

На правах рукописи

Проскуряков Александр Игоревич

**ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ ВЫВЕДЕНИЯ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ЦЕЛЕВУЮ ОРБИТУ СО
СБРОСОМ ОТДЕЛЯЕМЫХ ЧАСТЕЙ СРЕДСТВ ВЫВЕДЕНИЯ В
АТМОСФЕРУ ЗЕМЛИ**

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2025

Работа выполнена на механико-математическом факультете Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова» (МГУ имени М.В.Ломоносова).

Научный руководитель:

Григорьев Илья Сергеевич

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры вычислительной
математики механико-математического
факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Официальные оппоненты:

Петухов Вячеслав Георгиевич

доктор технических наук, член-
корреспондент РАН, директор Научно-
исследовательского института прикладной
механики и электродинамики Московского
авиационного института

Ивашкин Вячеслав Васильевич

доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник
Института прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки Институт космических
исследований Российской Академии
Наук (ИКИ РАН)

Защита состоится 5 февраля 2026 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета 24.1.098.01 на базе ИПМех РАН по адресу: просп. Вернадского 101, корп. 1, Москва.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН <https://ipmnet.ru/diss/diss2/>

Автореферат разослан «___» _____ 2025 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.1.098.01

к.ф.-м.н.

Е.Я. Сысоева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация является исследованием в области вычислительной оптимизации в механике космического полета.

В работе рассматривается идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработавшего дополнительного топливного бака (ДТБ) и центрального блока (ЦБ) разгонного блока (РБ) в атмосферу Земли на этапе выведения космического аппарата (КА) на геопереходную (целевую) орбиту. Решаются задачи оптимизации траекторий выведения космического аппарата, оснащенного двигателем большой ограниченной тяги, с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) заданного радиуса и наклона на целевую эллиптическую орбиту.

Проблемы численного решения оптимизационных задач рассматривались в работах Васильева Ф.П., Моисеева Н.Н., Федоренко Р.П., Черноусько Ф.Л., Баничука Н.В. Оптимизацией траекторий космического аппарата занимались такие исследователи, как Бреквелл Дж.В., Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В., Ильин В.А., Кузмак Г.Е., Лоуден Д.Ф., Охочимский Д.Е., Энеев Т.М. Прорыв для траекторий космического аппарата с двигателями большой ограниченной тяги произошел в начале 1990-х годов благодаря работам Григорьева К.Г. и его учеников. Данная диссертационная работа представляет собой продолжение и дальнейшее развитие этих исследований.

Актуальность работы. Официальный статус на международном уровне проблема космического мусора получила в 1993 г. (доклад Генерального Секретаря ООН «Воздействие космической деятельности на окружающую среду») и в настоящее время остается актуальной. Согласно проведенному NASA исследованию, один из наиболее эффективных подходов решения проблемы космического мусора — сокращение времени для сведения космического аппарата с орбиты в атмосферу Земли после вывода из эксплуатации. Формализация прикладной задачи построения траекторий перелета космического аппарата со сбросом средств выведения в атмосферу Земли как задачи оптимального управления движением космического аппарата нетривиальна. Полученные оптимизационные задачи механики космического полета являются сложными, содержат промежуточные и фазовые ограничения. Решение таких задач в настоящее время требует серьезных усилий на стыке теоретической механики, оптимального управления и численных методов и является серьезным вкладом в развитие теории оптимизации в механике космического полета. Таким образом проведенное исследование является актуальным.

Целью диссертационной работы является решение задачи оптимального управления перелетом космического аппарата с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли на геопереходную орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли.

Для достижения заданной цели были поставлены следующие **задачи**:

- 1) формализация рассматриваемой задачи как задачи оптимального управления перелетом космического аппарата;
- 2) определение и анализ структуры траекторий перелета космического аппарата с опорной на целевую орбиту в импульсной постановке с малыми накладными расходами на сброс отработавших частей космического аппарата в атмосферу;
- 3) построение и решение серии вспомогательных оптимизационных задач, позволяющих в итоге выбрать эффективную вычислительную схему метода стрельбы и соответствующее хорошее начальное приближение, входящее в область эффективной сходимости метода Ньютона;
- 4) оптимизация траекторий перелета космического аппарата, оснащенного двигателем большой ограниченной тяги, с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли на целевую эллиптическую орбиту без учета и с учетом влияния второй зональной гармоник.

Методы исследования. Для сведения поставленных задач оптимизации перелетов космического аппарата с большой ограниченной тягой к краевым задачам используется принцип максимума Понтрягина (принцип Лагранжа — для задач в импульсной постановке и задач с простыми схемами управления). Решение краевых задач принципа максимума Понтрягина (принципа Лагранжа) на основе метода стрельбы сводится к решению систем нелинейных уравнений. Входящие составными частями в метод стрельбы система нелинейных уравнений решается методом Ньютона в модификации Исаева-Сонина с использованием в условиях сходимости нормировки Федоренко; система линейных уравнений — методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу и повторным пересчетом; задача Коши — методом Дормана-Принса 8(7) с автоматическим выбором шага. Специально разработанная (А.И. Проскуряковым и И.С. Григорьевым) технология (комплекс программ) численно-аналитического дифференцирования используется для вычисления с высокой точностью громоздких производных в условиях трансверсальности и условиях стационарности по фазовым переменным.

Основной проблемой решения является выбор подходящих систем нелинейных уравнений и соответствующих начальных приближений. Эта проблема решается с использованием методики «лестница задач».

Прямые методы оптимизации используются для получения стартовой точки для метода Ньютона в апсидальной импульсной постановке.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются оптимальные траектории перелетов космического аппарата и способы их построения.

Предметом исследования является методика «лестница задач», заключающаяся в последовательной формализации набора оптимизационных задач с постепенным уточнением и усложнением постановки и решении этих задач, с использованием полученных решений более простых задач для решения следующих по сложности задач, в том числе с различными формализациями одной и

той же задачи для включения в параметрические семейства методов продолжения решения по параметру. Изучаемая методика «лестница задач» применяется к решению задачи оптимального управления перелетом космического аппарата с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли на геопереходную орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Формализована задача оптимизации перелета космического аппарата в импульсной постановке с опорной орбиты искусственного спутника Земли на целевую орбиту со сбросом ступеней в атмосферу Земли. На основе принципа Лагранжа задача решена численно и получены траектории с малыми накладными расходами на сброс ступеней в атмосферу.
2. Формализована задача оптимального управления космическим аппаратом с реактивным двигателем большой ограниченной тяги с опорной орбиты искусственного спутника Земли на целевую орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли. На основе принципа максимума Л.С.Понтрягина нелинейная задача оптимального управления с разрывным управлением и промежуточными условиями сведена к многоточечной краевой задаче, численно построены экстремали и проведен их анализ.
3. На основе известных моделей движения космического аппарата в центральном ньютоновском гравитационном поле и в гравитационном поле с учетом второй гармоники сформирована и решена серия вспомогательных задач (реализующая методику «лестница задач»), последовательное решение которых приводит к решению целевой задачи.

Положения, выносимые на защиту:

1. Постановка трехмерной задачи оптимизации траектории перелета космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги с опорной орбиты на целевую эллиптическую со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли.
2. Успешная реализация методики “лестница задач” — предложение серии вспомогательных задач, последовательное решение которых с использованием продолжения решения по параметру привело к решению целевой задачи.
3. Аналитическое исследование и численное решение задачи в импульсной постановке с фазовыми ограничениями и промежуточными условиями.
4. Численное построение экстремалей Понтрягина — решение краевых задач принципа максимума Л.С. Понтрягина сложной структуры с промежуточными условиями.
5. Определение параметров траектории перелета и целевой орбиты, при которых накладные расходы на сброс дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу малы.

Достоверность полученных результатов основывается на строгой ма-

тематической постановке задач, применении хорошо изученных методов. Результаты диссертации являются оригинальными и опубликованы в открытой печати.

Теоретическая значимость. Задачи оптимального управления движением космических аппаратов нетривиальны и требуют для своего решения синтеза методов теоретической механики, оптимизации и вычислительной математики. Решение каждой новой сложной (нелинейной, с промежуточными условиями, разрывными управлениями и разрывами фазовых переменных) задачи оптимального управления развивает методику численного решения такого рода задач. Построенные экстремали Понtryгина могут использоваться при обработке методик проверки условий второго порядка локальной оптимальности и условий оптимальности на основе принципа Кротова.

Практическая значимость. Полученная в работе информация об оптимальных траекториях выведения космического аппарата с низкой круговой орбиты искусственного спутника Земли на целевую геопереходную орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли может быть использована при создании и оценке реальных систем управления движением центра масс космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги; методика численного решения может быть применена при решении других актуальных и требующих решения оптимизационных задач; построенные экстремали Понtryгина могут использоваться в качестве известных решений при оценке оптимальности траекторий, построенных с использованием простых схем управления и других упрощающих предположений.

Апробация работы. Автор выступал с докладами по результатам работы на научных семинарах: спецсеминар «Прикладные задачи оптимального управления и численные методы их решения» под руководством доц. И.С. Григорьева, доц. М.П. Заплетина, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова (2016–2025); семинар имени В.А. Егорова по механике космического полета под руководством проф. В.В. Сазонова, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова (2021); научно-исследовательский семинар «Фундаментальная математика и ее приложения в космических исследованиях» под руководством декана факультета космических исследований МГУ имени М.В.Ломоносова В.В. Сазонова (2019, 2021); семинар «Механика космического полета» под руководством член-корреспондента РАН В.Г. Петухова, Московский авиационный институт (2024); семинар «Механика и управление движением космических аппаратов» под руководством д.ф.-м.н. А.Г. Тучина, Баллистический центр ИПМ имени М.В. Келдыша РАН (2024); семинар имени В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством проф. А.А. Зобовой и проф. Е.И. Кугушева, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова (2024); семинар по теории управления и динамике систем под руководством академика Ф.Л. Черноусько, Институт проблем механики име-

ни А.Ю. Ишлинского (2024); семинар по прикладной механике и управлению имени А.Ю.Ишлинского под руководством проф. В.В. Александрова, проф. Н.А. Парусникова, проф. Ю.В. Болотина, механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова (2024).

Кроме того автором были сделаны доклады по теме диссертации на следующих конференциях:

- 1) Научная конференция «Ломоносовские чтения», секция механики, г. Москва, Россия, (2017, 2018, 2020, 2021, 2023, 2024, 2025);
- 2) Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (площадка конференции в Азербайджане), г. Баку, Азербайджан (2025);
- 3) Евразийский молодежный форум, посвященный 20-летию юбилею Казахского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова, г. Нур-Султан, Казахстан (2021);
- 4) Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства, г. Москва, Россия (2017, 2018, 2019, 2020, 2021);
- 5) Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», г. Москва, Россия (2017, 2018, 2020);
- 6) Научные чтения памяти К.Э. Циолковского, г. Калуга, Россия (2016, 2017, 2018, 2019);
- 7) II Международная научная конференция молодых исследователей, посвященная 95-й годовщине общенационального лидера Азербайджана Гейдара Алиева, г. Баку, Азербайджан (2018);
- 8) Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения», г. Москва, Россия (2017, 2018);
- 9) II научно-практическая конференция с международным участием «Творческий потенциал молодежи в решении авиакосмических проблем», г. Баку, Азербайджан (2017).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 28 научных работах автора [1–28], в том числе 6 статей опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ [1–6] (из которых 3 статьи — в изданиях, входящих в базу цитирования Scopus и Web of Science).

Личный вклад соискателя. В работе [1] автором была предложена вычислительная схема метода стрельбы, в которой задание вектора параметров пристрелки, определяющего импульсные воздействия, происходит в специально выбранном модифицированном орбитальном базисе и были получены оптимальные траектории перелета космического аппарата в модифицированной импульсной постановке со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли; постановка задачи предложена научным руководителем. В работе [2] автором был проведен анализ условий оптимальности, была предложена вычислительная схема метода стрельбы,

обеспечивающая сходимость метода Ньютона за несколько итераций, и были получены оптимальные траектории перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую с малыми накладными расходами на сброс дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли в задаче с большой ограниченной тягой; постановка задачи предложена научным руководителем. В работе [3] автором были численно построены оптимальные схемы перелета космического аппарата на целевую орбиту в упрощенной модели, в которой направление вектора тяги определяется двумя углами, зависящими от времени линейно. В работах [4–6] автором были получены оптимальные схемы перелета с малыми накладными расходами на сброс ступеней в атмосферу в импульсной постановке, проведен анализ условий оптимальности и выбор вычислительных схем метода стрельбы, обеспечивающих сходимость метода Ньютона за несколько итераций; постановка задачи предложена научным руководителем. Все вычисления, необходимые для построения траекторий в работах [1–6], проводились автором самостоятельно.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка использованных источников и приложения. Текст диссертации содержит 167 страниц, включая 18 рисунков. Список литературы состоит из 127 наименований.

Соответствие паспорту научной специальности. По теме и содержанию материалов исследования диссертационная работа соответствует актуальному паспорту специальности 1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин в части п. 5. «Управление движением, наблюдаемость и идентификация механических систем», п. 9. «Небесная механика, астродинамика», п. 10. «Динамика летательных аппаратов и космических конструкций».

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность рассматриваемой темы, сформулированы цели и задачи, приводятся научная новизна, объект и предмет, методы исследования, достоверность полученных результатов, теоретическая и практическая значимость работы, положения выносимые на защиту, структура и объем диссертации, апробация работы и публикации.

В **первой** главе представлен обзор литературы современного состояния исследований по вопросам, связанным с космическим мусором, по проблемам решения задач оптимального управления движением космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги, а также по методике «лестница задач».

Вторая глава посвящена апсидальным импульсным перелетам КА — все импульсные воздействия подаются в апогеях и перигеях соответствующих орбит. В разделе 2.1 представлена постановка задачи. Рассматривается задача перелета КА с опорной круговой орбиты ИСЗ заданного радиуса $R_0 = R_3 + 200$ км и наклона $i_0 = 0.9$ рад на целевую эллиптическую орбиту. Параметры целе-

вой орбиты — радиусы перигея и апогея, угол наклона — заранее неизвестны и определяются в результате решения оптимизационной задачи. Перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме в апсидальной импульсной постановке. КА состоит из двух ступеней и спутника. Довыведение спутника с целевой орбиты на ГСО осуществляется с использованием двигателей и за счет топлива самого спутника. Под целевой орбитой в работе понимается любая такая орбита, что характеристическая скорость маневров довыведения с нее до геостационарной орбиты ограничена заданной величиной. Масса ступеней пропорциональна массе вмещающегося в их баки топлива с коэффициентом α . В баки залито столько топлива, сколько необходимо для совершения соответствующих маневров. Масса двигателя и структурных конструкций не учитывается. Отработавшие ступени за счет дополнительных импульсных воздействий переводятся на орбиты, касающиеся условной границы атмосферы (высота перигея 100 км). Время существования объектов на таких орбитах считается малым. Предполагается, что дополнительные импульсы для сброса ступеней в атмосферу подаются в апогеях орбит, с которых осуществляется увод ступеней, и не меняют наклона орбиты, то есть являются тормозными. Торможение ступени для перевода на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, происходит с помощью двигателя, которым оснащена каждая ступень, за счет остающегося в их баках топлива. Оставшаяся после сброса второй ступени масса КА на целевой орбите считается полезной и максимизируется.

В разделе 2.2 рассматривается формализация задачи. Траектория перелета представляет собой серию эллиптических орбит, последовательно пересекающихся в точках на оси x прямоугольной декартовой системы координат, связанной с центром Земли. Каждая из этих орбит однозначно определяется величинами r_- , r_+ и i — расстояниями от центра Земли до точек орбиты на отрицательном и положительном направлении оси x и углом наклона; если орбита эллиптическая, то одно из этих расстояний является радиусом перигея, другое — радиусом апогея. Импульсы даются только в точках орбиты на оси x , радиальные составляющие векторов импульсов равны нулю. При приложении импульса в точке отрицательной части оси x изменяются величины r_+ и i , а величина r_- остается неизменной; импульс перехода с орбиты на орбиту определяется соотношением

$$\Delta v_- = \sqrt{v_{1-}^2 + v_{2-}^2 - 2v_{1-}v_{2-}\cos(i_2 - i_1)},$$

где $v_{1-} = \sqrt{\frac{2\mu r_{1+}}{r_{1-}(r_{1-} + r_{1+})}}$, $v_{2-} = \sqrt{\frac{2\mu r_{2+}}{r_{2-}(r_{2-} + r_{2+})}}$ — величины скоростей на первой и второй орбитах соответственно; $r_{1-} = r_{2-}$, r_{1+} , r_{2+} — апсидальные радиусы на первой и второй орбитах соответственно; i_1 , i_2 — наклоны первой и второй орбит соответственно. Аналогично, при приложении импульса в точке положительной части оси x изменяются величины r_- и i , неизменной остается величина r_+ .

В разделе 2.3 рассматривается решение данной задачи. В разделе 2.4 представлены выводы данной главы. В результате проведенных расчетов было установлено: максимум полезной массы достигается при разделении первого импульса; накладные расходы для сброса ступеней в атмосферу при ограничении на характеристическую скорость маневров довыведения равном 1.5 км/с и максимально возможном удалении КА от Земли $R_{\max} = 280000$ км малы (рис. 1). На данном рисунке верхний график соответствует простому сбросу, нижний график — сбросу ступеней в атмосферу. Оптимальное решение при ограничении на характеристическую скорость маневров довыведения равном 1.5 км/с соответствует двухимпульсной схеме выведения на целевую орбиту (рис. 2а) и трехимпульсной схеме довыведения с целевой орбиты на ГСО (рис. 2б).

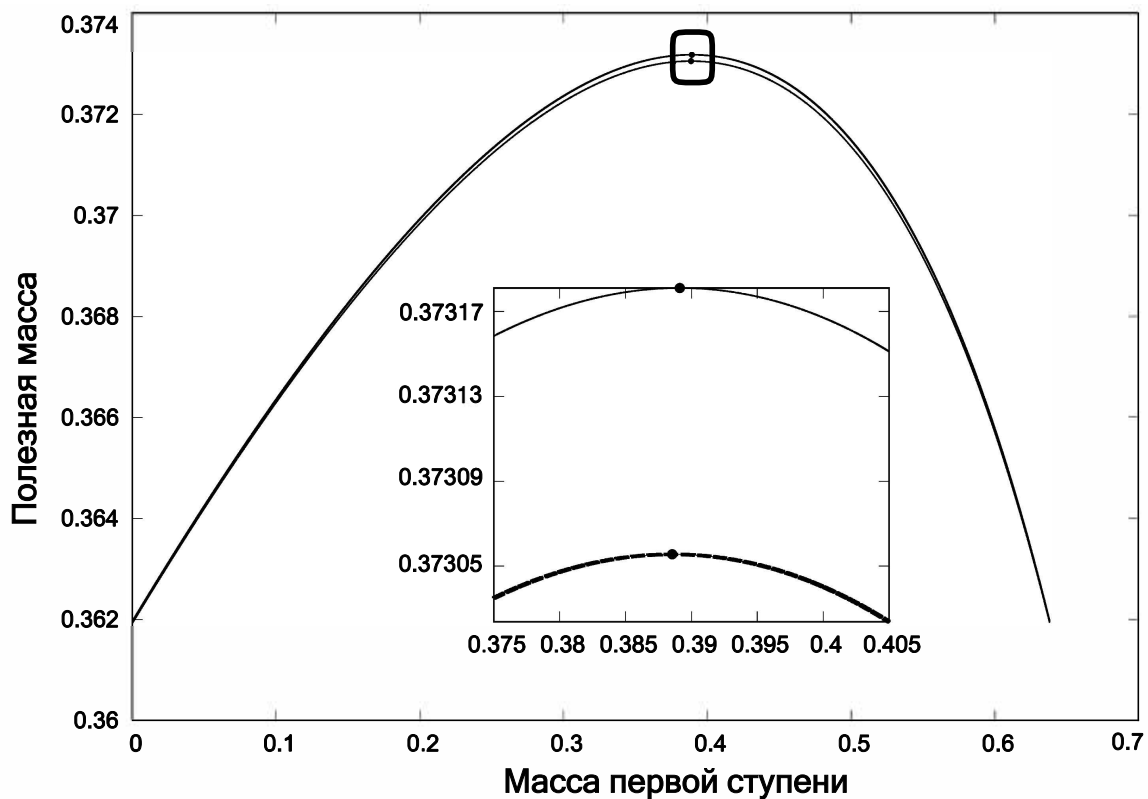


Рис. 1: Зависимость полезной массы от массы первой ступени в задачах перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую эллиптическую (характеристическая скорость маневров довыведения ограничена величиной 1.5 км/с)

В **третьей** главе рассматривается задача без априорного предположения об апсидальности импульсных воздействий. В разделе 3.1 приводится постановка задачи. Она совпадает с постановкой задачи, рассмотренной во второй главе, но в ней отсутствует априорное предположение об апсидальности импульсных воздействий, и ограничение на максимальное удаление КА от Земли учитывается как фазовое. Можно считать, что задача оптимизации рассматривается в кольце $K = \{R_{\min} \leq r(t) \leq R_{\max}\}$, где $r(t)$ — расстояние от центра Земли до КА в момент времени t , $R_{\min}$ и $R_{\max}$ — ограничение на минималь-

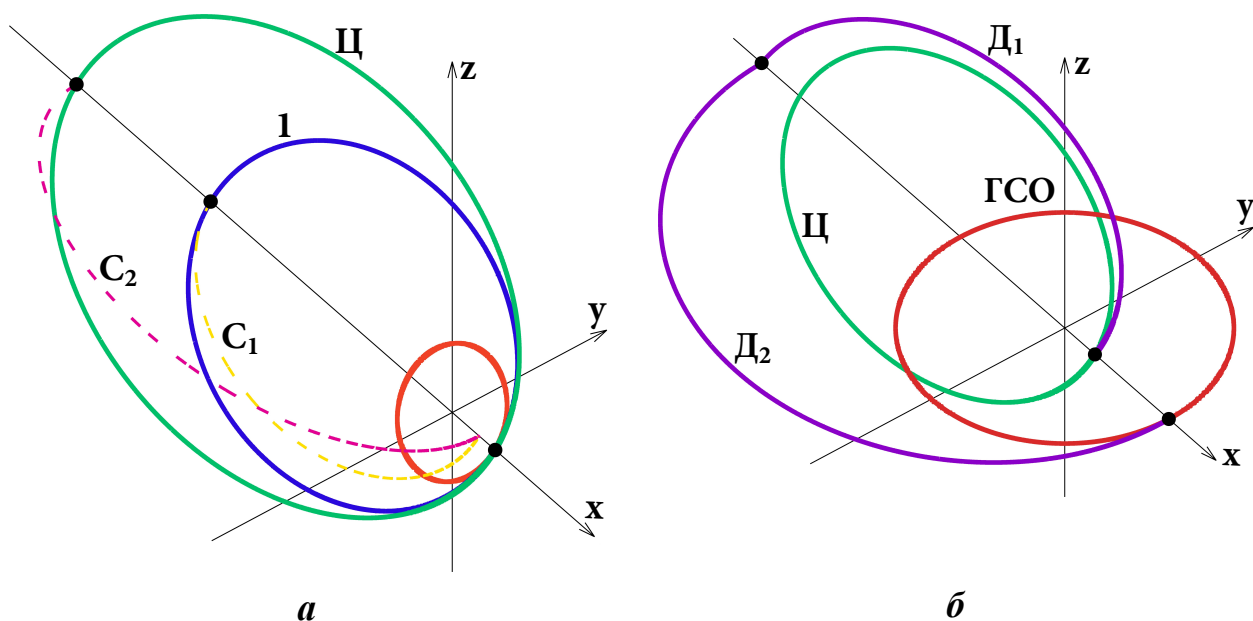


Рис. 2: Схема выведения на целевую орбиту (а) и довыведения с целевой орбиты на ГСО (б) при ограничении на характеристическую скорость маневров довыведения 1.5 км/с

ное и максимальное удаление КА от центра Земли. Величина минимального удаления равна радиусу условной границы атмосферы. В задаче фазовое ограничение $r(t) \geq R_{\min}$ не является активным.

В разделе 3.2 приводится формализация задачи. Переход от задачи с априорным предположением об апсидальности импульсных воздействий к задаче без данного предположения является первым шагом методики «лестница задач». В рассматриваемой задаче более простой постановкой был случай с априорным предположением об апсидальности импульсных воздействий из второй главы. Рассмотрение этой упрощенной задачи позволяет предполагать, что вне зависимости от величины суммы импульсов довыведения и разделяемого импульса весь перелет КА с опорной круговой орбиты на ГСО состоит из трех орбит и пяти основных импульсов, а также из двух дополнительных импульсных воздействий, переводящих отработавшие ступени на орбиты, касающиеся условной границы атмосферы. Причем некоторые из этих орбит составляют траекторию выведения КА с опорной орбиты на целевую, а оставшиеся орбиты — траекторию довыведения КА (спутника) с целевой орбиты на ГСО.

В разделе 3.3 решение формализованной задачи импульсной постановки на основе принципа Лагранжа сводится к решению краевой задачи. Краевые задачи принципа Лагранжа решаются численно методом стрельбы. На основе предыдущих исследований выбираются вычислительные схемы метода стрельбы и хорошие начальные приближения искомых параметров пристрелки. В силу громоздкости, получение условий краевой задачи в явном виде вызывает определенные сложности. Поэтому уже на этапе формирования краевой задачи и далее при ее численном решении используется технология численно-аналитического дифференцирования. При этом в программной реализации вме-

сто стандартного класса «плавающая точка» используется специально разработанный класс `ext_value`, оказавшийся эффективной реализацией этой идеи.

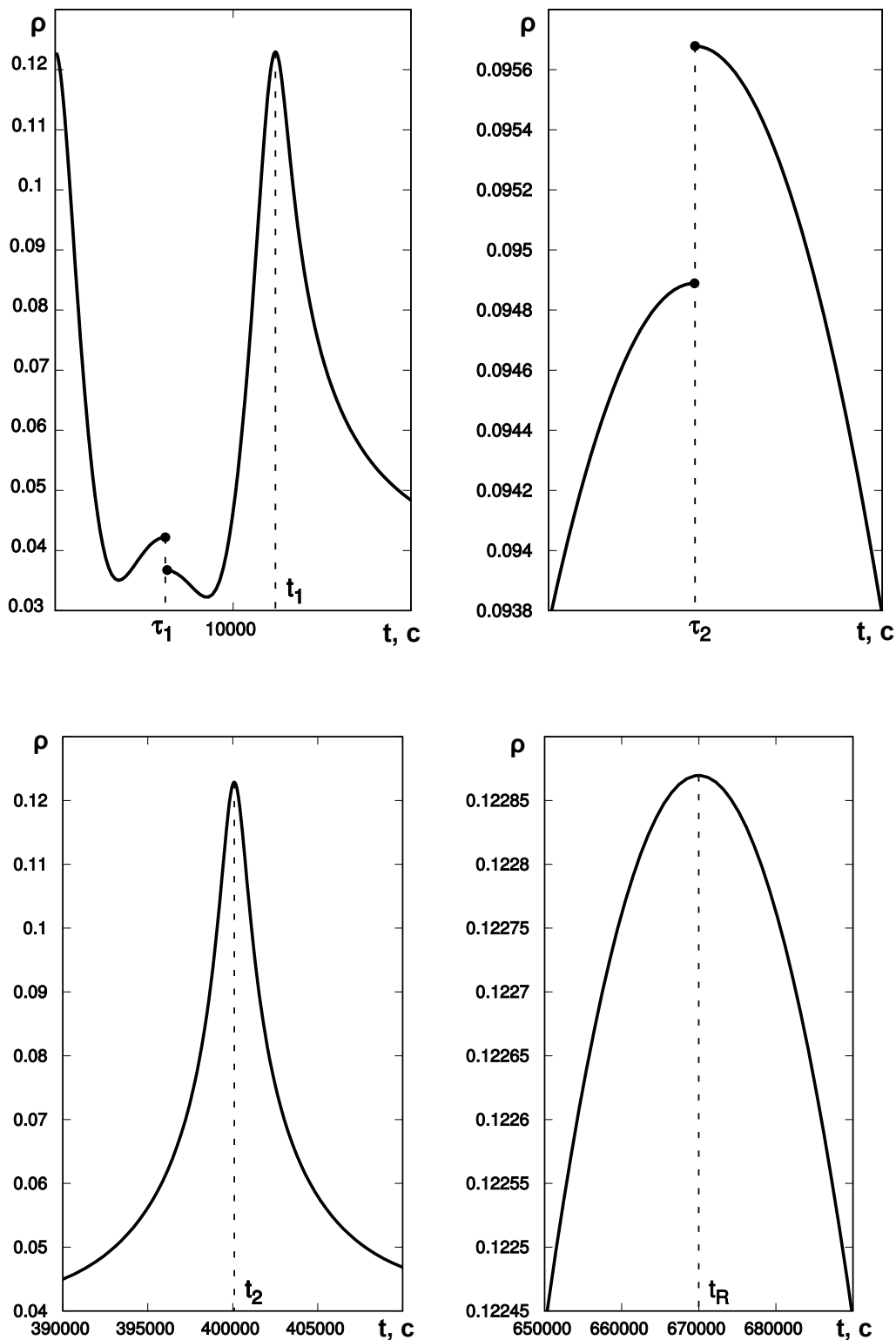


Рис. 3: Графики зависимости функции переключения в окрестности моментов времени τ_1 , t_1 , τ_2 , t_2 и t_R

В разделе 3.4 приводится описание полученной траектории. В разделе 3.5 приводятся выводы данной главы. Было установлено, что решение задачи перелета КА с опорной орбиты на целевую эллиптическую без априорного пред-

положения об апсидальности импульсов при неограниченном заранее времени перелета и ограничении на максимально возможное удаление КА от Земли совпадает с решением аналогичной задачи с априорным предположением об апсидальности импульсов и, следовательно, при ограничении на характеристическую скорость маневров довыведения равном 1.5 км/с накладные расходы на сброс ступеней в атмосферу малы. При ограничении на характеристическую скорость маневров довыведения меньшую 1.47 км/с меняется структура траектории и накладные расходы на сброс ступеней в атмосферу становятся значительными. В результате проведенного анализа условий оптимальности принципа Лагранжа было установлено, что интеграл Белецкого-Егорова-Пайнса и гамильтониан непрерывны в точках приложения промежуточных импульсных воздействий (результат расширен на случай импульсов сброса ступеней в атмосферу). Различие величин максимумов функции переключения связано со ступенчатостью КА (со сбросом ступеней в атмосферу) (рис. 3).

В **четвертой** главе рассматривается задача в модифицированной импульсной постановке. В разделе 4.1 приводится постановка задачи. Как и в предыдущих главах, исследование проводится в импульсной постановке, перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме. В отличие от модели КА, состоящего из двух ступеней и спутника, рассмотренной в предыдущих главах, в данной главе предполагается, что КА состоит из ЦБ РБ, ДТБ и спутника. При этом первая серия маневров выведения КА осуществляется за счет топлива из ДТБ. По окончании этой серии маневров КА должен оказаться на орбите сброса — орбите, касающейся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км). Далее следует участок пассивного полета продолжительностью 120 с, на котором осуществляется сброс ДТБ. По окончании участка сброса ДТБ остается на орбите сброса, а КА импульсным воздействием переводится на «безопасную» орбиту с высотой перигея 200 км. Это и последующие импульсные воздействия осуществляются за счет топлива из основного бака ЦБ РБ. Наконец, после второй серии маневров КА оказывается на целевой орбите — одной из множества эллиптических орбит, таких что характеристическая скорость маневров довыведения спутника на ГСО ограничена заданной величиной. Учет характеристической скорости маневров довыведения с целевой орбиты на ГСО осуществляется по упрощенной схеме апсидальной импульсной постановки (все импульсные воздействия считаются апсидальными, поворот орбиты производится только вторым импульсом, первый разгонный и последний установочный импульсы плоскость орбиты не меняют, что в совокупности очень существенно упрощает постановку задачи). На целевой орбите осуществляется отстыковка спутника от ЦБ РБ. Сброс ЦБ РБ происходит с апогея целевой орбиты за счет топлива из основного бака.

Найденное в апсидальной импульсной постановке решение с исключительно малыми накладными расходами (при ограничении на характеристическую скорость маневров довыведения равную 1.5 км/с), оказавшееся также решением в задаче без априорного предположения апсидальности, позволяет на-

деяться на успех применения методики «лестницы задач».

В разделе 4.2 задача оптимизации формализуется, и на основе соответствующего принципа Лагранжа в разделе 4.3 ее решение сводится к решению многоточечной краевой задачи.

В разделе 4.4 рассматривается численное решение данной задачи. Выбор вычислительной схемы метода стрельбы оказывает очень большое влияние на скорость сходимости метода Ньютона, и более эффективным является задание параметров пристрелки, определяющих импульсное воздействие в специально выбранном базисе — модифицированном орбитальном базисе (при этом начало новой системы координат и исходной совпадают).

Базисные векторы $\vec{e}_r(\tau)$, $\vec{e}_{v\text{тр}}(\tau)$, $\vec{e}_c(\tau)$ локальной системы координат в момент каждого из импульсных воздействий определяются следующим образом. Вектор $\vec{e}_r(\tau)$ направлен по радиус-вектору КА в момент подачи импульсного воздействия, направление $\vec{e}_{v\text{тр}}(\tau)$ совпадает с направлением трансверсальной компоненты скорости, $\vec{e}_c(\tau)$ дополняет систему до правой тройки. Тогда

$$\begin{aligned}\vec{e}_r(\tau) &= \frac{\vec{r}(\tau)}{|\vec{r}(\tau)|}, & \vec{e}_{v\text{тр}}(\tau) &= \frac{\vec{v}_{\text{тр}}(\tau)}{|\vec{v}_{\text{тр}}(\tau)|}, & \vec{e}_c(\tau) &= \frac{\vec{C}(\tau)}{|\vec{C}(\tau)|}, \\ \vec{e}_v(\tau) &= \frac{\vec{v}(\tau)}{|\vec{v}(\tau)|}, & \vec{C}(\tau) &= [\vec{e}_r(\tau), \vec{e}_v(\tau)], & \vec{v}_{\text{тр}}(\tau) &= [\vec{e}_c(\tau), \vec{e}_r(\tau)].\end{aligned}$$

Скорости КА и, следовательно, компоненты вектора импульса $\Delta v_r(\tau)$, $\Delta v_{\text{тр}}(\tau)$, $\Delta v_c(\tau)$ в каждый момент τ подачи импульсного воздействия задаются в системе координат, связанной с КА:

$$\begin{aligned}\Delta v_r(\tau) &= \Delta v(\tau) \cos \psi(\tau) \cos \theta(\tau), & \Delta v_{\text{тр}}(\tau) &= \Delta v(\tau) \sin \psi(\tau) \cos \theta(\tau), \\ \Delta v_c(\tau) &= \Delta v(\tau) \sin \theta(\tau),\end{aligned}$$

где $\theta(\tau)$ — угол склонения направления вектора импульса (угол между вектором импульса и плоскостью орбиты) в момент времени τ , $\psi(\tau)$ — угол прямого восхождения направления вектора импульса (отсчитывается в плоскости орбиты от радиус-вектора в направлении вектора скорости) в момент времени τ , $\Delta v(\tau)$ — величина импульса (значение в основной системе координат совпадает со значением в локальной).

Компоненты вектора импульса в исходной системе координат $\Delta v_x(\tau)$, $\Delta v_y(\tau)$, $\Delta v_z(\tau)$ получаются по следующим формулам перехода от одного базиса к другому, записанных в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \Delta v_x(\tau) \\ \Delta v_y(\tau) \\ \Delta v_z(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{rx}(\tau) & e_{vx\text{тр}}(\tau) & e_{cx}(\tau) \\ e_{ry}(\tau) & e_{vy\text{тр}}(\tau) & e_{cy}(\tau) \\ e_{rz}(\tau) & e_{vz\text{тр}}(\tau) & e_{cz}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta v_r(\tau) \\ \Delta v_{\text{тр}}(\tau) \\ \Delta v_c(\tau) \end{pmatrix},$$

где $e_{rx}(\tau)$, $e_{ry}(\tau)$, $e_{rz}(\tau)$ — координаты вектора $\vec{e}_r(\tau)$; $e_{vx\text{тр}}(\tau)$, $e_{vy\text{тр}}(\tau)$, $e_{vz\text{тр}}(\tau)$ — координаты вектора $\vec{e}_{v\text{тр}}(\tau)$; $e_{cx}(\tau)$, $e_{cy}(\tau)$, $e_{cz}(\tau)$ — координаты вектора $\vec{e}_c(\tau)$ в основной системе координат в момент времени τ .

Компоненты вектора скорости КА до импульсного воздействия $v_x(\tau_-)$,

$v_y(\tau_-)$, $v_z(\tau_-)$ в исходной системе координат в момент времени τ определяются в результате решения задачи Коши (а в начальный момент времени на опорной круговой орбите по формулам из справочника). Компоненты вектора скорости КА после подачи импульсного воздействия $v_x(\tau_+)$, $v_y(\tau_+)$, $v_z(\tau_+)$ в основной системе координат в момент времени τ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} v_x(\tau_+) &= \Delta v_x(\tau) + v_x(\tau_-), & v_y(\tau_+) &= \Delta v_y(\tau) + v_y(\tau_-), \\ v_z(\tau_+) &= \Delta v_z(\tau) + v_z(\tau_-). \end{aligned}$$

В разделе 4.5 представлены результаты данной главы — траектория перелета. В разделе 4.6 представлены выводы данной главы. Рассмотренная в данной главе задача и ее решение, являясь еще одним шагом методики «лестница задач», послужили основой решения задачи оптимизации перелета КА с большой ограниченной тягой (не в импульсной постановке) и с учетом возмущений, обусловленных нецентральностью гравитационного поля Земли. Необходимость решения задачи в модифицированной импульсной постановке (с учетом сброса ДТБ и ЦБ РБ) была вызвана сложностью непосредственного перехода к задаче с большой ограниченной тягой, поскольку модифицированный метод Ньютона не сходиллся при использовании в качестве начального приближения решения из третьей главы.

В **пятой** главе решается задача оптимизации траектории перелета КА с опорной круговой орбиты ИСЗ заданного радиуса и наклона на целевую орбиту с помощью РБ с двигательной установкой большой ограниченной тяги и ДТБ, со сбросом ДТБ и ЦБ РБ в атмосферу Земли. Довыведение с целевой орбиты на ГСО учитывается по упрощенной схеме апсидальной импульсной постановки (в рамках центрального ньютоновского гравитационного поля) и осуществляется двигательной установкой КА. Целью данной главы является построение экстремалей Понтрягина в задаче с большой ограниченной тягой.

В разделе 5.1 приводится постановка задачи. Структура этой экстремали (последовательность и примерное расположение на траектории активных участков) известна из предыдущих исследований, проведенных в импульсной постановке. Первая серия маневров выведения КА на целевую орбиту осуществляется за счет топлива из ДТБ. После отработки этого топлива КА оказывается на орбите, касающейся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км). На участке пассивного полета, продолжительностью 120 с, осуществляется сброс ДТБ. За счет дополнительного включения двигателя КА возвращается на «безопасную орбиту» (с высотой перигея 200 км). Это и последующие включения двигателя КА происходят за счет топлива из основного бака ЦБ РБ.

После выполнения второй серии маневров КА оказывается на целевой орбите, такой что характеристическая скорость маневров довыведения с нее на ГСО ограничена заданной величиной и для которой z-компонента вектора Лапласа равна нулю (это позволяет серьезно упростить формулы довыведения). Из проведенных ранее исследований следует, что накладные расходы на сброс малы при биеллиптической схеме довыведения. На целевой орбите спутник от-

деляется от ЦБ РБ. За счет последнего включения двигателя на остатках топлива из основного бака в окрестности апогея целевой орбиты ЦБ РБ переводится на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, а спутник за счет собственных двигателей переводится на ГСО.

В данной главе рассматриваются две разные, но близкие постановки задачи. В первом случае предполагается, что в баки залито ровно столько топлива, сколько необходимо для совершения соответствующих маневров, сухая масса ДТБ и масса основного бака ЦБ РБ пропорциональны массе вмещающегося в них топлива с коэффициентом α , а масса двигателя пропорциональна тяговооруженности с коэффициентом β . Во втором случае предполагается, что заданы массовые характеристики РБ: сухие массы ДТБ и основного бака ЦБ РБ, а также ограничения на массы топлива в ДТБ и в основном баке ЦБ РБ.

Функционалом в рассматриваемых задачах является полезная масса, т.е. масса КА, оставшаяся на целевой орбите после отстыковки ЦБ РБ.

В этой главе перелет с опорной орбиты на целевую эллиптическую орбиту рассматривается как в центральном ньютоновском гравитационном поле, так и в гравитационном поле Земли с учетом влияния второй зональной гармоник.

Рассматриваемые задачи в разделе 5.2 формализуются как задачи оптимального управления совокупностью динамических систем. В разделе 5.3 на основе соответствующего принципа максимума Л.С. Понтрягина их решение сводится к решению многоточечных краевых задач.

Система дифференциальных уравнений движения центра масс КА в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= v_x(t), & \dot{y}(t) &= v_y(t), & \dot{z}(t) &= v_z(t), \\ \dot{v}_x(t) &= -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)} + \frac{P_x(t)}{m(t)}, & \dot{v}_y(t) &= -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)} + \frac{P_y(t)}{m(t)}, \\ \dot{v}_z(t) &= -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)} + \frac{P_z(t)}{m(t)}, & \dot{m}(t) &= -\frac{P(t)}{c},\end{aligned}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты центра масс КА в момент времени t ; $r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$ — расстояние от КА до центра Земли в момент времени t ; $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ — компоненты вектора скорости центра масс КА в момент времени t ; $M(0)$ — масса КА в начальный момент времени; $M(t)$ — масса КА в момент времени t ; $m(t) = M(t)/M(0)$ — обезразмеренная (используемая при расчетах) масса КА; $\vec{F}(t) = (F_x(t), F_y(t), F_z(t))$ — вектор реактивной тяги в момент t ; $F(t) = |\vec{F}(t)| = \sqrt{F_x^2(t) + F_y^2(t) + F_z^2(t)}$ — величина вектора реактивной тяги; $\vec{P}(t) = (P_x(t), P_y(t), P_z(t)) = (F_x(t)/M(0), F_y(t)/M(0), F_z(t)/M(0))$ — вектор обезразмеренной реактивной тяги; $n = F_{\max}/(M(0)g_3)$ — начальная тяговооруженность; $P(t) = \sqrt{P_x^2(t) + P_y^2(t) + P_z^2(t)}$ — величина вектора обезразмеренной реактивной тяги в момент времени t ; μ — гравитационный параметр Земли; $c = P_{\text{уд}}g_3$ — скорость истечения реактивной струи; $P_{\text{уд}}$ — удельная тяга; g_3 — гравитационное ускорение у поверхности Земли.

Условия оптимальности по управлениям P_x, P_y, P_z (компонентам вектора тяги) имеют вид:

$$P_{opt} = \begin{cases} P_{\max}, & \chi > 0, \\ 0, & \chi < 0, \end{cases}$$

$$(P_x)_{opt} = P_{opt} \frac{p_{vx}}{\rho}, \quad (P_y)_{opt} = P_{opt} \frac{p_{vy}}{\rho}, \quad (P_z)_{opt} = P_{opt} \frac{p_{vz}}{\rho},$$

где $P_{\max}$ — ограничение на величину вектора обезразмеренной тяги, $\chi \equiv \frac{\rho}{m} - \frac{P_m}{c}$ — функция переключения. Был проведен анализ условий оптимальности и полученные следствия использовались в вычислительной схеме метода стрельбы. Следствиями условий трансверсальности в моменты выхода на орбиту сброса ДТБ $\tau_{сб1}^{ДТБ}$ и выхода на «безопасную» орбиту $\tau_{без}$ являются

$$p_{\xi}(\gamma_-) - p_{\xi}(\gamma_+) + \lambda_i \frac{\partial r_{\Pi}(\gamma_-)}{\partial \xi(\gamma_-)} = 0,$$

$$\xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z, \quad \gamma = \tau_{сб1}^{ДТБ}, \tau_{без}, \quad i = \text{сб1, без}.$$

Следствиями условий трансверсальности в момент выхода на целевую орбиту $\tau_{ц}$ являются

$$p_{\xi}(\tau_{ц-}) - p_{\xi}(\tau_{ц+}) + \lambda_{дов} \frac{\Delta v_{дов}(\tau_{ц-})}{\partial \xi(\tau_{ц-})} + \lambda_{ц} \frac{\partial \mathcal{A}(\tau_{ц-})}{\partial \xi(\tau_{ц-})} = 0, \quad \xi = x, y, z, v_x, v_y, v_z.$$

Производные функций $r_{\Pi}(\cdot)$ (радиус перигея), $\Delta v_{дов}(\cdot)$ (характеристическая скорость маневров довыведения с целевой орбиты на ГСО), $\mathcal{A}(\cdot)$ (z-компонента вектора Лапласа), входящие в следствия из условий трансверсальности, а также условия трансверсальности в конечный момент времени T и производные в условиях стационарности по фазовым переменным (уравнения Эйлера-Лагранжа) вычисляются при помощи технологии численно-аналитического дифференцирования.

В разделе 5.4 рассматривается структура траектории и численное решение. Структура траектории определяется на основе результатов проведенных ранее исследований в модифицированной импульсной постановке. Основные расчеты проводились при ограничении на характеристическую скорость довыведения с целевой орбиты на ГСО равном 1.5 км/с.

Начальное приближение к значениям фазовых и сопряженных переменных, входящих в вектор параметров пристрелки, выбирается на основе ранее полученного решения в модифицированной импульсной постановке: в моменты включения тяги они соответствуют значениям фазовых и сопряженных переменных до импульсного воздействия, в моменты выключения тяги — значениям фазовых и сопряженных переменных после импульсного воздействия, продолжительность активных участков оценивается исходя из расхода топлива на данное включение двигателя, продолжительность пассивных участков равняется соответствующей продолжительности пассивных участков между импульсными воздействиями. Вначале решается задача с большой ограниченной тягой в первой постановке без учета влияния второй зональной гармоники при

$n = 10$. Далее методом продолжения по параметру (тяговооруженности) получается решение для $n = 0.1$. Переход от задачи в первой постановке к задаче во второй постановке также осуществляется методом продолжения по параметру: соответствующее уравнение из первой постановки задачи умножается на $(1 - \gamma)$, а из второй — на γ , где $\gamma \in [0, 1]$.

В разделе 5.5 представлены четыре траектории перелета КА в задаче с большой ограниченной тягой. В разделе 5.6 представлены выводы данной главы. Решение задачи перелета КА с двигателем большой ограниченной тяги в определенной мере близко к решению в импульсной постановке. Отличие экстремали в случае учета второй зональной гармоники от соответствующей экстремали без учета второй зональной гармоники мало в смысле сходимости использованного метода Ньютона (метод Ньютона сходится за 11 итераций).

В **шестой** главе рассматривается упрощенная модель, в которой направление вектора тяги определяется двумя углами — склонением вектора тяги θ (отсчитывается от плоскости экватора к северному полюсу) и прямого восхождения вектора тяги ϕ (отсчитывается в плоскости экватора от оси Ох в сторону Оу). В разделе 6.1 рассматривается постановка задачи. Предполагается, что на каждом из активных участков углы склонения и прямого восхождения вектора тяги изменяются по линейному закону $\phi(t) = a_k(t - t_k) + b_k$, $\theta(t) = c_k(t - t_k) + d_k$, где a_k , b_k , c_k , d_k — неизвестные параметры, определяющие линейный закон управления углами склонения и прямого восхождения вектора тяги на активном участке и k — индекс (номер) участка. Простое управление делает рассматриваемую задачу оптимизации перелета конечномерной: траектория зависит от конечного числа параметров. Постановка задачи и ее формализация согласованы с соответствующей постановкой и формализацией рассмотренной ранее задачи с большой ограниченной тягой, отличие рассматриваемой задачи заключается в том, что направление тяги задается двумя углами, изменяющимися по линейному закону для каждого из активных участков, а в предыдущей задаче направление тяги могло быть произвольным и определялось на основе принципа максимума Понтрягина. В разделе 6.2 приводится формализация постановки рассматриваемой задачи. Система дифференциальных уравнений управляемого движения центра масс космического аппарата на активном участке:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x, & \dot{y} &= v_y, & \dot{z} &= v_z, \\ \dot{v}_x &= g_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) + P_{\max} \frac{\cos(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m}, \\ \dot{v}_y &= g_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) + P_{\max} \frac{\sin(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m}, \\ \dot{v}_z &= g_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) + P_{\max} \frac{\sin(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m}, \\ \dot{m} &= -\frac{P_{\max}}{c}, & \dot{a}_k &= 0, & \dot{b}_k &= 0, & \dot{c}_k &= 0, & \dot{d}_k &= 0,\end{aligned}$$

Условия стыковки k -го (активного) и $(k-1)$ -го, $(k+1)$ -го (пассивных) участков:

$$\begin{aligned}
t_1^{k-1} - t_0^k &= 0, & t_1^k - t_0^{k+1} &= 0, \\
x(t_1^{k-1}) - x(t_0^k) &= 0, & x(t_1^k) - x(t_0^{k+1}) &= 0, \\
y(t_1^{k-1}) - y(t_0^k) &= 0, & y(t_1^k) - y(t_0^{k+1}) &= 0, \\
z(t_1^{k-1}) - z(t_0^k) &= 0, & z(t_1^k) - z(t_0^{k+1}) &= 0, \\
v_x(t_1^{k-1}) - v_x(t_0^k) &= 0, & v_x(t_1^k) - v_x(t_0^{k+1}) &= 0, \\
v_y(t_1^{k-1}) - v_y(t_0^k) &= 0, & v_y(t_1^k) - v_y(t_0^{k+1}) &= 0, \\
v_z(t_1^{k-1}) - v_z(t_0^k) &= 0, & v_z(t_1^k) - v_z(t_0^{k+1}) &= 0, \\
m(t_1^{k-1}) - m(t_0^k) &= 0, & m(t_1^k) - m(t_0^{k+1}) &= 0.
\end{aligned}$$

Величины $a_k(t_0^k)$, $b_k(t_0^k)$, $c_k(t_0^k)$, $d_k(t_0^k)$ и $a_k(t_1^k)$, $b_k(t_1^k)$, $c_k(t_1^k)$, $d_k(t_1^k)$ не заданы (оптимизируются без дополнительных ограничений), а на $(k-1)$ -м и $(k+1)$ -м пассивных участках таких фазовых переменных нет. Кроме того, в эти моменты могут задаваться дополнительные ограничения на «основные» фазовые переменные (выход на орбиту сброса ДТБ, выход на безопасную орбиту и т.д.). В моменты, соответствующие отстыковки ДТБ и ЦБ РБ, вместо условий непрерывности массы КА в формализацию задачи входят условия на скачок массы.

В разделе 6.3 приводится принцип Лагранжа. В связи с тем, что условия трансверсальности по «основным» переменным остаются неизменными, следствия из этих условий, которые используются в вычислительной схеме метода стрельбы также не меняются.

Существенные изменения произошли в условиях стационарности (раньше они получались как условия оптимальности по управлению): $H(t_1^{k-1}) = H(t_0^k)$, $H(t_1^k) = H(t_0^{k+1})$, а также в условиях трансверсальности по «новым» фазовым переменным: $p_a^k(t_0^k) = 0$, $p_a^k(t_1^k) = 0$, $p_b^k(t_0^k) = 0$, $p_b^k(t_1^k) = 0$, $p_c^k(t_0^k) = 0$, $p_c^k(t_1^k) = 0$, $p_d^k(t_0^k) = 0$, $p_d^k(t_1^k) = 0$.

В моменты включения и выключения двигателя из условия непрерывности «основных» фазовых и сопряженных переменных в случае отсутствия дополнительных ограничений на эти фазовые переменные получаем

$$\begin{aligned}
\chi \equiv & \frac{p_{vx} \cos(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m} + \\
& + \frac{p_{vy} \sin(a_k(t - t_0^k) + b_k) \cos(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m} + \\
& + \frac{p_{vz} \sin(c_k(t - t_0^k) + d_k)}{m} - \frac{p_m}{c} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь χ является аналогом функции переключения из задачи с большой ограниченной тяги.

В разделе 6.4 приводится структура траектории и численное решение. В рассматриваемом случае в отличие от вычислительной схемы метода стрельбы для задачи с большой ограниченной тяги в вектор параметров пристрелки в

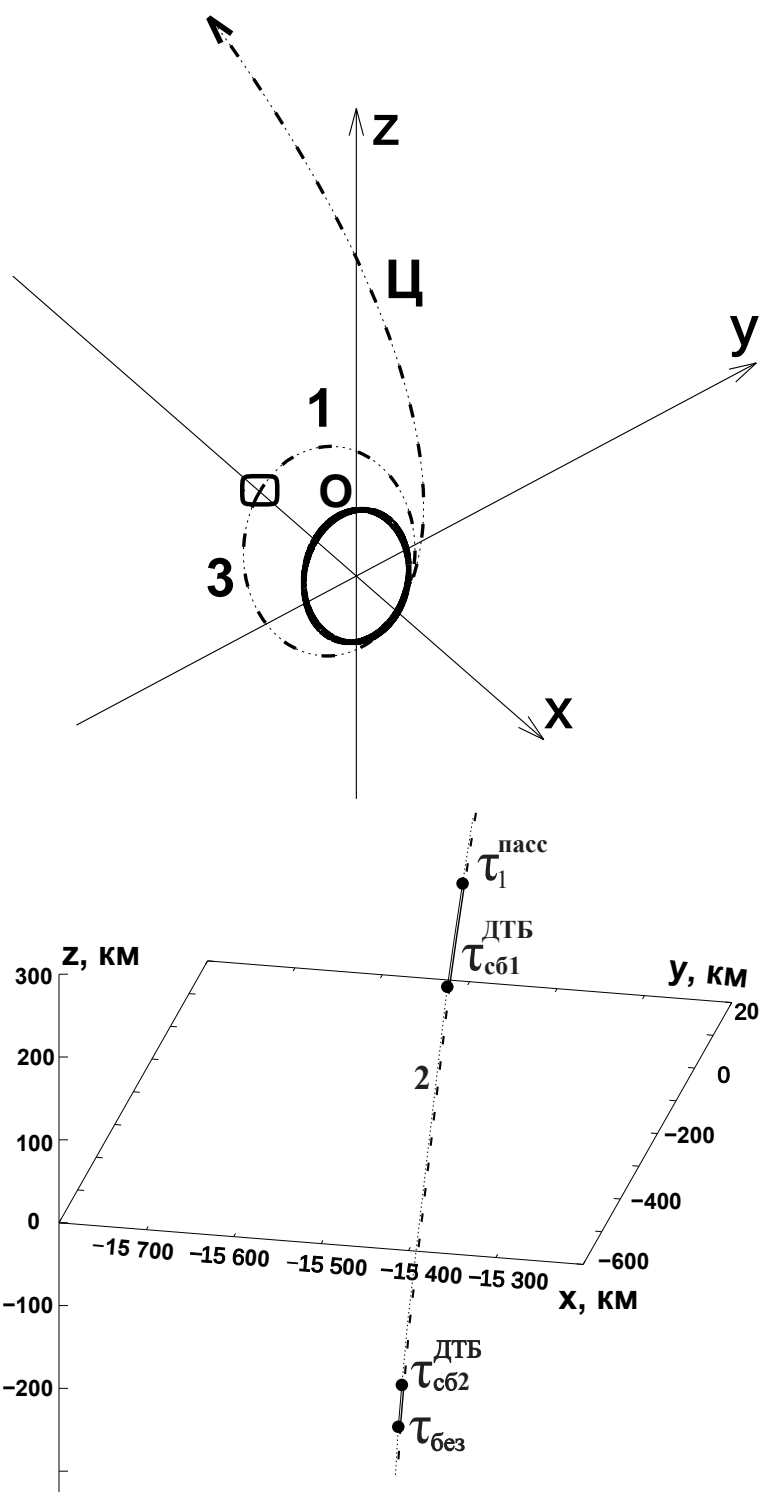


Рис. 4: Траектории перелета КА (пунктирная линия с короткими штрихами — упрощенная модель, пунктирная линия с длинными штрихами — задача с большой ограниченной тягой: О — опорная орбита, $\tau_1^{\text{пасс}}$ — момент окончания первого пассивного участка, $\tau_{\text{сб1}}^{\text{ДТБ}}$ — момент перехода КА, на орбиту касающуюся условной границы атмосферы, $\tau_{\text{сб2}}^{\text{ДТБ}}$ — момент завершения пассивного участка сброса ДТБ, $\tau_{\text{без}}$ — момент выхода КА на «безопасную» орбиту, 1 — первый пассивный участок, 2 — второй пассивный участок (участок сброса ДТБ), 3 — третий пассивный участок, Ц — целевая орбита)

начале каждого активного участка дополнительно входят значения фазовых переменных $a_k(t_0^k), b_k(t_0^k), c_k(t_0^k), d_k(t_0^k)$, а в вектор-функцию невязок дополнительно входят четыре уравнения для сопряженных переменных — равенство нулю $p_a(t_1^k), p_b(t_1^k), p_c(t_1^k), p_d(t_1^k)$ в силу условий трансверсальности в конце каждого активного участка. Значения сопряженных переменных $p_a(t_0^k), p_b(t_0^k), p_c(t_0^k), p_d(t_0^k)$ в начале каждого активного участка задаются равными нулю и не входят в вектор параметров пристрелки.

В разделе 6.5 приводятся результаты — траектория перелета КА. В разделе 6.6 приводятся выводы данной главы. Было проведено сравнение полученного решения с аналогичным решением задачи с большой ограниченной тягой. Отличие по функционалу (обезразмеренной полезной массе) во второй постановке задачи с учетом влияния второй зональной гармонике составляет 0.0001121. На рис. 4 представлены траектории для рассматриваемой задачи (пунктирная линия с короткими штрихами) и для задачи с большой ограниченной тягой (пунктирная линия с длинными штрихами). Из рисунков видно, что данные траектории визуально близки. Экстремали в задаче оптимального управления и в задаче с простой схемой управления на активных участках близки и с точки зрения сходимости метода Ньютона — для получения экстремали в задаче оптимального управления потребовалось 3 итерации метода Ньютона.

Как и в рассмотренной ранее задаче с большой ограниченной тягой включение двигателя для перевода ДТБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, происходит в окрестности апогея оскулирующей эллиптической орбиты первого пассивного участка и включение двигателя для перевода ЦБ РБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы происходит в окрестности апогея целевой орбиты (соответствующей оскулирующей эллиптической орбиты), накладные расходы на сброс ДТБ и ЦБ РБ также оказались малы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучена проблема сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработавших частей космического аппарата в атмосферу Земли на этапе его выведения на целевую орбиту. Проведен анализ построенных траекторий и сравнение полученных результатов с ранее известными для задачи в импульсной постановке без учета сброса отработавших частей космического аппарата в атмосферу.

Основными результатами работы являются:

- 1) определены схемы перелета космического аппарата с малыми накладными расходами на сброс его отработавших частей в атмосферу Земли в импульсной постановке;
- 2) при помощи параметрических исследований для задачи в импульсной постановке показано, что на построенной на основе принципа Лагранжа экстремали достигается локальный максимум полезной массы;
- 3) установлено, что решение задачи с априорным предположением об апси-

дальности импульсных воздействий совпадает с соответствующим решением задачи без априорного предположения об апсидальности импульсных воздействий при неограниченном заранее времени перелета и фазовом ограничении на максимально возможное удаление космического аппарата от Земли;

- 4) на основе методики «лестница задач» решена задача оптимизации траектории выведения космического аппарата, оснащенного двигателем большой ограниченной тяги, с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли на целевую эллиптическую орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока в атмосферу Земли и построены соответствующие экстремали Понтрягина;
- 5) установлено, что решение задачи перелета космического аппарата с двигателем большой ограниченной тяги близко к решению соответствующей задачи в импульсной постановке и накладные расходы на сброс дополнительного топливного бака и центрального блока разгонного блока малы;
- 6) для задачи с большой ограниченной тягой на основе метода продолжения решения по параметру был произведен переход от решения первой постановки задачи (с заданными константами $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.01$) к решению второй (с заданными массовыми характеристиками);
- 7) установлено, что отличие экстремали Понтрягина в случае учета второй зональной гармоники от соответствующей экстремали Понтрягина без учета второй зональной гармоники как для первой, так и для второй постановки задачи с большой ограниченной тягой мало в смысле сходимости метода Ньютона;
- 8) установлено, что решение краевой задачи принципа Лагранжа с простой схемой управления может быть использовано для нахождения экстремали в задаче оптимального управления с большой ограниченной тягой.

Автор выражает благодарность научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Григорьеву Илье Сергеевичу за постановку задачи и внимание к работе; доктору физико-математических наук, профессору Кобелькову Георгию Михайловичу и всем сотрудникам кафедры вычислительной математики за внимание и поддержку; кандидату физико-математических наук, доценту Заплетину Максиму Петровичу и кандидату физико-математических наук Самохину Александру Сергеевичу за проявленный интерес к работе.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация перелета КА со сбросом дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу Земли. // Автоматика и телемеханика. 2023. № 3. С. 22–43. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0005231023030029>.
2. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Задача выведения на целевую орбиту

космического аппарата максимальной массы с использованием двигателя ограниченной тяги и сбросом отделяемых частей средств выведения в атмосферу Земли. // Автоматика и телемеханика. 2024. № 1. С. 21–46. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0005231024010025>.

3. Проскуряков А.И. Простая схема управления в задаче перелета космического аппарата на целевую орбиту со сбросом отделяемых частей средств выведения в атмосферу Земли // Космические исследования. М.: Наука. 2025. Т. 63. № 3. С. 285–293.
4. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на нее с учетом сброса отработавших ступеней в атмосферу // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 4 (88). <https://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-4-1869>.
5. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть I) // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 9 (93). <https://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1917>.
6. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть II) // Инженерный журнал: наука и инновации. 2019. № 10 (94). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1925>.
7. Проскуряков А.И. Траектория перелета космического аппарата с опорной орбиты на целевую со сбросом дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу // Сборник материалов Евразийского молодежного форума, посвященного 20-летию юбилею Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова. Нур-Султан. Издательство Казахстанского филиала МГУ имени М.В.Ломоносова. 2021. С. 34–35.
8. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Задача оптимизации траектории перелета космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги со сбросом дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу // XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2021. Т. 1. С. 480–481.
9. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация траектории перелета КА с опорной орбиты на целевую с учетом сброса дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу Земли // Ломоносовские чтения — 2021. Секция механики, М.: Издательство Московского университета. 2021. С. 74–75.
10. Проскуряков А.И. Оптимизации траектории выведения космического аппарата на целевую орбиту со сбросом дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу // Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов — 2020». М.: Издательство МАКС Пресс. 2020.

С. 1.

11. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Простая схема в задаче перелета КА на целевую орбиту с ограниченной тягой и сбросом ступеней в атмосферу // Ломоносовские чтения — 2020. Секция механики. М.: Издательство Московского университета. 2020. С. 76.
12. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Задача с ограниченной тягой для траектории перелета КА с опорной орбиты на целевую эллиптическую с заданным импульсом довыведения до геостационарной // XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2020. Т. 1. С. 274–275.
13. Proskuryakov A.I. Comparison of apsidal and non-apsidal impulse trajectories of the spacecraft launching to the target orbit, taking into account the reset of stages into the atmosphere. AIP Conference Proceedings 2171, 2019. DOI: 10.1063/1.5133206.
14. Проскуряков А.И. Импульсный перелет на целевую орбиту со сбросом ступеней в атмосферу и с учетом фазового ограничения // Материалы 54-х научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга. Издательство Эйдос. 2019. Т. 2. С. 18–20.
15. Проскуряков А.И. Сравнение апсидальных и неапсидальных импульсных траекторий выведения КА на целевую орбиту с учетом сброса ступеней в атмосферу // XLIII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2019. Т. 1. С. 111.
16. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация целевой орбиты и анализ апсидальных импульсных траекторий в задаче перелета КА на целевую орбиту со сбросом отработавших ступеней в атмосферу Земли // Материалы 53-х научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга. Издательство Эйдос. 2018. С. 161–162.
17. Проскуряков А.И. Задача оптимизации траектории выведения космического аппарата с опорной орбиты на целевую // II Международная научная конференция молодых исследователей, посвященная 95-й годовщине общенационального лидера Азербайджана Гейдара Алиева. Баку. Издательство Бакинского инженерного университета. 2018. Т. 1. С. 24–25.
18. Проскуряков А.И. Оптимизация целевой орбиты и траектории выведения КА с учетом сброса ступеней в атмосферу // Гагаринские чтения — 2018: XLIV Международная молодежная научная конференция. М.: Издательство МАИ. 2018. Т. 2. С. 343.
19. Проскуряков А.И. Оптимизация целевой орбиты и траектории выведения КА на целевую орбиту с учетом возвращения отработавших ступеней в атмосферу Земли. Материалы международного молодежного научного фору-

- ма «Ломоносов — 2018». М.: Издательство МАКС Пресс. 2018. С. 1.
20. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация элементов целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на нее с учетом сброса ступеней в атмосферу // Ломоносовские чтения — 2018. Секция механики. М.: Издательство Московского университета. 2018. С. 69.
 21. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Анализ траекторий апсидальных импульсных перелетов КА с опорной орбиты на целевую // XLII Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2018. С. 237–238.
 22. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация перелета космического аппарата на целевую эллиптическую орбиту со сбросом ступеней в атмосферу Земли // Материалы 52-х научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга. Издательство Эйдос. 2017. С. 181.
 23. Проскуряков А.И. Об одной задаче сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработанных ступеней в атмосферу Земли // Материалы международного молодежного научного форума «Ломоносов — 2017». М.: Издательство МАКС Пресс. 2017. С. 1.
 24. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация перелета КА с низкой круговой орбиты ИСЗ со сбросом отработанных ступеней в атмосферу // Ломоносовские чтения — 2017. Секция механики. М.: Издательство Московского университета. 2017. С. 73.
 25. Проскуряков А.И. Гомановские и биэллиптические схемы в задаче перелета КА с низкой круговой орбиты со сбросом ступеней в атмосферу // Гагаринские чтения — 2017: XLIII Международная молодежная научная конференция. М.: Издательство МАИ. 2017. С. 1062–1063.
 26. Проскуряков А.И. Оптимизация апсидального выведения КА с опорной орбиты на геостационар со сбросом ступеней в атмосферу // II научно-практическая конференция с международным участием «Творческий потенциал молодежи в решении авиакосмических проблем». Баку. Издательство Центр полиграфии Национальной академии авиации. 2017. С. 22–23.
 27. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Оптимизация апсидального импульсного перелета КА на геостационар со сбросом ступеней в атмосферу // XLI Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых — пионеров освоения космического пространства. М.: Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2017. С. 103.
 28. Проскуряков А.И., Григорьев И.С. Упрощенная оптимизация выведения космического аппарата с возвращением разгонного блока в атмосферу Земли // Материалы 51-х научных чтений памяти К.Э. Циолковского. Калуга. Издательство Эйдос. 2016. С. 142–143.

ПРОСКУРЯКОВ АЛЕКСАНДР ИГОРЕВИЧ

**ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИИ ВЫВЕДЕНИЯ
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ЦЕЛЕВУЮ ОРБИТУ СО
СБРОСОМ ОТДЕЛЯЕМЫХ ЧАСТЕЙ СРЕДСТВ ВЫВЕДЕНИЯ В
АТМОСФЕРУ ЗЕМЛИ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук