолинейной границы G рассчитывается как непосредственное изменение упругой энергии при увеличении длины отслоения [4, 113, 114]

$$\frac{G}{G_0} = \frac{d}{db} \left(\frac{\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3}{2G_0} \right) = \eta \frac{d}{d\eta} \left(\frac{G_{ss}}{G_0} \right) + \left(\frac{G_{ss}}{G_0} \right), \quad (4.45)$$

где G_{ss}/G_0 определяется с помощью (4.44).

Значения коэффициентов матрицы жесткости a_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$) есть [4, 5, 58, 72, 73, 78, 115]:

$$a_{11} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s}} + \frac{3}{2} \left[\frac{b}{h} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s} \right)^3 \right]^{1/4}, \quad a_{12} = \sqrt{3} + 0.27 \left(\frac{h \bar{E}}{b \bar{E}_s} \right)^{2/3}, \quad (4.46)$$

$$a_{22} = 12\delta, \quad a_{13} = 1 + \sqrt{3}\delta, \quad a_{23} = \frac{3}{2} + 6\delta^2, \quad \delta = 0.635 \left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s} \right)^{1/3}, \quad (4.47)$$

$$a_{33} = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{E}_s} \right) \left[\frac{1}{3} + \tilde{\gamma} + \frac{8\sqrt{3}\pi}{27} + \ln \left(\left(6 \frac{\bar{E}_s}{\bar{E}} \right)^{1/3} \frac{b}{h} \right) \right], \quad (4.48)$$

где $\tilde{\gamma} = 0.5772 \dots$ — постоянная Эйлера.

4.3. Результаты численных расчетов

Графики зависимости скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной и прямолинейной границы ($G_{ss}/G_0, G/G_0$), угла поворота θ в точке заделки от параметра l/l_0 для различных значений относительной податливости основания \bar{E}/\bar{E}_s , а также для различных величин кривизны основания представлены на рис. 4.3-4.6. На рис. 4.7, 4.8 представлены профили отслоения покрытия при разных значениях l/l_0 . Все расчеты были выполнены для значения коэффициента Пуассона покрытия равном $\nu = 0.3$.

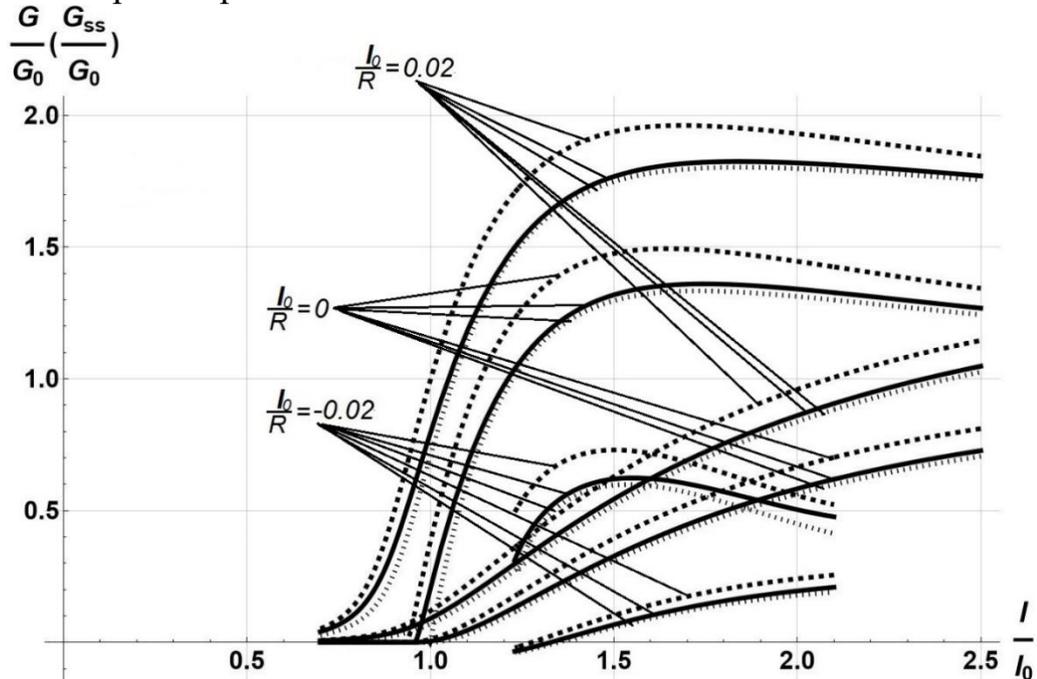


Рис. 4.3. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной (монотонные ветви) и прямолинейной границы (ветви с максимумами) от l/l_0 при $\sigma/\bar{E} = 0.01$ и при $l_0/R =$

0, +0.02, -0.02; жесткое основание- сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии; условие жесткой заделки- точечные линии.

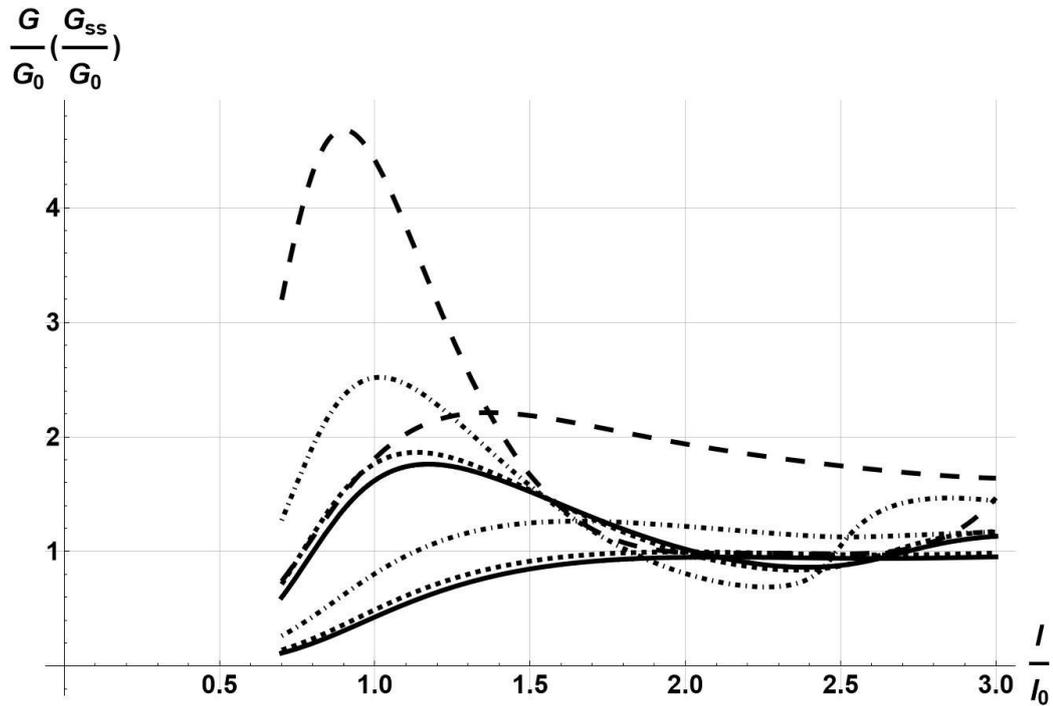


Рис. 4.4. Зависимость скорости высвобождения энергии при распространении отслоения вдоль криволинейной (монотонные ветви) и прямолинейной границы (ветви с максимумами) от l/l_0 при $\sigma/\bar{E} = 0.01$ и при $l_0/R = +0.1$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии с короткими штрихами; $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ - штрих-пунктирные линии, $\bar{E}/\bar{E}_s = 100$ - пунктирные линии с длинными штрихами.

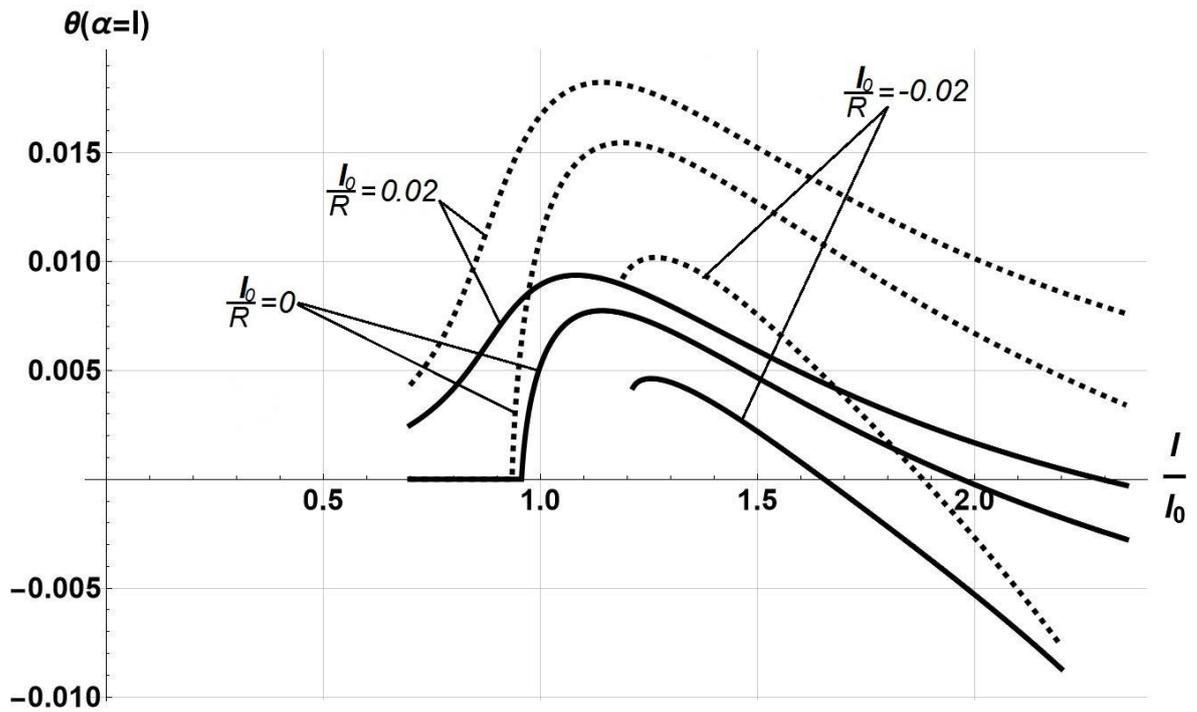


Рис. 4.5. Зависимость угла поворота θ от l/l_0 при $l_0/R = 0, +0.02, -0.02$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии.

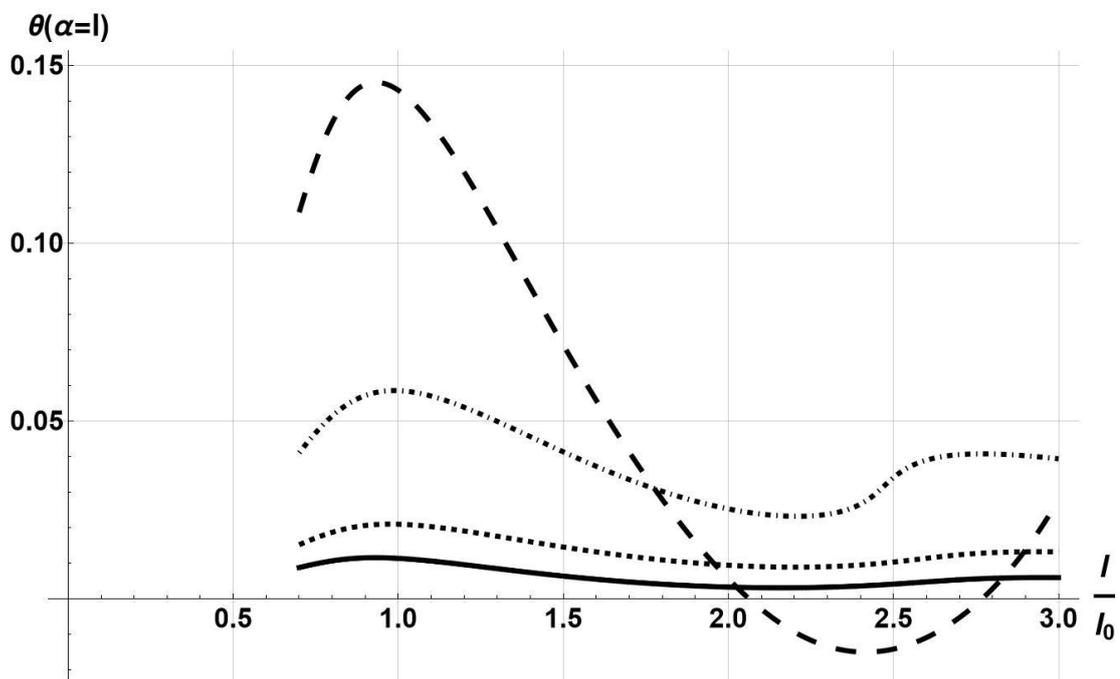


Рис. 4.6. Зависимость угла поворота θ от l/l_0 при $l_0/R = +0.1$; жесткое основание - сплошные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$ - пунктирные линии с короткими штрихами; $\bar{E}/\bar{E}_s = 10$ - штрих-пунктирные линии; $\bar{E}/\bar{E}_s = 100$ - пунктирные линии с длинными штрихами.

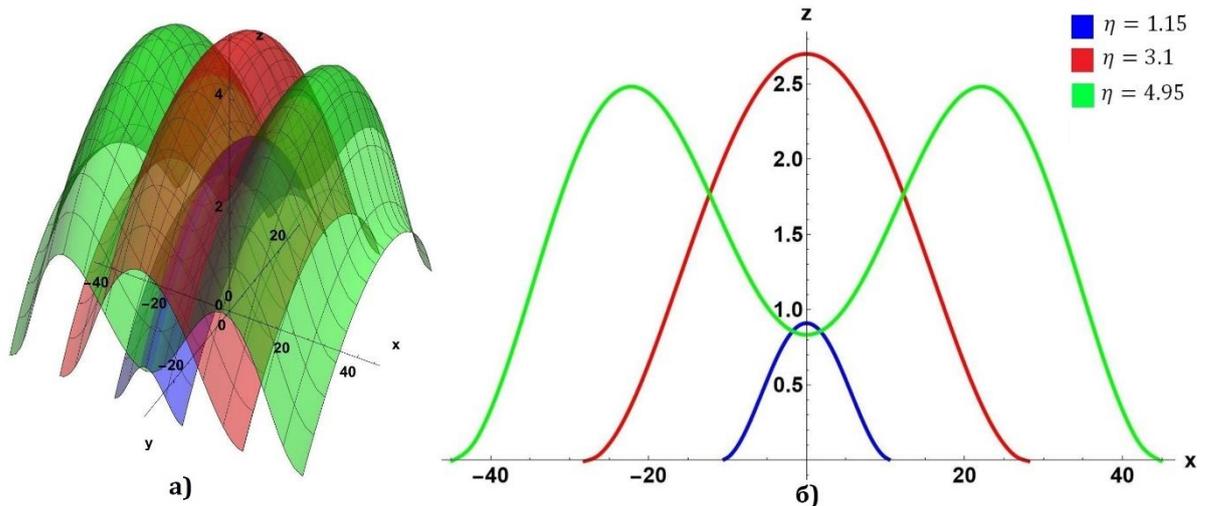


Рис. 4.7. Профиль отслоения покрытия в зависимости от разных значений $\eta = l/l_0$ при $l_0/R = +0.05$, $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$: (а) — в трехмерном пространстве, (б) — в проекции на двумерное пространство.

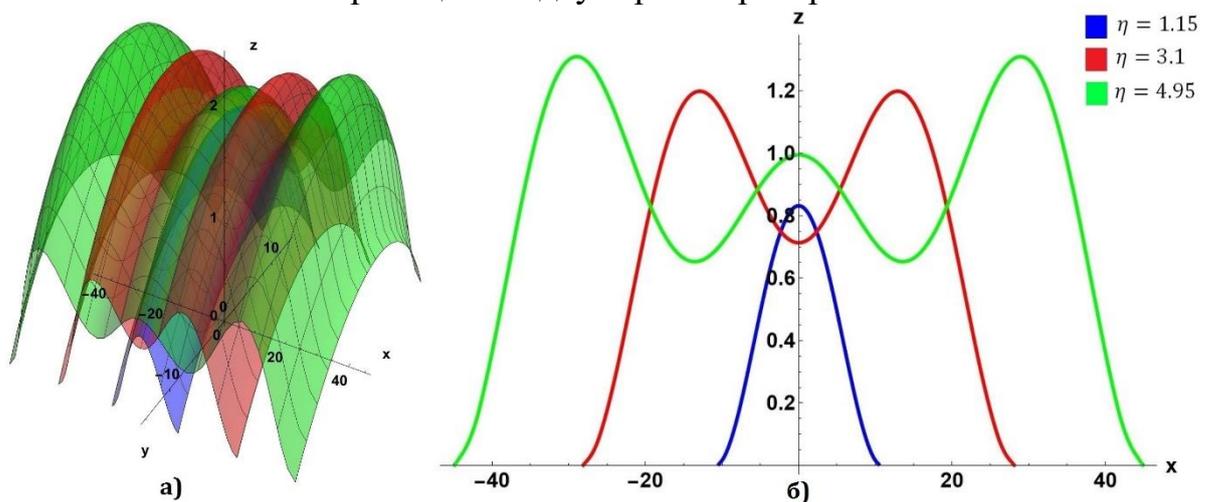


Рис. 4.8. Профиль отслоения покрытия в зависимости от разных значений $\eta = l/l_0$ при $l_0/R = +0.1$, $\bar{E}/\bar{E}_s = 1$: (а) — в трехмерном пространстве, (б) — в проекции на двумерное пространство.

Как показано в главе 3 [5], зависимости скорости высвобождения энергии (4.45), соответствующие росту отслоения в осевом и окружном направлениях, должны пересекаться в максимуме первого. Можно заметить (рис. 4.4), что для достаточно податливых оснований существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться за счет удлинения, чем за счет расширения и чем податливее основание, тем меньше критическая ширина.

По результатам вычислений можно сделать вывод, что при положительной кривизне основания отслоение покрытия возникает при напряжениях ниже уровня потери устойчивости (скорости высвобождения

энергии положительны для всего диапазона l/l_0 , рис. 4.3, 4.4, угол поворота в точке заделки также положителен (рис. 4.5, 4.6), а наличие податливости основания только усиливает этот процесс.

Также замечено, что начиная с определенного отрицательного значения кривизны, а именно $l_0/R < -0.02$ отслоения покрытия не происходит, ввиду того, что в этом случае данный процесс энергетически невыгоден. Расхождение между результатами, полученными с учетом влияния поперечных сил и перемещений ($a_{i3} \neq 0$) и упрощенными моделями ($a_{i3} = 0$) становится заметным для значения кривизны $l_0/R > 0.3 \dots 0.4$. Обратим внимание и на то, что при увеличении кривизны, в результатах профиля отслоения покрытия (рис. 4.7, 4.8), скорости высвобождения энергии (рис. 4.4) наблюдается эффект «волнистости» (гофрирования), чего не наблюдается для задачи, рассмотренной в главе 3 [5], причем, чем больше значение кривизны, тем сильнее проявляется данный эффект. Аналогично, в рассматриваемой задаче, из зависимостей для угла поворота в точке заделки (рис. 4.5, 4.6) наблюдается критическая ширина отслоения, более которой модель становится физически некорректной, ввиду возникновения перекрытия поверхностей покрытия и основания. Физическая невозможность подобного перекрытия предотвращает дальнейший рост отслоения в данном направлении.

4.4. Краткие выводы по разделу

В рамках теории пологих цилиндрических оболочек получено и исследовано решение задачи об отслоении покрытия от цилиндрического основания, вытянутого в окружном направлении участка покрытия. Решение получено с учетом совместного влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения. В качестве уравнений равновесия использовались уравнения Муштари — Доннелла — Власова, а в качестве граничных условий — граничные условия типа обобщенной упругой заделки, с помощью которых учитывалась податливость основания. Получены выражения для скорости высвобождения энергии при отслоении вдоль границ отслоения, угла поворота в точке заделки, также получены профили отслоившегося участка покрытия. Исследовано изменение скорости высвобождения энергии, профиля отслоения покрытия в зависимости от разных значений податливости основания и ее кривизны. Показано, что при увеличении податливости основания, а также величины (положительной) кривизны значения данных параметров значительно возрастают. Из анализа результатов также следует, что для достаточно податливых оснований существует некоторая критическая ширина отслоения, для которой отслоению становится энергетически выгоднее развиваться в окружном направлении, чем в осевом. Также из полученных результатов можно сделать

вывод, что при увеличении положительной кривизны и податливости основания значение критической ширины уменьшается. Показано, что при достаточно больших значениях кривизны основания, в профиле отслоения покрытия возникает эффект гофрирования, что приводит к появлению локальных экстремумов в зависимости скорости высвобождения энергии от протяженности отслоения. Исследовано условие распространения отслоения, заключающийся в сравнении величины угла поворота отслоения в точке заделки с нулем (уменьшение значения данного угла до нуля соответствует перекрытию и прекращению дальнейшего отслоения покрытия). Проведено сравнение результатов, полученных с помощью рассмотренной модели, с результатами, полученными с помощью упрощенной модели, не учитывающей влияние нормального смещения и перерезывающей (поперечной) силы в точках заделки [4, 113].

ГЛАВА 5. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ, С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ПОДАТЛИВОСТИ ОСНОВАНИЯ (ПОДЛОЖКИ)

5.1. Формулировка задачи

5.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим слой толщины h , сцепленный с массивным основанием, имеющим цилиндрическое отверстие радиуса R , со стороны которого на слой прикладывается давление p . Введем цилиндрическую систему координат (r, α, z) с осью z , расположенной по центру отверстия и направленную в сторону, противоположную от прилегающего основания (рис. 5.1). Участок тонкого слоя, находящегося над отверстием будет рассматриваться как равномерно нагруженная пластина.

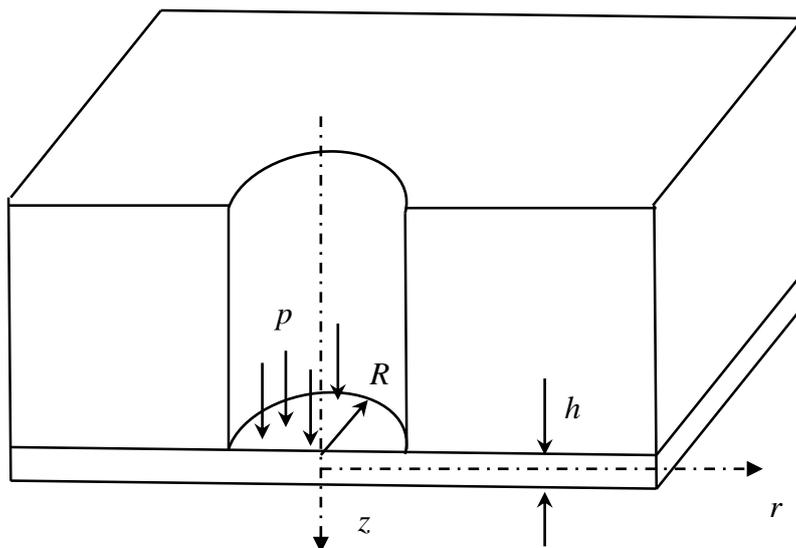


Рис. 5.1. Тонкий упругий слой, сцепленный с массивным основанием, имеющим цилиндрическое отверстие

Деформация слоя может описываться в приближении теории пластин, где в качестве кинематических переменных используются тангенциальные и нормальная компоненты смещения его срединной плоскости (рис. 5.2): $u = u(r, \alpha)$, $v = v(r, \alpha)$, $w = w(r, \alpha)$.

В силу осевой симметрии, компонента смещений $v(r, \alpha) = 0$ отсутствует, а остальные компоненты зависят только от одной переменной:

$u = u(r)$, $w = w(r)$. В дальнейшем анализе также используется параметр: $\theta = -w'(r)|_{r=R}$ — угол поворота пластины на контуре заделки.

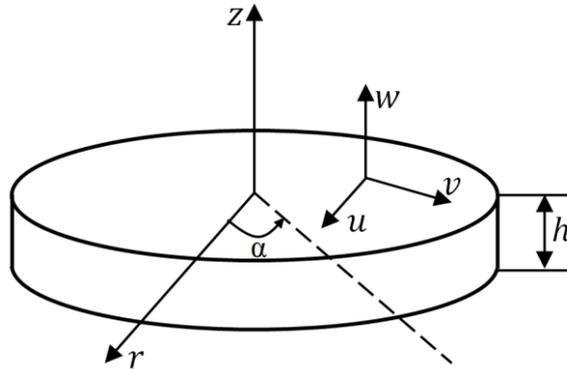


Рис. 5.2. Рассматриваемая система координат

К настоящему времени разработано много вариантов теории пластин, отличающихся как степенью сложности, так и степенью строгости учета различных факторов.

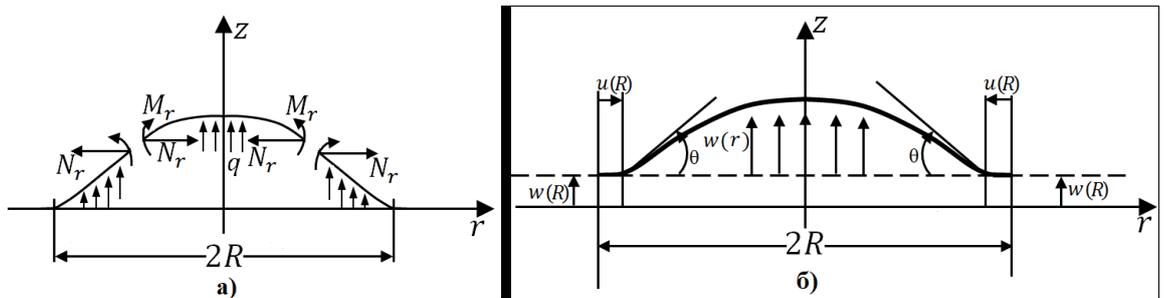


Рис. 5.3. Конфигурация деформирования круговой пластины: а) распределение усилий и момента, б) распределение компонент смещений

Для исследования деформирования тонких пластин в качестве основной модели будет использована модель Феппля — фон Кармана (напр. [15, 117]), позволяющая учитывать достаточно большие прогибы. Также будем считать, что к пластине со стороны отверстия в основании приложена поперечная нагрузка с постоянной интенсивностью $q = const$. Согласно данной модели для рассматриваемого случая осевой симметрии используем уравнения, разрешающие задачу относительно прогиба w , тангенциальной (окружной) и радиальной компонент усилий N_t , N_r [15, 22]:

$$\begin{aligned}
 D\Delta^2 w - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{dw}{dr} \cdot N_r \cdot r \right] &= q, & \Delta^2 w &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \right], \\
 \frac{d}{dr} (rN_r) - N_t &= 0, & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{\bar{E}h^3}{12} \\
 r \frac{d}{dr} (N_r + N_t) + \frac{hE}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

где первые два выражения являются уравнениями равновесия, а третье соотношение следует из условия совместности деформаций, $u = u(r)$, $w = w(r)$ — радиальная и нормальная компоненты смещения срединной плоскости слоя; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона слоя (пластины); Δ — оператор Лапласа; D — изгибная жесткость пластины.

Упростив первое выражение из (5.1) путем интегрирования, получим

$$D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{qr}{2} + N_r \frac{dw}{dr},$$

$$\frac{d}{dr} (rN_r) - N_t = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{\bar{E}h^3}{12} \quad (5.2)$$

$$r \frac{d}{dr} (N_r + N_t) + \frac{hE}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0.$$

Выражения компонент усилий N_r , N_t и изгибающего момента M_r через компоненты перемещения могут быть получены с помощью соотношений из теории тонких оболочек (2.15), где для случая круговой пластины (напр. [15]) имеют вид

$$N_r = \bar{E}h \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \nu \frac{u}{r} \right],$$

$$N_t = \bar{E}h \left[\frac{u}{r} + \nu \left(\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right) \right], \quad (5.3)$$

$$M_r = D \left[\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right].$$

Расписав первое уравнение в (5.2) с учетом того, что $w = w(r)$, в итоге получим

$$D \left[\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right] = \frac{qr}{2} + N_r \frac{dw}{dr},$$

$$r \frac{dN_r}{dr} + N_r - N_t = 0, \quad (5.4)$$

$$r \frac{d}{dr} (N_r + N_t) + \frac{hE}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 = 0.$$

Первые два уравнения в (5.1) представляют собой уравнения равновесия, в первом из которых часть усилий выражено через нормальную компоненту смещения w ; третье уравнение в (5.1) следует из уравнения совместности деформаций с учетом выражений в (5.3).

Для удобства решения и анализа задачи введем безразмерные величины:

$$\rho = \frac{r}{R}, \quad \text{при } \begin{cases} r=0 \Rightarrow \rho=0, \\ r=R \Rightarrow \rho=1. \end{cases}$$

$$\tilde{u}(\rho) = \frac{u(r)}{R}, \quad \tilde{w}(\rho) = \frac{w(r)}{R},$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{d\tilde{u}}{d\rho}, \quad \frac{dw}{dr} = \frac{d\tilde{w}}{d\rho}, \quad \frac{d^2w}{dr^2} = \frac{1}{R} \frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2}, \quad \frac{d^3w}{dr^3} = \frac{1}{R^2} \frac{d^3\tilde{w}}{d\rho^3},$$

$$\tilde{N}_r = \frac{N_r}{Eh}, \quad \tilde{N}_t = \frac{N_t}{Eh}, \quad p = \frac{q}{E}.$$

С помощью введенных безразмерных величин можно получить более информативные и удобные результаты для анализа поведения круговой пластины, в частности прогиб пластины относительно радиуса его основания

(% «выпучивания»). Также введенный безразмерный параметр $\rho = \frac{r}{R}$ будет

способствовать быстрому решению задачи в рядах, где для граничного условия вместо $r = R$ используется значение $\rho = 1$.

Соответственно уравнения (5.3), (5.4) в безразмерных величинах примут вид

$$D \left[\frac{1}{R^2} \frac{d^3\tilde{w}}{d\rho^3} + \frac{1}{R^2\rho} \frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2} - \frac{1}{R^2\rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right] = \frac{p\bar{E}R\rho}{2} + \tilde{N}_r \bar{E}h \frac{d\tilde{w}}{d\rho},$$

$$\rho \frac{d(\tilde{N}_r \bar{E}h)}{d\rho} + \tilde{N}_r \bar{E}h - \tilde{N}_t \bar{E}h = 0, \quad (5.6)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} (\tilde{N}_r \bar{E}h + \tilde{N}_t \bar{E}h) + \frac{hE}{2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 = 0.$$

$$\tilde{N}_r = \frac{N_r}{Eh} = \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 + \nu \frac{\tilde{u}}{\rho},$$

$$\tilde{N}_t = \frac{N_t}{Eh} = \frac{\tilde{u}}{\rho} + \nu \left(\frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right)^2 \right), \quad (5.7)$$

$$\tilde{M}_r = \frac{M_r}{Eh^2} = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R} \right) \left[\frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \right].$$

После некоторых упрощений, данные уравнения приводятся к следующему виду

$$\frac{d^3 \tilde{w}}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} = \frac{12p\rho}{2} \left(\frac{R}{h}\right)^3 + 12\tilde{N}_r \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{d\tilde{w}}{d\rho},$$

$$\rho \frac{d\tilde{N}_r}{d\rho} + \tilde{N}_r - \tilde{N}_t = 0, \quad (5.8)$$

$$\rho \frac{d}{d\rho} (\tilde{N}_r + \tilde{N}_t) + \frac{1}{2}(1-\nu^2) \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho}\right)^2 = 0.$$

Для постановки задачи, систему уравнений (5.4) необходимо дополнить граничными условиями. Традиционной является постановка, в которой смещения и углы поворота пластины в точках сопряжения с основанием полагаются равными нулю. Это условие носит название жесткой заделки и может быть представлено в виде

$$u(R) = 0 \quad (5.9)$$

$$w(R) = 0 \quad (5.10)$$

$$\left. \frac{dw(r)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad (5.11)$$

Более точными являются условия упругой заделки, согласно которому кинематические величины, входящие в (5.9) – (5.11) пропорциональны некоторым статическим величинам, действующим на границе. В случае плоской границы выбор данных статических величин однозначен и определяется структурой определяющих уравнений. В общем виде для данной задачи это условие в используемых обозначениях можно записать в виде [118]

$$\bar{E} \begin{pmatrix} u(R) \\ -hw'(R) \\ w(R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -N_r \\ h^{-1}M_r \\ Q_{rz} \end{pmatrix}, \quad \bar{E} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (5.12)$$

Здесь Q_{rz} — перерезывающее (поперечное) усилие, действующие в сечении; \bar{E} — модифицированный модуль Юнга для плоской деформации; a_{ij} — безразмерные коэффициенты матрицы податливости, зависящие, в общем случае, от геометрических параметров системы (отношения толщины пластины к характерному размеру всей системы) и отношения упругих констант пластины и массивной части. Коэффициенты a_{ij} не могут быть посчитаны на основе элементарных балочных теорий. Для ряда конфигураций они были посчитаны аналитическими либо численными методами из рассмотрения более простых задач [58, 59, 70-78, 118, 119]. Условие жесткой заделки (жесткого защемления) получается из условия

упругой заделки (5.12) если положить нулями все коэффициенты податливости $a_{ij} = 0$.

Значение перерезывающего (поперечного) усилия Q_{rz} , которое в силу симметрии и равномерности распределения приложенной нагрузки ($q = const$) имеет вид

$$Q_{rz}(r) = \frac{qr}{2}. \quad (5.13)$$

Соответственно, граничные условия в безразмерных величинах будут иметь вид:

А) Граничные условия типа жесткой заделки:

$$\begin{aligned} u(R) = 0, & \quad \tilde{u}(\rho = 1) = 0, \\ w(R) = 0, & \quad \Rightarrow \quad \tilde{w}(\rho = 1) = 0, \\ \frac{dw(r)}{dr} \Big|_{r=R} = 0, & \quad \frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Б) Граничные условия в случае обобщенной упругой заделки (5.11)

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\rho = 1) &= \left(\frac{h}{R}\right) \left[-a_{11}\tilde{N}_r + a_{12}\tilde{M}_r + a_{13}\tilde{Q}_{rz} \right], \\ \tilde{w}(\rho = 1) &= \left(\frac{h}{R}\right) \left[-a_{31}\tilde{N}_r + a_{32}\tilde{M}_r + a_{33}\tilde{Q}_{rz} \right], \\ -\frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=1} &= -a_{21}\tilde{N}_r + a_{22}\tilde{M}_r + a_{23}\tilde{Q}_{rz}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где

$$\tilde{M}_r = \frac{M_r}{Eh^2}, \quad \tilde{Q}_{rz} = \frac{Q_{rz}}{Eh}.$$

5.1.2. Оценки коэффициентов матрицы упругой заделки.

Аналитические и численные решения.

Коэффициенты матрицы упругой заделки $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ были получены многими авторами: численно [59, 69, 71, 75], полуаналитически [58, 74] и аналитически [73] для плоской задачи о слое, примыкающим к полуплоскости и имеющим участок отслоения. В работе [73] также были получены значения коэффициентов a_{13}, a_{23} (остальные коэффициенты не используются в рамках рассматриваемой модели). Для достаточно протяженных отслоений пользуясь результатами [72, 114, 118] можно получить следующие формулы

$$a_{11} = \frac{2\Sigma}{\pi} \left(\ln \frac{\eta}{2\Sigma} + 1.57 \right) + d, \quad a_{12} = a_{21} = \sqrt{3}, \quad a_{22} = 12\delta, \quad (5.16)$$

$$a_{13} = 1 + \sqrt{3}\delta, \quad a_{23} = 3/2 + 6\delta^2, \quad \delta = 0.21 + 0.62\Sigma^{1/3},$$

Здесь Σ — отношение модулей слоя (покрытия) и основания; η — отношение полудлины отслоившегося слоя к его толщине; d — константа, порядка единицы. Коэффициенты a_{ij} в данном приближении не зависят от длины пластины, кроме коэффициента a_{11} зависящего логарифмически.

Рассматриваемая геометрия имеет два существенных отличия от геометрии, рассмотренной выше указанных работах: наличие отверстия в основании на границе с пластиной и ненулевой радиус кривизны границы. Первое отличие должно приводить к уменьшению жесткости конструкции и, как следствие, к увеличению коэффициентов податливости. Действительно, для весьма жестких по отношению к основанию пластин, область затухания напряжений в основании при удалении от точки заземления велика, поэтому при отсутствии материала основания в половине области (для плоского случая) можно ожидать до двукратного уменьшения сопротивления, и соответственно до двукратного увеличения коэффициентов податливости. В противоположном пределе (абсолютно) жесткого основания, наличие отверстия не влияет на распределение напряжений, поэтому коэффициенты податливости не должны меняться. Наличие кривизны контура, очевидно, должно приводить к увеличению жесткости системы и уменьшению коэффициентов податливости. Это уменьшение должно сильно сказываться на коэффициентах сильно зависящих от отношения протяженности пластины к толщине, и практически не сказываться на коэффициентах слабо зависящих от этого отношения. Суммируя, для рассматриваемой конфигурации коэффициенты податливости должны несколько превосходить значения, даваемые формулой (5.16).

5.1.3. Оценки коэффициентов матрицы упругой заделки. МКЭ решение

Для получения значения коэффициентов упругой заделки решалась вспомогательная задача о полем цилиндра высотой H с внешним и внутренним радиусами R_1, R_2 , один из торцов которого, $z = 0$, полностью сцеплен с пластиной из другого материала, имеющей круговое отверстие радиуса $R_3 < R_2$ (рис. 2). Противоположный торец цилиндра $z = -H$ жестко

закреплялся, $u(r, -H) = w(r, -H) = 0$. На внутреннем контуре пластины ставились граничные условия одного из следующих видов: постоянное давление

$$\sigma_{rr}(R_3, z) = p, \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.17)$$

либо постоянный изгибающий момент

$$\sigma_{rr}(R_3, z) = \left(z - \frac{h}{2} \right) p, \quad 0 \leq z \leq h \quad (5.18)$$

Для пластины и основания были взяты модули Юнга и коэффициента Пуассона для алюминия ($E = 70$ ГПа, $\nu = 0.35$) и кремния ($E = 109$ ГПа, $\nu = 0.27$), соответственно [120].

Задача решалась методом конечных элементов в линейной упругой осесимметричной постановке.

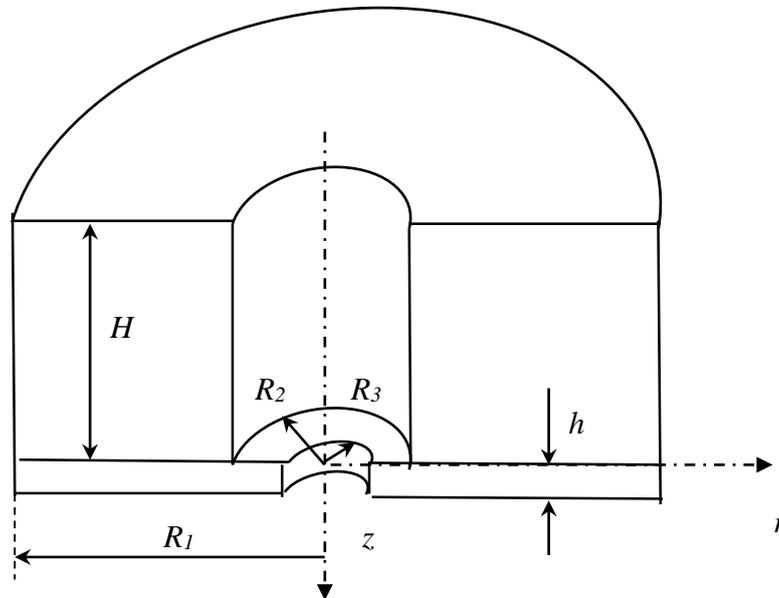


Рис. 5.4. Геометрия расчетной области

В процессе решения вычислялись компоненты смещения на верхней и нижней свободной границе пластины $u(r, 0)$, $u(r, h)$, $w(r, 0)$, $w(r, h)$, $R_3 + \xi \leq r \leq R_2 - \xi$, где параметр ξ принимался равным $3h$ для отсечения областей, в которых существенную роль могут играть краевые эффекты. Значения смещений срединной плоскости вычислялись как полусумма значений в узлах сетки, расположенных на поверхностях. Полученные функции аппроксимировались полиномиальными функциями шестого порядка методом наименьших квадратов. Данные аппроксимационные зависимости экстраполировались до

границы контакта пластины с цилиндром $r = R_2$. Действующие продольные усилия и моменты в данной точке вычислялись аналогичным образом через соответствующие комбинации производных от смещений. Полученные таким образом значения $u(0)$, $w'(0)$, $M(0)$, $N_r(0)$ использовались для нахождения коэффициентов податливости. Для расчета были выбраны следующие геометрические параметры: $h = 1$, $H = 100$, $R_1 = 100$, $R_2 = 100$, для параметра R_3 использовались два значения — 60 и 40. Разница в значениях полученных коэффициентов a_{ij} при этом не превышала 3%, что можно отнести к погрешности метода конечных элементов. Двумерная сетка строилась четырехугольными элементами. Число элементов по толщине пластины составляло 6, по длине пластины — 100, по сторонам массивной части 200. Отношение размера элемента вблизи точки заделки и вдали от нее составляло 1/10.

Полученные значения коэффициентов податливости составили $a_{11} = 10$, $a_{12} = a_{21} = 1.7$, $a_{22} = 12$. Данные значения, согласующиеся с теоретическими значениями для плоской границы и сплошного основания, использовались в расчетах.

Оценку влияния коэффициентов удобно проводить по отдельности для отдельных коэффициентов матрицы податливости. При этом для оценки вклада того или иного коэффициента можно использовать подходящую приближенную модель, в рамках которой можно получить аналитическое либо полуаналитическое решение. Такой подход позволяет в рамках используемых приближенных теорий на основе полученных решений оценивать относительный вклад того или иного коэффициента.

5.2. Модели, допускающие аналитическое решение задачи

5.2.1. Модель пластины без учета растягивающих усилий

Для оценки влияния коэффициентов, связанных с начальным поворотом удобно использовать элементарное уравнение изгиба пластины без учета сил, возникающих в ее плоскости. Подобное уравнение обычно называют уравнением Софи Жермен. Данное уравнение может быть получено отбрасыванием в первом уравнении из (5.1) члена, связанного с действием продольных сил

$$D\Delta^2 w = q \quad (5.19)$$

Соответственно в рассматриваемом случае осевой симметрии данное уравнение в полярных координатах преобразуется к виду

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \right] = \frac{q}{D} \quad (5.20)$$

Общее решение данного уравнения при постоянной нагрузке q , не имеющее особенностей в центре (при $r = 0$), есть

$$w(r) = \frac{qr^4}{64D} + C_1 r^2 + C_2 \quad (5.21)$$

При моделировании условий закрепления в виде жесткой заделки граничные условия записываются в виде (5.10), (5.11), при этом условие (5.9) не используется, поскольку входящая в него компонента смещения u не входит в уравнения изгиба.

При моделировании условий закрепления в виде упругой заделки условие (5.11) заменяется на следующее (с учетом знаков), являющееся частным случаем условия (5.12)

$$-\left. \frac{dw(r)}{dr} \right|_{r=R} = \frac{a_{22}}{\bar{E}h^2} M_r(R) + \frac{a_{23}}{\bar{E}h} Q_{rz}(R) \quad (5.22)$$

В условии (5.22) ввиду характера уравнения (5.19) отсутствует зависимость от продольного усилия, действующего в пластине. Кроме того, ввиду осевой симметрии, вертикальное смещение края не зависит от угла и может быть положено равным нулю.

С учетом выражения для изгибающего момента в (5.7), а также перерезывающего усилия в (5.13) граничное условие (5.22) записывается в виде

$$\left. \frac{dw(r)}{dr} \right|_{r=R} = -\frac{h}{12} a_{22} \left(\left. \frac{d^2w(r)}{dr^2} \right|_{r=R} + \frac{\nu}{R} \left. \frac{dw(r)}{dr} \right|_{r=R} \right) - \frac{a_{23}}{2} \frac{qR}{\bar{E}h} \quad (5.23)$$

Подстановка общего решения (5.21) в граничное условие упругой заделки (5.23) дает уравнение для определения константы C_1 :

$$\frac{qR^3}{16D} + 2C_1R = -\frac{h}{12} a_{22} \left(\frac{(3+\nu)qR^2}{16D} + 2(1+\nu)C_1 \right) - \frac{a_{23}}{2} \frac{qR}{\bar{E}h} \quad (5.24)$$

Откуда

$$C_1 = -\frac{qR^2}{32D} \left(1 + \frac{3+\nu}{12} a_{22} \frac{h}{R} + a_{23} \frac{2}{3} \frac{h^2}{R^2} \right) \left(1 + \frac{h}{12R} a_{22} (1+\nu) \right)^{-1}. \quad (5.25)$$

После чего из граничного условия (5.10) находится константа C_2 :

$$C_2 = -\frac{qR^4}{64D} - C_1R^2. \quad (5.26)$$

Подстановка значений констант (5.24), (5.25) в общее решение (5.21) окончательно дает выражение для смещений в случае граничных условий в виде упругой заделки

$$w(r) = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qR^2}{32D}(r^2 - R^2) \frac{\left(1 + \frac{3+\nu}{12}a_{22}\frac{h}{R} + a_{23}\frac{2}{3}\frac{h^2}{R^2}\right)}{\left(1 + \frac{h}{12R}a_{22}(1+\nu)\right)} - \frac{qR^4}{64D}. \quad (5.27)$$

Соответственно в безразмерных величинах (5.5) решение задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\rho) = & \frac{3p}{16}\left(\frac{R}{h}\right)^3(\rho^4 - 1) - \frac{3p}{8}\left(\frac{R}{h}\right)^3(\rho^2 - 1) \cdot \\ & \cdot \left[1 + \frac{(3+\nu)}{12}a_{22}\frac{h}{R} + a_{23}\frac{2}{3}\left(\frac{h}{R}\right)^2\right] \cdot \left(1 + \frac{h}{12R}a_{22}(1+\nu)\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Выражение для смещений в случае граничных условий в виде жесткой заделки получается отсюда, если положить $a_{22} = a_{23} = 0$, либо подстановкой граничных условий (5.10), (5.11), в общее решение (5.21)

$$w(r) = \frac{q}{64D}(R^2 - r^2)^2. \quad (5.29)$$

Ввиду малости параметра h/R оценку для поправки, вносимой учетом конечности поворота в месте заделки, решение (5.29) можно разложить в ряд по данному параметру. Тогда, в частности, для смещения в центре пластины

$$w(0) = \frac{qR^4}{64D}\left(1 + \frac{1}{3}a_{22}\frac{h}{R}\right) + O\left(\frac{h}{R}\right)^2. \quad (5.30)$$

При $h/R = 1/100$ для пленки алюминия на кремнии с $a_{22} \sim 12$ погрешность, вносимая неучетом конечности поворота, составляет около 4%, для $h/R = 1/1000$ погрешность становится пренебрежимо малой. Вклад от коэффициента a_{23} для указанных условий пренебрежим, ввиду того, что параметр h/R входит во второй степени.

Аналогично, для величины момента в точке заделки, согласно (5.3)

$$M_r(R) = \frac{qR^2}{8D}\left(1 - \frac{1+\nu}{12}a_{22}\frac{h}{R}\right). \quad (5.31)$$

Поправка для рассматриваемых условий составляет порядка 1%. Однако, при меньших относительных радиусах рассматриваемая поправка становится существенной.

Уравнения (5.30), (5.31) показывают, что податливость заделки приводит к увеличению нормальных смещений и уменьшению изгибающего момента, соответствующие поправки имеет порядок $a_{22} \frac{h}{R}$ и обусловлены вкладом члена, соответствующего влиянию изгибающего момента на угол поворота в месте контакта.

5.2.2. Мембранная модель

Рассмотрим другой крайний случай преобладания продольных (мембранных) усилий. При этом обычно предполагается постоянство усилий

$$N_r(r) = const. \quad (5.32)$$

Из предположения (5.32) и второго уравнения равновесия из (5.1) также следует равенство мембранных усилий в различных направлениях $N_r = N_t = N$. Предположение постоянства мембранных усилий не позволяет удовлетворить точно уравнениям совместности, однако используется в приближенных расчетах. Уравнение для прогиба получается из первого уравнения из (5.1) отбрасыванием первого члена, связанного с изгибом, что вместе с условием (5.32) дает

$$-N \cdot \Delta w(r) = q \quad (5.33)$$

или в полярных координатах:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q}{N}. \quad (5.34)$$

Решение, удовлетворяющее граничному условию отсутствия вертикальных смещений на границе (5.10) и ограниченное в нуле, есть

$$w(r) = \frac{q}{4N} (R^2 - r^2). \quad (5.35)$$

Данное решение, очевидно неадекватно описывает поведение вблизи точек заделки. В частности, решение (5.35) дает конечный (и достаточно большой) поворот в этой точке. Это связано с тем, что вблизи заделки пренебрежение изгибными напряжениями, описываемые в уравнении (5.1) старшими производными, становится неправомерным; для адекватного описания процесса деформирования в этой области в рамках мембранной теории необходимо рассмотрение пограничного слоя.

Радиальные N_r и окружные мембранные усилия N_t находятся из закона упругости. В предположении постоянства мембранных усилий получаем

$$\varepsilon_{rr} = \frac{N_r}{Eh} - \nu \frac{N_t}{Eh} = \frac{1-\nu}{Eh} N, \quad \varepsilon_{tt} = \frac{N_t}{Eh} - \nu \frac{N_r}{Eh} = \frac{1-\nu}{Eh} N. \quad (5.36)$$

С помощью соотношений из теории тонких оболочек (2.11) выражения для радиальных и окружных деформаций $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{tt}$ через смещения $u(r), w(r)$ имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2; \quad \varepsilon_{tt} = \frac{u}{r}. \quad (5.37)$$

Подстановка (5.37) в (5.36) дает различные выражения для смещения $u(R)$, при подсчете через радиальную и окружную деформации. В первом случае интегрирование от 0 до R дает

$$u(R) = \frac{1-\nu}{Eh} N \cdot R - \frac{1}{2} \int_0^R \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr \quad (5.38)$$

во втором

$$u(R) = \frac{1-\nu}{Eh} N \cdot R. \quad (5.39)$$

Для дальнейших расчетов в качестве $u(R)$ возьмем среднее значение

$$u(R) = \frac{1-\nu}{Eh} N \cdot R - \frac{1}{4} \int_0^R \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr. \quad (5.40)$$

Подстановка (5.35) в (5.40) и интегрирование от 0 до R дает

$$u(R) = \frac{1-\nu}{E} \frac{R}{h} N - \frac{q^2 R^3}{48 N^2}. \quad (5.41)$$

С другой стороны смещение $u(R)$ может быть посчитано через граничное условие типа упругой заделки (получающегося как частный случай из первого из условий (5.12)):

$$u(R) = -\frac{a_{11}}{E} N. \quad (5.42)$$

Здесь отсутствуют члены, связанные с высшими производными от w (см. рассуждения после формулы (5.35)). Из сравнения (5.41) и (5.42) получаем

$$N^3 = \frac{Eq^2 R^2 h}{48(1-\nu)} \left(1 + a_{11} (1+\nu) \frac{h}{R} \right)^{-1}. \quad (5.43)$$

Откуда для малых h/R

$$N = \sqrt[3]{\frac{Eq^2R^2h}{48(1-\nu)}} \left(1 - a_{11} \frac{1+\nu}{3} \frac{h}{R} \right) + O\left(\frac{h}{R}\right)^2. \quad (5.44)$$

Подстановка выражения для N в выражение для нормального смещения w (5.35), а также для смещения в центре пластины получаем

$$w(r) = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \sqrt[3]{\frac{6q(1-\nu)}{EhR^2}} \left(1 + a_{11} \frac{1+\nu}{3} \frac{h}{R} \right) + O\left(\frac{h}{R}\right)^2, \quad (5.45)$$

$$w(0) = \frac{R}{2} \sqrt[3]{\frac{6qR(1-\nu)}{Eh}} \left(1 + a_{11} \frac{1+\nu}{3} \frac{h}{R} \right) + O\left(\frac{h}{R}\right)^2. \quad (5.46)$$

Соответственно в безразмерных величинах (5.5) безразмерные компоненты смещения $\tilde{u}(\rho)$, $\tilde{w}(\rho)$, а также безразмерная величина продольного усилия \tilde{N}_r будут иметь вид

$$\tilde{u}(\rho) = \frac{\tilde{N}_r \rho}{(1+\nu)} - \frac{1}{48} \rho^3 \left(\frac{p}{\tilde{N}_r} \frac{R}{h} \right)^2, \quad (5.47)$$

$$\tilde{w}(\rho) = \frac{p}{4\tilde{N}_r} \cdot \frac{R}{h} (1 - \rho^2), \quad (5.48)$$

$$\tilde{N}_r = \sqrt[3]{\frac{1}{48} p^2 \left(\frac{R}{h} \right)^3 \cdot \left(\frac{R}{h} \frac{1}{(1+\nu)} + a_{11} \right)^{-1}}. \quad (5.49)$$

Из уравнений (5.44)-(5.46) видно, что относительная поправка, вносимая за счет учета податливости заделки, имеет порядок $a_{11} \frac{h}{R}$. Для рассмотренной мембранной модели она не зависит от величины действующей нагрузки q . Поправка в величины смещения и натяжения для $h/R = 1/100$ составляет порядка 1.3%. Однако, при меньших относительных радиусах рассматриваемая поправка становится существенной.

5.2.3. Модель Фепля — фон Кармана в приближении постоянства продольных усилий

Данная модель, не будучи точной, тем не менее, позволяет получить оценки влияния всех коэффициентов матрицы податливости. Уравнения (5.2) для постоянных мембранных усилий $N_r = N_t = N$ в полярных координатах записывается как

$$D \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] - N \frac{dw}{dr} = \frac{qr}{2}, \quad (5.50)$$

$$r \frac{dN_r}{dr} + N_r - N_t = 0 \quad \Rightarrow \quad N_r = N_t = N = const.$$

Решение данного уравнения, не имеющее особенности в нуле и удовлетворяющее граничному условию отсутствия вертикальных смещений на контуре (5.10) записывается в виде

$$w(r) = \frac{q(R^2 - r^2)}{4N} + C \left[I_0 \left(\frac{r\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) - I_0 \left(\frac{R\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) \right], \quad (5.51)$$

где I_k — модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда) порядка k .

Первая и вторая производные от вертикального смещения есть

$$w'(r) = -\frac{qr}{2N} + C \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{D}} I_1 \left(\frac{r\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right), \quad (5.52)$$

$$w''(r) = -\frac{q}{2N} + C \frac{N}{2D} \left[I_0 \left(\frac{r\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) + I_2 \left(\frac{r\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) \right]. \quad (5.53)$$

Постоянная интегрирования C и величина натяжения N находятся из оставшихся граничных условий (5.12), записываемых в виде

$$u(R) = -\frac{a_{11}}{E} N + \frac{a_{12}}{Eh} M + \frac{a_{13}}{E} Q_{rz}, \quad (5.54)$$

$$-w'(R) = -\frac{a_{21}}{Eh} N + \frac{a_{22}}{Eh^2} M + \frac{a_{23}}{Eh} Q_{rz}. \quad (5.55)$$

С другой стороны подстановка выражения для производной нормальных смещений (5.52) в выражение (5.38) и интегрирование от 0 до R дает (здесь, подобно мембранному приближению, для вычисления мембранных усилий N берется среднее значение осевых и окружных деформаций)

$$u(R) = \frac{1-\nu}{E} \frac{R}{h} N - u_w, \quad (5.56)$$

$$u_w = \frac{R^3}{24D^2N^2} \left[C^2 N^4 {}_2F_3 \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}, 3; \frac{R^2 N}{D} \right) + \right. \\ \left. + Dq \left(Dq - 2CN^2 {}_1F_2 \left(\frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}; \frac{R^2 N}{4D} \right) \right) \right]. \quad (5.57)$$

Здесь u_w — член, возникающий за счет вклада в деформацию квадрата производной от вертикальных смещений; ${}_m F_n$ — гипергеометрическая функция.

Соответственно в безразмерных величинах (5.5) безразмерные компоненты смещения $\tilde{u}(\rho)$, $\tilde{w}(\rho)$ будут иметь вид

$$\tilde{w}(\rho) = \frac{p}{4\tilde{N}} \frac{R}{h} (1 - \rho^2) + C \left[I_0 \left(\rho \frac{R}{h} \sqrt{12\tilde{N}} \right) - I_0 \left(\frac{R}{h} \sqrt{12\tilde{N}} \right) \right], \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\rho) = & \frac{\tilde{N}}{(1+\nu)} - \frac{\rho^3}{48\tilde{N}^2} \frac{R}{h} \cdot \left(p^2 - 24p \frac{R}{h} C \tilde{N}^2 {}_1F_2 \left(\frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}; 3 \left(\frac{R}{h} \right)^2 \rho^2 \tilde{N} \right) + \right. \\ & \left. + 144 \left(\frac{R}{h} \right)^2 C^2 \tilde{N}^4 {}_2F_3 \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}, 3; 12 \left(\frac{R}{h} \right)^2 \rho^2 \tilde{N} \right) \right). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Подстановка выражений для силовых параметров (5.3), (5.13), выражения для смещения в на краю пластины (5.56) и производной от нормальных смещений (5.52) приводят к системе двух нелинейных уравнений для определения величин C и N :

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{E} \frac{R}{h} N - u_w = & -\frac{a_{11}}{E} N + \frac{a_{13}}{E} \frac{qR}{2} + \frac{a_{12}h^2}{12} \left\{ -\frac{q}{2N} + C \frac{N}{2D} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left[I_0 \left(\frac{R\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) + I_2 \left(\frac{R\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) \right] + \frac{\nu}{R} \left[-\frac{q}{2N} + C \frac{N}{2D} \left(I_0 \left(\frac{R\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) + I_2 \left(\frac{R\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{qR}{2T} - C \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{D}} I_1 \left(\frac{R\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) = & -\frac{a_{21}}{Eh} N + \frac{a_{23}}{Eh} \frac{qR}{2} + \frac{a_{22}h}{12} \cdot \\ & \cdot \left\{ -\frac{q}{2T} + C \frac{N}{2D} \left[I_0 \left(\frac{R\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) + I_2 \left(\frac{R\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\nu}{R} \left[-\frac{q}{2T} + C \frac{N}{2D} \left(I_0 \left(\frac{R\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) + I_2 \left(\frac{R\sqrt{N}}{\sqrt{D}} \right) \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Полученная система нелинейных уравнений решается при помощи численных методов [116]. Условие жесткого защемления получается из (5.58), (5.59) обнулением коэффициентов податливости, т.е. $a_{ij} = 0$, однако даже при этом получившаяся система не позволяет получить аналитическое решение.

5.3. Полуаналитическое решение задачи. Решение с помощью рядов

В силу допущения равномерности поперечной нагрузки (т.е. $q = const$), а также симметрии относительно оси z , можно считать, что компонента продольного усилия \tilde{N}_r является симметричной функцией, а $\frac{d\tilde{w}}{d\rho}$ — антисимметричной функцией от ρ . Следовательно, можно представить данные функции в виде следующих степенных рядов [15]:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_r &= \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12\rho} (B_1\rho + B_3\rho^3 + B_5\rho^5 + B_7\rho^7 + \dots), \\ \frac{d\tilde{w}}{d\rho} &= -\left(\frac{h}{R}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} (C_1\rho + C_3\rho^3 + C_5\rho^5 + C_7\rho^7 + \dots).\end{aligned}\quad (5.62)$$

где C_i, B_i — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Соответственно вторая и третья производные дают выражения

$$\begin{aligned}\frac{d^2\tilde{w}}{d\rho^2} &= -\left(\frac{h}{R}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} (C_1 + 3C_3\rho^2 + 5C_5\rho^4 + 7C_7\rho^6 + \dots), \\ \frac{d^3\tilde{w}}{d\rho^3} &= -\left(\frac{h}{R}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} (3 \cdot 2C_3\rho^1 + 5 \cdot 4C_5\rho^3 + 7 \cdot 6C_7\rho^5 + \dots).\end{aligned}\quad (5.63)$$

Нормальная компонента смещения получается непосредственно путем интегрирования:

$$\tilde{w}(\rho) = \int \frac{d\tilde{w}}{d\rho} d\rho = C_0 - \left(\frac{h}{R}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} C_1 \rho^2 + \frac{1}{4} C_3 \rho^4 + \frac{1}{6} C_5 \rho^6 + \frac{1}{8} C_7 \rho^8 + \dots \right)$$

Из второго уравнения равновесия в безразмерных величинах (5.6), используя (5.62), получаем:

$$\tilde{N}_r = \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12\rho} (B_1\rho + 3B_3\rho^3 + 5B_5\rho^5 + 7B_7\rho^7 + \dots).\quad (5.64)$$

Подстановка (5.62), (5.63) в первое и третье уравнения (5.6), дает систему уравнений, где сгруппировав слагаемые с одинаковыми степенями по ρ дает рекуррентное решение:

$$\begin{aligned}B_k &= -\frac{(1-\nu^2)}{2(k^2-1)} \sum_{i=1,3,5,7,\dots}^{k-2} C_i C_{k-i-1}, \quad k=3,5,7,\dots \\ C_3 &= \frac{1}{8} \left(B_1 C_1 - \frac{12}{2} p \left(\frac{R}{h}\right)^4 2\sqrt{3} \right), \\ C_k &= \frac{1}{(k^2-1)} \sum_{i=1,3,5,7,\dots}^{k-2} C_i B_{k-i-1}, \quad k=5,7,9,\dots\end{aligned}\quad (5.65)$$

где коэффициенты B_k, C_k $k=3,5,7,\dots$ выражаются через пока еще неизвестные коэффициенты B_1, C_1 .

Радиальная компонента смещения, с использованием (5.7) и степенного представления компонент продольных усилий (5.62), (5.64), приобретает вид

$$\frac{1}{(1-\nu^2)}(\tilde{N}_i - \nu\tilde{N}_r) = \frac{\tilde{u}(\rho)}{\rho} \Rightarrow$$

$$\frac{\tilde{u}(\rho)}{\rho} = \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12(1-\nu^2)} \sum_{i=3,5,7,\dots} B_i (i-\nu)\rho^{i-1}. \quad (5.66)$$

Константы B_1, C_1 , а, следовательно и параметры смещения $\tilde{u}(\rho)$, $\frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho}$ находятся из решения системы первого и третьего граничных условий (5.15):

$$\tilde{u}(\rho=1) = \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12(1-\nu^2)} \sum_{i=3,5,7,\dots} B_i (i-\nu) = \left(\frac{h}{R}\right) \left[-a_{11} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} B_i - \right. \quad (5.67)$$

$$\left. -a_{12} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1,3,5,7,\dots} i \cdot C_i + \frac{\nu}{R} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i \right) + a_{13} \frac{p}{2} \left(\frac{R}{h}\right) \right]$$

$$-\frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = \left(\frac{h}{R}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i = -a_{21} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} B_i + \quad (5.68)$$

$$+a_{22} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1,3,5,7,\dots} i \cdot C_i + \frac{\nu}{R} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i \right) + a_{23} \frac{p}{2} \left(\frac{R}{h}\right),$$

Нормальная компонента перемещений $\tilde{w}(\rho)$ (точнее неизвестная константа C_0) находится из второго граничного условия (5.15):

$$\tilde{w}(\rho=1) = C_0 - \left(\frac{h}{R}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i = \left(\frac{h}{R}\right) \left[-a_{31} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{12} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} B_i - \right. \quad (5.69)$$

$$\left. -a_{32} \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1,3,5,7,\dots} i \cdot C_i + \frac{\nu}{R} \sum_{i=1,3,5,7,\dots} C_i \right) + a_{33} \frac{p}{2} \left(\frac{R}{h}\right) \right].$$

5.4. Численный метод решения задачи

Приведем численный метод решения данной задачи, аналогичный «методу стрельбы». Сведем уравнения равновесия модели Фешля — фон Кармана в безразмерных величинах (5.8) с учетом (5.7) к системе дифференциальных уравнений с двумя неизвестными (безразмерными компонентами смещений $\tilde{u}(\rho)$, $\tilde{w}(\rho)$):

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \tilde{w}}{d\rho^3} = & -\frac{1}{\rho} \frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d\tilde{w}}{d\rho} + \frac{12\rho\rho}{2} \left(\frac{R}{h}\right)^3 + \\ & + 12 \left(\frac{R}{h}\right)^2 \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \left(\frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \nu \frac{\tilde{u}}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho}\right)^2 \right), \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\rho^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + \frac{\tilde{u}}{\rho^2} - \frac{(1-\nu)}{2\rho} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho}\right)^2 - \frac{d\tilde{w}}{d\rho} \frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2}.$$

Данную систему можно решить с помощью процедуры численного интегрирования, начиная от центра пластины и «двигаясь» малыми приращениями в радиальном направлении к границе пластины. Для кругового элемента малого радиуса равного $\Delta\rho$ задаются (обычно случайным образом) параметры радиальной деформации и кривизны

$$\left(\frac{d\tilde{u}}{d\rho}\right)_{\rho=\Delta\rho} = u'_1, \quad \left(\frac{d^2 \tilde{w}}{d\rho^2}\right)_{\rho=\Delta\rho} = w''_1. \quad (5.71)$$

В силу симметрии круговой пластины, очевидно

$$\tilde{u}(\rho=0) = u_0 = 0, \quad \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho}\right)_{\rho=0} = w'_0 = 0. \quad (5.72)$$

Используя формулу конечных разностей для производных, получаем

$$\tilde{u}(\rho=\Delta\rho) = u_1 = u_0 + u'_1 \Delta\rho, \quad \left(\frac{d\tilde{w}}{d\rho}\right)_{\rho=\Delta\rho} = w'_1 = w'_0 + w''_1 \Delta\rho. \quad (5.73)$$

Подстановка значений u_1, u'_1, w'_1, w''_1 в систему уравнений (5.70) дает

$$\left(\frac{d^2 \tilde{u}}{d\rho^2}\right)_{\rho=\Delta\rho} = u''_1, \quad \left(\frac{d^3 \tilde{w}}{d\rho^3}\right)_{\rho=\Delta\rho} = w'''_1. \quad (5.74)$$

Далее, для следующей точки $\rho = 2\Delta\rho$

$$u''_1 = \frac{u'_2 - u'_1}{\Delta\rho} \Rightarrow u'_2 = u'_1 + \Delta\rho u''_1. \quad (5.75)$$

используя численное интегрирование, получим

$$u_2 = u_1 + \frac{(u'_1 + u'_2)}{2} \Delta\rho. \quad (5.76)$$

Аналогично для компоненты w :

$$\begin{aligned} w'''_1 = \frac{w''_2 - w''_1}{\Delta\rho} \Rightarrow w''_2 = w''_1 + \Delta\rho w'''_1, \\ w'_2 = w'_1 + \frac{(w''_1 + w''_2)}{2} \Delta\rho. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Подстановка полученных значений u_2, u'_2, w'_2, w''_2 в систему уравнений (5.70) дает, соответственно, значения u''_2, w'''_2 . Используя полученные значения можно уточнить решения, пересчитав компоненты

$$\begin{aligned}
u'_2 &= u'_1 + \frac{(u''_1 + u''_2)}{2} \Delta\rho, \\
u_2 &= u_1 + \frac{(u'_1 + u'_2)}{2} \Delta\rho, \\
w''_2 &= w''_1 + \frac{(w'''_1 + w'''_2)}{2} \Delta\rho, \\
w'_2 &= w'_1 + \frac{(w''_1 + w''_2)}{2} \Delta\rho.
\end{aligned} \tag{5.78}$$

Подстановка данных значений в систему уравнений (5.70) дает более точные значения u''_2, w''_2 . Далее аналогичным образом находим значения u_i, u'_i, w'_i, w''_i $i=3, \dots, n$, где $\rho_i = i \cdot \Delta\rho$, при этом $\rho_{i=n} = 1$ соответствует граничному условию.

Также можно применить известные методы для решения систем дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для этого приведем уравнения (5.70) к такой системе с помощью следующей замены:

$$y_1 = \tilde{w}', \quad y_2 = \tilde{w}'', \quad y_3 = \tilde{u}, \quad y_4 = \tilde{u}'.$$

Полученная система дифференциальных уравнений 1-го порядка примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{dy_1}{d\rho} &= y_2 = f_1(\rho, y_1, y_2, y_3, y_4), \\
\frac{dy_2}{d\rho} &= -\frac{1}{\rho} y_2 + \frac{1}{\rho^2} y_1 + \frac{12p}{2} \left(\frac{R}{h}\right)^3 \rho + 12 \left(\frac{R}{h}\right)^2 y_1 \left(y_4 + \frac{\nu}{\rho} y_3 + \frac{1}{2} y_1^2 \right) = f_2(\rho, y_1, y_2, y_3, y_4), \\
\frac{dy_3}{d\rho} &= y_4 = f_3(\rho, y_1, y_2, y_3, y_4), \\
\frac{dy_4}{d\rho} &= -\frac{1}{\rho} y_4 + \frac{1}{\rho^2} y_3 - \frac{(1-\nu)}{2\rho} y_1^2 - y_1 y_2 = f_4(\rho, y_1, y_2, y_3, y_4).
\end{aligned} \right.$$

с начальными условиями:

$$\left\{ \begin{aligned}
y_1(\rho = \Delta\rho) &= y_1^0 = \tilde{w}'(\rho = \Delta\rho) \approx \tilde{w}'(\rho = 0) + \Delta\rho \cdot \tilde{w}''(\rho = \Delta\rho) = \Delta\rho \cdot \tilde{w}''(\rho = \Delta\rho), \\
y_2(\rho = \Delta\rho) &= y_2^0 = \tilde{w}''(\rho = \Delta\rho), \\
y_3(\rho = \Delta\rho) &= y_3^0 = \tilde{u}(\rho = \Delta\rho) \approx \tilde{u}(\rho = 0) + \Delta\rho \cdot \tilde{u}'(\rho = \Delta\rho) = \Delta\rho \cdot \tilde{u}'(\rho = \Delta\rho), \\
y_4(\rho = \Delta\rho) &= y_4^0 = \tilde{u}'(\rho = \Delta\rho).
\end{aligned} \right.$$

Классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка для полученной системы будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
k_1^i &= f_i(\rho_j, y_1^j, y_2^j, y_3^j, y_4^j), \\
k_2^i &= f_i\left(\rho_j + \frac{\Delta\rho}{2}, y_1^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_1^i, y_2^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_1^i, y_3^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_1^i, y_4^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_1^i\right), \\
k_3^i &= f_i\left(\rho_j + \frac{\Delta\rho}{2}, y_1^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_2^i, y_2^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_2^i, y_3^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_2^i, y_4^j + \frac{\Delta\rho}{2}k_2^i\right), \\
k_4^i &= f_i(\rho_j + \Delta\rho, y_1^j + \Delta\rho k_3^i, y_2^j + \Delta\rho k_3^i, y_3^j + \Delta\rho k_3^i, y_4^j + \Delta\rho k_3^i), \\
y_i^{j+1} &= y_i^j + \frac{\Delta\rho}{6} \cdot (k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i), \quad i=1,2,3,4, \quad j=1,\dots,n-1
\end{aligned}$$

где при $\rho_{j=n} = \rho_{n-1} + \Delta\rho = 1$.

Полученное численное решение будет считаться корректным, если оно достаточно точно соответствует первому и третьему граничному условию (5.16) (или в случае жесткой заделки (5.15)), в противном случае, берем другие начальные условия (5.71) и повторяем те же процедуры. В качестве критерия точности возьмем евклидовую норму, т.е. для не нулевых граничных условий (5.16) наилучшим решением численного метода будет то, которое удовлетворяет условию

$$\min \left[\sqrt{\left(\tilde{u}(\rho=1) - \left(\frac{h}{R}\right) \left[-a_{11}\tilde{N}_r + a_{12}\tilde{M}_r + a_{13}\tilde{Q}_{rz} \right] \right)^2 + \left(\left. \frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=1} - a_{21}\tilde{N}_r + a_{22}\tilde{M}_r + a_{23}\tilde{Q}_{rz} \right)^2} \right] \rightarrow 0. \quad (5.79)$$

Соответственно для нулевых граничных условий (т.е. при $a_{ij} = 0$):

$$\min \left[\sqrt{(\tilde{u}(\rho=1))^2 + \left(\left. \frac{d\tilde{w}(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=1} \right)^2} \right] \rightarrow 0. \quad (5.80)$$

Если для данного численного метода в качестве начальных условий (5.71) использовать значения, вычисленные с помощью модели Феппля — фон Кармана в рядах, то можно заметить, что даже для большого количества слагаемых ряда, решения с помощью численного метода и метода в рядах могут отличаться на границе, особенно при достаточно большом значении интенсивности поперечной нагрузки q . На рис. 5.5, 5.6 изображены зависимости $u(\rho), w'(\rho)$ с учетом и без коэффициентов податливости подложки при значении величины $p = 2 \cdot 10^{-4}$.

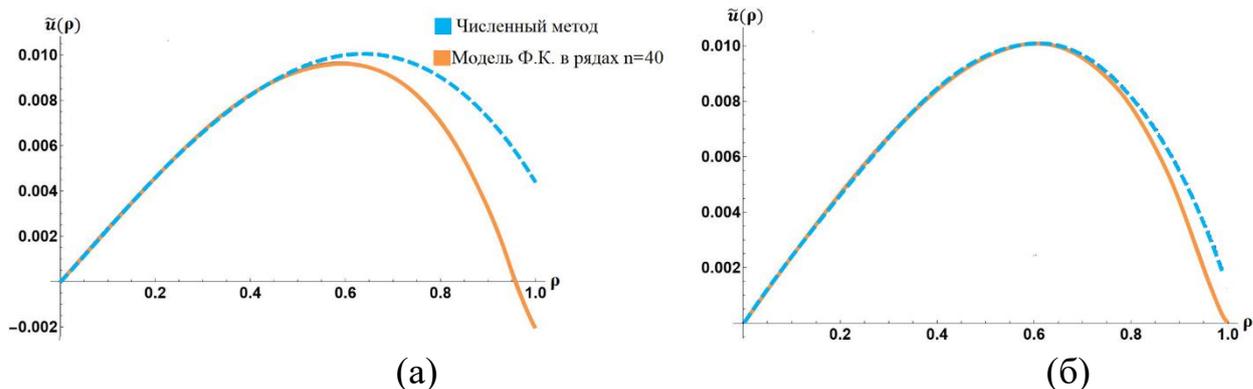


Рис 5.5. Компонента смещения $\tilde{u}(\rho)$ с учетом (а) и без учета (б) податливости

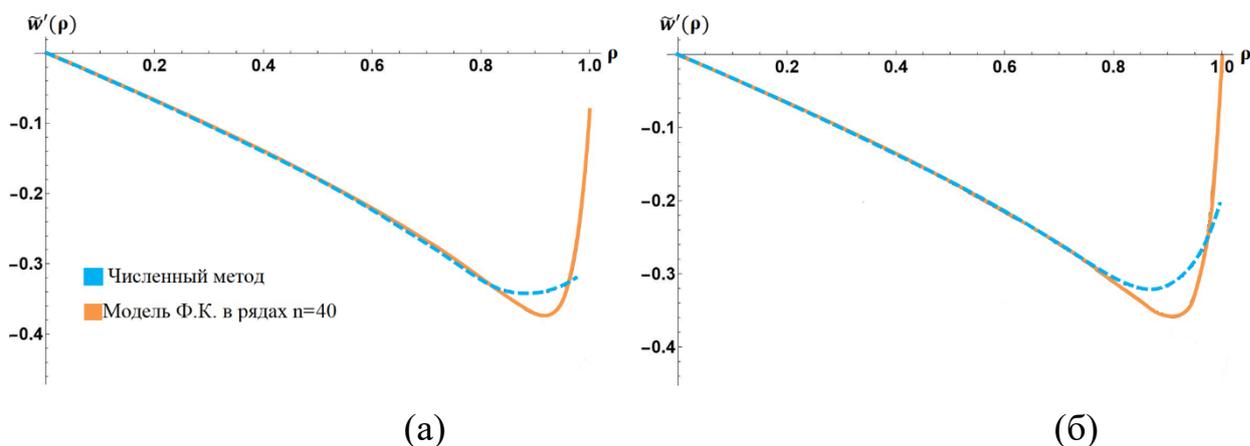


Рис 5.6. Значения производной смещения $\tilde{w}'(\rho)$ с учетом (а) и без учета (б) податливости

Из рис. 5.5, 5.6 видно, что при решении с помощью численного метода, значения $u(\rho)$, $w'(\rho)$ в окрестности границы не совпадают со значениями решения, полученного с помощью модели Феппля — фон Кармана в рядах.

Для получения достаточно точного решения можно применить следующий алгоритм: в качестве начальных условий (5.71) возьмем значения, полученные с помощью решения в рядах и, выполняя алгоритм численного метода в указанной окрестности начальных условий (рис. 5.7), получим решение задачи, с достаточной степенью точности удовлетворяющее условию (5.79) (или в случае жесткой заделки (5.80)). Данный алгоритм относится к алгоритмам типа «предиктор-корректор» (предсказание-исправление).

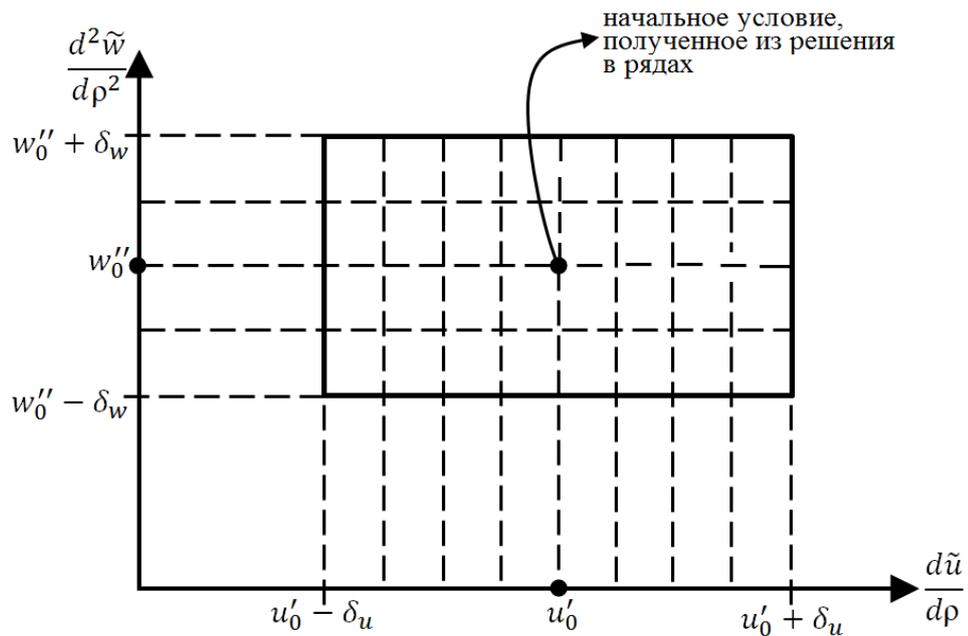


Рис 5.7. Выделенная окрестность начальных условий для поиска оптимального решения задачи

Также, для поиска значения начальных условий, при наличии некоторых решений задачи, можно построить интерполяционный полином из известных начальных данных, затем провести экстраполяцию (рис. 5.8) и, «двигаясь» вдоль экстраполированной кривой с использованием критерия (5.79) (или в случае жесткой заделки (5.80)), подобрать новое приближение начальных условий.

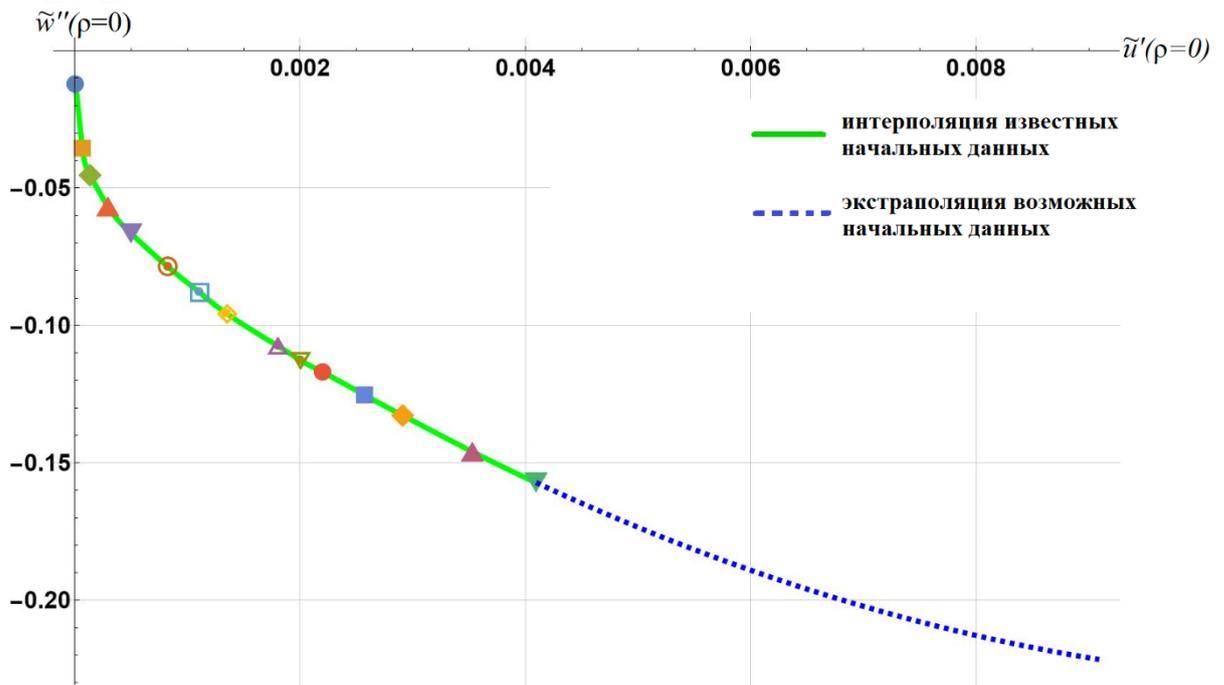


Рис 5.8. Интерполяция и экстраполяция по известным начальным данным при различных значениях интенсивности поперечной нагрузки p

Однако представленный численный метод также не лишен недостатков. При больших значениях интенсивности поперечной нагрузки $p = \frac{q}{E} > 2 \cdot 10^{-4}$, что соответствует прогибу $\sim 19\text{...}20\%$ от радиуса круговой пластины, решение с помощью численного метода становится сильно «чувствительным» к начальным условиям, и для нахождения оптимального решения необходимо достаточно большое количество вычислительных мощностей, а следовательно, и больше времени на поиск соответствующего начального условия и расчет.

На рис. 5.9 построены графики компоненты смещения $\tilde{w}(\rho)$ с учетом и без податливости подложки при значении величины $p = \frac{q}{E} = 2 \cdot 10^{-4}$ для разных методов, в том числе приведенного численного метода.

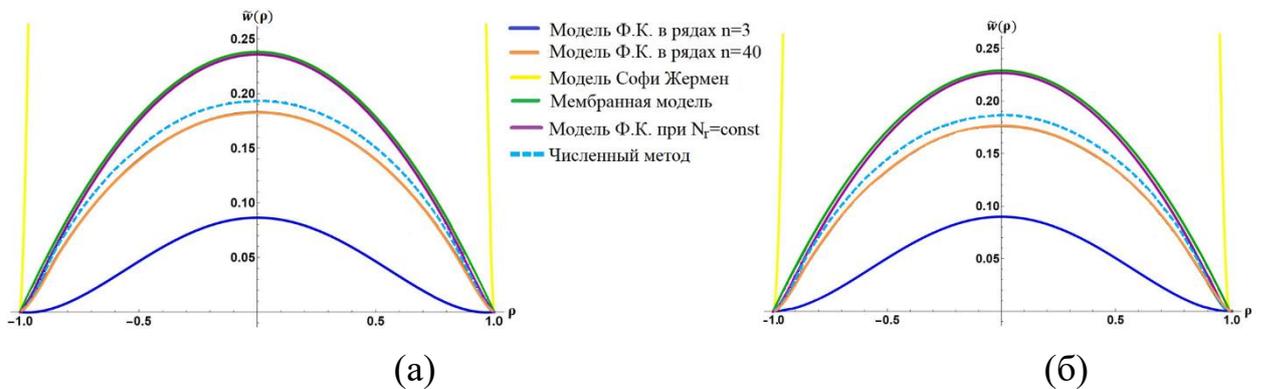


Рис 5.9. Графики компоненты смещения $\tilde{w}(\rho)$ с учетом (а) и без (б) коэффициентов податливости a_{ij} при $p = 2 \cdot 10^{-4}$

5.5. Результаты расчетов; сравнение результатов, полученных различными методами. Некоторые численные оценки влияния коэффициентов податливости и относительной толщины на параметры деформации

Расчеты проводились для пластины алюминия на кремниевом основании. Постановка данной задачи обусловлена ее интересом при идентификации экспериментально определяемых параметров ультратонких элементов МЭМС, используемых в проекционных литографических системах [48-50, 121, 122]. Значения модуля Юнга и коэффициенты Пуассона для пластины принимались $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.35$, соответственно [120]. Значения коэффициентов податливости, посчитанные методом конечных

элементов принимались равными $a_{11} = 10$, $a_{12} = a_{21} = 1.7$, $a_{22} = 12$ (вклад в расчетные величины за счет коэффициентов a_{13}, a_{23}, a_{33} оказался порядка сотых долей процента, поэтому в окончательных расчетах их значения принималось равным нулю $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$). Отношение толщины пластины к радиусу в расчетах составляло $h/R = 1/100$.

Значения величин прогиба в центре пластины w , момента на краю пластины M и величины растягивающего усилия N были посчитаны для указанных значений параметров и различных величин интенсивности поперечной нагрузки q согласно формулам (5.3), (5.51) и результатом численного решения системы (5.60), (5.61). Обнуление одного или нескольких оставшихся коэффициентов податливости позволило также проводить расчеты по редуцированным моделям, вплоть до модели жесткой заделки. Результаты расчетов представлены в Таблице 5.1. Величины w_0, M_0, N_0 относятся к жесткой заделке.

Таблица 5.1. Значения величин прогиба в центре пластины, продольного усилия и изгибающего момента на краю пластины при учете различных коэффициентов податливости

$\frac{q}{E}$	a_{11}	a_{12}	a_{22}	$\frac{w}{h}$	$\frac{w-w_0}{w}$ •100%	$\frac{M}{qh^2R}$	$\frac{M-M_0}{M}$ •100%	$\frac{N}{qhR}$	$\frac{N-N_0}{N}$ •100%
$5 \cdot 10^{-8}$	0	0	0	0.703		11.39		4.64	
	a_{11}	0	0	0.712	1.37	11.49	0.8	4.20	-10.4
	0	a_{12}	0	0.697	-0.82	11.37	-0.23	4.83	3.91
	0	0	a_{22}	0.724	2.81	11.13	-2.35	4.87	4.69
	a_{11}	0	a_{22}	0.734	4.2	11.23	-1.46	4.41	-5.09
	a_{11}	a_{12}	a_{22}	0.729	3.5	11.2	-1.7	4.58	-0.13
10^{-7}	0	0	0	1.138		10.10		6.08	
	a_{11}	0	0	1.165	2.35	10.24	1.32	5.62	-8,24
	0	a_{12}	0	1.127	-0.93	10.01	-0.12	6.20	2.01
	0	0	a_{22}	1.163	2.13	9.78	-3.29	6.29	3.37
	a_{11}	0	a_{22}	1.192	4.49	9.92	-1.84	5.82	-4.47
	a_{11}	a_{12}	a_{22}	1.181	3.69	9.91	-1.95	5.92	-2.56
10^{-6}	0	0	0	3.336		5.379		5.35	
	a_{11}	0	0	3.469	3.83	5.483	1.89	5.1	-5.10
	0	a_{12}	0	3.306	-0.89	5.421	0.78	5.39	0.69
	0	0	a_{22}	3.372	1.08	4.977	-8.07	5.44	1.43
	a_{11}	0	a_{22}	3.507	4.88	5.081	-5.84	5.17	-3.57
	a_{11}	a_{12}	a_{22}	3.481	4.15	5.119	-5.07	5.20	-2.96
10^{-5}	0	0	0	7.622		2.622		2.89	
	a_{11}	0	0	7.944	4.05	2.676	2.0	2.77	-4.55
	0	a_{12}	0	7.556	-0.87	2.687	2.41	2.91	0.57
	0	0	a_{22}	7.685	0.82	2.223	-17.9	2.92	1.04
	a_{11}	0	a_{22}	8.01	4.85	2.276	-15.2	2.79	-3.54
	a_{11}	a_{12}	a_{22}	7.957	4.21	2.328	-12.6	2.81	-3.01

Приведенные расчеты свидетельствуют о том, что влияние коэффициентов податливости разнонаправлено и существенно зависит от уровня внешней нагрузки. Анализ полученных данных позволяет сделать

следующие выводы о влиянии коэффициентов податливости для рассматриваемой геометрии и сочетании упругих свойств:

1. Пренебрежение влиянием коэффициента a_{11} приводит к занижению значений прогиба пластины и изгибающего момента на краю (тем большим, чем больше нагрузка), и завышению значений растягивающих усилий (тем большим, чем меньше нагрузка).
2. Пренебрежение влиянием коэффициента a_{12} приводит к незначительному (менее 1%) завышению значений прогиба пластины, завышению значений изгибающего момента на краю при малых нагрузках и занижению при больших, и занижению значений растягивающих усилий (тем большим, чем меньше нагрузка). В целом, данный коэффициент оказывает наименьшее влияние на исследуемые величины. Его вклад наиболее существенен на изгибающий момент при больших нагрузках, и на величину продольной силы при малых нагрузках, однако, даже в этих случаях, его вклад имеет порядок 2.5% и 5%, соответственно.
3. Пренебрежение влиянием коэффициента a_{22} приводит к занижению значений прогиба пластины (тем большим, чем больше нагрузка), к завышению значений изгибающего момента на краю (тем большим, чем больше нагрузка), а также к занижению значений растягивающих усилий (тем большим, чем меньше нагрузка). Влияние данного коэффициента становится весьма существенным при расчете величины изгибающего момента на краю пластины при действии больших нагрузок.
4. Сравнение результатов, полученных в рамках модели упругой заделки с учетом всех трех коэффициентов с результатами для жесткой модели показывает, что пренебрежение податливостью приводит к занижению значений прогиба тем большим, чем больше нагрузка, однако не превышающим 4.2%, завышению значения изгибающего момента на краю, достигающего до 12.6% при нагрузках, соответствующих прогибам порядка 7.5 толщин пластины, и завышению значений растягивающих усилий (тем большим, чем больше нагрузка).

Для дальнейшего анализа результатов введем следующие обозначения:

- X_{s-z} — решение, полученное с помощью модели Софи Жермен;
- $X_{Membran}$ — решение, полученное с помощью мембранной модели;

- X_{Karman} — решение, полученное с помощью модели Феппля — фон Кармана при постоянных продольных усилиях;
- X_{Series} — решение, полученное с помощью модели Феппля — фон Кармана в рядах;
- X_{Num} — решение, полученное с помощью модели Феппля — фон Кармана, с использованием численного метода;
- $\delta_{Karman}^X = \frac{(X_{Karman} - X_{Karman}^0)}{X_{Karman}} \cdot 100\%$ — относительная разность решений, полученных с помощью модели Феппля — фон Кармана при постоянных продольных усилиях (при $\tilde{N}_r = const$) с учетом и без учета податливости основания;
- $\delta_{Series}^X = \frac{(X_{Series} - X_{Series}^0)}{X_{Series}} \cdot 100\%$ — относительная разность решений, полученных с помощью модели Феппля — фон Кармана в рядах с учетом и без учета податливости основания.

Для значений безразмерной величины интенсивности поперечной нагрузки: $p = \frac{q}{E} = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}, \dots, 10^{-5} \cdot \sqrt{3}$ были вычислены значения безразмерных величин прогиба в центре пластины $\tilde{w}(\rho=0)$ (табл. 5.2, также графически изображены на рис. 5.10), момента на краю пластины \tilde{M}_r и величины растягивающего усилия \tilde{N}_r (табл. 5.3, 5.4, а также графики изображены на рис. 5.11, 5.12 соответственно) при граничных условиях типа обобщенной упругой заделки, а также жесткой заделки ($a_{ij} = 0$).

Также были построены графики безразмерных компонент смещений $\tilde{u}(\rho), \tilde{w}(\rho)$ при относительно малом и большом значении величины p для разных методов (при малом $p = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$ рис. 5.13, 5.14, при большом $p = 10^{-5} \cdot \sqrt{3}$ рис. 5.15, 5.16).

Таблица 5.2. Величины прогиба в центре пластины $\tilde{w}(\rho=0)$ при учете и без учета податливости для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	\tilde{w}_{S-Z}	$\tilde{w}_{Membran}$	\tilde{w}_{Karman}	\tilde{w}_{Series}	\tilde{w}_{Num}	$\delta_{Karman}^{\tilde{w}}$	$\delta_{Series}^{\tilde{w}}$
$p_0 =$	$a_{ij} = 0$	3.248e-3	9.873e-3	3.141e-3	3.085e-3	3.085e-3	-	-
$10^{-8} \cdot \sqrt{3}$	$a_{ij} \neq 0$	3.376e-3	1.030e-2	3.255e-3	3.193e-3	3.193e-3	3.49%	3.39%
$2p_0$	$a_{ij} = 0$	6.495e-3	1.244e-2	5.819e-3	5.544e-3	5.544e-3	-	-

10p ₀	a _{ij} ≠ 0	6.752e-3	1.297e-2	6.028e-3	5.728e-3	5.728e-3	3.47%	3.2%
	a _{ij} = 0	3.248e-2	2.127e-2	1.661e-2	1.457e-2	1.457e-2	-	-
20p ₀	a _{ij} ≠ 0	3.376e-2	2.219e-2	1.728e-2	1.505e-2	1.505e-2	3.89%	3.16%
	a _{ij} = 0	6.495e-2	2.679e-2	2.292e-2	1.960e-2	1.960e-2	-	-
100p ₀	a _{ij} ≠ 0	6.752e-2	2.795e-2	2.388e-2	2.026e-2	2.026e-2	4.04%	3.24%
	a _{ij} = 0	3.248e-1	4.582e-2	4.297e-2	3.578e-2	3.578e-2	-	-
200p ₀	a _{ij} ≠ 0	3.376e-1	4.780e-2	4.485e-2	3.703e-2	3.702e-2	4.19%	3.36%
	a _{ij} = 0	6.495e-1	5.774e-2	5.508e-2	4.558e-2	4.558e-2	-	-
300p ₀	a _{ij} ≠ 0	6.752e-1	6.022e-2	5.750e-2	4.719e-2	4.718e-2	4.21%	3.41%
	a _{ij} = 0	9.743e-1	6.609e-2	6.352e-2	5.251e-2	5.251e-2	-	-
500p ₀	a _{ij} ≠ 0	1.0127	6.894e-2	6.632e-2	5.431e-2	5.432e-2	4.21%	3.31%
	a _{ij} = 0	1.6238	7.836e-2	7.587e-2	6.286e-2	6.289e-2	-	-
700p ₀	a _{ij} ≠ 0	1.6879	8.174e-2	7.921e-2	6.499e-2	6.505e-2	4.21%	3.28%
	a _{ij} = 0	2.2733	8.766e-2	8.522e-2	7.058e-2	7.125e-2	-	-
1000p ₀	a _{ij} ≠ 0	2.3630	9.144e-2	8.896e-2	7.299e-2	7.365e-3	4.21%	3.31%
	a _{ij} = 0	3.2476	9.873e-2	9.632e-2	8.086e-2	8.164e-2	-	-
	a _{ij} ≠ 0	3.3758	1.030e-1	1.006e-1	8.363e-2	8.415e-2	4.21%	3.32%

Таблица 5.3. Величины продольного усилия на краю пластины \tilde{N}_r при учете и без учета податливости для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	a _{ij}	\tilde{N}_r^{S-Z}	$\tilde{N}_r^{Membran}$	\tilde{N}_r^{Karman}	\tilde{N}_r^{Series}	\tilde{N}_r^{Num}	$\delta_{Karman}^{\tilde{N}_r}$	$\delta_{Series}^{\tilde{N}_r}$
p ₀ = 10 ⁻⁸ ·√3	a _{ij} = 0	-	4.390e-5	4.060e-6	4.309e-6	4.309e-6	-	-
	a _{ij} ≠ 0	-	4.205e-5	4.230e-6	4.491e-6	4.491e-6	4.02%	4.06%
2p ₀	a _{ij} = 0	-	6.96e-5	1.39e-5	1.41e-5	1.41e-5	-	-
	a _{ij} ≠ 0	-	6.675e-5	1.387e-5	1.407e-5	1.407e-5	0%	0%
10p ₀	a _{ij} = 0	-	2.036e-4	1.140e-4	1.052e-4	1.052e-4	-	-

$20p_0$	$a_{ij} \neq 0$	-	1.952e-4	1.108e-4	1.019e-4	1.018e-4	-2.89%	-3.24%
	$a_{ij} = 0$	-	3.232e-4	2.187e-4	2.049e-4	2.05e-4	-	-
$100p_0$	$a_{ij} \neq 0$	-	3.098e-4	2.124e-4	1.981e-4	1.981e-4	-2.97%	-3.4%
	$a_{ij} = 0$	-	9.449e-4	7.891e-4	7.705e-4	7.706e-4	-	-
$200p_0$	$a_{ij} \neq 0$	-	9.059e-4	7.664e-4	7.452e-4	7.453e-4	-2.96%	-3.40%
	$a_{ij} = 0$	-	1.5e-3	1.311e-3	1.304e-3	1.304e-3	-	-
$300p_0$	$a_{ij} \neq 0$	-	1.438e-3	1.273e-3	1.262e-3	1.262e-3	-2.98%	-3.38%
	$a_{ij} = 0$	-	1.966e-3	1.753e-3	1.756e-3	1.755e-3	-	-
$500p_0$	$a_{ij} \neq 0$	-	1.884e-3	1.702e-3	1.702e-3	1.702e-3	-3%	-3.16%
	$a_{ij} = 0$	-	2.763e-3	2.515e-3	2.526e-3	2.524e-3	-	-
$700p_0$	$a_{ij} \neq 0$	-	2.649e-3	2.442e-3	2.454e-3	2.451e-3	-3.01%	-2.93%
	$a_{ij} = 0$	-	3.458e-3	3.183e-3	3.212e-3	3.146e-3	-	-
$1000p_0$	$a_{ij} \neq 0$	-	3.315e-3	3.090e-3	3.122e-3	3.066e-3	-3.02%	-2.88%
	$a_{ij} = 0$	-	4.386e-3	4.079e-3	4.042e-3	3.940e-3	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	-	4.205e-3	3.959e-3	3.915e-3	3.879e-3	-3.04%	-3.25%
	$a_{ij} = 0$	-						

Таблица 5.4. Величины изгибающего момента на краю пластины \tilde{M}_r при учете и без учета податливости для используемых моделей

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	\tilde{M}_r^{S-Z}	$\tilde{M}_r^{Membran}$	\tilde{M}_r^{Karman}	\tilde{M}_r^{Series}	\tilde{M}_r^{Num}	$\delta_{Karman}^{\tilde{M}_r}$	$\delta_{Series}^{\tilde{M}_r}$
$p_0 = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$	$a_{ij} = 0$	2.17e-5	-	2.12e-5	2.11e-5	2.11e-5	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	2.136e-5	-	2.09e-5	2.073e-5	2.073e-5	-1.44%	-1.93%

$2p_0$	$a_{ij} = 0$	4.33e-5	-	4.06e-5	3.98e-5	3.98e-5	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	4.272e-5	-	3.992e-5	3.910e-5	3.910e-5	-1.75%	-1.79%
$10p_0$	$a_{ij} = 0$	2.165e-4	-	1.486e-4	1.438e-4	1.440e-4	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	2.136e-4	-	1.449e-4	1.398e-4	1.400e-4	-2.55%	-2.86%
$20p_0$	$a_{ij} = 0$	4.330e-4	-	2.453e-4	2.378e-4	2.379e-4	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	4.272e-4	-	2.373e-4	2.292e-4	2.294e-4	-3.37%	-3.75%
$100p_0$	$a_{ij} = 0$	2.165e-3	-	7.567e-4	7.381e-4	7.355e-4	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	2.136e-3	-	7.089e-4	6.898e-4	6.874e-4	-6.74%	-7.00%
$200p_0$	$a_{ij} = 0$	4.330e-3	-	1.219e-3	1.187e-3	1.184e-3	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	4.272e-3	-	1.120e-3	1.087e-3	1.085e-3	-8.87%	-9.13%
$300p_0$	$a_{ij} = 0$	6.495e-3	-	1.610e-3	1.563e-3	1.564e-3	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	6.409e-3	-	1.458e-3	1.413e-3	1.413e-3	-10.37%	-10.67%
$500p_0$	$a_{ij} = 0$	1.083e-2	-	2.281e-3	2.217e-3	2.221e-3	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	1.068e-2	-	2.026e-3	1.964e-3	1.971e-3	-12.57%	-12.92%
$700p_0$	$a_{ij} = 0$	1.516e-2	-	2.867e-3	2.788e-3	2.830e-3	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	1.495e-2	-	2.510e-3	2.433e-3	2.455e-3	-14.21%	-14.59%
$1000p_0$	$a_{ij} = 0$	2.165e-2	-	3.652e-3	3.576e-3	3.628e-3	-	-
	$a_{ij} \neq 0$	2.136e-2	-	3.144e-3	3.085e-3	3.099e-3	-16.17%	-15.91%

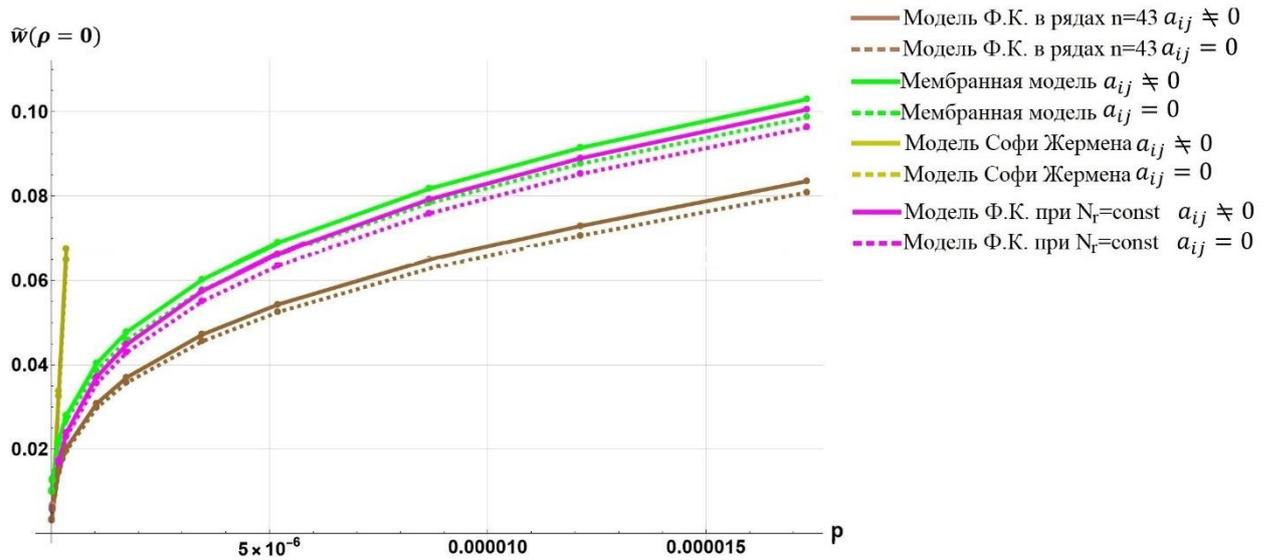


Рис 5.10. Графики значений величин прогиба в центре пластины $\tilde{w}(r=0)$ при учете и без коэффициентов податливости в зависимости от интенсивности поперечной нагрузки p

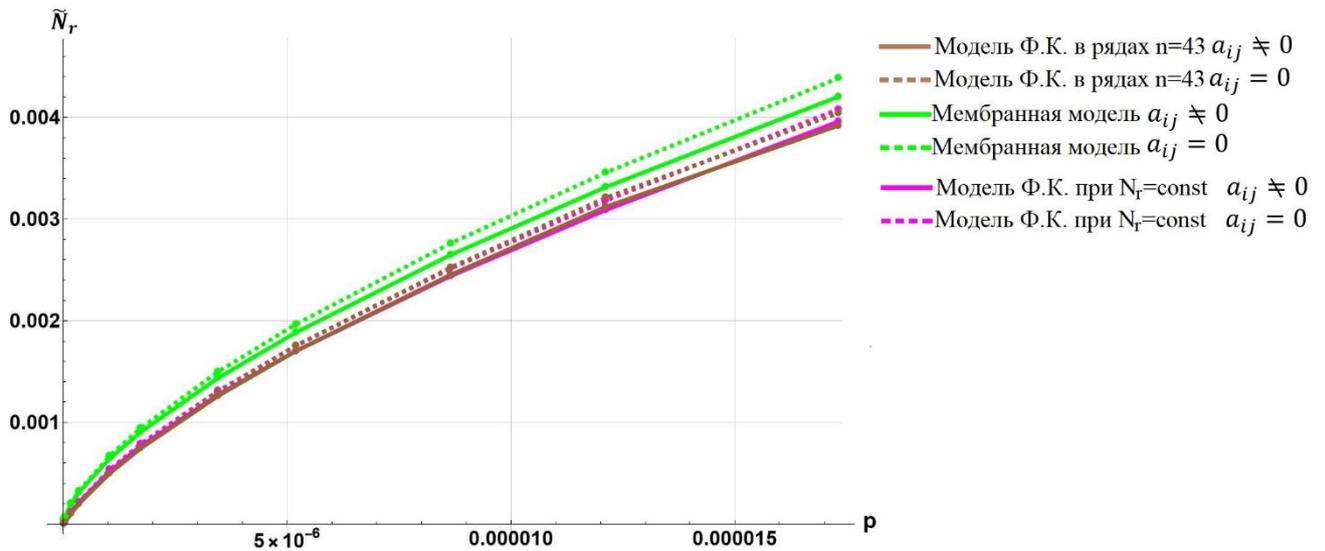


Рис 5.11. Графики значений величины продольного усилия на краю пластины \tilde{N}_r при учете и без коэффициентов податливости в зависимости от интенсивности поперечной нагрузки p

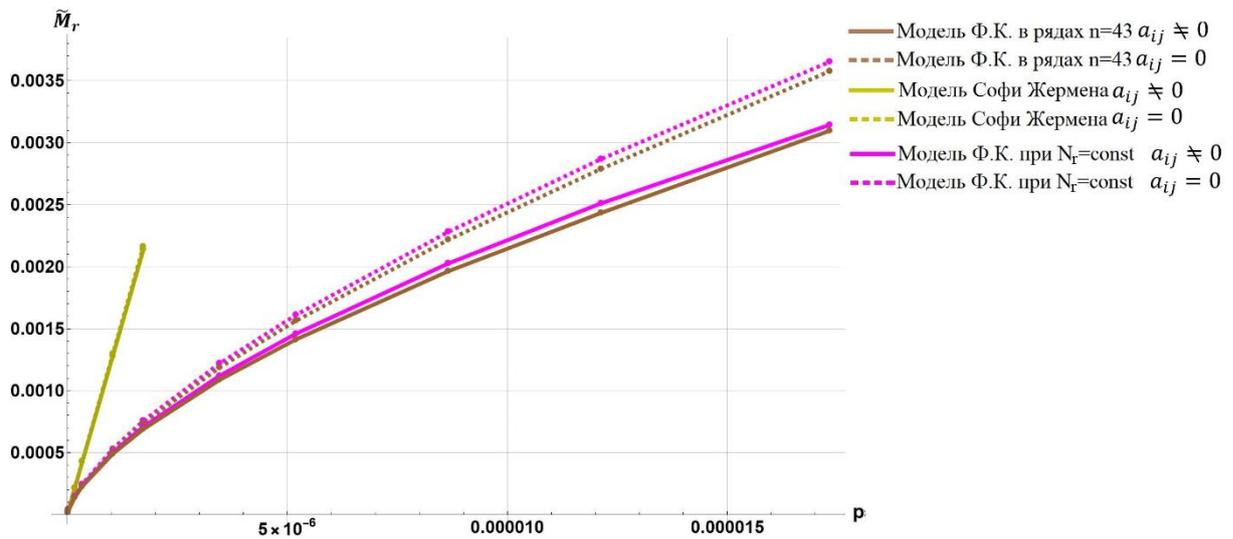


Рис 5.12. Графики значений величин изгибающего момента на краю пластины \tilde{M}_r , при учете и без коэффициентов податливости в зависимости от интенсивности поперечной нагрузки p

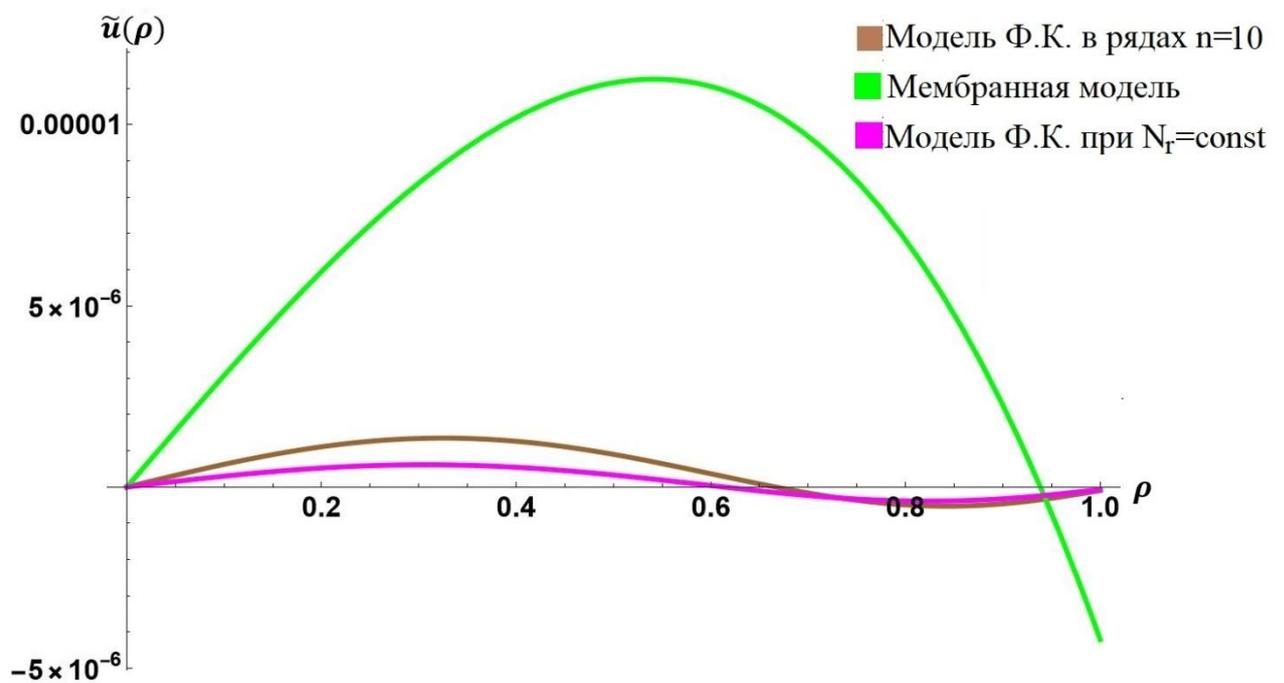


Рис 5.13. Графики значений компоненты смещения $\tilde{u}(\rho)$ с учетом коэффициентов податливости a_{ij} при $p = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$

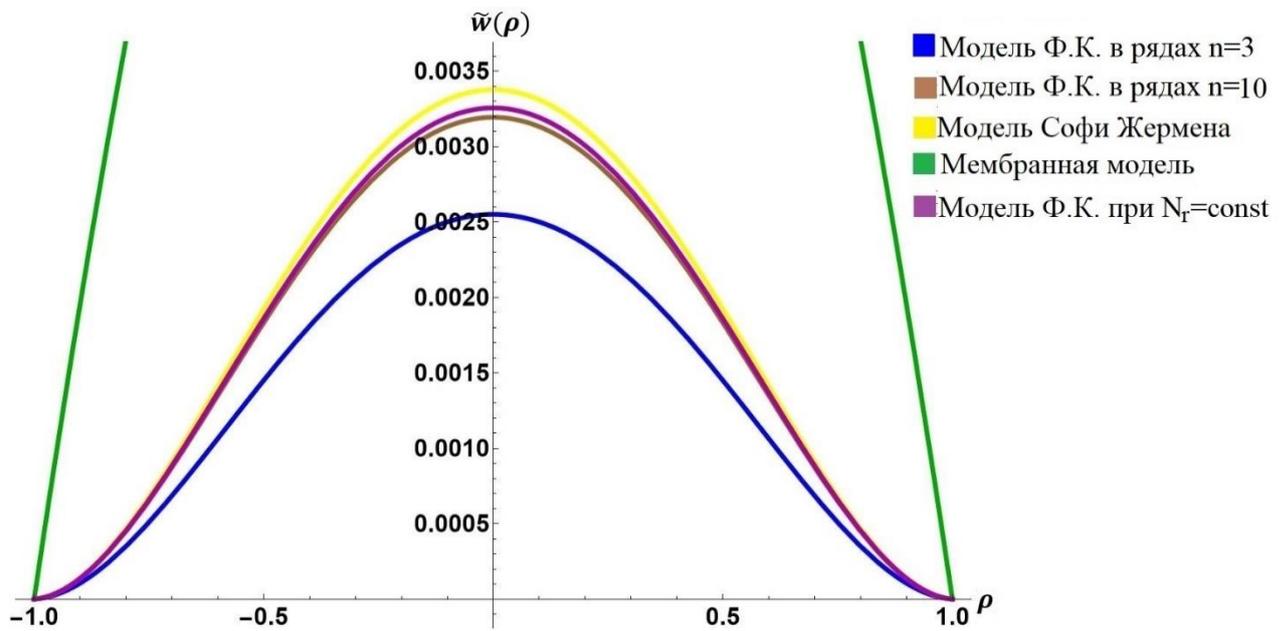


Рис 5.14. Графики значений компоненты смещения $\tilde{w}(\rho)$ с учетом коэффициентов податливости a_{ij} при $p = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$

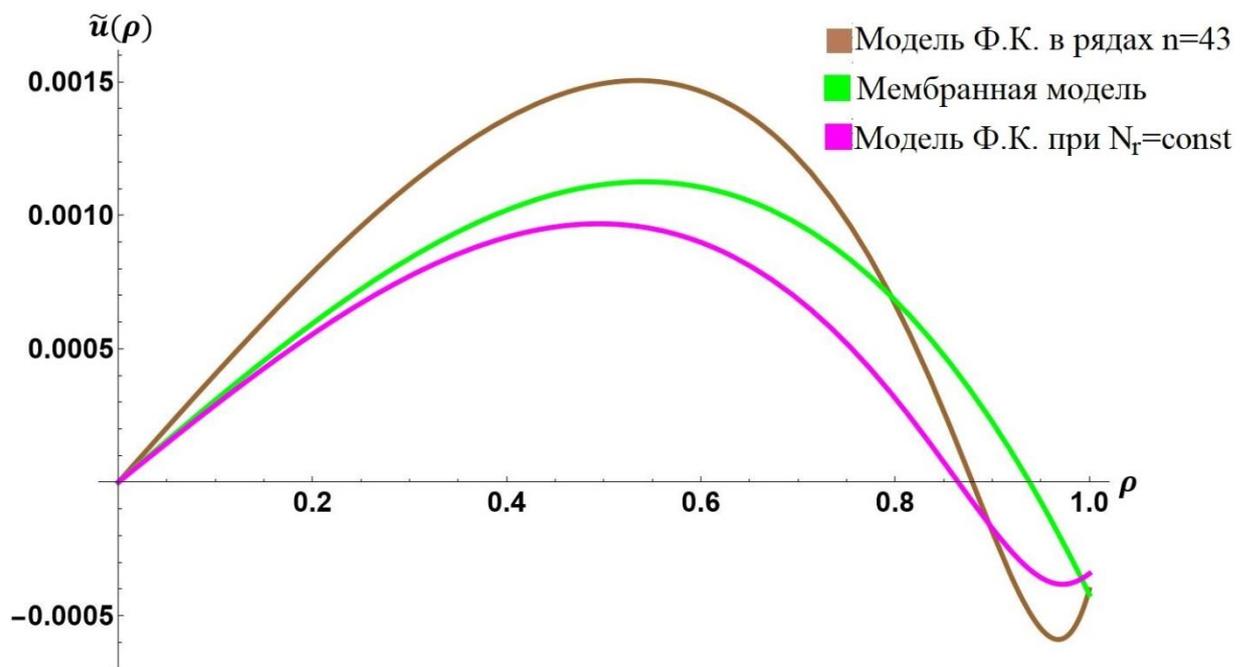


Рис 5.15. Графики значений компоненты смещения $\tilde{u}(\rho)$ с учетом коэффициентов податливости a_{ij} при $p = 10^{-5} \cdot \sqrt{3}$

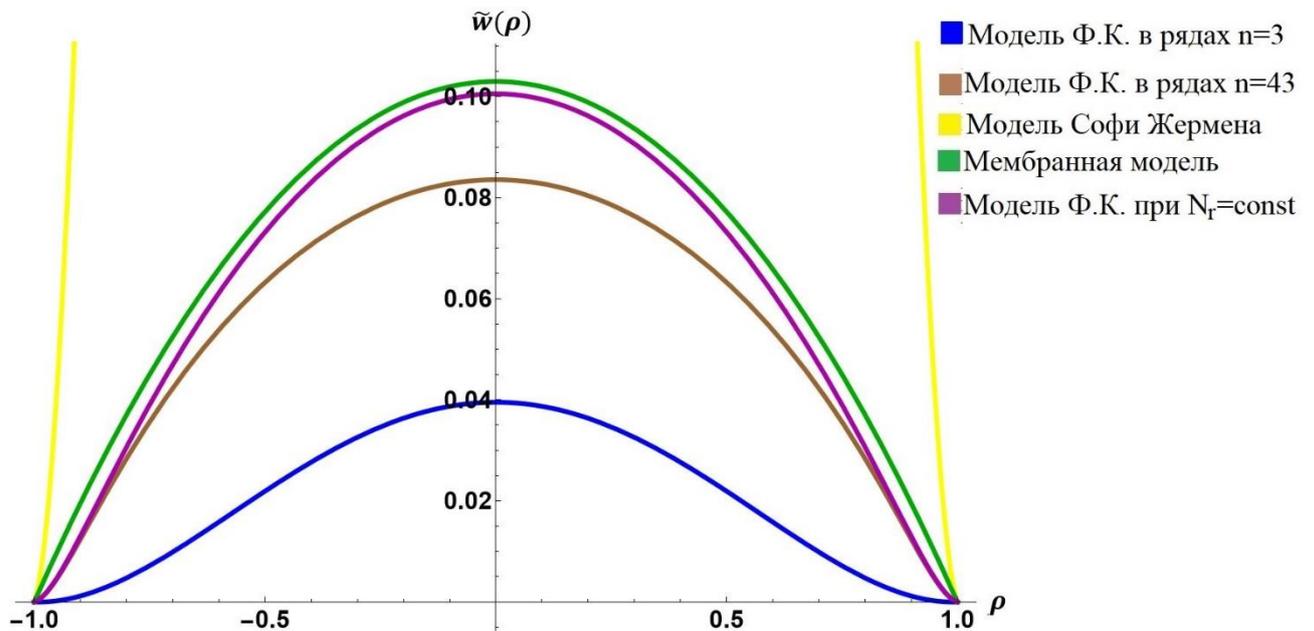


Рис 5.16. Графики значений компоненты смещения $\tilde{w}(\rho)$ с учетом коэффициентов податливости a_{ij} при $p = 10^{-5} \cdot \sqrt{3}$

Из данных, представленных в таблицах 5.2 – 5.4, а также на рис. 5.10 – 5.12 следует, что для достаточно малых значений интенсивности поперечной нагрузки $p = \frac{q}{E}$ модели Софи Жермен, Феппля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$, а также модель Феппля — фон Кармана в рядах хорошо согласуются в отличие от мембранной модели (особенно это заметно на графиках, изображенных на рис. 5.13, 5.14). Также при сравнении методов решений задачи отметим, что при увеличении значения интенсивности поперечной нагрузки p решения методом Феппля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$, Феппля — фон Кармана в рядах, а также мембранной модели качественно близки, в отличие от метода Софи Жермен, где при $p > 10^{-7}$ данное приближение уже неприменимо (особенно это заметно на графиках, изображенных на рис. 5.15, 5.16).

Однако также стоит подчеркнуть, что при увеличении p решение в рамках модели Феппля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$ и полученное в рядах для $\tilde{N}_r \neq const$ отличаются, причем при $p = 10^{-5} \cdot \sqrt{3}$ разница значения прогиба в центре ($\tilde{w}(\rho=0)$) уже достигает порядка 20%, из чего можно сделать вывод, что уже в данном случае влияния непостоянства продольных сил \tilde{N}_r существенен.

Один из главных вопросов при решении задачи с помощью модели Феппля — фон Кармана в рядах заключается в определении достаточного

количества членов ряда для корректного решения задачи. В качестве критерия оптимального количества слагаемых ряда можно использовать нестрогий технический подход, заключающийся в том, что если разница значений нормальной компоненты смещения в центре прогиба $\tilde{w}(\rho=0)$ при решении задачи с n числом слагаемых ряда и с $n+1$ числом слагаемых меньше заданной точности ε , т.е. $|\tilde{w}_n - \tilde{w}_{n+1}| < \varepsilon$, то в качестве решения можно принять ряд с $n+1$ слагаемыми.

Недостатком решения задачи с помощью модели Феппля — фон Кармана в рядах является увеличение необходимого числа членов ряда, а следовательно, увеличение времени расчета и накапливание ошибок с ростом $p = \frac{q}{E}$. Это становится существенным при числе слагаемых $n > 50$, особенно

для случая обобщенной упругой заделки. При $p = \frac{q}{E} > 10^{-5}$, что соответствует прогибу $\sim 8\ldots 10\%$ от радиуса пластины, необходимое число слагаемых составляет $n > 40$.

Приведенные расчеты свидетельствуют о том, что учет влияния коэффициентов податливости приводит к увеличению значений нормальной компоненты смещения, и уменьшению изгибающего момента и продольных усилий на краю пластины вне зависимости от используемой модели. Для прогибов $> 3\%$ от радиуса пластины можно заметить, что значения изгибающего момента на краю пластины с учетом и без учета податливости основания отличаются более чем в 10%. Также можно заметить, что результаты, полученные с помощью модели Феппля — фон Кармана в рядах, начинают отличаться от результатов, полученных с помощью численной модели, при поперечных нагрузках, соответствующих прогибам $\sim 7\ldots 8\%$ от радиуса пластины, что показывает о необходимости большего числа слагаемых для модели Феппля — фон Кармана в рядах для получения более точного результата.

Также были проведены расчеты тех же параметров: $\tilde{w}(\rho=0)$, \tilde{N}_r , \tilde{M}_r при разном отношении толщины круговой пластины к ее радиусу основания: $h/R = 1/100, 1/500, 1/1000$, а также при разных значениях $p = \frac{q}{E}$, используя модель Феппля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$ с граничными условиями типа обобщенной упругой заделки, а также жесткой заделки ($a_{ij} = 0$) (табл. 5.5 – 5.7).

Таблица 5.5. Величины прогиба в центре пластины $\tilde{w}(\rho=0)$ при учете и без учета податливости для модели Фешля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	h/R	$\tilde{w}(\rho=0)$	$\delta_{Karman}^{\tilde{w}}$
$p_0 = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	3.141e-3	-
		$\frac{1}{500}$	1.639e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	2.104e-2	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	3.255e-3	3.502%
		$\frac{1}{500}$	1.654e-2	0.907%
		$\frac{1}{1000}$	2.114e-2	0.473%
$2 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	5.819e-3	-
		$\frac{1}{500}$	2.079e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	2.657e-2	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	6.028e-3	3.47%
		$\frac{1}{500}$	2.098e-2	0.906%
		$\frac{1}{1000}$	2.670e-2	0.487%
$10 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	1.661e-2	-
		$\frac{1}{500}$	3.592e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	4.560e-2	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	1.728e-2	3.877%
		$\frac{1}{500}$	3.624e-2	0.883%
		$\frac{1}{1000}$	4.581e-2	0.458%
$20 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	2.292e-2	-

		$\frac{1}{500}$	4.537e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	5.752e-2	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	2.388e-2	4.020%
		$\frac{1}{500}$	4.579e-2	0.917%
		$\frac{1}{1000}$	5.778e-2	0.450%
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	4.297e-2	-
		$\frac{1}{500}$	7.792e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	9.851e-2	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	4.485e-2	4.192%
		$\frac{1}{500}$	7.863e-2	0.903%
		$\frac{1}{1000}$	9.896e-2	0.455%
$300 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	6.352e-2	-
		$\frac{1}{500}$	1.126e-1	-
		$\frac{1}{1000}$	1.422e-1	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	6.632e-2	4.222%
		$\frac{1}{500}$	1.136e-1	0.880%
		$\frac{1}{1000}$	1.428e-1	0.420%
$500 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.587e-2	-
		$\frac{1}{500}$	1.336e-1	-
		$\frac{1}{1000}$	1.686e-1	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	7.921e-2	4.217%
		$\frac{1}{500}$	1.348e-1	0.890%

		$\frac{1}{1000}$	1.694e-1	0.472%
$700 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	8.522e-2	-
		$\frac{1}{500}$	1.495e-1	-
		$\frac{1}{1000}$	1.886e-1	-
		$\frac{1}{100}$	8.896e-2	4.204%
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{500}$	1.508e-1	0.862%
		$\frac{1}{1000}$	1.895e-1	0.475%
$1000 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	9.632e-2	-
		$\frac{1}{500}$	1.684e-1	-
		$\frac{1}{1000}$	2.125e-1	-
		$\frac{1}{100}$	1.006e-1	4.254%
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{500}$	1.699e-1	0.883%
		$\frac{1}{1000}$	2.134e-1	0.422%

Таблица 5.6. Величины продольного усилия на краю пластины \tilde{N}_r при учете и без учета податливости для модели Фешпеля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	h/R	\tilde{N}_r^{Karman}	$\delta_{\tilde{N}_r}^{Karman}$
$p_0 = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	4.060e-6	-
		$\frac{1}{500}$	1.176e-4	-
		$\frac{1}{1000}$	1.972e-4	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	4.230e-6	4.019%
		$\frac{1}{500}$	1.169e-4	-0.599%
		$\frac{1}{1000}$	1.966e-4	-0.305%
$2 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	1.393e-5	-
		$\frac{1}{500}$	1.904e-4	-
		$\frac{1}{1000}$	3.152e-4	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	1.387e-5	-0.433%
		$\frac{1}{500}$	1.893e-4	-0.581%
		$\frac{1}{1000}$	3.142e-4	-0.318%
$10 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	1.140e-4	-
		$\frac{1}{500}$	5.734e-4	-
		$\frac{1}{1000}$	9.314e-4	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	1.108e-4	-2.888%
		$\frac{1}{500}$	5.699e-4	-0.614%
		$\frac{1}{1000}$	9.286e-4	-0.302%
$20 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	2.187e-4	-

		$\frac{1}{500}$	9.176e-4	-
		$\frac{1}{1000}$	1.483e-3	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	2.124e-4	-2.966%
		$\frac{1}{500}$	9.120e-4	-0.614%
		$\frac{1}{1000}$	1.478e-3	-0.338%
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.891e-4	-
		$\frac{1}{500}$	2.717e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	4.357e-3	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	7.664e-4	-2.962%
$\frac{1}{500}$		2.700e-3	-0.630%	
$\frac{1}{1000}$		4.343e-3	-0.322%	
$300 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	1.753e-3	-
		$\frac{1}{500}$	5.681e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	9.082e-3	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	1.702e-3	-2.996%
$\frac{1}{500}$		5.645e-3	-0.638%	
$\frac{1}{1000}$		9.052e-3	-0.331%	
$500 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	2.515e-3	-
		$\frac{1}{500}$	8.001e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	1.278e-2	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	2.442e-3	-2.989%
$\frac{1}{500}$		7.950e-3	-0.642%	

		$\frac{1}{1000}$	1.273e-2	-0.393%
$700 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	3.183e-3	-
		$\frac{1}{500}$	1.002e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	1.599e-2	-
		$\frac{1}{100}$	3.090e-3	-3.010%
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{500}$	9.958e-3	-0.623%
		$\frac{1}{1000}$	1.594e-2	-0.314%
$\frac{1}{100}$		4.080e-3	-	
$1000 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{500}$	1.273e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	2.030e-2	-
		$\frac{1}{100}$	3.959e-3	-3.056%
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{500}$	1.264e-2	-0.712%
		$\frac{1}{1000}$	2.023e-2	-0.346%

Таблица 5.7. Величины изгибающего момента на краю пластины \tilde{M}_r при учете и без учета податливости для модели Фепля — фон Кармана при $\tilde{N}_r = const$

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	h/R	\tilde{M}_r^{Karman}	$\delta_{Karman}^{\tilde{M}_r}$
$p_0 = 10^{-8} \cdot \sqrt{3}$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	2.122e-5	-
		$\frac{1}{500}$	1.062e-4	-
		$\frac{1}{1000}$	1.726e-4	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	2.091e-5	-1.483%
		$\frac{1}{500}$	1.032e-4	-2.907%
		$\frac{1}{1000}$	1.661e-4	-3.913%
$2 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	4.057e-5	-
		$\frac{1}{500}$	1.699e-4	-
		$\frac{1}{1000}$	2.748e-4	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	3.992e-5	-1.628%
		$\frac{1}{500}$	1.639e-4	-3.661%
		$\frac{1}{1000}$	2.629e-4	-4.526%
$10 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	1.486e-4	-
		$\frac{1}{500}$	5.033e-4	-
		$\frac{1}{1000}$	8.076e-4	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	1.449e-4	-2.553%
		$\frac{1}{500}$	4.724e-4	-6.541%
		$\frac{1}{1000}$	7.442e-4	-8.519%
$20 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	2.453e-4	-

		$\frac{1}{500}$	8.018e-4	-
		$\frac{1}{1000}$	1.284e-3	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	2.373e-4	-3.371%
		$\frac{1}{500}$	7.405e-4	-8.278%
		$\frac{1}{1000}$	1.159e-3	-10.785%
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.567e-4	-
		$\frac{1}{500}$	2.358e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	3.763e-3	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	7.090e-4	-6.728%
		$\frac{1}{500}$	2.064e-3	-14.244%
		$\frac{1}{1000}$	3.183e-3	-18.222%
$300 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	1.610e-3	-
		$\frac{1}{500}$	4.918e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	7.834e-3	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	1.458e-3	-10.425%
		$\frac{1}{500}$	4.081e-3	-20.510%
		$\frac{1}{1000}$	6.220e-3	-25.949%
$500 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	2.281e-3	-
		$\frac{1}{500}$	6.920e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	1.102e-2	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	2.026e-3	-12.586%
		$\frac{1}{500}$	5.571e-3	-24.215%

		$\frac{1}{1000}$	8.441e-3	-30.553%
$700 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	2.867e-3	-
		$\frac{1}{500}$	8.664e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	1.379e-2	-
		$\frac{1}{100}$	2.510e-3	-14.223%
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{500}$	6.823e-3	-26.982%
		$\frac{1}{1000}$	1.030e-2	-33.883%
$1000 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	3.652e-3	-
		$\frac{1}{500}$	1.100e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	1.749e-2	-
	$a_{ij} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	3.144e-3	-16.158%
		$\frac{1}{500}$	8.443e-3	-30.321%
		$\frac{1}{1000}$	1.269e-2	-37.825%

Из полученных результатов (табл. 5.5 – 5.7) можно заключить, что при уменьшении значения отношения толщины круговой пластины к его радиусу основания следует уменьшение значений прогиба в центре пластины $\tilde{w}(\rho=0)$, продольного усилия \tilde{N}_r , однако значение изгибающего момента растет \tilde{M}_r , причем чем больше интенсивность поперечной нагрузки p , тем чувствительнее разница с решением при жесткой заделке, особенно для \tilde{M}_r .

Кроме того были проведены расчеты параметров: $\tilde{w}(\rho=0)$, \tilde{N}_r , \tilde{M}_r при разном отношении толщины круговой пластины к ее радиусу основания: $h/R = 1/100, 1/500, 1/1000$, а при значении $p = 100 \cdot p_0 = 10^{-6} \cdot \sqrt{3}$, также используя модель Феппля — фон Кармана ($\tilde{N}_r = const$) при учете различных коэффициентов податливости, а также при жесткой заделке ($a_{ij} = 0$) (табл. 5.8 – 5.10).

Таблица 5.8. Величины прогиба в центре пластины $\tilde{w}(\rho=0)$ при учете (не всех коэффициентов податливости) и без учета податливости для модели Феппля — фон Кармана при постоянных продольных усилиях

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	h/R	$\tilde{w}(\rho=0)$	$\delta_{Karman}^{\tilde{w}}$
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	4.297e-2	-
		$\frac{1}{500}$	7.792e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	9.851e-2	-
	$a_{11} \neq 0;$ $a_{12} = a_{21} = 0;$ $a_{22} = 0$	$\frac{1}{100}$	4.473e-2	3.935%
		$\frac{1}{500}$	7.861e-2	0.878%
		$\frac{1}{1000}$	9.895e-2	0.445%
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	4.297e-2	-
		$\frac{1}{500}$	7.792e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	9.851e-2	-
	$a_{11} = 0;$ $a_{12} = a_{21} \neq 0;$ $a_{22} = 0$	$\frac{1}{100}$	4.259e-2	-0.892%
		$\frac{1}{500}$	7.778e-2	-0.180%
		$\frac{1}{1000}$	9.842e-2	-0.091%
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	4.297e-2	-
		$\frac{1}{500}$	7.792e-2	-
		$\frac{1}{1000}$	9.851e-2	-
	$a_{11} = 0;$ $a_{12} = a_{21} = 0;$ $a_{22} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	4.339e-2	0.968%
		$\frac{1}{500}$	7.804e-2	0.154%
		$\frac{1}{1000}$	9.858e-2	0.071%

Таблица 5.9. Величины продольного усилия на краю пластины \tilde{N}_r при учете (не всех коэффициентов податливости) и без учета податливости для модели Феппля — фон Кармана при постоянных продольных усилиях

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	h/R	\tilde{N}_r^{Karman}	$\delta_{Karman}^{\tilde{N}_r}$
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.891e-4	-
		$\frac{1}{500}$	2.717e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	4.357e-3	-
	$a_{11} \neq 0;$ $a_{12} = a_{21} = 0;$ $a_{22} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.527e-4	-4.836%
		$\frac{1}{500}$	2.693e-3	-0.891%
		$\frac{1}{1000}$	4.338e-3	-0.438%
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.891e-4	-
		$\frac{1}{500}$	2.717e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	4.357e-3	-
	$a_{11} = 0;$ $a_{12} = a_{21} \neq 0;$ $a_{22} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.942e-4	0.642%
		$\frac{1}{500}$	2.720e-3	0.110%
		$\frac{1}{1000}$	4.359e-3	0.046%
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.891e-4	-
		$\frac{1}{500}$	2.717e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	4.357e-3	-
	$a_{11} = 0;$ $a_{12} = a_{21} = 0;$ $a_{22} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	7.992e-4	1.264%
		$\frac{1}{500}$	2.722e-3	0.184%
		$\frac{1}{1000}$	4.361e-3	0.092%

Таблица 5.10. Величины изгибающего момента на краю пластины \tilde{M}_r при учете (не всех коэффициентов податливости) и без учета податливости для модели Феппля — фон Кармана при постоянных продольных усилиях

$p = \frac{q}{E}$	a_{ij}	h/R	\tilde{M}_r^{Karman}	$\delta_{Karman}^{\tilde{M}_r}$
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.567e-4	-
		$\frac{1}{500}$	2.358e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	3.763e-3	-
	$a_{11} \neq 0;$ $a_{12} = a_{21} = 0;$ $a_{22} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.716e-4	1.931%
		$\frac{1}{500}$	2.369e-3	0.464%
		$\frac{1}{1000}$	3.771e-3	0.212%
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.567e-4	-
		$\frac{1}{500}$	2.358e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	3.763e-3	-
	$a_{11} = 0;$ $a_{12} = a_{21} \neq 0;$ $a_{22} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.656e-4	1.162%
		$\frac{1}{500}$	2.427e-3	2.843%
		$\frac{1}{1000}$	3.903e-3	3.587%
$100 \cdot p_0$	$a_{ij} = 0$	$\frac{1}{100}$	7.567e-4	-
		$\frac{1}{500}$	2.358e-3	-
		$\frac{1}{1000}$	3.763e-3	-
	$a_{11} = 0;$ $a_{12} = a_{21} = 0;$ $a_{22} \neq 0$	$\frac{1}{100}$	6.863e-4	-10.258%
		$\frac{1}{500}$	1.996e-3	-18.136%
		$\frac{1}{1000}$	3.061e-3	-22.934%

На основании полученных данных (таблицы 5.8 – 5.10) можно сделать вывод, что коэффициент a_{11} больше всего влияет на значение прогиба в центре пластины $\tilde{w}(\rho=0)$, продольного усилия \tilde{N}_r , однако на изгибающий момент практически не влияет \tilde{M}_r , причем чем тоньше покрытие, тем меньше влияние на данные характеристики. Коэффициент a_{12} менее всего из всех коэффициентов влияет на все три значения $\tilde{w}(\rho=0)$, \tilde{N}_r , \tilde{M}_r . Вместе с тем, чем тоньше покрытие, тем больше данный коэффициент влияет на значение изгибающего момента \tilde{M}_r . Коэффициент a_{22} менее всего воздействует на значения $\tilde{w}(\rho=0)$, \tilde{N}_r , однако больше всего на \tilde{M}_r , вдобавок чем тоньше покрытие, тем меньше коэффициент a_{22} влияет на $\tilde{w}(\rho=0)$, \tilde{N}_r , но увеличивается влияние на \tilde{M}_r , причем существенное.

5.6. Краткие выводы по разделу

Рассмотрена задача о деформировании круговой пластины, сопряженной с подложкой, под действием равномерной поперечной нагрузки. Для моделирования сопряжения пластины с основанием используются граничные условия типа обобщенной упругой заделки, т. е. линейной связи усилий, изгибающего момента на краю пластины с компонентами смещений и углом поворота.

Значения коэффициентов матрицы податливости были получены с помощью метода конечных элементов для вспомогательной задачи о сцепленной с массивным основанием пластине с цилиндрическим отверстием, края которого нагружены продольными усилиями, либо изгибающим моментом.

Решение задачи получено с помощью следующих моделей: линейной теории, не учитывающей действия продольных усилий, теории мембран в приближении предположения однородности продольных усилий, теории Феппля — фон Кармана, также в приближении предположения однородности продольных усилий, модели Феппля — фон Кармана, где используется метод разложения в степенные ряды компонентов нормального смещения и продольного усилия, представленных в цилиндрической системе координат. Проведено сравнение полученных решений с учетом и без влияния основания. Также предложен численный метод, соответствующий методу стрельбы.

Численные результаты получены для пластины из алюминия на кремниевом основании — задачи, возникающей при идентификации

параметров ультратонких элементов МЭМС, используемых в проекционных литографических системах. Проведено сравнение величин прогиба в центре пластины, продольного усилия и изгибающего момента на краю пластины, с учетом и без граничных условий упругой заделки. Изучена зависимость данных характеристик от отношения толщины к радиусу пластины. Также исследована вносимая роль каждого коэффициента матрицы податливости по отдельности. Показано, что при поперечной нагрузке, соответствующей прогибам более 5% от радиуса пластины, разница в значениях изгибающего момента на ее краю, посчитанная с учетом и без учета податливости подложки, превышает 10 %, причем эта разница существенно увеличивается при уменьшении толщины покрытия, что показывает необходимость учета податливости подложки. Также показано, что при увеличении значения поперечной нагрузки, при прогибах больше 3% от радиуса пластины, значения прогиба в центре пластины при использовании модели Феппля — фон Кармана в предположении постоянства продольных усилий, а также модели Феппля — фон Кармана в рядах, начинают существенно различаться и чем больше поперечная нагрузка, тем больше будет различие. Определены ограничения использования модели Феппля — фон Кармана в рядах. Кроме того, показано, что с помощью совместного использования полуаналитического метода и предложенного численного метода, можно получить более точное решение данной задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации выполнен комплекс исследований по упругому деформированию систем «покрытие-подложка», цель которого заключалась в исследовании механического поведения тонких покрытий, с учетом влияния присоединенной массы (подложки) на основе нового подхода, а также выявление закономерностей напряженно-деформированного состояния и потери устойчивости отслоений покрытия при механическом нагружении.

К основным результатам работы можно отнести следующее:

1. Сформулирован основной подход решения задач об отслоении покрытий от подложки, заключающийся в изучении отслоившегося участка покрытия, где в качестве основных уравнений используются уравнения теории пологих оболочек, а в качестве граничных условий используются граничные условия типа обобщенно упругой заделки, которая учитывает свойства основания (подложки).

2. Исследованы задачи об отслоении тонкого покрытия от цилиндрической подложки под действием сжимающих напряжений в рамках сформулированного подхода. Для решения данных задач использовались уравнения Муштари – Доннелла – Власова. Были определены компоненты смещения и скорости высвобождения энергии как вдоль прямолинейных, так и криволинейных границ. Также были исследованы зависимости между скоростью высвобождения энергии, коэффициентом интенсивности напряжений моды I, углом поворота в точке заделки и компонентами смещения покрытия относительно податливости подложки и ее кривизны. Проведено сравнение полученных решений с решениями, полученными для условия жесткой заделки.

3. Показано, что при увеличении податливости основания, а также (положительной) кривизны, значения скорости высвобождения энергии и величины нормальной компоненты смещения покрытия существенно возрастают. Показано, что для достаточно податливых оснований существует критическая ширина отслоения, при достижении которой становится более выгодным с энергетической точки зрения развитие в осевом направлении, т.е. возникает эффект «туннелирования». Наличие положительной кривизны и возрастание податливости подложки уменьшают данную критическую ширину. На основе анализа результатов для угла поворота в точке заделки, а также отрывной моды (моды I) коэффициента интенсивности напряжений следует, что причиной наблюдаемого эффекта «туннелирования» может быть не только различие скоростей высвобождения энергии при распространении отслоения за счет расширения и удлинения (туннелирования), но и запрет на перекрытие граней покрытия и подложки.

4. Для задачи об отслоении покрытия от цилиндрической подложки, где отслоение расположено в окружном направлении было обнаружено, что при достаточно больших значениях кривизны основания, в профиле отслоившегося участка покрытия возникает эффект гофрирования, что приводит к появлению локальных экстремумов в графике зависимости скорости высвобождения энергии от протяженности отслоения. Данного эффекта не наблюдалось при исследовании отслоения, расположенном в продольном направлении.

5. Получено решение задачи о деформировании круговой пластины под действием постоянной поперечной нагрузки, сопряженной по контуру с основанием, с помощью различных моделей, таких как модель Софи Жермен, мембранная модель, модель Феппля — фон Кармана в предположении постоянства продольных усилий, общая модель Феппля — фон Кармана. Решения были получены с помощью аналитических, полуаналитических (с помощью разложения в ряд нормальной компоненты смещения и продольной компоненты усилия) и численных методов (в частности метод, аналогичный «методу стрельбы»).

6. Выявлена роль, вносимая податливостью подложки в изменение формы профиля круговой пластины, действующих продольных усилий и изгибающих моментов, в частности исследовано влияние каждого коэффициента матрицы податливости на данные характеристики. Исследовано влияние отношения толщины покрытия к радиусу основания на его параметры отслоения.

7. Проведено сравнение между полученными решениями. Выявлены недостатки, а также ограничения для каждого метода решения задачи. Из полученных результатов следует, что при малых нагрузках, соответствующих малым прогибам, модели Софи Жермен, Феппля — фон Кармана в предположении постоянства продольных усилий, а также модель Феппля — фон Кармана в рядах хорошо согласуются в отличие от мембранной модели. А при увеличении нагрузки решения методом Феппля — фон Кармана при постоянстве продольных усилий, Феппля — фон Кармана в рядах, а также мембранной модели качественно близки, в отличие от метода Софи Жермен. Тем не менее, при дальнейшем увеличении нагрузки модели Феппля — фон Кармана при постоянстве продольных усилий и в рядах существенно отличаются, однако вместе с тем значительно увеличивается и вычислительная нагрузка для модели в рядах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гандилян Д.В. Об отслоении покрытия от цилиндрического основания // в сборнике XLVII Гагаринские чтения: Сборник трудов Международной молодежной научной конференции. Секция "Механика и моделирование материалов и технологий", место издания Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук Москва. 2021. С. 40-41
2. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Задача об отслоении покрытия от цилиндрической подложки с учетом влияния ее кривизны, податливости а также действий поперечных сил // в сборнике *Актуальные проблемы механики сплошной среды. Материалы VIII международной конференции. 01-05 октября 2023, Цахкадзор, Армения*, место издания Гитутюн Ереван, 2023. С. 82-86
3. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Некоторые методы решения задачи отслоения круговой пластины от подложки // в сборнике *XVIII Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» : сб. материалов (Екатеринбург, 27–31 мая 2024 г.)*, место издания Екатеринбург : ИМАШ УрО РАН, 2024. С. 29-29
4. Ustinov K.B., Gandilyan D.V. On combined influence of substrate curvature and compliance on parameters of coating delamination from a cylindrical base // *Mech. Solids*. 2023. V. 58 (2). P. 622-640. DOI: 10.3103/S0025654423600174
5. Устинов К.Б., Гандилян Д.В. Деформирование тонкой пленки после утери контакта с цилиндрическим основанием; отслоение, расположенное в осевом направлении // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2023. № 5. С. 159–172. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.5.11
6. Гандилян Д.В. Деформирование тонкой пленки после утери контакта с цилиндрическим основанием с учетом влияния его кривизны, податливости и действия поперечных сил; отслоение, расположенное в окружном направлении // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2024. № 2. С. 42–52. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.05
7. Устинов К.Б., Гандилян Д.В. О граничных условиях для тонкой круглой пластины, сопряженной с массивным телом // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2024. Т. 30, № 1. С. 50-63. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63>
8. Устинов К.Б., Гандилян Д.В. О граничных условиях в задачах о деформировании тонких пластин // *Материалы XII Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (17–19 сентября 2024 г., Самара, Россия)*, место издания Самарский государственный технический университет, Самара, 2024. Т. 2. С. 163-165.

9. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Модель Фепля фон Кармана для моделирования деформации круговой пластины // *Тезисы докладов XII Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики» с элементами школы молодых ученых, посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Джанхот, 2-8 сентября 2024 г.)*, Екатеринбург: УрО РАН, 2024. С. 12-12.
10. Гандилян Д.В., Устинов К.Б. Деформирование тонкой круговой пластины, сопряженной по контуру с основанием // *Прикладная математика и механика*. 2025. Т. 89
11. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 512 с.
12. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз. 1962. 432 с.
13. Власов В.З. Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР. 1962. Т. 1. 528 с.
14. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. Л.: Гостехиздат. 1949. 784 с.
15. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
16. Доннелл Л.Г. Балки, пластины, оболочки. М.: Наука. 1982. 568 с.
17. Муштари Х.М. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигиздат. 1957. 431 с.
18. Новожилов В.В. Линейная теория тонких оболочек. Л. Политехника. 1991. 656 с.
19. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука. 1972. 431 с.
20. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат. 1956. 420 с.
21. Sanders J.L. Nonlinear theories for thin shells // *Quart. Appl. Math.* 1963. V. XXI. № 1. P. 21–36.
22. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Издательское объединение "Вища школа". 1983. 286 с.
23. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат. 1948. 212 с.
24. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз. 1958. 370 с.
25. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии (5-е изд.). М.: Изд-во ЛКИ. 2008. 428 с.
26. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Об одном варианте уравнений теории конечных перемещений непологих оболочек. *Прикладная механика*. 1974. 10, № 2. С. 3-13.
27. Шуругов А.Р., Панин А.В. Механизмы возникновения напряжений в тонких пленках и покрытиях. *Журнал технической физики*. 2020. Т. 90, № 12. С. 1971-1994.
28. Naanappel V.A.C., van Corbach H.D., Fransen T., Gellings P.J. Cracking and delamination of metal organic vapour and deposited alumina and silica

- films. *Materials Science and Engineering: A*. 1993. Vol. 167. P. 179-185. DOI: 10.1016/0921-5093(93)90352-F
29. Forschelen P.J.J., Suiker A.S.J., van der Sluis O. Effect of residual stress on the delamination response of film-substrate systems under bending. *Int. J. of Solids and Structures*. 2016. Vol. 97-98. P. 284-299. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.07.020
 30. Stylianou R., Velic D., Daves W., Ecker W., Stark A., Schell N., Tkadletz M., Schalk N., Czettel C., Mitterer C. Stress relaxation through thermal crack formation in CVD TiCN coatings grown on WC-Co with different Co contents // *Int. J. Refract. Metals Hard Materials*, 2020 Vol. 86 (105102). DOI: 10.1016/j.ijrmhm.2019.105102
 31. Balint D.S., Hutchinson J.W., Mode II Edge Delamination of Compressed Thin Films // *J. Appl. Mech.* 2001. V. 68. P. 725-730. doi: 10.1115/1.1388012
 32. Lagunegrand L., Lorriot T., Harry R., Wargnier H., Quenisset J.M. Initiation of free-edge delamination in composite laminates // *Compos. Sci. Technol.* – 2006. V. 66. P. 1315–1327. doi: 10.1016/j.compscitech.2005.10.010
 33. Hutchinson J.W., He M.Y., Evans A.G. The influence of imperfections on the nucleation and propagation of buckling driven delaminations // *J. Mech. Phys. Solids*. 2000. V. 48. P. 709-734. doi: 10.1016/S0022-5096(99)00050-2
 34. Evans A.G., Hutchinson J.W. The mechanics of coating delamination in thermal gradients // *Surface and Coatings Technology*. 2007. V. 201. P. 7905-7916.
 35. Malerba C., Valentini M., Azanza R.C.L., Rinaldi A., Mittiga A. Blistering in Cu₂ZnSnS₄ thin films: correlation with residual stresses // *Mater. Design.* – 2016. V. 108. 16 p. doi: 10.1016/j.matdes.2016.07.019
 36. Wang Y., Li K.Y., Scenini F., Jiao J., Qu S.J., Luo Q., Shen J. The effect of residual stress on the electrochemical corrosion behavior of Fe-based amorphous coatings in chloride-containing solutions // *Surface and Coatings Technology*. 2016. Vol. 302. P. 27-38. DOI: 10.1016/j.surfcoat.2016.05.034
 37. Tolpygo V.K., Clarke D.R. Wrinkling of α -alumina films grown by thermal oxidation—I. Quantitative studies on single crystals of Fe–Cr–Al alloy // *Acta Materialia*. 1998. V. 46. Is. 14. P. 5153–5166.
 38. Clarke D.R., Levi C.G. Materials design for the next generation thermal barrier coatings // *Annu. Rev. Mater. Res.* 2003. V. 33. P. 383–417.
 39. Evans A.G., Mumm D.R., Hutchinson J.W., Meier G.H., Pettit F.S. Mechanisms controlling the durability of thermal barrier coatings // *Prog. Mater. Sci.* 2001. V. 46 Is. 5. P. 505–553.
 40. Stiger M.J., Yanar N.M., Topping M.G., Pettit F.S., Meier G.H. Thermal barrier coatings for the 21st century // *Z. Metallkd.* 1999. V. 90. P. 1069–1078.
 41. Samson F. Ophthalmic lens coating // *Surf. Coat. Tech.* 1996. V. 81. P. 79–86.
 42. Moon M.-W., Chung J.-W., Lee K.-R., Oh K.H., Wang R., Evans, A.G. An experimental study of the influence of imperfections on the buckling of compressed thin films // *Acta Mater.* 2002. V. 50. P. 1219–1227.

43. Bowden N., Brittain S., Evans, A.G., Hutchinson J.W., Whitesides G.M. Spontaneous formation of ordered structures in thin films of metals supported on an elastomeric polymer // *Nature*. 1998. V. 393. P. 146–149.
44. Huck W., Bowden N., Onck P., Pardoën T., Hutchinson J., Whitesides G. Ordering of spontaneously formed buckles on planar surfaces // *Langmuir*. 2000. V. 16. P. 3497–3501.
45. Yoo P.J., Suh K.Y., Park S.Y., Lee H.H. Physical self-assembly of microstructures by anisotropic buckling // *Advanced materials*. 2002. V. 14. P. 1383–1387.
46. Freund L.B., Suresh S. *Thin Film Materials: Stress, Defect Formation and Surface Evolution*. Cambridge University Press, Cambridge. 2004. 750 p.
47. Faulhaber S., Mercer C. Moon M.-Y., Hutchinson J.W., Evans A.G. Buckling delamination in compressed multilayers on curved substrates with accompanying ridge cracks // *J. Mech. Phys. Solids*. 2006. V. 54. P. 1004-1028.
48. *Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications*. Editor Jose Maria De Teresa. Bristol, England: IOP Publishing Ltd. 2020. 450 p. DOI: <http://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>.
49. Салащенко Н.Н., Чхало Н.И., Дюжев Н.А. Безмасочная рентгеновская литография на основе МОЭМС и микрофокусных рентгеновских трубок // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. 2018. № 10. С. 10–20. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0207352818100165>.
50. Silverman J.P. Challenges and progress in X-ray lithography // *Journal of Vacuum Science & Technology B*. 1998. V. 16, Issue 6. P. 31–37. DOI: <https://doi.org/10.1116/1.590452>.
51. Korobeynikov S.N. Nonlinear equations of deformation of atomic lattices // *Archive of Mechanics*. 2005. 57, No. 6. P. 435-453.
52. Korobeinikov S.N. The numerical solution of nonlinear problems on deformation and buckling of atomic lattices // *International Journal of Fracture*. 2004. V. 128. No. 1. P. 315-323
53. Korobeynikov S.N., Alyokhin V.V., Babichev A.V. Advanced nonlinear buckling analysis of a compressed single layer graphene sheet using the molecular mechanics method. *Int. J. of Mechanical Sciences*. 2021. Vol. 209. (106703). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106703>
54. Hutchinson J.W., Suo Z. Mixed Mode Cracking in Layered Materials / *Advances in Applied Mechanics*. 1992; ed. Hutchinson J.W., Wu T.Y., V. 29. P. 63-191.
55. Kachanov L.M. *Delamination Buckling of Composite Materials*. Kluwer. 1988. 95 p.
56. Thouless M.D. Combined Buckling and Cracking of Films // *J. American Ceramic Soc.* 1993. V. 86. Is. 1. P. 2936–2938.
57. Parry G., Colin J., Coupeau C., Foucher F., Cimetière A., Grilhé J., Effect of substrate compliance on the global unilateral post-buckling of coatings: AFM observation and finite element calculations // *Acta materialia*. 2005. V. 53. P. 441-447.

58. Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // *Int. J. Fract.* 2002. V. 113. P. 39-55.
59. Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // *Int. J. Fracture.* 2000. V. 104. № 2. P. 169–179.
60. Hutchinson J.W. Delamination of compressed films on curved substrates // *J. Mech. Phys. Solids*, 50, 2001. P. 1847-1864.
61. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука. 1975. 575с.
62. Ciarlet P.G. A justification of the von Kármán equations // *Arch Rational Mech. and Analys.* 1980. V. 73. Is. 4. P. 349-389.
63. Ciarlet P.G. Two-Dimensional Approximations of Three-Dimensional Models in Nonlinear Plate Theory // *Proceedings of the IUTAM Symposium on Finite Elasticity.* Ed: D. E. Carlson, R. T. Shield. Martinus Nijhoff Publishers. The Hague, Boston, London. 1982. P. 123-141.
64. Ciarlet P.G., Rabier P. Les Equations de von Kármán. Lecture Notes in Mathematics Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1980. 181 pp.
65. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука. 1989. 376 с.
66. Dyskin A.V., Germanovich L.N., Ustinov K.B. Asymptotic analysis of crack interaction with free boundary // *Int. J. Solids Structures.* 2000. V. 37. P. 857-886.
67. Устинов К.Б. Об уточнении граничных условий для балочной модели кантилевера атомно-силового микроскопа и их влиянии на интерпретацию результатов измерений // *Изв. РАН МТТ.* 2008. №3. С. 182-188.
68. Ustinov K.B., Dyskin A.V., Germanovich L.N. Asymptotic analysis of extensive crack growth parallel to free boundary. 3rd Int. Conf. Localized Damage 94. 1994. P. 623-630.
69. Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials // *J. Mech. Phys. Solid.* 2004. Vol. 52 (1), P. 193-214.
70. Andrews M., Massabo R., Cox B. Elastic interaction of multiple delaminations in plates subject to cylindrical bending // *Int. J. Solid Struct.* 2006. Vol. 43 (5), P. 855-886
71. Andrews M., Massabo R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Eng. Fract. Mech.* 2007. Vol. 74 (17), P. 2700-2720.
72. Ustinov K.B. On shear separation of a thin strip from the half-plane // *Mech. Solid.* 2014. Vol. 49 (6), P. 713-724.
73. Ustinov K.B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // *Mech. Solids.* 2015. Vol. 50 (1), P. 62-80.
74. Begley M.R., Hutchinson J.W. The Mechanics and Reliability of Films, Multilayers and Coatings // Cambridge University Press. 2017. 288 p.
75. Thouless M.D. Shear forces, root rotations, phase angles and delamination of layered materials // *Eng. Fract. Mech.* 2018. Vol. 191, P. 153-167.

76. Barbieri L., Massabo R., Berggreen C. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams // *Eng. Fract. Mech.* 2018. Vol. 201, P. 298-321.
77. Massabo R., Ustinov K.B., Barbieri L., Berggreen C. Fracture mechanics solutions for interfacial cracks between compressible thin layers and substrates // *Coatings*. 2019. Vol. 9, 19 p. <https://doi.org/10.3390/coatings9030152>.
78. Ustinov K.B. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *Eur. J. Mech. A Solids*. 2019. Vol. 75, P. 56-69.
79. Parry G., Colin J., Coupeau C., Foucher F., Cimetière A., Grilhé J., Effect of substrate compliance on the global unilateral post-buckling of coatings: AFM observation and finite element calculations // *Acta materialia*. 2005. V. 53. P. 441-447.
80. Yu H.H., He M.Y., Hutchinson J.W. Edge effects in thin film delamination // *Acta Mater.* 2001. V. 49. P.93–107.
81. Dannenberg H. Measurement of adhesion by a blister method // *J. Appl. Pol. Sci.* 1961. V. 5. Is. 14. P.125–34.
82. Williams M.L. The continuum interpretation for fracture and adhesion // *J. Appl. Pol. Sci.* 1969. V. 13. P. 29–40.
83. Салганик Р.Л. О хрупком разрушении склеенных тел // *ПММ*. 1963. Т. 27. № 5. С. 957–962.
84. Malyshev V.M., Salganik R.L. The strength of adhesive joints using the theory of crack // *Int. J. Fracture Mechanics*. 1965. V. 1. № 2. С. 114–128.
85. Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 1. Постановка задачи, случай нормального отрыва // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2015. № 4. С. 226-245. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.13
86. Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 2. Случай сдвиговой трещины // *Вестник ПНИПУ*. 2016. № 2. С. 131-142. DOI: 10.15593/perm.mech/ 2016.1.09
87. Устинов К.Б. О расслоении полосы по границе раздела упругих свойств. Часть 3. Точное аналитическое решение для частного случая // *Вестник ПНИПУ*. 2016. № 3. С. 222-240. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.15
88. Греков М.А. Сингулярная плоская задача теории упругости. Изд-во СПб университета. 2001. 192 с.
89. Златин А.Н., Храпков А.А. Полубесконечная трещина, параллельная границе упругой полуплоскости // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 31. С. 1009–1010.
90. Златин А.Н., Храпков А.А. Упругая полуплоскость, ослабленная трещиной, параллельной ее границе // *ЛГУ Исследования по упругости и пластичности*. 1990. Т. 16. Проблемы современной механики разрушения. С. 68-75.

91. Златин А.Н., Храпков А.А. Векторная задача Римана с ненулевым индексом показателя матрицы-коэффициента // Изв. ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 1985. Т 181. С. 12-16.
92. Khrapkov A.A. Wiener-Hopf method in mixed elasticity theory problems. S.-P. 2001.
93. Дерягин Б.В., Кротова Н.А., Смилга В.П., Адгезия твердых тел. М. Наука. 1973. 280 с.
94. Spies G.J. The peeling test on Redoux-bonded joints // Aircraft Engng. 1953. V. 25. N.289. P. 64-70.
95. Kaelble D.H. Theory and analysis of peel adhesion: mechanisms and mechanics // Trans. Soc. Rheology. 1959. V. 3. P. 161-180.
96. Kaelble D.H. Theory and analysis of peel adhesion: bond stresses and distributions // Trans. Soc. Rheology. 1960. V. 4. P. 45-73.
97. А.Д. Зимон. Адгезия пленок и покрытий. М.: Химия. 1977. 352 с.
98. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение. 1980. 375 с.
99. Алехин В.В., Аннин Б.Д., Колпаков А.Г. Синтез слоистых материалов и конструкций. Новосибирск: ИГ СО АН СССР. 1988. 130 с.
100. Аннин Б.Д. Механика деформирования и оптимальное проектирование слоистых тел. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН. 2005. 203 с.
101. С.А. Амбарцумян. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука. 1974. 448 с.
102. Moon M.-W., Chung J.-W., Lee K.-R., Oh K.H., Wang R., Evans, A.G. An experimental study of the influence of imperfections on the buckling of compressed thin films // Acta Mater. 2002. V. 50. P. 1219–1227.
103. Bowden N., Brittain S., Evans, A.G., Hutchinson J.W., Whitesides G.M. Spontaneous formation of ordered structures in thin films of metals supported on an elastomeric polymer // Nature. 1998. V. 393. P. 146–149.
104. Huck W., Bowden N., Onck P., Pardoën T., Hutchinson J., Whitesides G. Ordering of spontaneously formed buckles on planar surfaces // Langmuir. 2000. V. 16. P. 3497–3501.
105. Панин В.Е., Елсукова Т.Ф., Панин А.В., Кузина О.Ю. Мезосубструктура в поверхностных слоях поликристаллов при циклическом нагружении и ее роль в усталостном разрушении // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 3. С. 1-6.
106. Панин В.Е., Сергеев В.П., Панин А.В. Наноструктурирование поверхностных слоев и нанесение наноструктурных покрытий. Томск: Изд-во ТПУ. 2008. 285 с.
107. Sultan E., Boudaoud A. The buckling of a swollen thin gel layer bound to a compliant substrate // J. Appl. Mech. 2008. V.75. 051002-1-5
108. Морозов Н.Ф., Паукшто М.В., Товстик П.Е. Устойчивость Поверхностного Слоя При Термонагружении Известия Российской академии наук // Изв. РАН МТТ. 1998. № 1. С. 130-139.

109. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН МТТ. 2005. № 1. С. 147-160.
110. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О Формах Потери Устойчивости Пластины На Упругом Основании // Изв. РАН МТТ. 2010. № 4. С. 30-42.
111. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О Формах Потери Устойчивости Сжатой Пластины На Упругом Основании // Докл. РАН. 2012. Т. 446. № 1. С. 37-41.
112. Дыскин А.В., Салганик Р.Л. Модель дилатансии хрупких материалов с трещинами при сжатии // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – № 6. – С. 169–178.
113. Устинов К.Б., Каспарова Е.А. Оценка влияния кривизны и податливости основания на параметры отслоения покрытия // Деформация и разрушение материалов. 2015. № 3. С. 28-35.
114. Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // Engineering Failure Analysis. 2015. P. 1–7. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2013.09.022
115. Салганик Р.Л., Устинов К.Б. Задача об упруго заделанной пластине, моделирующей частично отслоившееся от подложки покрытие (плоская деформация) // Известия РАН МТТ. – 2012. – № 4. – С. 50–62.
116. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей / Галанин М.П., Савенков Е.Б. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. 590 с.
117. Лычев С.А., Дигилов А.В., Пивоваров Н.А. Изгиб кругового диска. От цилиндра к ультратонкой мембране // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 4. С. 77–105. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>. EDN: <https://www.elibrary.ru/blerei>.
118. Ustinov K., Massabo R. On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // International Journal of Solids and Structures. 2022. Vol. 248. 50 p. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2022.111600.
119. Monetto I., Massabo R. An analytical beam model for the evaluation of crack tip root rotations and displacements in orthotropic specimens // Frattura ed Integrita Strutturale. 2020. Vol. 14 (53), P. 372-393. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.53.29>.
120. Анурьев В. И. Справочник конструктора-машиностроителя в 3 т. Т. 1/В. И. Анурьев; 8-е изд., перераб и доп. Под ред. И. Н. Жестковой. — М.: Машиностроение, 2001. С. 34. ISBN 5-217-02963-3.
121. Vladimirsky Y., Bourdillon, A., et al. Demagnification in proximity X-ray lithography and extensibility to 25 nm by optimizing Fresnel diffraction. J. Phys. D: Appl. Phys., 1999. Vol. 32. P. 114–118. DOI: 10.1088/0022-3727/32/22/102
122. Yih-Lin Cheng, Meng-Long Li, Jiang-Hong Lin, Jia-Hung Lai, Chang-Tai Ke and Yu-Chia Huang // Development of dynamic mask photolithography system. IEEE International Conference on Mechatronics, 2005. P. 467-471. DOI:10.1109/ICMECH.2005.1529302

123. Z. Cedric Xia, Hutchinson J.W. Crack patterns in thin films // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 2000. V. 48. P. 1107-1131
124. Nazir M.H., Khan Z. A review of theoretical analysis techniques for cracking and corrosive degradation of film-substrate systems // Engineering Failure Analysis. 2017. Vol. 72. P. 80-113. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2016.11.010>
125. Audoly B., Boudaoud A. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate - Part I: Formulation, linear stability of cylindrical patterns, secondary bifurcations // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2008. Vol. 56 (7), P. 2401-2421.
126. Audoly B., Boudaoud A. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate - Part II: A global scenario for the formation of herringbone pattern // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2008. Vol. 56 (7), P. 2422-2443.
127. Audoly B., Boudaoud A. Buckling of a stiff film bound to a compliant substrate - Part III: Herringbone solutions at large buckling parameter // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2008. Vol. 56 (7), P. 2444-2458.
128. Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity Volume II: Theory of Plates. Elsevier. 1997. 497 pp.
129. Gorman D.J. Free vibration analysis of Mindlin plates with uniform elastic edge support by the superposition method // Journal of Sound and Vibration. 1997. V. 207. P. 335-350.
130. Du J.T., Li W.L., Jiu G.J., Yang T.J., Liu Z.G. An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges // Journal of Sound and Vibration. 2009. V. 306. P. 908-927.
131. Zhang H., Li W.L. Vibrations of rectangular plates with arbitrary non-uniform elastic edge restraints // Journal of Sound and Vibration. 2009. V. 326. P. 221-231.
132. Dal H., Morque O.K. Vibrations of elastically restrained rectangular plates // Scientific Research & Essays. 2011. V. 6 (31). P. 6811-6816.
133. Zhang H., Shi D., Wang Q. An improved Fourier series solution for free vibration analysis of the moderately thick laminated composite rectangular plate with non-uniform boundary conditions // International Journal of Mechanical Sciences. 2017. V. 121. P. 1-20.
134. Gorman D.J. Free vibration and buckling of in-plane loaded plates with rotational edge support // Journal of Sound and Vibration. 2000. V. 225. P. 755-773.
135. Miletić I., Miletić M. The buckling analysis of a rectangular plate elastically clamped along the longitudinal edges // Applied Engineering Letters. 2016. V. 1, № 1. P. 24-28.
136. Miletić I., Miletić M., Milojević S., Ulewicz R., Nikolić R. The buckling analysis of an elastically clamped rectangular plate // Mobility & Vehicle Mechanics. 2020. V. 48, № 1. P. 37-46.

137. Chen J., Jin G., Liu Z. Free vibration analysis of circular cylindrical shell with non-uniform elastic boundary conditions // International Journal of Mechanical Sciences. 2013. V. 74. P. 120-132.
138. Karakosyan R.M., Stepanyan S.P. Non-classical problem of bend of an orthotropic annular plate of variable thickness with an elastically clamped support // Proceedings of the Yerevan State University. 2017. V. 51, № 2. P. 168-176.