

На правах рукописи

Дигилов Александр Вячеславович

**НЕСОВМЕСТИМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В ГИБКИХ ПЛАСТИНАХ.
ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ**

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН).

Научный руководитель: **Лычев Сергей Александрович**
д.ф.-м.н., доцент, в.н.с. лаборатории
моделирования в механике деформируемого
твёрдого тела ИПМех РАН

Официальные оппоненты: **Фрейдин Александр Борисович**
д.ф.-м.н., руководитель подразделения,
г.н.с. лаборатории математических
методов механики материалов ФГБУН
«Институт проблем машиноведения
Российской академии наук»

Айзикович Сергей Михайлович
д.ф.-м.н., с.н.с., заведующий лабораторией
функционально-градиентных и
композиционных материалов ФГБОУ ВО
«Донской государственной технической
университет»

Ведущая организация: **ФГАОУ ВО «Самарский национальный
исследовательский университет имени
академика С.П. Королева»**

Защита диссертации состоится «24» сентября 2026 года в 15 часов на заседании диссертационного совета 24.1.098.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН) по адресу: г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, к. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМех РАН <https://ipmnet.ru/diss/diss2/>

Автореферат разослан « » 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.098.01,
к.ф.-м.н.,

Лямина Е.А.

Общая характеристика работы

В диссертационной работе развиваются теоретические и экспериментальные методы моделирования напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов микроэлектромеханических систем (МЭМС), характерный размер которых – от десятков нанометров до десятков микрон. Механические свойства таких элементов обладают спецификой, характерной для нанометрового масштаба. Это проявляется, в частности, в их высокой гибкости и существенной зависимости эффективной жесткости от собственных (остаточных) напряжений, вызванных несовместными деформациями, которые неизбежно возникают в подобных элементах в силу специфики технологических процессов их изготовления. Учет этих факторов требует привлечения методов нелинейной теории упругости и дифференциально-геометрических подходов к описанию несовместных деформаций.

Теория гибких пластин, в рамках которой перемещения точек поверхности осреднения полагаются конечными, имеет более чем столетнюю историю. Она развивалась в трудах многих отечественных и зарубежных механиков, таких как С. П. Тимошенко, Д. Ю. Панов, П. Ф. Папкович, В. И. Феодосьев, Л. Е. Андреева, Э. И. Григолюк, И. И. Ворович, Х. М. Муштари, В. З. Власов, Н. Ф. Морозов, М. С. Корнишин, Ф. С. Исанбаева, А. С. Вольмир, A. Nadai, R. Kaiser, S. Way, S. Levy, C.-T. Wang, K. Friedrichs, J. Stoker, J. Green, R. Southwell, L. Bauer, E. Reiss, H. Berger, N. Yamaki, M. Berger, P. Fife, G. Knightly, I. Hlavacek, J. Naumann, T. Miyoshi, S. Antman, P. Ciarlet и R. Van Gorder. Тем не менее, многие вопросы эффективного вычислительного моделирования остаются открытыми. В первую очередь, это связано со сложностью общих постановок и представлений решений задач нелинейной теории упругости. Даже использование метода конечных элементов приводит к известным вычислительным проблемам, вызванным плохой обусловленностью численных схем в силу малого параметра – отношения толщины к характерному размеру, который для элементов МЭМС может достигать величин $10^{-3} - 10^{-6}$.

Эта проблема может быть решена в духе классической теории пластин – путем построения асимптотических представлений для уравнений и краевых условий нелинейных задач, позволяющих учесть малый параметр на уровне аналитических предварительных преобразований, а на уровне численной схемы работать уже с уравнениями без малого параметра. Однако такой подход в нелинейном случае приводит к сложным и запутанным формулировкам. Например, классические нелинейные уравнения Феппля – фон Кармана, сформулированные в начале XX века, получили строгое математическое обоснование относительно недавно, за счет значительных усложнений исходных положений и гипотез, которые с общих позиций оказываются асимптотически непоследовательными. В связи с этим использование уравнений Феппля – фон Кармана не вызывает сомнений лишь в случаях, когда физико-механические параметры и геометрические размеры оказываются в областях изменения, проверенных мно-

голетними расчетами и экспериментальными исследованиями. Такие области соответствуют, например, конструкционным элементам машин и механизмов классического размера.

На сегодняшний день для элементов МЭМС отсутствуют столь обширное описание результатов экспериментальных исследований и опыта применения, поэтому при теоретическом моделировании предпочтительно использовать теории с минимальным набором упрощающих предположений. А именно, опираясь на базовые нелинейные уравнения трехмерной теории, получать их асимптотические приближения на основе строгих математических построений, не используя эвристические предположения. Кроме того, учет несовместных деформаций требует асимптотически последовательного вывода уравнений и краевых условий. По этой причине в настоящей работе развивается подход, основанный на представлении деформирования в терминах уравнений поля и законов сохранения, получаемых из условий стационарности действия и его инвариантности относительно стандартных групп преобразований координат и времени. При этом мера несовместности конечных деформаций – поле импланта – естественным образом входит в список аргументов плотности действия как тензорная скрытая переменная состояния.

Актуальность. В настоящее время упругие элементы нанометрового масштаба используются практически во всех микроэлектромеханических системах. Между тем в широкой инженерной практике приемлемые методы анализа напряженно-деформированного состояния таких элементов практически отсутствуют. Существующие решения представляют собой либо простые аппроксимации, которые могут приводить к значительным погрешностям (например, формула Стоуни), либо предполагают использование различных конечно-элементных схем. Последние часто оказываются неэффективными для анализа деформаций пластинчатых элементов ввиду того, что у пластин один пространственный параметр может быть на порядок меньше двух других и поэтому для построения невырожденной конечно-элементной сетки приходится значительно уменьшать размеры элементов, тем самым неоправданно увеличивая их число. Кроме того, особенности технологического процесса производства элементов МЭМС приводят к тому, что в них неизбежно присутствуют несовместные деформации, оказывающие серьезно влияние на упругий отклик элемента. В настоящее время этот факт редко учитывается при проектировании МЭМС, что зачастую приводит к неоптимальным инженерным решениям.

Цель работы заключается в развитии методов математического моделирования конечных несовместных деформаций в гибких элементах МЭМС и их экспериментальной валидации. Она предполагает решение следующих задач:

1. Вывод уравнений поля, законов сохранения, краевых и начальных условий для тонких пластин, учитывающих их значительную гибкость и несовместные деформации, возникающие при их изготовлении;
2. Развитие алгоритмов решения краевых задач для гибких пластин;

3. Развитие методов экспериментального исследования деформаций элементов нанометрового масштаба;
4. Экспериментальная валидация предлагаемых теоретических моделей конечного изгиба тонких пластин.

Методы исследования. Для вывода уравнений движений, краевых условий и законов сохранения используется принцип стационарности действия и теорема Нетер. Для формулировки плотности действия в специфичной для развиваемой теории форме, применяются положения и структуры дифференциально-геометрической теории конечных несовместных деформаций, в частности, гипотеза локальной разгрузки и поле импланта как универсальная мера несовместности. Для решения нелинейных краевых задач развит метод последовательных приближений и алгоритмы его регуляризации, а также нелинейное обобщения метода Галеркина. Экспериментальное исследование проводилось методом голографической интерферометрии с помощью классической внеосевой схемы Лейта – Упатниекса.

Положения, выносимые на защиту:

1. Новые уравнения для конечных несовместных деформаций гибких пластин и упорядоченная по мере усложнения последовательность их асимптотических представлений.
2. Оценка областей применения асимптотических представлений в зависимости от двух малых параметров – относительной толщины и отношения толщины к прогибу.
3. Итерационная процедура построения решения нелинейной задачи о конечном деформировании круглой пластины для произвольного нагружения с учетом несовместности деформаций.
4. Решение нелинейной задачи о деформировании прямоугольной пластины для произвольного нагружения с учетом двух вариантов краевых условий и несовместности деформаций.
5. Экспериментальная валидация представленных решений.

Научная новизна работы. Нелинейные уравнения движения и законы сохранения, полученные в Главе 1 из общих вариационных принципов, учитывают несовместные конечные деформации за счет двух дополнительных полей имплантов, ассоциированных с классической и микроморфной дисторсиями. Уравнения в такой форме для гибких тонкостенных элементов получены впервые. В Главе 2 предлагаются новые методы регуляризации итерационной процедуры построения решения нелинейной краевой задачи для гибкой пластины и построено новое замкнутое решение нелинейной задачи для жестко закрепленной прямоугольной пластины, удовлетворяющие полным условиям жесткого

закрепления. Представленные решения краевых задач с учетом несовместных деформаций также являются оригинальными.

Практическая значимость исследования. Использование развитых в ходе выполнения диссертационной работы алгоритмов позволило согласовать теоретические предсказания с результатами инструментальных измерений изгиба круглых мембран, произведенных сотрудниками Московского института электронной техники в ходе разработки датчиков давления и оптических элементов динамической маски рентгенлиитографа. Результаты исследований были использованы в проектах РНФ и министерства науки и высшего образования.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математического вывода из наиболее общих физических принципов. Достоверность построенных решений подтверждается сравнением с известными приближенными решениями и экспериментальными данными, полученными методом голографической интерферометрии. Адекватность оценок сходимости представленных итерационных решений показана на серии вычислительных экспериментов.

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования были доложены на международных и всероссийских научных конференциях:

- XLIX International Summer School – Conference Advanced Problems in Mechanic. June 21-25, 2001. Устный доклад “Nonlinear boundary value problem for circular elastic plate”. Авторы: S. A. Lychev и A. V. Digilov.
- XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, 21-25 августа, 2023 года. Стендовый доклад “Уточненная модель тонких пластин микроэлектромеханических систем”. Авторы: С. А. Лычев, А. В. Дигилов и Н. А. Дюжев.
- XXXI Всероссийская межвузовская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Микроэлектроника и информатика – 2024», 25-26 декабря, 2024 года. Устный доклад “Уточненная модель тонких пластин микроэлектромеханических систем”. Авторы: С. А. Лычев и А. В. Дигилов.
- 51 школа-конференция “Актуальные проблемы механики” памяти Д. А. Индейцева, 19-21 июня, 2024 года. Устный доклад “Изгиб толстых, тонких и ультратонких квадратных пластин”. Автор: А. В. Дигилов.

Также результаты исследования представлены в докладах, принятых к участию в 53 школе-конференции “Актуальные проблемы механики”, 22-26 июня, 2026 года:

- “Решение уравнений Фешля – фон Кармана в круговой области с учетом несовместных деформаций”. Автор: А. В. Дигилов;
- Стендовый доклад “Влияние деформируемости краев на изгиб прямоугольных пластин Фешля – фон Кармана”. Авторы: А. В. Дигилов, С. А. Лычев.

Публикации Основные результаты диссертационной работы были изложены в 8 работах, 4 из которых [1–4] опубликованы в рецензируемых научных изданиях, входящих в список ВАК и имеющих категорию К1, а прочие [5–8] – в издании, индексируемом в международной базе математических журналов Zentralblatt MATH.

Личный вклад автора. Автор принимал участие в выводе всех теоретических результатов, представленных в диссертационной работе и статьях [1–8]. Численные алгоритмы решений, представленные в Главе 2 и статьях [3, 6, 7], разработаны автором. Валидация теоретических моделей по результатам экспериментальных исследований, представленных в Главе 3 и в работе [3], также проведена автором.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из трех глав, введения, заключения и 5 приложений. Объем работы составляет 243 страницы, 40 рисунков и 23 таблицы. Список литературы содержит 229 позиций.

Содержание работы

Во **введении** диссертационной работы сформулированы цели и задачи исследования, а также представлен краткий обзор работ, отражающих исторический путь развития теории пластин и ее современное состояние. Подробно рассмотрены оригинальные работы родоначальников теории пластин таких как, Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж, С. Жермен, С. Д. Пуассон, Л. О. Коши и Г. Кирхгоф. Показано, что, несмотря на то, что уровень математической строгости в их работах далек от принятого в настоящее время, их рассуждения во многом предвосхищали идеи, развиваемые в современных теориях. Проведен анализ современных работ в этой области.

Первая глава посвящена выводу уравнений конечного изгиба тонких пластин с несовместными деформациями. Уравнения изгиба представлены как асимптотические разложения уравнений трехмерной теории упругости по двум малым параметрам, один из которых ассоциирован с толщиной пластины, а другой – с абсолютной величиной ее деформаций. Уравнения для трехмерного случая получены из принципа наименьшего действия и вариационных симметрий. Для учета несовместных деформаций к аргументам лагранжиана добавлено тензорное поле импланта, характеризующее локальную деформацию, трансформирующую элементарный объем актуальной формы тела в ненапряженное состояние.

В **разделе 1.1** приведен вывод уравнений поля и законов сохранения трехмерного тела с несовместными деформациями. Для математической формализации тела с непрерывно распределенными несовместными деформациями используется геометрический формализм, разработанный для описания полей распределенных дефектов в работах К. Кондо, Е. Кренера, В. Нолла и других исследователей. В рамках этого формализма тело отождествляется с абстрактным материальным многообразием \mathcal{B} , не оснащенным никакой геометрической

суперструктурой и характеризующим лишь топологию тела. Геометрические образы \mathcal{B} задаются *конфигурациями* – вложениями $\varkappa : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{E}$, где \mathbb{E} – физическое трехмерное пространство с евклидовой геометрией. При этом *деформация* тела γ , т. е. отображение одной формы в другую представляется композицией:

$$\gamma = \varkappa_{t_2} \circ \varkappa_{t_1}^{-1} : \mathcal{S}_{t_1} \rightarrow \mathcal{S}_{t_2}.$$

Важно подчеркнуть, что деформация γ определяется *относительно* некоторой формы \mathcal{S}_{t_1} , которую обычно называют отсчетной и обозначают \mathcal{S}_R . Этот факт оказывается в тени, когда форма \mathcal{S}_R глобально свободна от напряжений, что обычно и предполагается в классической нелинейной теории упругости. Однако в случае несовместных деформаций такой формы не существует, и упругий отклик характеризует *парциальное* напряженное состояние поверх некоторого начального, записанного в \mathcal{S}_R локально.

Для характеристики полного напряженного состояния относительно абстрактного ненапряженного состояния принимается дополнительная конституционная гипотеза – *гипотеза локальной разгрузки*, сформулированная С. А. Лычевым. Согласно этой гипотезе, инфинитезимальная окрестность любой материальной точки, принадлежащей телу, может быть преобразована в ненапряженное состояние некоторой деформацией γ_p формы \mathcal{S}_R (своей для каждой точки). Таким образом, вместо одной ненапряженной отсчетной формы вводится континуальное семейство локально ненапряженных отсчетных форм, получаемых из \mathcal{S}_R семейством локально разгружающих деформаций.

Для простого материала вместо этого семейства достаточно рассмотреть семейство локальных линейных отображений (однородных деформаций). Тогда если предположить, что разгружающие линейные отображения непрерывно меняются от точки к точке, то можно ввести так называемое поле импланта \mathfrak{K} (Ж. Можен), задающее отображение, трансформирующее элементарные объемы абстрактной ненапряженной формы в отсчетную (напряженную). В этом случае, локальное напряженное состояние тела – локальный отклик – полностью определяется некоторым функционалом $\mathfrak{K}(\mathbf{F}_{\text{tot}})$, где \mathbf{F}_{tot} – это композиция \mathfrak{K} и градиента деформации γ , обозначенного символом \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F} \cdot \mathfrak{K}.$$

Таким образом, вывод уравнений поля для тела из гиперупругого материала производится в рамках принятого в нелинейной теории упругости принципа наименьшего действия:

$$\delta \mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{F} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{C}) dV dt,$$

с точностью до замены тензора Коши – Грина \mathbf{C} , ассоциированного с γ , в аргументах лагранжиана на полный тензор \mathbf{C}_{tot} :

$$\mathbf{C}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_{\text{tot}}^{\text{T}} \cdot \mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathfrak{K}^{\text{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{\text{T}} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}^{\text{T}} + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\text{T}} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathfrak{K},$$

где \mathbf{u} – поле перемещений, ассоциированное с γ , а \mathbf{I} – единичный тензор.

Так как поле импланта полагается заданным, то при стандартном выводе, когда варьируются только поля при фиксированных координатах, принцип наименьшего действия приводит к хорошо известным уравнениям поля, естественным краевым условиям и начальным условиям:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right)^{\text{T}} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{u} \Big|_{\partial \Omega_1} = \mathbf{0}, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right)^{\text{T}} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial \Omega_2} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \Big|_{t=t_1} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \Big|_{t=t_2} = \mathbf{0},$$

где $\partial \Omega_1$, $\partial \Omega_2$ – участки границы тела, объединение которых составляет полную границу \mathcal{B} . Полученные уравнения по форме полностью совпадают с аналогичными уравнениями для тела без несовместных деформаций, а влияние импланта “закодировано” в явной форме лагранжиана.

Несколько иначе обстоит дело с материальными законами сохранения, которые получаются из расширенной вариационной формулировки, включающей анализ нетеровых симметрий, где рассматриваются полные вариации координат, времени и полей:

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} - \dot{\mathfrak{P}} = \mathfrak{f}, \quad \nabla \cdot \mathfrak{U} - \dot{\mathfrak{H}} = \mathfrak{d}.$$

Здесь \mathfrak{S} – тензор напряжений Эшелби, \mathfrak{P} – канонический импульс, \mathfrak{f} – конфигурационные силы (силы Эшелби), \mathfrak{H} – плотность гамильтониана, \mathfrak{U} – вектор Умова – Пойнтинга и \mathfrak{d} – диссипативные сил:

$$\mathfrak{S} = \mathcal{L} \mathbf{I} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \mathfrak{P} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad \mathfrak{f} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}},$$

$$\mathfrak{U} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right)^{\text{T}} \cdot \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathfrak{H} = \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathfrak{d} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}.$$

Левые части здесь имеют такой же вид как и для случая без несовместных деформаций, однако в правых частях появились новые слагаемые, определяющие нетривиальное самонапряженное состояние, вызванное наличием несовместных деформаций и их эволюцией, т. е. наличием неоднородного поля импланта \mathfrak{K} и его возможной эволюцией во времени.

Уравнения поля и законы сохранения нелинейной теории упругости в общем случае довольно сложны. Они допускают аналитические или полуаналитические решения лишь в небольшом числе частных случаев. Поэтому обычно работают не с полными уравнениями, а с их некоторыми асимптотическими приближениями, полученными из предположений о малости деформаций. Однако погрешность редуцированных уравнений часто не оценивается. В **разделе 1.2** приведен возможный алгоритм построения семейства приближенных уравнений и оценки их погрешности, протестированный на примере тела из материала Муни – Ривлина, испытывающего равномерное двухосное растяжение.

Идея построения семейства приближенных уравнений состоит в разложении функции упругого потенциала \mathcal{W} в ряд по малому параметру ε , ассоциированному с нормой тензора градиента перемещений из отсчетной формы в актуальную:

$$\varepsilon = \|\nabla \mathbf{u}\| = \sqrt{\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}}. \quad \nabla \mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} := \frac{1}{\varepsilon} \nabla \mathbf{u}.$$

Это можно сделать, представив упругий потенциал как полиномиальную функцию инвариантов полного тензора Коши – Грина (при необходимости разложив нелинейные слагаемые в ряды Тейлора):

$$I_1 = \mathbf{C}_{\text{tot}} : \mathbf{I}, \quad I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \mathbf{C}_{\text{tot}}^2 : \mathbf{I}), \quad I_3 = \frac{1}{3} (\mathbf{C}_{\text{tot}}^3 : \mathbf{I} - I_1^3 + 3I_1 I_2),$$

которые, в свою очередь, представляются как конечные многочлены от ε . Аналогичную процедуру можно проделать для первого тензора напряжений Пиола, выразив его через \mathcal{W} по формуле Дойля – Эриксона:

$$\mathbf{P}^T = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \nabla \mathbf{u}} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{D}} = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial I_s} \frac{\partial I_s}{\partial \mathbf{D}},$$

Таким образом, функция потенциальной энергии и первый тензор Пиола сводятся к степенным рядам (конечным или бесконечным) по ε . Такое представление позволяет явно оценить влияние старших членов, отвечающих за нелинейный отклик. Для примера в работе рассматривается однородная двухосная деформация для материала Муни – Ривлина. Градиент деформации задается параметрически в виде:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix},$$

где A и B – варьируемые параметры. В работе определены области изменения параметров A, B , в которых асимптотические формулы для потенциальной энергии и девиатора первого тензора Пиола отличаются от полных выражений не более чем на 5%. На Рисунке 1 приведены соответствующие диаграммы (параметры закона Муни – Ривлина приняты по справочной литературе как для алюминия). По осям отложены параметры A и B , а цветом обозначены области, в которых асимптотика отличается от точного значения не более чем на 5%.

Для вывода уравнений изгиба пластин, полученные нелинейные уравнения (полные или упрощенные) необходимо редуцировать по малому параметру, ассоциированному с толщиной. Принципы, на которых такая редукция может быть построена, рассмотрены в **разделе 1.3**. Прежде всего накладываются ограничения на допустимые формы тела, которые позволяют формализовать понятие пластины. Так, под пластиной понимается тело \mathcal{B} , все допустимые формы которого удовлетворяют условию: граница формы может быть разбита на две части, $\partial \mathcal{S} = \Pi_1 \cup \Pi_2$, такие, что существует поверхность ω , и для каждой

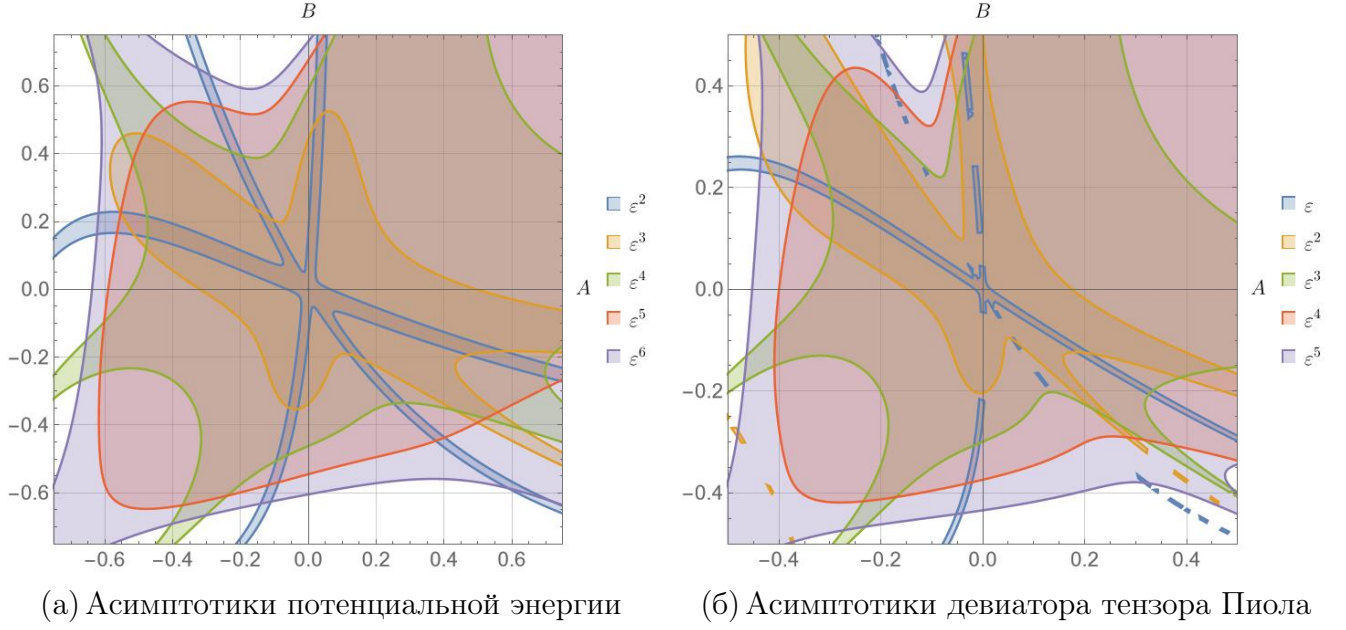


Рисунок 1. Области пятипроцентной точности

точки A на Π_2 существует шар содержащий эту точку, с центром на ω , радиус которого r_A много меньше радиуса R сферы, описанной около всей формы \mathcal{S} .

Считая, что контур Γ полностью лежит ω , а Π_1 состоит из одной поверхности без самопересечения, отсчетная форма \mathcal{S}_R определяется координатным способом путем расширения криволинейной сетки (ρ^1, ρ^2) , заданной на поверхность приведения ω :

$$\mathcal{S}_R = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = O + x^1(\rho^1, \rho^2) \mathbf{i} + x^2(\rho^1, \rho^2) \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (\rho^1, \rho^2, z) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

В силу принятого ограничения, координата z может считаться малым параметром в любой из форм. Следовательно, поле перемещений можно представить в форме степенного ряда:

$$\mathbf{u}(\rho^1, \rho^2, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{u}_n(\rho^1, \rho^2),$$

коэффициенты которого могут быть (в силу теоремы Лауричелла) определены как производные поля \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \mathbf{u}(\rho^1, \rho^2, z) \Big|_{z=0}.$$

Таким образом, вместо трехмерной задачи относительно \mathbf{u} , можно рассматривать более простую двумерную задачу относительно последовательности неизвестных \mathbf{u}_n . В этом случае градиент деформации может быть представлен в терминах \mathbf{u}_n :

$$\nabla \mathbf{u} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \nabla_{\omega} \mathbf{u}_n + \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{k} = \nabla_{\omega} \mathbf{u}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} (z \nabla_{\omega} \mathbf{u}_n + n \mathbf{u}_n \otimes \mathbf{k}),$$

где ∇ – стандартный оператор Гамильтона, а ∇_ω – его двумерный аналог, заданный на ω .

Первая асимптотика имеет вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + z\mathbf{u}_1 + \mathbf{o}(z), \quad \nabla\mathbf{u} = \nabla_\omega\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{k} + z(\nabla_\omega\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{k}) + \mathbf{o}(z).$$

Присутствие вторых производных \mathbf{u}_2 в выражении для градиента деформации асимптотически согласовано, но оно приводит к расхождению с классическими представлениями теории пластин. Для того чтобы избежать этого можно осуществить асимптотически непоследовательную редукцию, директивно отбросив это слагаемое (в духе вывода, приведенного в **разделе 1.5**), или поменять взгляд на способ построения асимптотики, рассматривая ее как точное выражение деформации для двумерного континуума Коссера.

Последний подход рассмотрен в **разделе 1.4**. В его основе лежит идея разбиения полного поля перемещений на поле перемещений точек ω и независимое тензорное поле поворотов \mathbf{H} :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{H} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{u}_0 + \|\mathbf{d}\| \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|} = \mathbf{u}_0 + z\mathbf{u}_1, \quad z := \|\mathbf{d}\|, \quad \mathbf{u}_1 := \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|}.$$

Дополнительные вращательные степени свободы могут быть интерпретированы либо как внутренние деформации, например, микродеформации отдельных зерен в поликристаллическом твердом теле, либо как внешние деформации, связанные с изгибом, которые нельзя непосредственно наблюдать в рамках двумерной геометрии поверхности приведения.

Для двумерного континуума Коссера действие \mathcal{J}_ω определенное на ω записывается следующим образом:

$$\mathcal{J}_\omega = \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\omega} \mathcal{L}_\omega(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{u}, \mathbf{H}, \nabla_\omega\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \nabla_\omega\mathbf{H}, \dot{\mathbf{H}}) \sqrt{g} d\rho^1 d\rho^2 dt,$$

где $\mathcal{L}_\omega(\dots)$ – плотность действия по отношению к элементу площади $d\omega$ в отсчетной (самонапряженной) форме, $\boldsymbol{\rho}$ – пара поверхностных координат материальной точки на ω , \sqrt{g} – якобиан преобразования.

В силу того, что \mathbf{H} – тензор поворота, он может быть перезаписан через сопутствующий вектор $\boldsymbol{\theta}$ с помощью формулы Родрига:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4 + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}} [(4 - \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta} - 4\mathbf{I} \times \boldsymbol{\theta}].$$

Такое представление позволяет получить два аналогичных набора уравнений

поля, естественных краевых условий и начальных условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial \mathbf{u}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial \dot{\mathbf{u}}} - \nabla_\omega \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial \nabla_\omega \mathbf{u}} \right)^\top &= 0, & \frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial \boldsymbol{\theta}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial \dot{\boldsymbol{\theta}}} - \nabla_\omega \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial \nabla_\omega \boldsymbol{\theta}} \right)^\top &= 0, \\ \mathbf{u} \Big|_{\Gamma_1} &= \mathbf{0}, & \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial \nabla_\omega \mathbf{u}} \right)^\top \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_2} &= \mathbf{0}, & \mathbf{u} \Big|_{t=t_1} &= \mathbf{0}, & \mathbf{u} \Big|_{t=t_2} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\theta} \Big|_{\Gamma_1} &= \mathbf{0}, & \left(\frac{\partial \mathcal{L}_\omega}{\partial \nabla_\omega \boldsymbol{\theta}} \right)^\top \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_2} &= \mathbf{0}, & \boldsymbol{\theta} \Big|_{t=t_1} &= \mathbf{0}, & \boldsymbol{\theta} \Big|_{t=t_2} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Такая форма отражает характер модели первого порядка и структуру совокупности полей, однако она записывается через плотность действия в самонапряженной форме, которую необходимо определять дополнительно.

Более удобная форма получается если перейти к альтернативным мерам деформации \mathbf{E} и \mathbf{K} через отношения:

$$\mathbf{E} = \mathbf{H}^\top \cdot \nabla_\omega \mathbf{u}, \quad \mathbf{I} \times \mathbf{K} = \mathbf{H}^\top \cdot \nabla_\omega \mathbf{H}.$$

В этом случае можно перейти к лагранжиану в ненапряженной форме $\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega 0}$, явно вводя в его аргументы два поля имплантов:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega \left(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \nabla_\omega \mathbf{u}, \nabla_\omega \boldsymbol{\theta} \right) &= \widetilde{\mathcal{L}}_\omega \left(\boldsymbol{\rho}, t, \mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) \right) = \\ &= \widetilde{\mathcal{L}}_{\omega 0} \left(\boldsymbol{\rho}, t, \mathfrak{K}^{-1} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathfrak{K}^{-1}, \mathfrak{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathfrak{K}^{-1} \right). \end{aligned}$$

Здесь \mathfrak{K} – локальная двумерная деформация (в общем несовместная), определенная аналогично случаю трехмерного тела выше, а \mathfrak{K} – локальное ортогональное преобразование, которое приводит нормали элементарных площадок в однородное состояние. Удобство такого представления заключается в том, что именно $\widetilde{\mathcal{L}}_{\omega 0}(\dots)$ содержит исходную информацию о физико-механических свойствах материала, которая может быть получена в результате испытаний стандартных образцов.

Физический смысл двух полей имплантов иллюстрируется на Рисунке 2. На нем показано, что для сборки набора геометрически несовместимых форм типа Коссера необходимо согласовать не только занимаемые ими геометрические области, но и ориентацию их волокон. Этот факт наглядно подчеркивает необходимость двух полей имплантатов.

Описанный подход удобен для общих построений, однако на практике идентифицировать два поля имплантов весьма затруднительно. Поэтому для практических расчетов целесообразно построить упрощенные аналоги общих уравнений, в которых редукция по толщинному параметру осуществляется на основе подходящей кинематической гипотезы, а по деформационному – из принципа баланса между сложностью итоговых уравнений и их точностью. Хороший пример такого баланса – это нелинейные уравнения Фешля – фон Кармана, однако, перед тем как переходить к расчетам, их требуется обобщить для учета несовместных деформаций. Такое обобщение построено в **разделе 1.5**. (вывод приведен для круглой области).

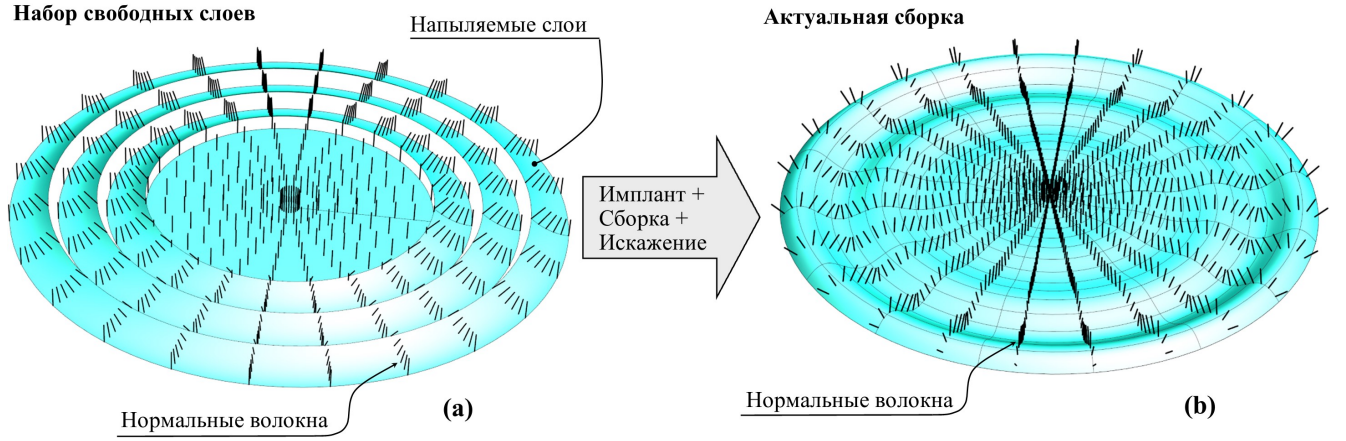


Рисунок 2. Сборка форм типа Коссера: (а) Пластина с набором дополнительных слоев без напряжений; (б) Искраженная форма сборки.

При построении модифицированных уравнений удобно начинать с определения деформации, переводящей напряженную отсчетную форму в актуальную. Ее мера определяется в духе стандартного подхода теории пластин – дифференцированием директивно задаваемого векторного поля перемещений:

$$\mathbf{u} = \left(u - z \frac{\partial w}{\partial r} \right) \mathbf{e}^r + r \left(v - \frac{z}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}^\varphi + w \mathbf{e}^z,$$

где u , v , w – радиальные, окружные и осевые перемещения точек срединной плоскости пластины, а $\{\mathbf{e}^r, \mathbf{e}^\varphi, \mathbf{e}^z\}$ – кобазис цилиндрической системы координат. В модели Фешля – фон Кармана используется мера деформации Грина – Сен-Венана \mathbf{E} , редуцированная по z до слагаемых первого порядка, а по ε – второго. Однако порядок по ε слагаемых, ассоциированных с разными компонентами \mathbf{u} , определяется по-разному, как показано в Таблице 1.

Перемещение	Функция	Производная	Вторая производная
u	ε	ε^2	$o(\varepsilon^2)$
v	ε	ε^2	$o(\varepsilon^2)$
w	1	ε	ε^2

Таблица 1. Асимптотические порядки модели Фешля – фон Кармана

Такая редукция приводит к упрощенным (но при этом нелинейным) выражениям компонент тензора Грина – Сен-Венана (не приведенные здесь компоненты определяются из дополнительных гипотез Кирхгофа):

$$\begin{aligned} E_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \\ E_{\varphi\varphi} &= r \left[u + \frac{\partial v}{\partial \varphi} - z \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2, \\ E_{r\varphi} = E_{\varphi r} &= \frac{r}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для того чтобы получить полный тензор Грина – Сен-Венана, необходимо определить явный вид импланта. В общем случае, его следует получать из решения соответствующей эволюционной задачи, однако для теоретических построений можно задать его произвольно. В работе он представляется шаровым тензором:

$$\mathfrak{K} = \left(\sqrt{\mathbf{a}} + \frac{\mathbf{b}}{2\sqrt{\mathbf{a}}} z \right) \mathbf{I},$$

где \mathbf{a} – строго положительная константа, отвечающая за равномерную усадку всей пластины, а \mathbf{b} – произвольная постоянная, ассоциированная с изгибом самонапряженной формы. В этом случае полный тензор Грина – Сен-Венана выражается через \mathbf{E} с точностью до линейных по z слагаемых следующим образом:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}z) \mathbf{E} + \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}z - 1}{2} \mathbf{I}.$$

Дальнейшие преобразования, стандартные для модели Феппля – фон Кармана, приводят к уравнениям, совпадающим по форме с классическими уравнениями:

$$\tilde{D} \nabla^2 \nabla^2 w - hL(\psi, w) = p, \quad \nabla^2 \nabla^2 \psi + \frac{E}{2} L(w, w) = 0.$$

Здесь \tilde{D} – модифицированная цилиндрическая жесткость, $\nabla^2 \nabla^2$ – бигармонический оператор, L – оператор типа Монжа – Ампера, h – толщина пластины, E – модуль Юнга ее материала, p – изгибающая нагрузка, а ψ – функция напряжений Эри. Несмотря на идентичную форму, эти уравнения существенно отличаются от классических заключается тем, что они формулируются относительно функции Эри ψ , содержащей информацию о полном натяжении пластины, в то время как функция Эри стандартных уравнений ϕ описывает лишь парциальное натяжение, возникающее при переходе из отсчетной формы в актуальную.

На практике удобнее работать с функцией ϕ , однако в этом случае в обобщенных уравнениях Феппля – фон Кармана появляются дополнительные слагаемые, обусловленные преднапряженным состоянием пластины:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w - hL(\phi, w) + \frac{\mathbf{b}D}{\mathbf{a}} \left[(\nabla^2 w)^2 - (1 - \nu) L(w, w) \right] - \frac{Eh(\mathbf{a} - 1)}{2\mathbf{a}(1 - \nu)} \nabla^2 w = \frac{p}{\mathbf{a}}, \quad (2)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{E}{2} L(w, w) - \frac{\mathbf{b}Eh^2}{12\mathbf{a}(1 - \nu)} \nabla^2 \nabla^2 w = 0. \quad (3)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость (как в классической модели), ν – коэффициент Пуассона, а ∇^2 – оператор Лапласа в полярных координатах.

Вывод этих уравнений во многом опирается на подход, используемый при выводе классических уравнений Феппля – фон Кармана, тем не менее изложенный выше метод позволяет строить и более экзотические модели. Однако,

повышение точности модели неизбежно приводит к ее усложнению, поэтому в каждом конкретном случае желательно еще до выбора модели понимать какой точности будет достаточно. Так как точность каждой модели определяется ее порядком по двум малым параметрам – толщинному и деформационному, требуемая точность может быть оценена, исходя из толщины рассматриваемой пластины и ее ожидаемой деформации.

Для того чтобы упростить процесс оценки, в работе было проведено исследование областей применимости моделей разных порядков, представленное в **разделе 1.6**. Суть исследования заключалась в сравнении прогнозов разных моделей для одной задачи об изгибе диска, но при разных значениях его толщины и максимального прогиба. Рассматриваемые модели перечислены в Таблице (2), они выбирались так чтобы как можно подробнее исследовать зависимость от двух малых параметров – от линейной по ε , но полной по z модели трехмерного континуума, до нелинейной модели мембраны Грина – Ривлина – Адкинса.

Модель	Порядок ε	Порядок z	Область применимости
3D линейная упругость	1	∞	Малые деформации плит
Кирхгофа	1*	1*	Малые деформации пластин
Фешля – фон Кармана	2*	1*	Конечные деформации пластин
Грина – Ривлина – Адкинса	∞	0	Тонкие мембраны

Символ * указывает на асимптотически непоследовательную редукцию

Таблица 2. Сравнимые модели

В качестве модельной была выбрана задача об осесимметричном изгибе кругового диска толщиной h и радиуса R , выполненного из упругого материала с модулями μ и λ , боковая поверхность которого жестко закреплена в радиальном направлении, а его основания свободны от напряжений. Нагружение диска реализуется полем внешних объемных сил, однородным всюду, за исключением узкой кольцевой области в окрестности закрепления. В этой области, ширина которой может быть выбрана достаточно малой, объемная нагрузка направлена в противоположную сторону, а ее интенсивность такова, что весь диск в целом оказывается самоуравновешенным:

$$\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z = p_0 \left[1 - \frac{R^2}{R^2 - \delta^2} \theta(r - \delta) \right] \mathbf{e}_z, \quad \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathbf{p} r dr d\varphi dz = \mathbf{0}.$$

Здесь p_0 – постоянная объемная плотность внешнего силового поля, δ – граница кольцевой области, θ – функция Хевисайда. В этой задаче краевые условия и вид нагружения выбирались так, чтобы задача могла быть достаточно просто формализована как для трехмерного, так и для двумерного случаев.

Способы построения решений по моделям Кирхгофа и Грина – Ривлина – Адкинса известны из литературы. Модель Фешля – фон Кармана рассматривалась в упрощенной постановке, в которой натяжение предполагается равномерным по всей плоскости пластины. Эта постановка удобна тем, что она

допускает аналитическое решение, которое также было воспроизведено по литературным источникам. Решение задачи в трехмерной постановке является оригинальным. В его основе лежит тот факт, что однородная система уравнений, соответствующая рассматриваемой краевой задаче:

$$\begin{aligned} \nabla^2 U - \frac{U}{r^2} + k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} \right) &= 0, \\ \nabla^2 W + k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) &= -p, \\ \sigma_{zz}|_{z=0,h} &= (k+1) \frac{\partial W}{\partial z} + (k-1) \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) \Big|_{z=0,h} = 0, \\ \sigma_{rz}|_{z=0,h} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{z=0,h} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=1} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad U|_{r=1} = 0, \end{aligned}$$

допускает разделение переменных. Здесь краевая задача записана в безразмерных переменных, k – константа, выражающаяся через параметры Ламе: $k = \frac{\mu+\lambda}{\mu}$, U и W – безразмерные функции радиальных и осевых перемещений, а σ_{zz} , σ_{rz} – безразмерные компоненты тензора номинальных напряжений.

Выписанный дифференциальный оператор является вырожденным, т. е. обладает нулевым собственным значением, соответствующая собственная функция которого характеризует движение диска как жесткого целого вдоль его оси. Однако, в силу того, что функция нагружения самоуравновешенная, решение задачи существует. Его можно отыскать, представив искомые функции в виде:

$$U = f_1(r) g_1(z), \quad W = f_2(r) g_2(z),$$

при соблюдении условий:

$$f_2' = -\alpha f_1, \quad f_1' + \frac{f_1}{r} = \alpha f_2,$$

где α – некоторая константа. В этом случае соответствующая однородная система уравнений в частных производных распадается на четыре обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} r^2 f_1'' + r f_1' + (\alpha^2 r^2 - 1) f_1 &= 0, & r^2 f_2'' + r f_2' + \alpha^2 r^2 f_2 &= 0, \\ g_1'' - \alpha^2 (k+1) g_1 - \alpha k g_2' &= 0, & (k+1) g_2'' - \alpha^2 g_2 + \alpha k g_1' &= 0, \end{aligned}$$

с независимыми краевыми условиями:

$$(k+1) g_2' + \alpha (k-1) g_1|_{z=0,h} = 0, \quad g_1' - \alpha g_2|_{z=0,h} = 0, \quad f_1|_{r=1} = 0, \quad f_2'|_{r=1} = 0.$$

Множество решений краевой задачи для f_1 , f_2 находится сразу же, оно состоит из вырожденного решения $(0, 1)$ и последовательности пар функций Бесселя первого и нулевого порядка $J_1(\alpha_n r)$, $J_0(\alpha_n r)$, где α_n – нули J_1 . Поскольку оператор, порождаемый уравнениями для f_1 , f_2 и соответствующими краевыми условиями, самосопряженный, то эта система функций составляет базис в

гильбертовом пространстве двухкомпонентных вектор-функций, заданных над интервалом $(0, 1)$. Соответственно, решение исходной неоднородной системы можно отыскать в виде разложений:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} g_{1n}(z) J_1(\alpha_n r), \quad W = g_{20}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n}(z) J_0(\alpha_n r).$$

Неизвестные функции g_{20}, g_{1n}, g_{2n} определяются из неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений коэффициенты, которые можно получить, спроецировав исходные уравнения на базисные подпространства.

Полученные аналитические и численно-аналитические решения позволили провести сравнительный вычислительный анализ с целью выявления областей применимости моделей (упругие параметры соответствуют алюминию). Результаты анализа приведены на рисунках 3 – 5. На приведенных графиках по оси абсцисс откладывается относительная толщина пластины, а по оси ординат – значение давления, необходимое для того, чтобы максимальный прогиб соответствовал заданному (значение последнего указано на рисунках). Такое сравнение позволяет напрямую оценить эффективную жесткость пластин, рассчитанную по различным моделям.

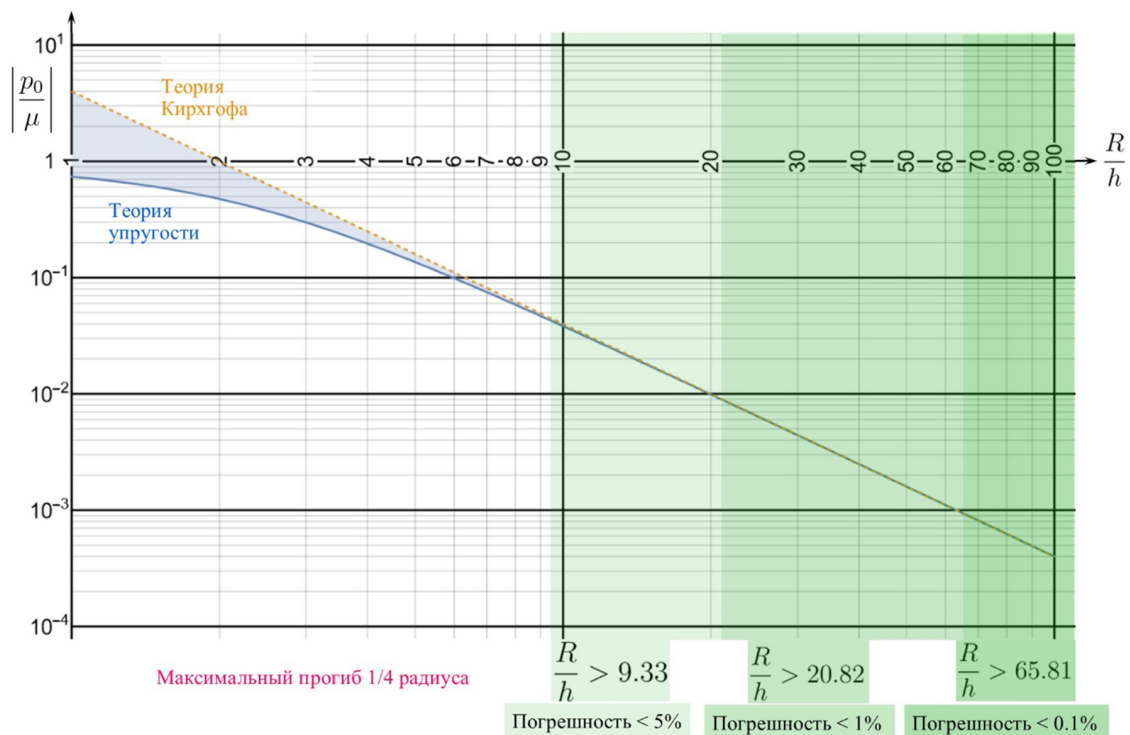


Рисунок 3. Сравнение модели Кирхгофа и решения трехмерной теории упругости

Во второй главе рассмотрены методы решения нелинейных уравнений изгиба пластин с несовместными деформациями, на примере обобщенных уравнений Фешля – фон Кармана (2), (3). Представлены решения для круглой и прямоугольной пластин, контуры которых жестко закреплены.

В разделе 2.1 приведено решение для круговой области. Поскольку обобщенные уравнения по форме близки к классическим, сперва, в **разделах 2.1.1**

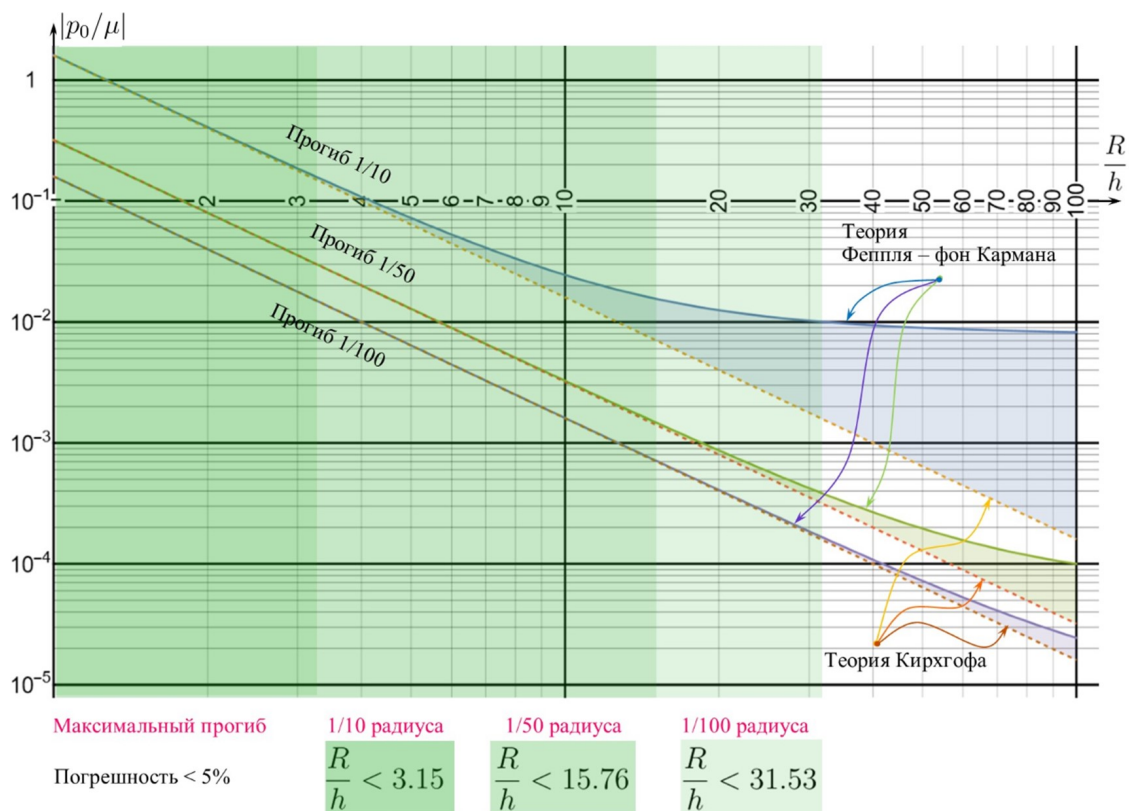


Рисунок 4. Сравнение моделей Кирхгофа и Фешля – фон Кармана

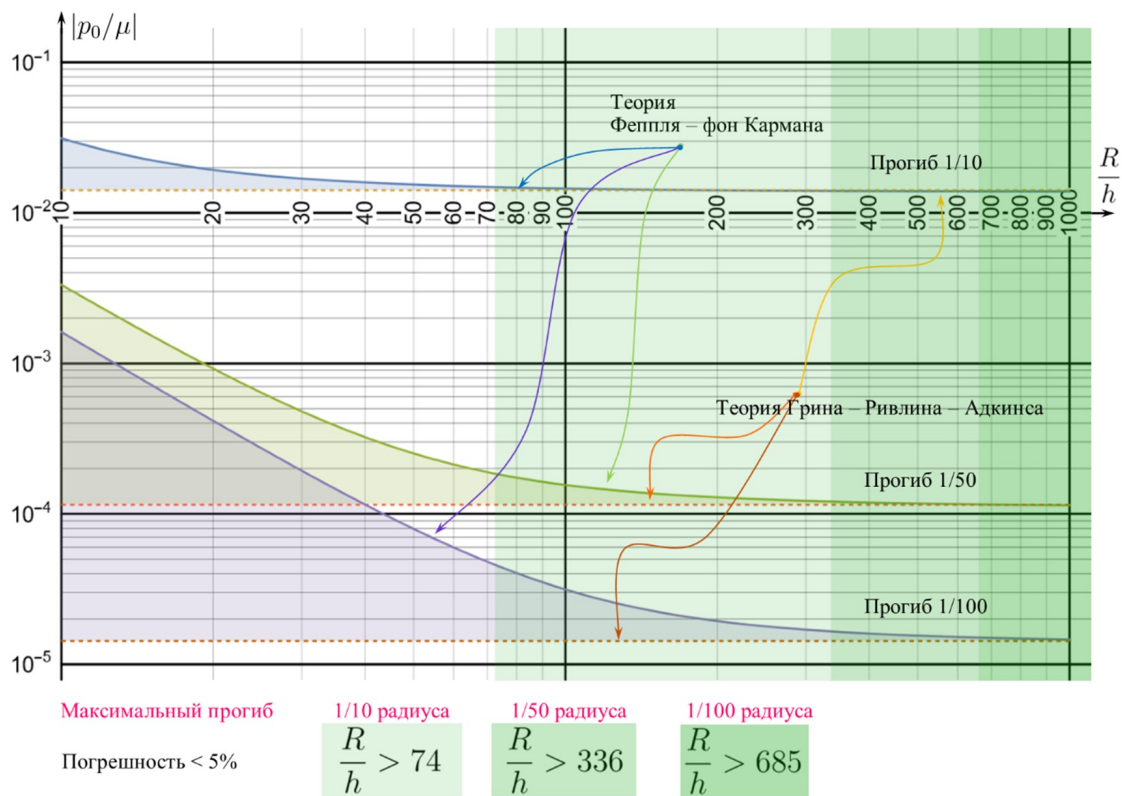


Рисунок 5. Сравнение модели Фешля – фон Кармана и нелинейной модели мембраны

– **2.1.4** рассматривается решение последних. Его обобщение для модифицированных уравнений приведено в **разделе 2.1.5**.

Сперва приводится постановка краевой задачи и излагается общая идея ее

решения. В случае осевой симметрии можно сразу снизить порядок системы уравнения Фешля – фон Кармана, единожды проинтегрировав каждое уравнение. Тогда, после обезразмеривания, рассматриваемая краевая задача принимает вид:

$$r \frac{d}{dr} \nabla^2 w - w' \phi' = \int_0^r p(v) v dv, \quad r \frac{d}{dr} \nabla^2 \phi + \kappa (w')^2 = 0, \quad (4)$$

$$w'|_{r=0} = 0, \quad w|_{r=1} = 0, \quad w'|_{r=1} = 0, \quad (5)$$

$$\phi'|_{r=0} = 0, \quad \phi|_{r=1} = 0, \quad (r\phi'' - \nu\phi')|_{r=1} = 0, \quad (6)$$

где $\kappa = 6(1 - \nu^2)$ – безразмерный коэффициент.

Симметричная форма уравнений позволяет достаточно эффективно получить решение краевой задачи с помощью метода последовательных приближений. Для этого рассматриваются две вспомогательные краевые задачи, задающиеся одним неоднородным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{dr} \nabla^2 f = f''' + \frac{1}{r} f'' - \frac{1}{r^2} f' = F(r),$$

но с разными краевыми условиями, первой вспомогательной задаче соответствуют условия аналогичные (5), а второй – (6). Тогда если для каждой из этих краевых задач найдены решения в виде обратных операторов $\mathcal{G}_w(F)$, $\mathcal{G}_\phi(F)$, то решение исходной задачи можно отыскать в виде последовательности уточненных решений:

$$w_i = \mathcal{G}_w \left(\frac{1}{r} \int_0^r p(v) v dv \right) + \mathcal{G}_w \left(\frac{w'_{i-1} \phi'_{i-1}}{r} \right), \quad \phi_i = -\kappa \mathcal{G}_\phi \left(\frac{(w'_i)^2}{r} \right),$$

или, исключая ϕ :

$$w_i = \mathcal{G}_w \left(\frac{1}{r} \int_0^r p(v) v dv \right) - \kappa \mathcal{G}_w \left(\frac{w'_{i-1} \mathcal{G}'_\phi \left(\frac{(w'_{i-1})^2}{r} \right)}{r} \right) =: \mathfrak{R}_p(w_{i-1}).$$

Эта последовательность сходится к точному решению исходной задачи если, начиная с некоторого N , отображения $\mathfrak{R}_p(w_i)$ для каждого $i > N$ являются сжимающими.

Задача отыскания $\mathcal{G}_w(F)$, $\mathcal{G}_\phi(F)$ сводится к определению функций Грина соответствующих дифференциальных операторов. Ее решение представлено в **разделе 2.1.1**. Там же установлено полезное свойство $\mathcal{G}_w(F)$, $\mathcal{G}_\phi(F)$, а именно установлено, что при их действии на полиномиальные функции, результаты также является полиномами:

$$\mathcal{G}_w(r^k) = \frac{2r^{3+k} - (3+k)r^2 + 1+k}{2(1+k)(3+k)^2},$$

$$\mathcal{G}_\phi(r^k) = \frac{1}{4} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1-r^2}{3+k} + \frac{(5+k)(1-r^{3+k})}{(3+k)^2} - \frac{r^2(1-r^{1+k})}{1+k} \right].$$

Это свойство использовалось в работе для оптимизации вычислительных алгоритмов построения решения.

Вопрос о сходимости последовательности уточненных решений рассматривается в **разделе 2.1.2**. Показано, что при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию давления $p(r)$, близость начального и уточненного решений w_{i-1} , w_i может оцениваться по максимальной норме их разности. Это позволило оценить область, в которой оператор \mathfrak{R}_p является сжимающим. Оказалось, что с увеличением давления (по норме), эта область быстро уменьшается, т. е. для того чтобы последовательность решений сходилась, необходимо чтобы начальное приближение было очень близко к точному решению. Это обстоятельство серьезно ограничивает практическую возможность применения алгоритма, поэтому он был модифицирован.

Первый способ модификации представлен в **разделе 2.1.3**. Показано, что если в качестве исходного решения на каждом шаге итерационного процесса выбирать не решение с предыдущего шага, а среднее решений всех предыдущих шагов:

$$\begin{aligned} w_1 &= \mathfrak{R}_p(w_0), & w_2 &= \mathfrak{R}_p\left(\frac{w_0 + w_1}{2}\right), & w_3 &= \mathfrak{R}_p\left(\frac{w_0 + w_1 + w_2}{3}\right), \\ w_4 &= \mathfrak{R}_p\left(\frac{w_0 + w_1 + w_2 + w_3}{4}\right), & \dots, & & w_i &= \mathfrak{R}_p\left(\frac{1}{i} \sum_{j=0}^{i-1} w_j\right), \end{aligned}$$

то, начиная с некоторого достаточно большого N , решение на каждом шаге будет приближаться к точному, т. е. сходимость алгоритма будет обеспечена. Этот метод позволил существенно расширить область применения алгоритма, однако если начальное приближение слишком далеко от искомого решения, то N может быть очень большим. Поэтому при реализации алгоритма с этим способом регуляризации приходится прибегать к методу продолжения по параметру нагрузки, что существенно увеличивает время поиска решения.

В **разделе 2.1.4** предлагается принципиально иная модификация алгоритма. Ее суть состоит в замене исходного дифференциального оператора эквивалентным, но таким чтобы решения на каждом шаге не столь сильно удалялись от своих начальных приближений. В качестве такого оператора можно выбрать оператор упрощенной модели Фешля – фон Кармана, который, как видно из диаграмм 4 и 5, обладает требуемым свойством. Тогда первое уравнение (4) заменяется эквивалентным:

$$\nabla^2 \nabla^2 w - \chi^2 \nabla^2 w = p + L(\phi, w) - \chi^2 \nabla^2 w, \quad (7)$$

где χ – константа, ассоциированная со средним натяжением пластины и определяемая из дополнительных соотношений. В этом случае уточненные решения определяются по формулам:

$$w_i = \mathcal{E}_w^*(p) + \mathcal{E}_w^*(L(\phi_{i-1}, w_{i-1}) - \chi^2 \nabla^2 w_{i-1}), \quad \phi_i = -\kappa \mathcal{E}_\phi \left(\frac{(w'_i)^2}{r} \right),$$

где \mathcal{G}_w^* – обратный оператор краевой задачи, порождаемой (7) с краевыми условиями (5), дополненными условием регулярности решения в полюсе.

Сочетание обоих способов модификации позволяет построить итерационный алгоритм, способный отыскивать решения уравнений Феппля – фон Кармана практически для любых p , не прибегая к длительному процессу продолжения по параметру нагрузки. Для демонстрации возможностей алгоритма в работе приведено решение для пластины, нагруженной равномерным давлением, вызывающим прогиб, превышающий радиус пластины. Профиль поверхности пластины при такой нагрузке приведен на Рисунке 6 (сплошной жирной линией показан профиль, тонкими сплошными – промежуточные профили, а прерывистыми – траектории движения отдельных точек, выделенных красным).

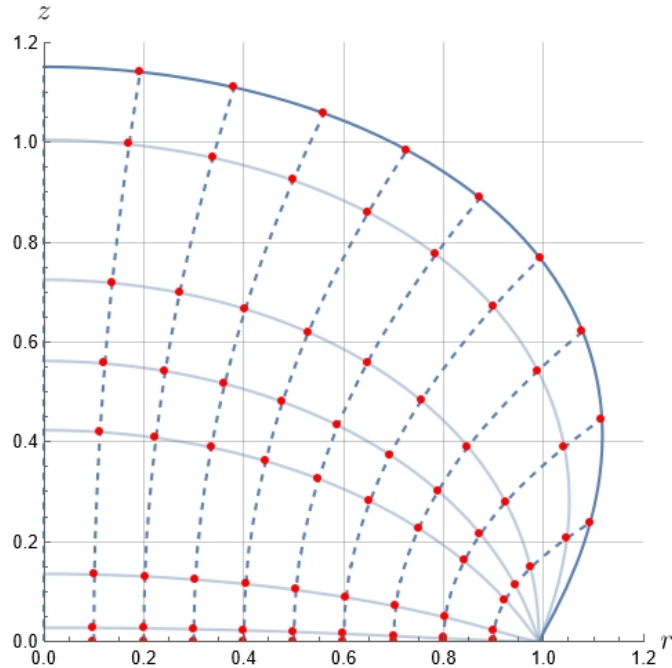


Рисунок 6. Профиль поверхности пластины, отнесенный к ее радиусу ($R/h = 100$)

Предложенный алгоритм легко обобщается для модифицированных уравнений (2), (3). Такое обобщение приведено в **разделе 2.1.5**. Последовательность приближенных решений в этом случае имеет вид:

$$w_i = \mathcal{G}_w^* \left(\frac{p}{\mathbf{a}} \right) + \mathcal{G}_w^* \left(L(\phi_{i-1}, w_{i-1}) - \frac{\mathbf{b}h}{\mathbf{a}} \left[(\nabla^2 w_{i-1})^2 - (1 - \nu) L(w_{i-1}, w_{i-1}) \right] - \chi_0^2 \nabla^2 w \right),$$

$$\phi_i = -\mathcal{G}_\phi \left(\kappa \frac{(w'_i)^2}{r} - \frac{\mathbf{b}h(1 + \nu)}{\mathbf{a}} \frac{d}{dr} \nabla^2 w_i \right).$$

При определении выражения оператора \mathcal{G}_w^* , необходимо учитывать, что в отличие от предыдущего случая здесь присутствует не только фиктивное натяжение χ_0 (ранее оно было обозначено как χ), но и предварительное натяжение от несовместных деформаций, т. е. полагается, что $\chi^2 = \chi_0^2 + \frac{6(1+\nu)(\mathbf{a}-1)}{\mathbf{a}} \frac{R^2}{h^2}$.

Из представленных уравнений видно, что влияние параметров \mathbf{a} , \mathbf{b} на деформацию пластины зависит от ее геометрических параметров. Поэтому при про-

ведении модельных расчетов разумно варьировать не сами параметры \mathbf{a}, \mathbf{b} , а вспомогательные параметры, учитывающие размеры пластины $\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a} - 1) \frac{R^2}{h^2}$, $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b}h$. Анализ результатов модельных расчетов показывает, что параметр $\tilde{\mathbf{a}}$, ассоциированный с предварительным натяжением, серьезно влияет на жесткость пластины. Положительные значения $\tilde{\mathbf{a}}$ соответствуют ситуациям предварительного натяжения пластины, а отрицательные – напротив, отвечают случаям, когда до начала подачи давления пластина “смята”, что приводит к тому, что она начинает сопротивляться деформации не сразу, а после того как “расправится”. Параметр $\tilde{\mathbf{b}}$ может как увеличивать эффективную жесткость пластины, так и уменьшать в силу того, что он влияет и как дополнительный изгибающий момент и как дополнительное натяжение. Влияние несовместных деформаций при тестовых значениях параметров иллюстрируется на Рисунке 7.

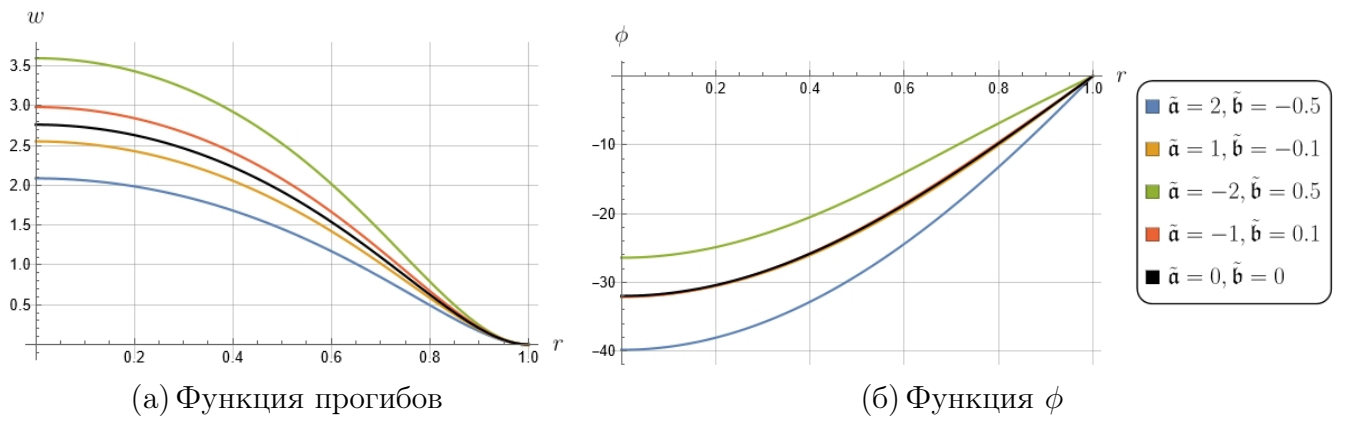


Рисунок 7. Результаты расчета с учетом несовместных деформаций

В следующем **разделе 2.2** обобщенные уравнение Феппля – фон Кармана рассматриваются в прямоугольной области:

$$\Omega = \{ \mathbf{X} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}, \quad x \in (-a, a), \quad y \in (-b, b) \},$$

с границей:

$$\partial\Omega = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2,$$

$$\mathcal{E}_1 = \{ \mathbf{X} = \pm a \mathbf{i} + y \mathbf{j}, \quad y \in (-b, b) \}, \quad \mathcal{E}_2 = \{ \mathbf{X} = x \mathbf{i} + \pm b \mathbf{j}, \quad x \in (-a, a) \}.$$

На $\partial\Omega$ заданы условия жесткой заделки, которые в этом случае удобно разбивать на два типа:

– Условия на функцию прогибов:

$$w|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}|_{\mathcal{E}_2} = 0.$$

– Условия на перемещения u, v в плоскости пластины:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Последняя группа условий создает некоторые трудности при решении краевой задачи, поэтому при построении численно-аналитических решений ее обычно заменяют на упрощенные условия, при которых края пластины не смещаются в поперечных направлениях, но могут свободно деформироваться в продольном:

$$u|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad v|_{\mathcal{E}_2} = 0, \quad T_{xy}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Здесь T_{xy} – касательные напряжения, осредненные по толщине.

Чтобы сформулировать краевые задачи нужно переформулировать краевые условия для u , v и T_{xy} в терминах искомым функций w и ϕ . Это можно сделать с помощью формулы Чезаро, обобщенной на случай нелинейных деформаций (1). В результате получаются две краевые задачи, соответствующие различным способам закрепления краев. Общие для этих задач уравнения (в случае классических уравнений Фешля – фон Кармана) в безразмерной форме имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 w - L(w, \phi) &= p, & \nabla^2 \nabla^2 \phi + \kappa L(w, w) &= 0, \\ w|_{\partial\Omega} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial x}|_{\mathcal{E}_1} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial y}|_{\mathcal{E}_2} &= 0, \\ \int_0^1 \left[\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \kappa \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx &= 0, & \int_0^1 \left[\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \kappa \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy &= 0, \end{aligned}$$

где $\kappa = 6(1 - \nu^2)$, $\alpha = \beta^{-1} = \frac{a^2}{b^2}$, а под $\nabla^2 \nabla^2$ здесь понимается модифицированный бигармонический оператор:

$$\nabla^2 \nabla^2 f = \beta \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}.$$

Выписанные уравнения дополняются соотношениями, описывающими условия закрепления краев пластины в продольном направлении:

– подвижные края:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{\partial\Omega} = 0;$$

– неподвижные края:

$$\int_0^x \left[\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] dx \Big|_{y=\pm 1} = 0, \quad \int_0^y \left[\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] dy \Big|_{x=\pm 1} = 0.$$

Первая задача, для подвижных краев, рассматривается в **разделе 2.2.4**, а вторая – в **разделе 2.2.5**. Для того чтобы обобщить эти краевые задачи для пластин с несовместными деформациями необходимо лишь заменить сами уравнения на (2), (3), в то время как краевые условия остаются неизменными.

Для примера, в **разделе 2.2.6** рассмотрена задача для (2), (3) с условиями подвижных краев.

Решения всех задач строятся в рамках единого подхода, обобщающего метод Галеркина для нелинейных систем. Его идея состоит в представлении искомым функций в виде разложений по базису гильбертового пространства, что позволяет свести краевую задачу к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье, определяя которые можно удовлетворить исходным уравнениям (здесь и далее речь идет о равенстве в среднеквадратичном смысле).

Для нелинейных краевых задач, процесс алгебраизации может быть довольно трудоемким, однако он существенно упрощается при удачном выборе функционального базиса. Подходящий базис отыскивается в **разделе 2.2.1**, как система собственных функций самосопряженного регулярного оператора:

$$\mathcal{L}(f) = \beta \frac{\partial^4 f}{dx^4} + \alpha \frac{\partial^4 f}{dy^4}, \quad f \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial f}{dx} \Big|_{\mathcal{E}_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{dy} \Big|_{\mathcal{E}_2} = 0.$$

Выбор такого оператора объясняется тем, что его собственные функции заведомо удовлетворяют краевым условиям исходных задач, накладываемым на функцию прогибов w .

Система собственных функций этого оператора распадается на четыре последовательности функций с разной четностью по обеим координатам. Для сокращения выкладок, в работе полагается, что искомые функции и функция давления четные по обеим координатам. Это позволяет при выкладках ограничиться лишь одной последовательностью собственных функций f_k .

Для того чтобы выполнить оставшиеся краевые условия, в **разделе 2.2.3** рассматривается вспомогательная граничная задача:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \phi &= 0, & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_{y=\pm 1} &= \psi_1(x), & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Big|_{x=\pm 1} &= \psi_2(y), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=1} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=-1} = \chi_1(x), & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=1} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=-1} = \chi_2(y), \end{aligned}$$

где $\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ – некоторые функции, интегрируемые с квадратом, причем функции ψ – четные, а χ – нечетные. Решение этой краевой задачи находится в виде суммы функций: $\phi = \phi_0 + \phi^*$, одна из которых, ϕ^* , удовлетворяет неоднородным краевым условиям, а вторая, ϕ_0 , удовлетворяет однородным условиям на контуре и является решением уравнения:

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi_0 = -\nabla^2 \nabla^2 \phi^*.$$

Функцию ϕ^* можно определять различными способами, в диссертационной

работе она отыскивается в виде ряда:

$$\begin{aligned} \phi^* = & a_0 \frac{x^2}{4} + b_0 \frac{y^2}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} [a_k \cos(\pi k x) + b_k \cos(\pi k y)] - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} \left\{ c_k f_k^c(y) [\cos(\pi k x) - (-1)^k] + d_k f_k^d(x) [\cos(\pi k y) - (-1)^k] \right\}, \end{aligned}$$

где f_k^c, f_k^d – произвольные четные функции, первые производные которых принимают ненулевые значения на концах отрезка $[-1, 1]$, а a_k, b_k, c_k, d_k – неизвестные коэффициенты, подбирая которые можно удовлетворить неоднородным краевым условиям независимо от конкретного вида функций $\psi_1, \psi_2, \chi_1, \chi_2$ (при соблюдении введенных выше ограничений на последние). Функцию ϕ_0 удобно представлять в виде разложения по базисным функциям, коэффициенты которых, ζ_k , подбираются так, чтобы сумма $\phi_0 + \phi^*$ удовлетворяла однородному бигармоническому уравнению.

Таким образом искомые функции отыскиваются в следующем виде:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} g_k f_k, \quad \phi = \sum_{k=1}^{\infty} (s_k + \zeta_k) f_k + \phi^*.$$

Если подставить эти разложения в исходные уравнения и спроецировать их на базисные подпространства, то задачу удастся свести к бесконечномерной системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $g_k, s_k, a_k, b_k, c_k, d_k$. Разрешить эту систему достаточно сложно, поэтому обычно прибегают к методу редукции, согласно которому решается не вся бесконечномерная система, а только первые ее n уравнений с таким же числом неизвестных. Этот метод строго обоснован для линейных систем в работах Б. М. Кояловича, однако на данный момент аналогичное обоснование для нелинейных систем не известно. Впрочем, на практике этот метод успешно применяется и для них.

Таким образом, после алгебраизации, редукции и последующего исключения всех неизвестных коэффициентов, за исключением g_k , рассматриваемые краевые задачи сводятся к конечномерным системам кубических уравнений. Они имеют следующий вид:

– для случая подвижных краев (**раздел 2.2.4**):

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{g} - \kappa ((\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - 3 \left[(\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{a0} \cdot \mathbf{g}) + (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{b0} \cdot \mathbf{g}) \right] = \mathbf{b},$$

– для случая неподвижных краев (**раздел 2.2.5**):

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \cdot \mathbf{g} - ((\mathcal{S}' \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} - 3 \left[(\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{a0} \cdot \mathbf{g}) + (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{b0} \cdot \mathbf{g}) \right] - \\ - (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^c \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{g} \cdot \mathcal{S}'_c \cdot \mathbf{u}^0) - (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^d \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{g} \cdot \mathcal{S}'_d \cdot \mathbf{v}^0) = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{G} – матрица Галеркина линейной задачи, \mathbf{g} – вектор неизвестных коэффициентов g_k , \mathbf{b} – вектор коэффициентов Фурье разложения функции давления по базисным функциям. Остальными символами обозначены вспомогательные структуры с известными коэффициентами, зависящими от параметров пластины: \mathcal{S} , \mathcal{S}' – матрицы четвертого порядка, \mathcal{S}'_c , \mathcal{S}'_d – кубические матрицы, \mathbf{M}^{a0} , \mathbf{M}^{b0} , \mathcal{T}^a , \mathcal{T}^b , \mathcal{T}^c , \mathcal{T}^d – квадратные матрицы и \mathbf{u}^0 , \mathbf{v}^0 – векторы.

Для того чтобы решить полученные системы нелинейных уравнений, их можно линеаризовать в окрестности решения линейной задачи \mathbf{g}_0 , построенного в разделе 2.2.2, по формуле:

$$\mathcal{A}(\mathbf{g}) = \mathcal{A}(\mathbf{g}_0) + \left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \mathbf{g}} \right|_{\mathbf{g}=\mathbf{g}_0} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{g}_0) + o(\mathbf{g} - \mathbf{g}_0),$$

где символом $\mathcal{A}(\mathbf{g})$ обозначены левые части уравнений.

В работе проведены расчеты пластин с обоими типами краевых условий для пластин с различными соотношениями сторон и при разных функциях давления. Для примера, на Рисунке 8 приведено решение для пластины с соотношением сторон 4:1, нагруженной равномерным давлением. Краевые условия соответствуют более сложному случаю недеформируемых краев.

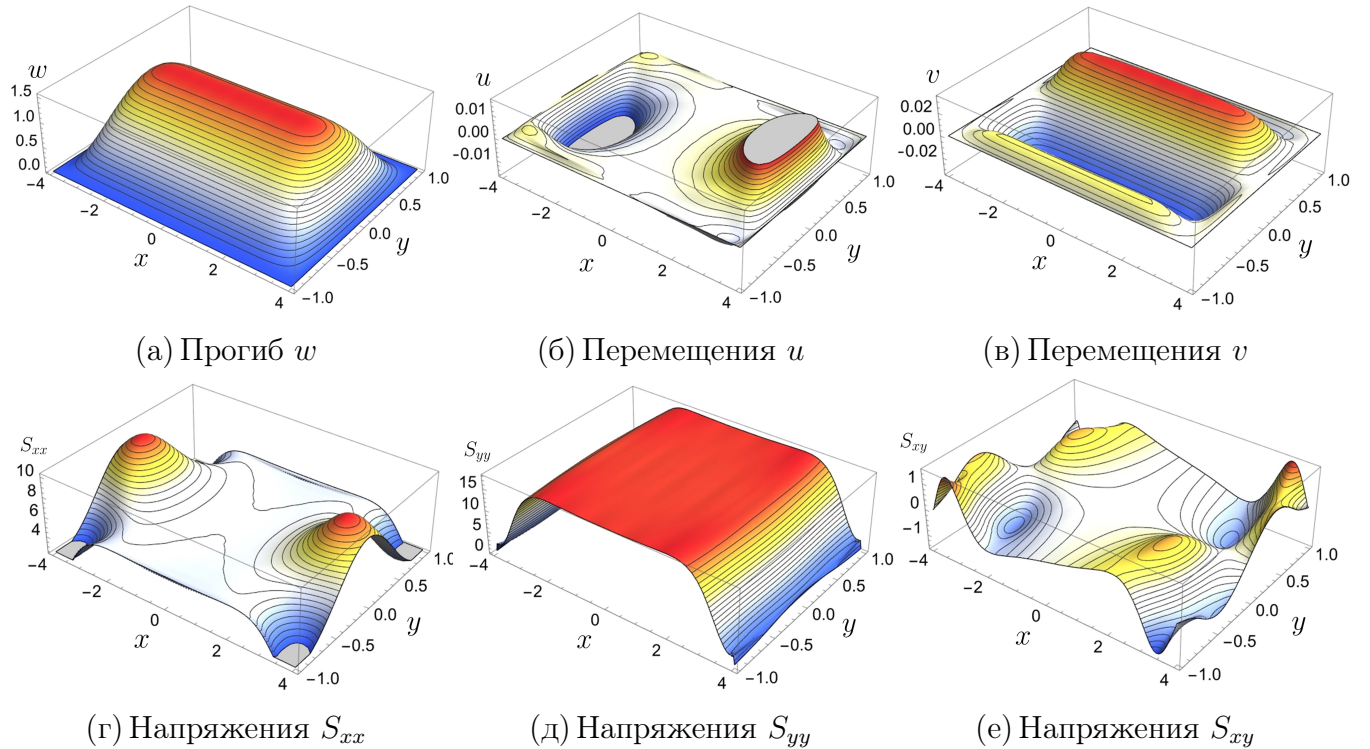


Рисунок 8. Решение нелинейной задачи для случая неподвижных краев

Приведенный алгоритм переносится на случай пластины с несовместными деформациями. В разделе 2.2.6 соответствующее решение приводится для случая деформируемых краев. В этом случае алгебраизованная система имеет

несколько более сложный вид:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{G} - \frac{6(1+\nu)(\mathbf{a}-1)ab}{\mathbf{a}h^2} \left(\sqrt{\beta} \mathbf{M}^{b0} + \sqrt{\alpha} \mathbf{M}^{a0} \right) \right] \cdot \mathbf{g} + \\ & + \frac{bh}{\mathbf{a}} \left[\left(\beta \mathbf{M}^{sb} + \mathbf{M}^{s0} + \alpha \mathbf{M}^{sa} - (1-\nu) \mathbf{M} + (1+\nu) \mathcal{R} \right) \cdot \mathbf{g} \right] \cdot \mathbf{g} - \\ & - \kappa \left((\mathcal{S} \cdot \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} \right) \cdot \mathbf{g} - 3 \left[(\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^a \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{a0} \cdot \mathbf{g}) + (\mathbf{g} \cdot \mathcal{T}^b \cdot \mathbf{g}) (\mathbf{M}^{b0} \cdot \mathbf{g}) \right] = \frac{b}{\mathbf{a}}, \end{aligned}$$

дополненный вспомогательными кубической \mathcal{R} и квадратными \mathbf{M}^{sb} , \mathbf{M}^{s0} , \mathbf{M}^{sa} матрицами.

Для оценки влияния несовместных деформаций на изгиб прямоугольной пластины в работе проведена серия расчетов вытянутой пластины при умеренном равномерном давлении и при различных значениях параметров $\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}-1) \frac{ab}{h^2}$, $\tilde{\mathbf{b}} = bh$. Результаты представлены на Рисунке 9 (в верхнем ряду приведены поверхности прогибов, а в нижнем – их изолинии). Видно, что здесь несовместные деформации существенно влияют не только на максимальный прогиб, но и на форму поверхности прогибов: при малом $\tilde{\mathbf{a}}$ и большом $\tilde{\mathbf{b}}$ она принимает гантелеобразную форму, оказываясь поджатой в центральной области. В обратном случае функция прогибов в этой области становится ближе к равномерной.

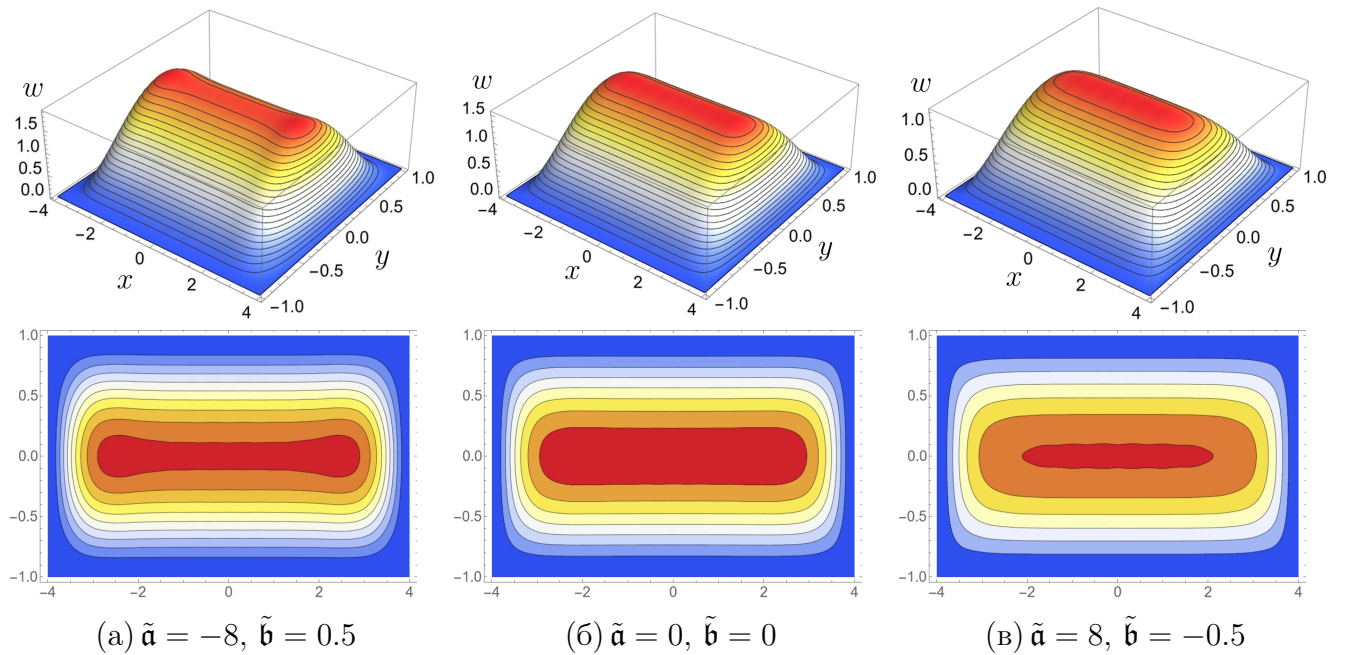


Рисунок 9. Функции прогибов для случая несовместных деформаций

Для того чтобы убедиться в адекватности выбранной модели и правильности построенных решений, требуется их экспериментальная валидация и идентификация входящих в нее параметров, в частности, параметров импланта. Такая валидация проведена в **третьей главе**.

В разделе 3.1 проводится сравнение теоретических результатов с экспериментальными, полученными методом голографической интерферометрии. Голографическая техника была выбрана в силу того, что она позволяет оценить

форму всей деформированной поверхности пластины. Методика проведения эксперимента кратко описана в **разделе 3.1.1**. Оптическая схема построена по классической внеосевой схеме Лейта – Упатниекса и дополнена оптическими элементами, увеличивающими изображение наблюдаемого поля. Результатом эксперимента являются полосы вторичной интерференции, характеризующие смещение поверхности пластины вдоль оси предметного пучка на половину длины волны лазера ($\lambda = 532$ нм). Измерения проводились в 2 этапа: сперва образец нагружался значительным давлением p_0 , а затем донагружался малым давлением δp . Соответственно, интерференционный узор, зафиксированный в результате измерения, содержит информацию о дополнительных прогибах лицевой поверхности образца в результате донагружения, т. е. о поле $w_{\text{exp}}(p_0, \delta p) = w(p_0 + \delta p) - w(p_0)$. Такая методика нагружения позволяет наглядно оценить влияние предварительного натяжения пластины на ее изгибную жесткость.

Проведено две серии измерений. В **разделе 3.1.2** приведены измерения прогибов защемленной квадратной медной пластины. Параметры образца приведены в Таблице 3, а программа нагружения в Таблице 4. В последней каждая пара “базовое давление” + “инкремент давления” соответствует измерению приращений прогибов пластины при увеличении давления от p_0 до $p_0 + \delta p$. В результате измерений получен набор цифровых изображений интерференционных узоров, часть из которых показана в первом ряду на Рисунке 10. Из полученных картин интерференционных полос хорошо видно, что при больших преднагрузках малый инкремент давления приводит к гораздо меньшей добавочной деформации, что согласуется с расчетными прогнозами (по классической модели Фешля – фон Кармана), приведенными во втором ряду того же рисунка.

Длина a , см	Толщина h , мкм	Модуль Юнга E , ГПа	Коэффициент Пуассона ν
6	184	129.8	0.343

Таблица 3. Параметры квадратного образца

Базовое давление p_0 , кПа	Инкремент давления δp , Па										
0											
3	10	20	30	40	50	60	70	80	90		
6											

Таблица 4. Нагружение квадратной пластины

Соответствие абсолютных величин прогибов можно оценить, сравнив число пар светлых и темных полос на полученных голограммах и отношение прогнозируемого максимального прогиба к длине волны измерительного лазера (с округлением до ближайшего целого). Такое сравнение представлено в работе для всех измерений в виде столбчатых диаграмм (на Рисунке 11 показаны две из них). Здесь также наблюдается хорошая согласованность измерений и

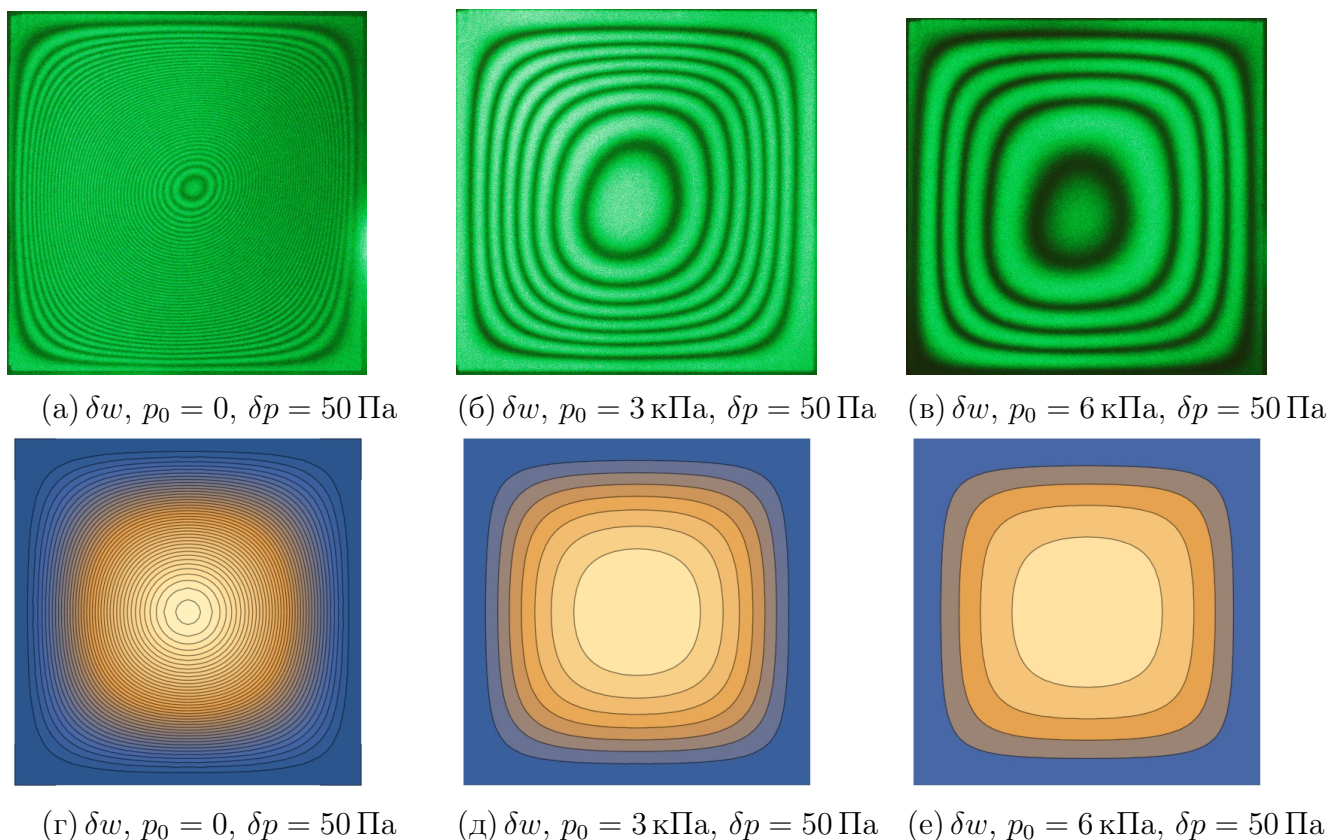


Рисунок 10. Голограммы “толстой” пластины и изолинии расчетных поверхностей прогибов прогнозов, особенно в областях больших прогибов, когда влияние случайных ошибок измерения нивелируется значительным натяжением пластины.

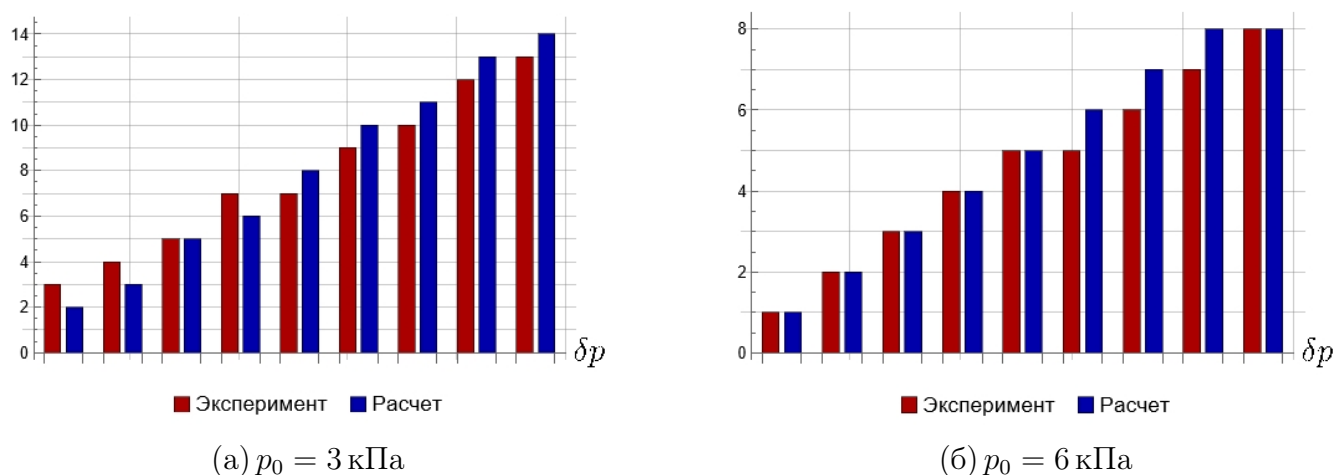


Рисунок 11. Сравнение числа полос

В разделе 3.1.3 приведены измерения прогибов заземленной круглой алюминиевой МЭМС пластины. Параметры пластины и программа ее нагружения приведены в таблицах 5 и 6. В ходе эксперимента наблюдалось систематическое отклонение результатов от прогнозов классической модели Фепля – фон Кармана, что можно объяснить наличием значительного предварительного натяжения. Натяжение (параметр α) было идентифицировано по результатам из-

мерения прогиба при нагружении от нуля до $p = 5332$ Па. Показано, что прогноз обобщенной модели Фешля – фон Кармана, учитывающей натяжение, значительно лучше соответствует результатам эксперимента (сравнение части изолиний приведено на Рисунке 12).

Радиус R , мм	Толщина h , нм	Модуль Юнга E , ГПа	Коэффициент Пуассона ν
0.5	750	70.6	0.345

Таблица 5. Параметры круглого образца

Базовое давление p_0 , Па							Инкремент давления δp , Па
2666	3999	5332	6665	7998	9331	10664	1333
0							5332

Таблица 6. Нагружение круглой пластины

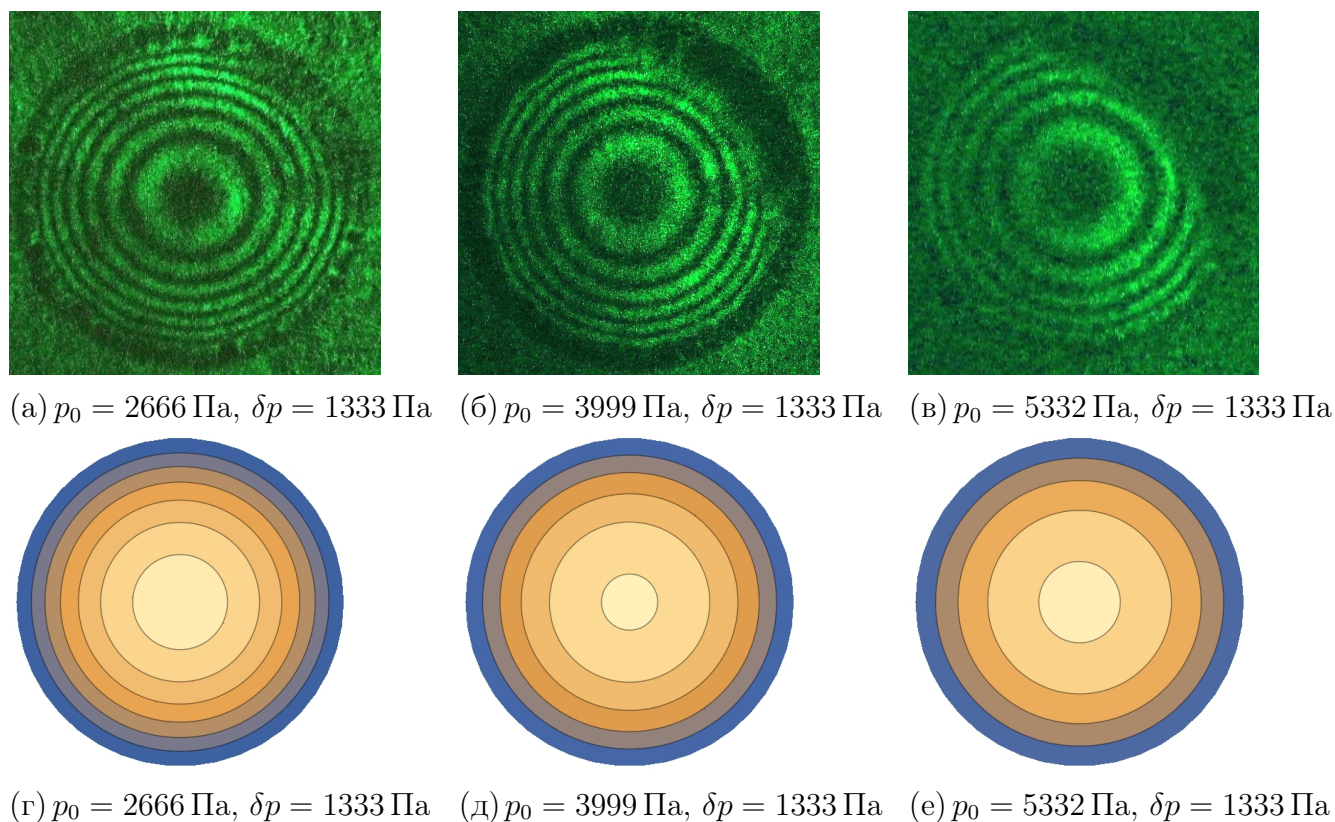


Рисунок 12. Голограммы МЭМС пластины и изолинии расчетных поверхностей прогибов

Для более детального анализа результатов измерений в **разделе 3.1.4** представлен алгоритм, позволяющий автоматически получать аналитические выражения, описывающие линии интерференционного узора, представленные на цифровом изображении. Алгоритм относится к физически обоснованным, т. е. в его основе лежит априорное знание о форме и взаимном расположении линий узора.

Несовместные деформации в пластине это не единственная возможная причина отклонений результатов от прогноза. Из-за особенностей технологического процесса изготовления образца существует вероятность, что слой алюминия будет отслаиваться от кремниевой подложки в процессе нагружения. Этот эффект кратко обсуждается в **разделе 3.2**. Его можно наблюдать визуально на оптическом профилометре, однако более явно он проявляется по влиянию на упругую характеристику мембраны. На Рисунке 13 приведено сравнение упругих характеристик мембран разных диаметров, полученных из модели Грина – Ривлина – Адкинса, с экспериментальными данными, полученными на оптическом профилометре для тонкой алюминиевой мембраны с толщиной 300 нм. Видно, что несоответствие теоретического прогноза экспериментальным результатам в данном случае можно объяснить отслоением мембраны, которое выражается на графике переходом экспериментальных точек с одной теоретической кривой на другую.

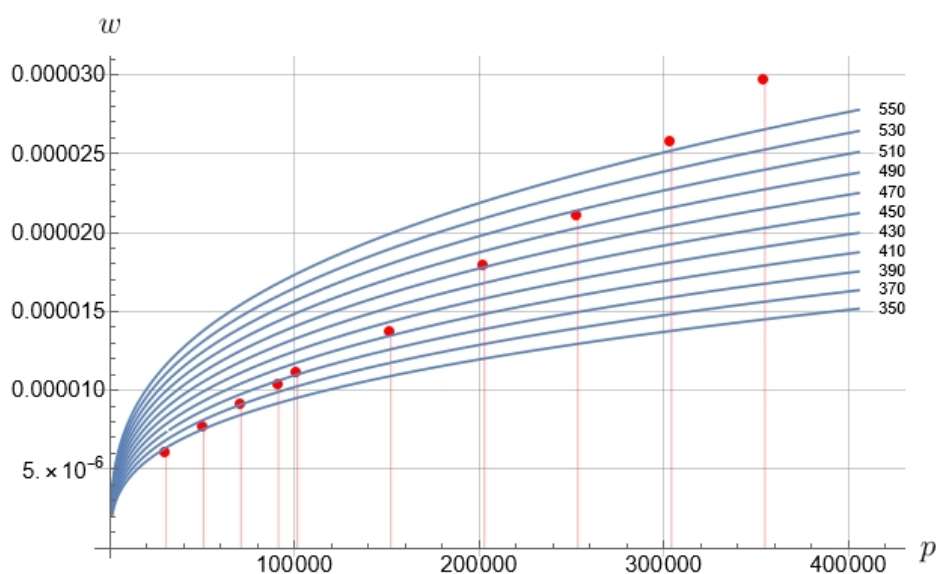


Рисунок 13. Сравнение с семейством теоретических кривых

В заключительной части диссертационной работы подводятся итоги исследования:

1. Развита новая аналитическая теория самонапряженных тонкостенных элементов. Показано, что она может быть использована для разработки новых моделей тонкостенных элементов, учитывающих конечные несовместные деформации, возникающие в пластинах нанометрового масштаба.
2. Получены обобщенные уравнения Феппля – фон Кармана, учитывающие несовместные деформации.
3. Получены асимптотические формулы, представляющие первый тензор напряжений Пиола и тензор истинных напряжений Коши в виде рядов по малому параметру, ассоциированному с абсолютной величиной деформации.

4. Установлены области применимости классических моделей при анализе деформирования короткого цилиндрического тела. Рассмотрены следующие модели: трехмерное тело (в рамках линейной теории упругости), пластина Кирхгофа, пластина Феппля – фон Кармана, мембрана Грина – Ривлина – Адкинса.
5. Предложена модифицированная итерационная процедура построения решения задачи об изгибе круглой пластины Феппля – фон Кармана с несовместными деформациями, защемленной на контуре и нагруженной на лицевой поверхности давлением, распределенным по произвольному закону. Модификация позволяет строить решения для пластин, нагруженных давлением, вызывающим прогибы превышающие радиус пластины.
6. Построено новое решение задачи об изгибе прямоугольной пластины Феппля – фон Кармана с несовместными деформациями, нагруженной давлением, функция распределения которого является четной по обеим координатам. Рассмотрены два вида краевых условий: а) все стороны абсолютно жестко защемлены; б) все стороны закреплены от смещений в трансверсальном направлении, но могут деформироваться в продольном. Указан способ обобщения построенного решения для случая функции распределения давления общего вида.
7. Развита экспериментальная методика идентификации перемещений пластин нанометрового масштаба методом голографической интерферометрии. Представлен алгоритм автоматической идентификации полос вторичной интерференции на цифровом изображении, позволяющий более детально анализировать результаты экспериментов.
8. Проведены экспериментальные исследования “толстой” квадратной пластины и круглой пластины нанометровой толщины методом голографической интерферометрии. Проведена валидация построенных решений.

Публикации автора по теме диссертации

- 1 Deformations of Single-Crystal Silicon Circular Plate: Theory and Experiment / Lychev S., Digilov A., Demin G. et al. // *Symmetry*. — 2024. — Vol. 16, no. 2. — P. 137.
- 2 Incompatible Deformations in Hyperelastic Plates / Lychev S., Digilov A., Bespalov V., Djuzhev N. // *Mathematics*. — 2024. — Vol. 12, no. 4. — P. 596.
- 3 Lychev S., Digilov A., Djuzhev N. Galerkin-Type Solution of the Föppl–von Kármán Equations for Square Plates // *Symmetry*. — 2024. — Vol. 17, no. 1. — P. 32.
- 4 Lychev S., Digilov A. A Robust Skeletonization Method for High-Density Fringe Patterns in Holographic Interferometry Based on Parametric Modeling and Strip Integration // *J. Imaging*. — 2026. — Vol. 12, no. 2. — P. 54.
- 5 Lychev S. A., Koifman K. G., Digilov A. V. Nonlinear dynamic equations for elastic micromorphic solids and shells. Part I // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. — 2021. — Т. 27, № 1. — С. 81–103.
- 6 Лычев С. А., Дигилов А. В., Пивоваров Н. А. Изгиб кругового диска: от цилиндра к ультратонкой мембране // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. — 2023. — Т. 29, № 4. — С. 77–105.
- 7 Дигилов А. В., Лычев С. А. Решение уравнений Феппля–фон Кармана для квадратных пластин // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. — 2024. — Т. 30, № 4. — С. 26–45.
- 8 О скелетизации интерференционного узора / С. А. Лычев, А. В. Дигилов, П. С. Бычков, И. И. Матвеев // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. — 2025. — Т. 31, № 3. — С. 87–112.

ДИГИЛОВ АЛЕКСАНДР ВЯЧЕСЛАВОВИЧ

**НЕСОВМЕСТИМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ В ГИБКИХ ПЛАСТИНАХ.
ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ**

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать ИПМех РАН . . . 2026 г. Заказ №
Формат 60x90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 70 экз.

Отпечатано в типографии Постер-МГУ
119296, Москва, ул. Молодежная, 3