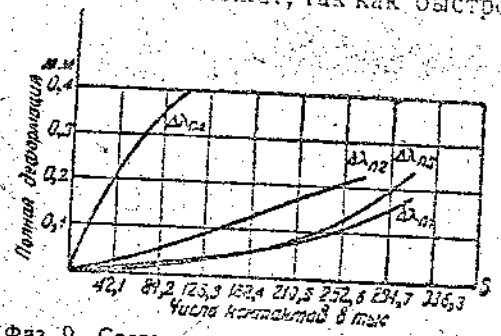


При тяжелом режиме работы, например, при нагрузке  $P=125$  кг и скорости  $v=3$  м/сек, цепь завода „Коммунар“ работать не может, так как быстро удлиняется вследствие большого износа и остаточных деформаций.



Физ. 9. Сравнительная диаграмма увеличения шага цепи завода „Коммунар“

Свободное влияние на величину удлинения цепи должно означать допуск на шаг цепи и механические свойства материала звеньев.

Звенья цепи завода „Коммунар“ изготовляются из ковкого чугуна, получаемого американским способом. Она обладает большей вязкостью и повышенным процентом относительного удлинения по сравнению с нормализованными звеньями из ковкого чугуна, получаемого американским способом. Последние должны лучше противостоять износу и деформации, однако этот вопрос, так же как и вопросы о соотношении шага цепи и звездочки и о допуске на шаг цепи, можно окончательно разрешить лишь после надлежащим образом поставленных экспериментов.

В сб.: Работы по теории, расчету и производству сельскохозяйственных машин. М., 1940. (ВНИИ сельскохозяйственного машиностроения ВИСХОМ).

Доц. А. Ю. ИШЛИНСКИЙ  
Лаборатория технологических процессов

### РАЗРУШЕНИЕ НЕПОЛНЕ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

В технике, наряду с расчетами на прочность, существенную роль играют расчеты на разрушение тех или иных материалов, необходимое для успешного осуществления технологического процесса. Особенно большое значение имеет расчет на разрушение в сельскохозяйственной механике, где большинство процессов связано с разрушением части проходящих через машину материалов.

К сожалению, нет еще достаточно строгой и сколько-нибудь удовлетворительной теории разрушения материалов. Многочисленные теории прочности, применяемые в расчетах упругих систем, теряют силу при приложении их к расчету неполне упругих систем, где существенное значение имеют и время действия сил на тело, и скорость, с которой эти тела подвергаются деформированию.

В настоящей работе изучаются условия разрушения простейших неполне упругих тел в статических и динамических условиях.

#### Связь между напряжением и деформацией неполне упругого тела.

Для выражения закона, которому подчиняется деформирование упругих тел, достаточно иметь зависимость между деформацией упругих тел и величинами сил (нагрузок), производящих эту деформацию. Но этого недостаточно для описания процесса деформирования неполне упругих тел, где существенную роль играют также скорости изменения нагрузки и деформаций.

Если имеет место простое растяжение неполне упругого тела, находящегося под напряжением  $\sigma$ , то характерными величинами для процесса деформирования являются, таким образом, помимо напряжения  $\sigma$  и относительного удлинения  $\epsilon$ , также и их скорости изменения  $\frac{d\sigma}{dt}$  и  $\frac{d\epsilon}{dt}$ , которые в дальнейшем будут обозначаться  $\dot{\sigma}$  и  $\dot{\epsilon}$ . Очевидно, величинами  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $\dot{\sigma}$  и  $\dot{\epsilon}$  должны

удовлетворять некоторому соотношению  $f(\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}, t) = 0$ , выражающему закон деформирования не вполне упругого тела. В это соотношение может входить явно и время  $t$ , так как с течением времени свойства тел могут меняться (например, по мере повышения температуры тела).

Простейшей зависимостью типа  $f(\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}, t) = 0$  является, очевидно, линейная зависимость, не содержащая времени  $t$  в явном виде, т. е.  $\alpha\varepsilon + \beta\dot{\varepsilon} = \gamma\sigma + \delta\dot{\sigma}$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$  — физические константы тела.

Свободный член в этой линейной зависимости должен непременно отсутствовать, если принять, что деформация отсутствовала до начала действия сил на тело.

К этой же линейной зависимости можно прийти, допуская разложимость функции  $f, \sigma, \varepsilon, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}$  в ряд Маклорена и ограничиваясь лишь первыми членами разложения:

$$f(\varepsilon, \sigma, \dot{\varepsilon}, \dot{\sigma}) = f(0, 0, 0, 0) + \sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \dot{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \dot{\sigma}} + \dot{\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \dot{\varepsilon}}$$

При этом  $f(0, 0, 0, 0) = 0$  по указанным выше причинам.

Построим модель не вполне упругого тела, подчиняющегося при деформации простейшему закону  $\alpha\varepsilon + \beta\dot{\varepsilon} = \gamma\sigma + \delta\dot{\sigma}$ . Представим себе (фиг. 1) пружину с жесткостью  $B_1$ , соединенную последовательно с комбинацией пружины  $l$  с жесткостью  $B_2$  и поршня, движущегося в сосуде с вязкой жидкостью. Если к свободному концу первой пружины приложить силу  $P$ , а сосуд с вязкой жидкостью вместе со свободным концом второй пружины закрепить, то удлинение всей конструкции  $\lambda$  составит из двух величин: удлинения первой пружины  $\lambda_1 = \frac{P}{B_1}$  и удлинения второй пружины  $\lambda_2 = \frac{Q^2}{B_2}$ , где  $Q$  — сила, растягивающая вторую пружину. При перемещении поршня в вязкой жидкости возникает сила сопротивления этому перемещению  $R = \mu \frac{d\lambda_2}{dt} = \mu \dot{\lambda}_2$ , где  $\frac{d\lambda_2}{dt}$  — скорость движения поршня, а  $\mu$  — коэффициент, связанный с вязкостью жидкости и размерами сосуда и поршня.



Фиг. 1

Если пренебречь инерционным эффектом пружин и поршня, то, очевидно,  $P = R + Q$ , или  $P = \mu \dot{\lambda}_2 + B_2 \lambda_2$ .

С другой стороны,  $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1 = \lambda - \frac{P}{B_1}$  и  $\dot{\lambda}_2 = \dot{\lambda} - \frac{\dot{P}}{B_1}$ .

Подставляя эти выражения в предыдущее соотношение, получим:

$$P = \mu \left( \dot{\lambda} - \frac{\dot{P}}{B_1} \right) + B_2 \lambda - \frac{P}{B_1}$$

эти, после упрощений:

$$\frac{\mu}{B_1} \dot{P} + \left( 1 + \frac{B_2}{B_1} \right) P = B_2 \lambda + \mu \dot{\lambda}$$

это совпадает с выражением  $\alpha\varepsilon + \beta\dot{\varepsilon} = \gamma\sigma + \delta\dot{\sigma}$ , если соответственно изменить обозначения.

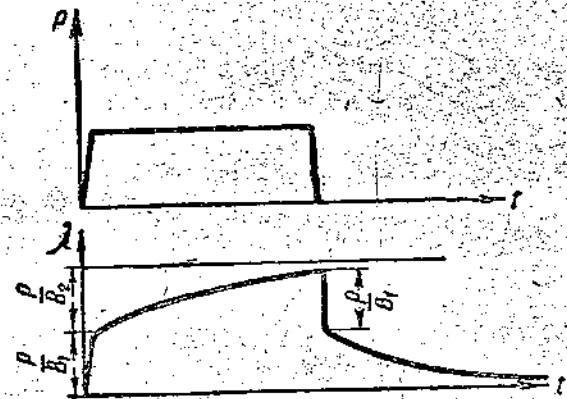
Теперь легко представить себе, что будет происходить с брусом из не вполне упругого материала при нагрузке его достаточно быстро растягивающей силой. Для этого обратимся к жидкой модели. При быстром приложении силы прежде всего растянется верхняя пружина на величину  $\lambda_1 = \frac{P}{B_1}$ , растяжение же второй пружины начнется постепенно, благодаря тормозящему действию поршня. Спустя достаточно большое время растянется и вторая пружина на величину  $\lambda_2 = \frac{P}{B_2}$ , так что общая деформация составит

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{P}{B_1} + \frac{P}{B_2}$$

Если же после установления этой деформации силу  $P$  достаточно быстро снять, то сейчас же исчезнет упругая деформация первой пружины, т. е. величина  $\lambda_1$ ; деформация  $\lambda_2$  второй пружины вследствие действия поршня будет исчезать постепенно.

На фиг. 2 схематически изображены соответствующие графики силы  $P$  и деформации  $\lambda$  как функции времени. Описанное явление запаздывания образования деформации при действии на брус растягивающей силы называется упругим последствием.

Если же модель быстро растянуть на величину  $\lambda$  и затем закрепить, то в первый момент нагруженной окажется лишь первая пружина, и растягивающая ее сила будет, очевидно, равна  $B_1 \lambda$ . Вторая же пружина, вследствие наличия тормозящего действия поршня, начнет растягиваться не сразу. По мере ее растяжения первая пружина будет несколько сокращаться, и следовательно, усилие, возникшее в модели, будет падать.



Фиг. 2

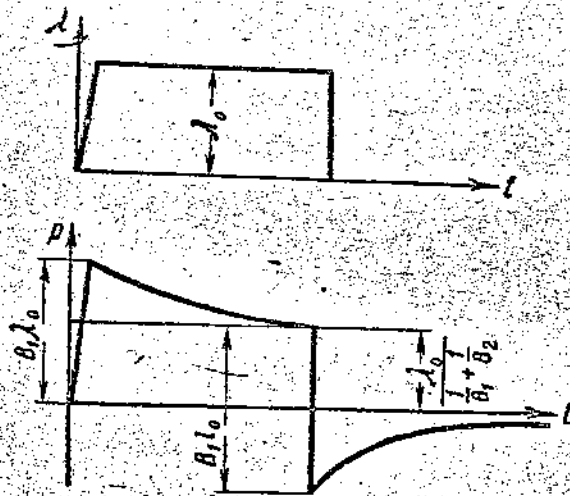
Если же модель быстро растянуть на величину  $\lambda$  и затем закрепить, то в первый момент нагруженной окажется лишь первая пружина, и растягивающая ее сила будет, очевидно, равна  $B_1 \lambda$ . Вторая же пружина, вследствие наличия тормозящего действия поршня, начнет растягиваться не сразу. По мере ее растяжения первая пружина будет несколько сокращаться, и следовательно, усилие, возникшее в модели, будет падать.

Если же модель быстро растянуть на величину  $\lambda$  и затем закрепить, то в первый момент нагруженной окажется лишь первая пружина, и растягивающая ее сила будет, очевидно, равна  $B_1 \lambda$ . Вторая же пружина, вследствие наличия тормозящего действия поршня, начнет растягиваться не сразу. По мере ее растяжения первая пружина будет несколько сокращаться, и следовательно, усилие, возникшее в модели, будет падать.

После достаточно большого промежутка времени обе пружины окажутся нагруженными одинаковой силой  $P$ , которую можно определить из соотношения

$$\frac{P}{B_1} + \frac{P}{B_2} = \lambda.$$

Если теперь позволить модели быстро принять первоначальную длину, то в первый момент вторая пружина будет попережнему растянута, а первая окажется сжатой; следовательно, вся модель будет нагружена в первый момент сжимающей нагрузкой. Затем с течением времени первая и вторая пружины примут первоначальную длину, и модель окажется разгруженной.



Фиг. 3

На фиг. 3 схематически изображены соответствующие графики деформации и нагрузки модели. Уменьшение с течением времени нагруженности модели при постоянной деформации называется релаксацией.

Все описанные явления легко могут быть изучены математически решением дифференциального уравнения модели:

$$\frac{\mu}{B_1} \dot{P} + \left(1 + \frac{B_2}{B_1}\right) P = B_2 \lambda + \mu \lambda.$$

Предположим, например, что в течение весьма малого промежутка времени  $\tau$  сила  $P$  меняется от значения  $P_0$  до значения  $P_1$  и при этом деформация  $\lambda$  изменяется от значения  $\lambda_0$  до значения  $\lambda_1$ . Проинтегрировав левую и правую части дифференциального уравнения в пределах от  $t=0$  до  $t=\tau$ , получим

$$\frac{\mu}{B_1} (P_1 - P_0) + \int_0^\tau \left(1 + \frac{B_2}{B_1}\right) P(t) dt = \int_0^\tau B_2 \lambda(t) dt + \mu \lambda_1.$$

Так как выражения, стоящие под знаком интеграла в правой и левой частях равенства, ограничены, то значения обоих интегралов тем меньше, чем меньше промежуток времени  $\tau$  изменения величин  $P$  и  $\lambda$ . Считая этот промежуток бесконечно малым, получим:

$$\frac{\mu}{B_1} (P_1 - P_0) = \mu \lambda_1 - \mu \lambda_0, \text{ или } P_1 - P_0 = B_1 \lambda_1 - B_1 \lambda_0.$$

т. е. при очень быстрых изменениях нагрузки деформация изменяется пропорционально изменению нагрузки. Очевидно и обратное предложение: при быстрых деформациях модели возникающее в ней усилие пропорционально изменению деформации. Так как коэффициент пропорциональности служит величина  $B_2$ , то это явление, очевидно, происходит за счет деформирования одной первой пружины.

Пусть к модели приложена постоянная сила  $P_0$  и в некоторый момент времени  $t_0 = 0$  деформация пружины составляет величину  $\lambda_0$ . Так как для этого случая  $\dot{P} = 0$ , то имеем:

$$\mu \dot{\lambda} + B_2 \lambda = \left(1 + \frac{B_2}{B_1}\right) P_0,$$

откуда, интегрируя получимся для величины  $\lambda$  линейное дифференциальное уравнение, найдем:

$$\lambda = \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}\right) P_0 + C e^{-\frac{B_2}{\mu} t},$$

а так как при  $t=0$   $\lambda = \lambda_0$ , то

$$\lambda_0 = \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}\right) P_0 + C$$

и окончательно:

$$\lambda = \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}\right) P_0 + \left\{ \lambda_0 - \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}\right) P_0 \right\} e^{-\frac{B_2}{\mu} t}.$$

Из рассмотрения этого выражения следует, что деформация модели под постоянной силой с течением времени стремится к значению

$$\left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}\right) P_0,$$

независимо от первоначальной деформации. Это стремление будет тем энергичнее, чем больше величина  $\frac{B_2}{\mu}$ , которую следует назвать скоростью последствия.

Пусть, наконец, модель подвергнута деформации и закреплена так, что деформация ее составляет постоянную величину  $\lambda_0$ . Тогда в модели разовьется некоторое усилие  $P$ , которое будет изменяться с течением времени (релаксация).

Пусть  $P_0$  — значение этого усилия в некоторый момент времени  $t_0 = 0$ ; тогда, замечая, что для этого случая  $\dot{\lambda} = 0$ , получим для определения усилия  $P$  дифференциальное уравнение

$$\frac{\mu}{B_1} \dot{P} + \left(1 + \frac{B_2}{B_1}\right) P = B_2 \lambda_0$$

с начальным условием  $P = P_0$  при  $t = 0$ .

Интегрируя его, получим:

$$P = \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \lambda_0 + C e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t}$$

причем константа  $C$  определится из условия:

$$P_0 = \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \lambda_0 + C$$

и, следовательно,

$$P = \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \lambda_0 + \left\{ P_0 - \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \lambda_0 \right\} e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t}$$

Таким образом усилие  $P$  в модели, поддерживаемой в постоянном деформированном состоянии, будет стремиться к значению

$$\frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \lambda_0$$

не зависящему от начальных условий процесса. Это стремление будем тем интенсивнее, чем больше величина  $\frac{B_1 + B_2}{\mu}$ , которую следует назвать скоростью релаксации (обратная величина скорости релаксации иногда называется периодом релаксации, так как имеет размерность времени). Приведенные математические рассуждения, очевидно, полностью подтверждают описанные явления, схематически изображенные на фиг. 2 и 3, так в этих явлениях как раз имеют место внезапное (точнее, достаточно быстрое) приложение нагрузки или изменение деформации и постоянное действие силы, или поддержание постоянной деформации.

Возвращаясь теперь к закону деформирования неупругого стержня, замечаем, что этот закон можно представить в виде  $\sigma + r\dot{\sigma} = b\varepsilon + bn\dot{\varepsilon}$ , разделив правую и левую части соотношения, выражающего закон деформирования на коэффициент при  $\sigma$  и введя новые константы  $r$ ,  $b$  и  $n$ .

Эти константы имеют простой физический смысл. Действительно, написанное соотношение тождественно закону деформирования рассмотренной выше модели, который можно представить в виде

$$\dot{P} + \frac{B_1 + B_2}{\mu} P = B_1 \dot{\lambda} + \frac{B_1 B_2}{\mu} \lambda$$

При этом следует положить  $\sigma = P$ ,  $\dot{\sigma} = \dot{P}$ ,  $\varepsilon = \lambda$ ,  $\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda}$ ,

$$r = \frac{B_1 + B_2}{\mu}, \quad b = B_1 \quad \text{и} \quad n = \frac{B_2}{\mu}$$

Таким образом константа  $r$  представляет собой скорость упругого последствия,  $r$  — скорость релаксации напряжений и  $b$  — модуль упругости при быстрых деформированиях стержня. Жесткости второй (внутренней) пружины модели  $B_2$  будет соответствовать величина  $\frac{bn}{r-n}$ , а коэффициенту вязкости  $\mu$  — величина  $\frac{b}{r-n}$ , в чем легко убедиться, решая соотношения

$$r = \frac{B_1 + B_2}{\mu} \quad \text{и} \quad n = \frac{B_2}{\mu}$$

относительно  $B_2$  и  $\mu$ , замечая, что  $B_1 = b$ .

Как любопытное следствие отметим, что скорость релаксации  $r$  всегда больше скорости последствия.

#### Изгиб неупругого стержня

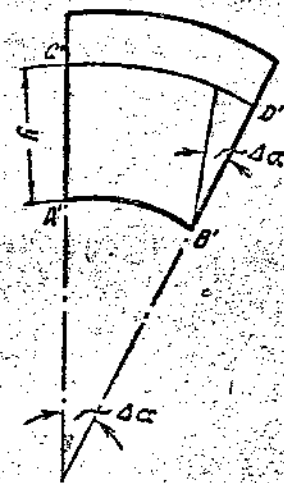
Обобщение закона неупругого растяжения-сжатия на другие виды деформации встречает некоторые трудности, поэтому ограничимся лишь элементарной теорией изгиба бруса из неупругого материала.

Будем считать, так же как это делается в теории сопротивления материалов, нормальные сечения бруса плоскими в течение всего времени деформирования, а нормальные напряжения, развивающиеся по сечению, — подчиняющимися закону

$$\sigma + r\dot{\sigma} = b n \varepsilon + b \dot{\varepsilon}$$

где  $\varepsilon$  — относительное удлинение волокон бруса. Если плоскость действия изгибающей пары  $M$  совпадает с плоскостью симметрии бруса, то изгиб бруса будет происходить в одной плоскости, и относительное удлинение волокон, находящихся на расстоянии  $y$  от плоскости, перпендикулярно к плоскости симметрии бруса и проходящей через нижнее волокно бруса (фиг. 4), будет составлять величину  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa y$ , где  $\varepsilon_0$  — удлинение нижнего волокна и  $\kappa$  — радиус кривизны нейтрального слоя.

Действительно, до деформации длина нижнего волокна  $AB$  равна длине волокна  $CD$ , находящегося на расстоянии  $y$  от нижнего волокна (или, точнее, от плоскости, проходящей через нижнее волокно перпендикулярно плоскости симметрии). После деформации крайние сечения элемента бруса повернутся друг относительно друга на некоторый угол  $\Delta\alpha$ , оставаясь при этом



Фиг. 4

плоскими по предположению. Длины волокон будут теперь уже другие и составят соответственно величины  $A'B'$  и  $C'D'$ . Очевидно, с точностью до малых высших порядков, имеет место:

$$z = \frac{C'D' - CD}{CD} = \frac{C'D' - A'B' + A'B' - AB}{AB} = y \frac{\Delta z}{AB} + z_0,$$

а так как  $\frac{\Delta z}{AB} = \kappa$  составляет кривизну нейтрального слоя волокон, то  $z = z_0 + \kappa y$ .

Легко теперь показать, что нейтральный слой пройдет через центр тяжести сечения, если на брус не действуют продольные силы. Действительно, в этом случае в течение всего времени процесса изгиба имеем  $\iint \sigma dF$ , где двойной интеграл распространен по всей площади поперечного сечения бруса, причем напряжение  $\sigma$  является функцией координат точек сечения и времени. Так как интеграл в течение всего времени изгиба бруса равен нулю, то

$$\frac{d}{dt} \iint \sigma dF = \iint \dot{\sigma} dF = 0.$$

Складывая с  $r \iint \sigma dF = 0$ , получим

$$\iint \dot{\sigma} + r \sigma dF = 0.$$

Далее, так как  $\sigma + r z = b \epsilon + b n \kappa$ , то имеет место  $\iint (b \dot{\epsilon} + n b \dot{\kappa}) dF = 0$ .

Подставляя сюда  $\epsilon = \epsilon_0 + \kappa y$  и  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 + \dot{\kappa} y$ , получим:

$$(b \dot{\epsilon}_0 + n b \dot{\kappa}) \iint dF + (b \kappa + n b \kappa) \iint y dF = 0,$$

так как  $\epsilon_0$ ,  $\kappa$  и  $\dot{\kappa}$  — постоянные по отношению к процессу интегрирования по площади.

Замечая, что  $\iint y dF = F y_c$ , где  $y_c$  — расстояние до центра тяжести, получим, производя сокращения:

$$\dot{\epsilon}_0 + \kappa y_c + n (\dot{\epsilon}_0 + \dot{\kappa} y_0) = 0,$$

а так как  $\epsilon_0 + \kappa y_c$  представляет собой относительное удлинение волокна, лежащего в слое волокон, проходящем через центр тяжести сечения, то имеем  $\epsilon_c + n \epsilon = 0$ , откуда  $\epsilon_c = C e^{-n t}$ , и если в начальный момент имело место  $\epsilon_c = 0$ , то оно останется и в дальнейшем.

Таким образом нейтральный слой при поперечном изгибе не вполне упругого стержня проходит через центр тяжести сечения. Чтобы подсчитать изгибающий момент в каком-либо сечении, достаточно вычислить интеграл  $M = \iint y \sigma dF$ . При этом изгибающий момент  $M$  окажется также и функцией времени, причем

$$M = \frac{\partial M}{\partial t} = \iint y \dot{\sigma} dF.$$

Если составить выражение

$$M + r M = \iint y (\sigma + r z) dF,$$

то, подставляя сюда  $\sigma + r z = b \epsilon + b n \kappa$  и замечая, что  $\epsilon = \epsilon_0 + \kappa y$  и  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 + \dot{\kappa} y$ , получим

$$M + r M = (b \dot{\epsilon}_0 + b n \dot{\kappa}) \iint y dF + (b \kappa + b n \kappa) \iint y^2 dF,$$

а так как, согласно предыдущему, имеем  $\epsilon_c + n \epsilon_0 + (\kappa + n \kappa) y_c = 0$ , то

$$M + r M = (b \kappa + b n \kappa) (J_0 - F y_c^2).$$

Выражение  $J_0 - F y_c^2 = J$  представляет собой момент инерции площади сечения относительно центральной оси, расположенной в нейтральном слое сечения.

Окончательно имеем следующую зависимость между изгибающим моментом  $M$  и кривизной нейтрального слоя волокон стержня:

$$M + r M = b J \kappa + b n J \kappa.$$

При малых деформациях можно принять, как и в теории сопротивления материалов:

$$\kappa = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

где  $v$  — смещение сечения в направлении, нормальном к недеформированной оси балки, принятой за ось  $x$ . При этом можно развить теорию интегрирования упругой линии стержня, аналогичную в некоторых случаях обычной теории сопротивления материалов.

Ограничимся рассмотрением простейшего примера изгиба балки из не вполне упругого материала, лежащей на двух опорах и нагруженной переменным грузом посередине балки. Из условий  $v = 0$  при  $x = 0$  и  $x = b$  следует, что для любого  $t$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \text{ и, следовательно,}$$

$$W = \frac{\partial v}{\partial t} + n v = 0$$

в точках  $x = 0$  и  $x = l$ .

Точно так же можно показать, что посередине балки, т. е. при

$$x = \frac{l}{2}, \text{ имеет место } \frac{\partial W}{\partial x} = 0.$$

Далее, изгибающий момент в каком-либо сечении левой половины балки имеет выражение

$$M = \frac{1}{2} P x$$

и, следовательно,

$$\dot{M} = \frac{1}{2} \dot{P} x.$$

Таким образом получим  $M + rM = \frac{1}{2} Qx$ , где введено обозначение  $Q = \dot{P} + rP$ .

Замечая теперь, что

$$bjx + bnjx = bj \left( \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + n \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = bj \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( v + n \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

получим из дифференциального уравнения изгиба бруса соотношение

$$bj \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{1}{2} Qx$$

для левой половины балки и

$$bj \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{1}{2} Q(l-x)$$

для правой.

Эти соотношения ничем не отличаются от уравнений сопротивления материалов для данного случая нагрузки балки, если только вместо прогиба подставить функцию  $W$  и вместо силы, вызывающей изгиб, — величину  $Q$ . Так как и граничные условия остаются точно такими же, как в сопротивлении материалов, то, интегрируя получившиеся два дифференциальных уравнения, найдем следующее значение величины  $W$  в середине балки (т. е. при  $x = \frac{l}{2}$ ):

$$W = \frac{Ql^3}{48bj}$$

откуда, подставляя значения  $W$  и  $Q$ , получим соотношение между прогибом в середине балки из неупругого материала  $v$  и силой  $P$ , вызывающей этот прогиб:

$$P + rP = \frac{48bj}{l^3} (v + nv)$$

Это соотношение аналогично закону, выражающему связь между напряжением и деформацией при простом растяжении, т. е. соотношению

$$\sigma + n\sigma = b\varepsilon + bn\varepsilon$$

Максимальное напряжение при изгибе определяется по обычным формулам сопротивления материалов, что нетрудно доказать. Действительно, из гипотезы плоских сечений следует  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \chi y$ , где  $\varepsilon_0$  — удлинение нижнего волокна, а из условия прохождения нейтрального слоя через центр тяжести следует

$O = \varepsilon_0 + \chi y_c$ . Исключая из обеих написанных равенств величину  $\varepsilon_0$ , получим:

$$\varepsilon = \chi(y - y_c) \quad \text{и} \quad \varepsilon \chi(y - y_c)$$

и, следовательно,

$$\sigma + r\sigma = b\chi(y - y_c)(\chi + n\chi)$$

Так как при  $t=0$  балка была неизгружена и, значит, вместо  $\sigma = 0$ , то интеграл написанного выше уравнения, как легко проверить, имеет вид:

$$\sigma = e^{-rt} \int e^{rt} b\chi(y - y_c)(\chi + n\chi) dt,$$

откуда вытекает, что напряжения меняются по линейному закону, обращаясь в нуль в нейтральном слое, т. е. так же, как и в обычной теории сопротивления материалов, поэтому имеет место формула

$$\sigma = \frac{M}{J} (y - y_c),$$

где  $y - y_c$  — расстояние слоя рассматриваемых волокон от нейтрального слоя.

#### Гипотезы разрушения вязкоупругого материала

Наличие двух упругих начал, соответственно двум пружинам в модели, заставляет думать о том, что возможны два вида разрушения бруса из неупругого материала при растяжении. Первому разрушению соответствует разрыв первой пружины модели. Это разрушение назовем внешним; оно будет иметь место, когда напряжение  $\sigma$  превысит некоторую предельную величину  $\sigma_1$ , или соответственно на модели при значении растягивающей силы  $P$ , превышающем некоторое предельное значение  $P_1$ .

Второму разрушению соответствует разрыв второй пружины модели; назовем его внутренним. Разрыв второй пружины будет иметь место, когда приходящееся на нее усилие превысит некоторое предельное значение  $P_2$ . Удлинение  $\lambda_2$  второй пружины составляет величину  $\lambda - \lambda_1$ , где  $\lambda_1 = \frac{P}{B_1}$  — удлинение первой пружины. Так как усилие, возникающее во второй пружине, равно

$$B_2 \lambda_2 = B_2 \left( \lambda - \frac{P}{B_1} \right),$$

то ее разрушение наступит при выполнении условия

$$B_2 \lambda - \frac{P}{B_1} > P_2.$$

Соответственно для разрушения стержня необходимо выполнение условия

$$\frac{bn}{r-n} \left( \varepsilon - \frac{\sigma}{b} \right) > \varepsilon_2,$$

так как следует положить для перехода от модели к стержню  $B_2 = \frac{bn}{r-n}$ ,  $B_1 = b$ ,  $\lambda = \varepsilon$  и  $P = \sigma$ . Предельному усилию  $P_2$  будет соответствовать некоторое напряжение  $\sigma_2$ .

Обозначая  $\frac{\sigma_2(r-n)}{bn}$  через  $\varepsilon_2$ , можно написать последнее условие разрушения следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{b} > \varepsilon_2,$$

причем левая часть, очевидно, соответствует удлинению второй пружины модели.

Для большей наглядности в дальнейшем будем рассматривать лишь условия разрушения модели. Таким образом разрушение будет иметь место при выполнении одного из следующих условий:

$$P > P_1, \text{ или } B_2 \left( \lambda - \frac{P}{B_1} \right) > P_2.$$

Так как усилие, возникающее во второй пружине, всегда меньше усилия, возникающего в первой пружине, то внутреннее разрушение модели, т. е. выполнение второго условия, возможно лишь при  $P_2 < P_1$ , что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Можно указать предельное удлинение модели, при достижении которого непременно произойдет разрушение. Действительно, наибольшее удлинение первой пружины, не вызывающее ее разрушения,  $\lambda_1 = \frac{P_1}{B_1}$ , тогда как у второй пружины будет соответственно  $\lambda_2 = \frac{P_2}{B_2}$ . Поэтому

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{P_1}{B_1} + \frac{P_2}{B_2}$$

наибольшее из всех возможных удлинений модели без разрушения. В действительности разрушение может произойти и при меньшем удлинении, но не ниже, конечно, значения  $\lambda = \frac{P_2}{B_2}$ , если  $P_2 < P_1$ .

### Разрушение постоянной силой

Если к модели приложена сила, превышающая значение  $P_1$ , то разрушение произойдет немедленно (внешнее разрушение). Если сила меньше предельного значения  $P_2 < P_1$ , то разрушения вообще не произойдет. Наконец, если величина силы является промежуточной между значениями  $P_1$  и  $P_2$ , то разрушение будет внутренним и произойдет спустя некоторое время после приложения нагрузки.

Ранее уже было найдено, что под постоянной нагрузкой  $P_0$  модель деформируется по закону

$$\lambda = \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) P_0 + \left[ \lambda_0 - \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) P_0 \right] e^{-\frac{B_2 t}{\mu}}$$

что получилось в результате интегрирования дифференциального уравнения, связывающего величины деформации  $\lambda$  и усилия  $P$  при начальном условии  $\lambda = \lambda_0$  при  $t = 0$ . Здесь следует принять  $\lambda_0 = \frac{P_0}{B_0}$ , потому что сила, приложенная к деформированной модели, вызовет немедленно удлинение  $\lambda_0$  первой пружины. Получим:

$$\lambda = \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) P_0 - \frac{P}{B_2} e^{-\frac{B_2 t}{\mu}}$$

Подставляя это выражение в условие разрушения

$$B_2 \left( \lambda - \frac{P}{B_1} \right) > P_2,$$

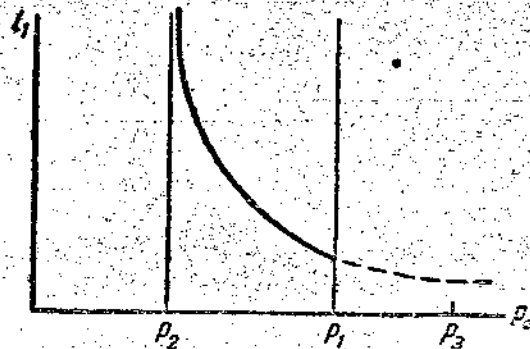
получим условие

$$P_0 \left( 1 - e^{-\frac{B_2 t}{\mu}} \right) > P_2,$$

которое удовлетворится, если значение времени  $t$  будет превышать величину

$$t_2 = \frac{\mu}{B_2} \ln \frac{P_0}{P_0 - P_2}$$

Примерный график зависимости между моментом  $t_2$  наступления разрушения и величиной нагрузки представлен на фиг. 5. Так как при  $P_0 = P_1$  наступает уже внешнее разрушение, то при  $P_0 > P_2$  ордината кривой графика обра-



Фиг. 5

падает в нуль, т. е. разрушение наступает мгновенно. Если  $P_0 < P_2$ , то разрушение наступает в момент времени  $t_2$ , всегда превышающий значение

$$\frac{\mu}{B_2} \ln \frac{P_2}{P_1 - P_2}.$$

Значение  $t_2$  становится бесконечно большим при  $P_0 = P_2$ , что очевидно.

Факт разрушения материалов спустя некоторое время после приложения нагрузок экспериментально подтверждается.

#### Разрушение внезапно вызванной деформацией

При внезапно вызванной деформации  $\lambda_0$  в первый момент времени окажется нагруженной лишь первая пружина и, следовательно, усилие, возникшее в модели, будет составлять

$$P_0 = B_1 \lambda_0.$$

Ранее был получен закон

$$P = \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \lambda_0 + \left( P_0 - \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \lambda_0 \right) e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t}$$

изменения усилия, возникшего в модели при условии постоянства деформации  $\lambda = \lambda_0$ . Положив  $P_0 = B_1 \lambda_0$ , получим

$$P = \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \lambda_0 + \lambda_0 \frac{B_1^2}{B_1 + B_2} e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t}.$$

Если  $B_1 \lambda_0 > P_1$ , то, очевидно, произойдет внешнее разрушение модели немедленно после внезапного деформирования. Если же  $B_1 \lambda_0 < P_1$ , то разрушение может быть лишь внутренним, для чего необходимо выполнение условия:

$$B_2 \left( \lambda - \frac{P}{B_1} \right) = B_2 \left( \lambda_0 - \frac{B_2}{B_1 + B_2} \lambda_0 - \lambda_0 \frac{B_1}{B_1 + B_2} e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t} \right) > P_2,$$

или, производя упрощения:

$$\lambda_0 \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \left( 1 - e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t} \right) > P_2.$$

Левая часть неравенства возрастает при неограниченном увеличении значения времени  $t$ , но остается меньше значения

$$\lambda_0 \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2}.$$

Поэтому, чтобы разрушение наступило, необходимо иметь

$$\lambda_0 > \frac{B_1 + B_2}{B_1 B_2} P_2.$$

Момент времени разрушения  $t_2$  при выполнении этого условия определяется из равенства

$$\lambda_0 \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \left( 1 - e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t_2} \right) = P_2.$$

Таким образом

$$t_2 = \frac{\mu}{B_1 + B_2} \ln \frac{1}{1 - \frac{P_2 (B_1 + B_2)}{B_1 B_2 \lambda_0}}.$$

Факт разрушения материалов спустя некоторое время после деформирования подтвержден также экспериментально.

#### Разрушение равномерным деформированием

Если деформацию модели производить по закону  $\lambda = vt$ , то усилие, возникающее в модели, можно определить, интегрируя уравнение

$$\dot{P} + \frac{B_1 + B_2}{\mu} P = \frac{B_1 B_2}{\mu} \lambda + B_1 \dot{\lambda}.$$

Так как  $\lambda = vt$ , и, следовательно,  $\dot{\lambda} = v$ , то общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$P = C e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t} + \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} vt + \frac{B_1^2}{(B_1 + B_2)^2} \mu v,$$

причем константа  $C$  определяется из условия обращения в нуль усилия в начальный момент времени; следовательно,

$$P = \frac{B_1^2}{(B_1 + B_2)^2} \mu v \left( 1 - e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t} \right) + \frac{B_1 + B_2}{B_1 + B_2} vt.$$

Внешнее разрушение наступит в момент  $t_1$ , при котором будет иметь место равенство

$$\frac{B_1^2}{(B_1 + B_2)^2} \mu v \left( 1 - e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t_1} \right) + \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} vt_1 = P_1.$$



Однако, может случиться и так, что внутреннее разрушение наступит в более ранний момент времени  $t_2$ . Так как условием внутреннего разрушения является удовлетворение неравенства

$$B_2 \left( \lambda - \frac{P}{B_1} \right) > P_2,$$

то момент времени внутреннего разрушения  $t_2$  определяется из уравнения:

$$B_2 \left[ vt - \frac{B_1}{(B_1 + B_2)^2} \mu v \left( 1 - e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t} \right) - \frac{B_2}{B_1 + B_2} vt_2 \right] = P_2,$$

или, после очевидного упрощения:

$$\frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} vt_2 - \frac{B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^2} \mu v \left( 1 - e^{-\frac{B_1 + B_2}{\mu} t} \right) = P_2.$$

Как легко усмотреть из уравнений, определяющих моменты разрушения  $t_1$  и  $t_2$ , внутреннее разрушение сможет произойти, если  $P_2 < P_1$  и, кроме того, скорость деформирования достаточно мала. При достаточно большой скорости деформирования, напротив, всегда будет иметь место внешнее разрушение.

Можно подсчитать работу, которую совершит внешняя сила, производя разрушение. Так как элементарное перемещение точки приложения силы  $P$  составляет величину  $v dt$ , то работа разрушения представляется интегралом

$$A = \int_0^t P v dt.$$

Верхний предел  $t$  следует полагать равным наименьшему из чисел  $t_1$  и  $t_2$ .

Чтобы произвести фактический подсчет работы, затрачиваемой на разрушение, и оценить влияние скорости на величину работы, перейдем к безразмерным величинам. Для этой цели введем прежде всего безразмерную величину  $\tau$ , связанную с временем  $t$  соотношением

$$\tau = \frac{B_1 + B_2}{\mu} t.$$

Тогда закон изменения усилия  $P$  будет иметь вид:

$$P = \frac{B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^2} \mu v \left[ \frac{B_1}{B_2} (1 - e^{-\tau}) + \tau \right].$$

Моменту наступления внешнего разрушения  $t_1$  будет соответствовать некоторое значение величины  $\tau_1$ , определяемое из уравнения:

$$P = \frac{B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^2} \mu v \left[ \frac{B_1}{B_2} (1 - e^{-\tau_1}) + \tau_1 \right] = P_1$$

или

$$v \left[ \frac{B_1}{B_2} (1 - e^{-\tau_1}) + \tau_1 \right] = P_1,$$

где  $P_1 = \frac{(B_1 + B_2)^2}{B_1 B_2} \cdot \frac{P_1}{\mu}$  — известная постоянная.

Точно так же величина  $\tau_2$ , соответствующая моменту наступления внутреннего разрушения  $t_2$ , определится из равенства:

$$B_2 \left\{ v \frac{\mu}{B_1 + B_2} \tau_2 - \frac{B_2}{(B_1 + B_2)^2} \left[ \frac{B_1}{B_2} (1 - e^{-\tau_2}) + \tau_2 \right] \right\} = P_2$$

или, после очевидных упрощений:

$$v (\tau_2 - 1 + e^{-\tau_2}) = P_2,$$

где

$$P_2 = \frac{(B_1 + B_2)^2 P_2}{B_1 B_2 \mu}$$

может быть подсчитано по известным величинам.

Выражение для работы, расходуемой на разрушение, примет вид:

$$A = \int_0^t P v dt = \int_0^{\tau} \frac{B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^2} \mu v \left[ \frac{B_1}{B_2} (1 - e^{-\tau}) + \tau \right] v \frac{\mu}{B_1 + B_2} d\tau = \frac{\mu^2 v^2 B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^2} \left[ \frac{B_1}{B_2} (\tau + e^{-\tau} - 1) + \frac{\tau^2}{2} \right].$$

причем вместо  $\tau$  следует подставить наименьшую из величин  $\tau_1$  и  $\tau_2$ .

Следует отметить два крайних случая: 1) деформирование с очень большой скоростью  $v$ , 2) деформирование с очень малой скоростью. При большом значении  $v$  разрушение будет наступать очень скоро и, следовательно, значение величины  $\tau_2$  будет весьма малым. Поэтому, замечая, что

$$e^{-\tau} = 1 - \tau + \frac{\tau^2}{1 \cdot 2} - \frac{\tau^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

можно уравнение для определения величины  $\tau_2$  написать так:

$$v \left[ \frac{B_1}{B_2} (1 - e^{-\tau_1}) + \tau_1 \right] \approx v \left( \frac{B_1}{B_2} \tau_1 + \tau_1 \right) = P_1,$$

откуда, пренебрегая малыми высших порядков:

$$\tau_1 \approx \frac{p_1 B_2}{v(B_1 + B_2)}$$

Заметим, что величина  $\tau_2$ , соответствующая внутреннему разрушению, будет в этом случае значительно больше. Действительно, уравнение для определения  $\tau_2$  можно записать так:

$$v \left( \tau_2 - 1 + 1 - \tau_2 + \frac{\tau_2^2}{2} - \frac{\tau_2^3}{6} + \dots \right) = p_2,$$

откуда, пренебрегая малыми третьего порядка и выше, получим:

$$\tau_2 \approx \sqrt{\frac{2p_2}{v}}$$

Составляя отношение  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , имеем:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{p_1 B_2 \sqrt{2p_2}}{(B_1 + B_2) \sqrt{v}}$$

откуда непосредственно видно, что при достаточно большой скорости деформирования  $v$  величина  $\tau_1$  будет произвольно меньше  $\tau_2$ .

Для малых значений  $\tau$  выражение работы, расходуемой на разрушение, можно записать так:

$$A = \frac{\mu^2 v^2 B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^3} \left[ \frac{B_1}{B_2} \left( \tau + 1 - \tau + \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{6} + \dots \right) + \frac{\tau^2}{2} \right] \approx \frac{\mu^2 v^2 B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^3} \left( \frac{B_1}{B_2} + 1 \right) \frac{\tau^2}{2}$$

Представляя сюда вместо  $\tau$  величину

$$p_1 \frac{B_2}{v(B_1 + B_2)}$$

и замечая, что

$$p_1 = \frac{(B_1 + B_2)^2}{B_1 B_2} \cdot \frac{P_1}{\mu},$$

получим, произведя сокращения,

$$A = \frac{P_1^2}{2B_1},$$

что представляет собой работу, которую надлежало бы затратить для растяжения первой пружины модели до создания в ней усилия  $P_1$ . Этот результат можно было бы предвидеть сразу,

учтя, что при быстром деформировании вторая пружина модели вследствие наличия вязкости не успеет сколько-нибудь заметно деформироваться.

Чтобы подсчитать работу, требуемую на внешнее разрушение при не слишком больших скоростях, следует, очевидно, совместно решить два уравнения:

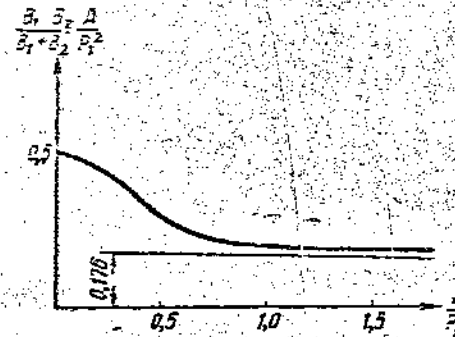
$$v \left[ \frac{B_1}{B_2} (1 - e^{-\tau_1}) + \tau_1 \right] = P_1 = \frac{(B_1 + B_2)^2}{B_1 B_2} \cdot \frac{P_1}{\mu}$$

и

$$v^2 \left[ \frac{B_1}{B_2} (\tau_1 + e^{-\tau_1} - 1) + \frac{\tau_1^2}{2} \right] = a = \frac{(B_1 + B_2)^3}{B_1 B_2} \cdot \frac{A}{\mu^2}$$

исключая из них  $\tau_1$  и найдя работу  $A$  как функцию скорости. Для практических целей проще задаваться частными значениями  $\tau_1$  и  $n$ , определяя по ним значения скорости  $v$  из первого уравнения, подсчитывая по второму уравнению соответствующее этой скорости значение работы  $A$ .

На фиг. 6 дан график зависимости между безразмерными величинами



Фиг. 6

$$\frac{v}{P_1} = v \frac{\mu B_1 B_2}{P_1 (B_1 + B_2)^2} = \frac{B_2}{B_1} (1 - e^{-\tau_1}) + \tau_1$$

и

$$\frac{a}{P_1^2} = \frac{B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^3} \cdot \frac{A}{P_1^2} = \frac{\frac{B_2}{B_1} (\tau_1 + e^{-\tau_1} - 1) + \frac{\tau_1^2}{2}}{\left[ \frac{B_2}{B_1} (1 - e^{-\tau_1}) + \tau_1 \right]^2}$$

при частном значении отношения  $\frac{B_1}{B_2} = 2$ .

Не представляет труда построить соответствующие графики и для других значений отношения  $\frac{B_1}{B_2}$  и, кроме того, произвести по ним пересчеты на величины скоростей  $v$  и соответствующие величины работ  $A$ , если известны константы  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $\mu$  и  $P_1$ .

График, изображенный на фиг. 6, перестает быть справедливым при достаточно малом значении скорости  $v$ , так как вместо внешнего разрушения при малой скорости деформирования будет разрушение внутреннее. Действительно, при весьма малом

значении  $v$  значение  $\tau_1$  будет велико, и, следовательно, можно записать:

$$p_1 = v \left[ \frac{B_2}{B_1} (1 - e^{-\tau_1}) + \tau_1 \right] \approx v \left( \frac{B_2}{B_1} + \tau_1 \right) \text{ и } \tau_1 \approx \frac{p_1}{v} - \frac{B_2}{B_1},$$

тогда как для величины  $\tau_2$  получим:

$$p_2 = v (\tau_2 - 1 + e^{-\tau_2}) \approx v (\tau_2 - 1) \text{ и } \tau_2 \approx \frac{p_2}{v} + 1.$$

Очевидно, что будет иметь место  $\tau_2 < \tau_1$ , если  $p_1 > p_2 + (1 + \frac{B_2}{B_1})v$ , т. е.  $P_2$  в достаточной мере меньше  $P_1$ .

Можно ограничиться для величины  $\tau_2$  значением  $\frac{p_2}{v}$ , которое будет тем точнее, чем меньше скорость деформирования  $v$ . Далее величина работы, затрачиваемой на разрушение, выразится при этом приближенно так:

$$A = \frac{\mu^2 v^2 B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^2} \left[ \frac{B_1}{B_2} (\tau_2 + e^{-\tau_2} - 1) + \frac{\tau_2^2}{2} \right] \approx \frac{\mu^2 v^2 B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^2} \cdot \frac{\tau_2^2}{2}.$$

Подставляя сюда

$$\tau_2 \approx \frac{p_2}{v} = \frac{(B_1 + B_2)^2}{B_1 B_2} \cdot \frac{P_2}{\mu v},$$

получим:

$$A = \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right) \frac{P_2^2}{2}.$$

Это тоже можно было усмотреть непосредственно, так как приведенная выше величина представляет работу, которую нужно затратить для растяжения обеих пружин до создания в них усилия  $P_2$ ; при этом потери на сопротивление поршня в вязкой жидкости ничтожно малы вследствие весьма малой скорости деформирования.

Чтобы подсчитать работу, потребную на разрушение при не слишком малой скорости деформирования, следует, очевидно, совместно решить два уравнения:

$$v (\tau_2 - 1 + e^{-\tau_2}) = p_2 = \frac{(B_1 + B_2)^2}{B_1 B_2} \cdot \frac{P_2}{\mu}$$

и

$$v^2 \left[ \frac{B_1}{B_2} (\tau_2 + e^{-\tau_2} - 1) + \frac{\tau_2^2}{2} \right] = a = \frac{(B_1 + B_2)^2}{B_1 B_2} \cdot \frac{A}{\mu^2},$$

из которых можно по заданной величине скорости подсчитать величину работы  $A$ .

Замечая аналогично предыдущему, что

$$\frac{v}{p_2} = \frac{1}{\tau_2 - 1 + e^{-\tau_2}} \text{ и } \frac{a}{p_2^2} \approx \frac{\frac{B_1}{B_2} (\tau_2 + e^{-\tau_2} - 1) + \frac{\tau_2^2}{2}}{(\tau_2 - 1 + e^{-\tau_2})^2},$$

можно, задаваясь последовательными частными значениями  $\tau_2$ , построить графически зависимость между безразмерными величинами

$$\frac{v}{p_2} = v \frac{\mu B_1 B_2}{P_1 (B_1 + B_2)^2} \text{ и } \frac{a}{p_2^2} = \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \cdot \frac{A}{P_2^2},$$

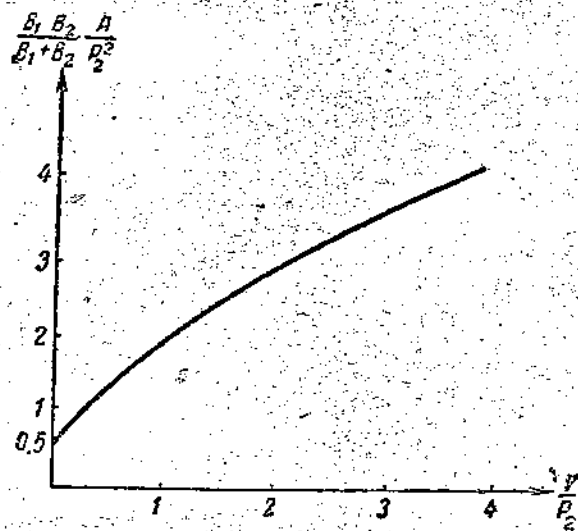
отправляясь от которых, легко перейти и к зависимости работы  $A$  от скорости деформирования  $v$ .

На фиг. 7 построен такой график для значения отношения

$$\frac{B_1}{B_2} = 2.$$

Этот график справедлив лишь для достаточно малых скоростей деформирования, так как при больших скоростях произойдет уже внешнее разрушение, и тогда следует пользоваться графиком, изображенным на фиг. 6.

Значение скорости деформирования, отделяющее область внутреннего разрушения от внешнего, можно найти, решая совместно два уравнения:



Фиг. 7

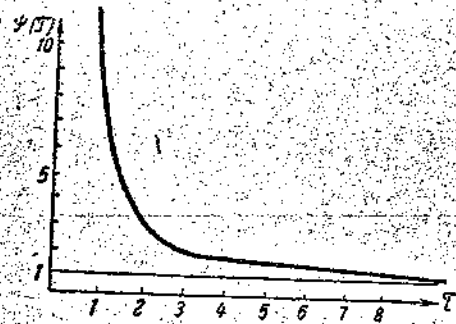
$$v \left[ \frac{B_1}{B_2} (1 - e^{-\tau_1}) + \tau_1 \right] = p_1$$

и

$$v (\tau_2 - 1 + e^{-\tau_2}) = p_2,$$

где следует положить  $\tau_1 = \tau_2$ . Так например, если попеременно

$\frac{B_1}{B_2} = 2$  и, кроме того,  $P_1 = 3P_2$ , то будем иметь



Фиг. 8

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{P_1}{P_2} = 3$$

и, следовательно,

$$3 = \frac{2(1 + e^{-\tau}) + \tau}{\tau - 1 + e^{-\tau}} \varphi(\tau).$$

График функции  $\varphi(\tau)$  изображен на фиг. 8. Значение 3 функция  $\varphi(\tau)$  принимает при  $\tau_1 = 2,23$ , и таким образом граничное значение скорости

$$v = p_1 \left[ \frac{B_1}{B_2} (1 + e^{-\tau_1}) + \tau_1 \right] = 0,25 p_1.$$

Так как для приведенного примера

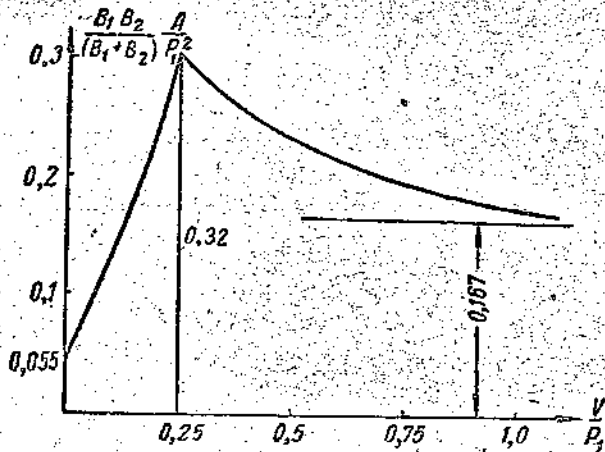
$$\frac{v}{p_1} = \frac{1}{3} \frac{v}{p_a}$$

то кривую зависимости работы, идущей на разрушение, от скорости деформирования  $v$ , точнее — кривую зависимости между безразмерными величинами

$$\frac{v}{p_1} = v \frac{\rho B_1 B_2}{(B_1 + B_2)^2}$$

$$\frac{a}{p^2} = \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2} \cdot \frac{A}{P_1^2}$$

можно построить, соответственно изменив масштаб кривой внутреннего разрушения, изображенной на фиг. 7, и соединить ее с кривой внешнего разрушения (см. фиг. 6). Получающаяся кривая изображена на фиг. 9. Левая ее часть соответствует внутреннему разрушению, правая — внешнему, а абс-



Фиг. 9

цисса точки излома кривой — граничному значению скорости.

Подобным же образом можно описать процесс разрушения и при изгибе. При этом изменились бы лишь константы основного уравнения, так как уравнения

$$p + \frac{B_1 + B_2}{r} p = \frac{B_1 B_2}{r} \lambda \cdot B \cdot \lambda$$

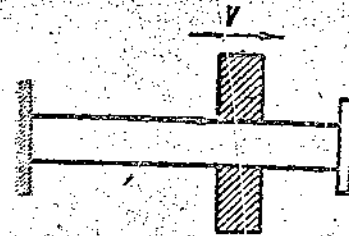
и

$$f + rf = \frac{48EJ}{l^3} (f^2 + nf)$$

вполне аналогичны.

### Разрушение динамической нагрузкой

Пусть стержень из не вполне упругого материала подвергается действию растягивающего удара со стороны массы  $m$ , обладающей скоростью  $v$  (фиг. 10). Если пренебречь влиянием собственной массы стержня, то напряженное и деформированное состояние по его длине будут однородными.



Фиг. 10

Напряжение  $\sigma$  материала будет составлять величину  $\frac{m\dot{u}}{F}$ , где  $F$  — площадь сечения стержня,  $u$  — перемещение правого конца стержня. Так как

$$\frac{u}{l} = \varepsilon, \quad \dot{u} = \dot{\varepsilon} l,$$

то, с другой стороны, напряжение  $\sigma$  и относительное удлинение  $\varepsilon$  не вполне упругого стержня связаны соотношением

$$\sigma + r\varepsilon = b\varepsilon + b_1\varepsilon^2$$

Подставляя сюда выражение для  $\sigma$ , получим дифференциальное уравнение для определения относительного удлинения  $\varepsilon$ :

$$\frac{lm}{F} \ddot{\varepsilon} + \frac{lm}{F} r\dot{\varepsilon} + b\varepsilon + b_1\varepsilon^2 = 0.$$

Так как в момент удара относительное удлинение  $\varepsilon$  и, следовательно, напряжение  $\sigma$  равны нулю, то, принимая этот момент за начало отсчета времени и замечая, что  $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{l} \dot{u}$ , получим для момента времени  $t = 0$ :

$$\varepsilon = 0, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{v}{l}, \quad \ddot{\varepsilon} = 0,$$

что и составит начальные условия дифференциального уравнения. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\varepsilon = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\gamma_3 t},$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  — корни характеристического уравнения

$$\frac{ml}{F} \gamma^3 + \frac{nl}{F} r \gamma^2 + b \gamma + bn = 0.$$

Все коэффициенты этого уравнения положительны, следовательно, корни не могут быть положительными. Поэтому возможны два случая: или все три корня отрицательны, или один корень отрицателен, а два другие — сопряженно комплексные. Покажем, что в последнем случае действительная часть комплексных корней отрицательна.

Действительно, характеристическое уравнение можно переписать в виде:

$$\gamma^3 + r \gamma^2 + \frac{bF}{lm} \gamma + \frac{bFn}{lm} = 0$$

и, по теореме Вьетта, написать:

$$-(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) = r = a_1,$$

$$\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_3 \gamma_1 = \frac{bF}{ml} = a_2,$$

$$-\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \frac{bFn}{ml} = a_3.$$

Обозначая модуль вещественного отрицательного корня через  $x$ , вещественную часть комплексных корней через  $-a$ , а мнимую — через  $\beta$ , получим:

$$\gamma_1 = -x, \quad \gamma_2 = -a + \beta i \quad \text{и} \quad \gamma_3 = -a - \beta i.$$

Ранее было показано, что скорость релаксации  $r$  больше скорости последствия  $n$ , так как при переходе к модели не вполне упругого тела следует положить

$$r = \frac{B_1 + B_2}{\mu} \quad \text{и} \quad n = \frac{B_2}{\mu}.$$

Таким образом, должно иметь место:

$$a_1 a_2 = r \frac{bF}{ml} > n \frac{bF}{ml} a_3,$$

или

$$-(-x - 2a) [-x(-a + \beta i) + (-a + \beta i)(-a - \beta i)] > x(-a + \beta i)(-a - \beta i),$$

что после упрощения принимает вид:

$$(x + 2a)(x^2 + \beta^2 + 2ax) - x(x^2 + \beta^2) > 0,$$

или

$$2x^2 a + 2a(x^2 + \beta^2 + 2ax) = 2a[(x + a)^2 + \beta^2] > 0.$$

Так как величина, стоящая в квадратных скобках, всегда положительна, то это неравенство будет выполняться лишь при условии  $x > 0$ , что и доказывает предположение об отрицательности вещественной части комплексных корней.

В случае наличия комплексных корней характеристического уравнения, общее решение дифференциального уравнения следует записать так:

$$\varepsilon = C e^{-xt} + e^{-at} (A \cos \beta t + B \sin \beta t).$$

Итак, в обоих рассмотренных случаях с течением времени относительное удлинение, в начальный момент возмущенное, так как  $\dot{\varepsilon} = \frac{v}{l} > 0$ , будет в дальнейшем уменьшаться: либо аperiodически — в том случае, когда все три корня характеристического уравнения отрицательны, либо будут иметь место затухающие колебания массы, производившей удар. При этом предположим, что масса, производившая удар, остается после удара связанной с концом стержня.

В дальнейшем представляется более удобным писать общее решение дифференциального уравнения в виде

$$\varepsilon = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} + C_3 e^{\gamma_3 t},$$

где  $\gamma_3$  будем считать действительным отрицательным корнем и  $C_3$  — действительным числом, а  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — в зависимости от обстоятельств, либо действительными, либо комплексными числами. Из начальных условий следует:

$$0 = C_1 + C_2 + C_3,$$

$$\frac{v}{l} = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \gamma_3 C_3,$$

$$0 = \gamma_1^2 C_1 + \gamma_2^2 C_2 + \gamma_3^2 C_3,$$

откуда, решая систему линейных уравнений, получим:

$$C_1 = v \frac{\gamma_2^2 - \gamma_3^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_3 - \gamma_1)},$$

$$C_2 = v \frac{\gamma_3^2 - \gamma_1^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_3 - \gamma_1)},$$

$$C_3 = v \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3)(\gamma_3 - \gamma_1)},$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$  — корни характеристического уравнения

$$\gamma^3 + r\gamma^2 + \frac{bF}{ml}\gamma + \frac{bF}{ml}n = 0.$$

После отыскания величин  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  нетрудно найти напряжение  $\sigma$  как функцию времени. Имеем:  $\sigma + r\sigma = b\ddot{\varepsilon} + bn\varepsilon = C_1(b\gamma_1 + nb)e^{\gamma_1 t} + C_2(b\gamma_2 + nb)e^{\gamma_2 t} + C_3(b\gamma_3 + nb)e^{\gamma_3 t}$ , откуда

$$\sigma = A_0 e^{-rt} + A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} + A_3 e^{\gamma_3 t},$$

где  $A_0$  — произвольная константа, определяемая из условия обращения напряжения  $\sigma$  в нуль в начальный момент времени, т. е. из условия  $0 = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$ .

Другие константы  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , как легко убедиться, соответственно равны величинам:

$$C_1 \frac{b\gamma_1 + nb}{\gamma_1 + r}, C_2 \frac{b\gamma_2 + nb}{\gamma_2 + r} \text{ и } C_3 \frac{b\gamma_3 + nb}{\gamma_3 + r}.$$

Разрушение бруса наступит, как было найдено ранее, при выполнении одного из условий:  $\sigma > \sigma_1$  (внешнее разрушение),  $\frac{bn}{r-n} \left( \varepsilon - \frac{\dot{\varepsilon}}{b} \right) > \sigma_2$  (внутреннее разрушение).

Подставляя сюда значения  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , получим условия в следующем виде:

$$b \left[ C_1 \frac{\gamma_1 + n}{\gamma_1 + r} \left( e^{\gamma_1 t} - e^{-rt} \right) + C_2 \frac{\gamma_2 + n}{\gamma_2 + r} \left( e^{\gamma_2 t} - e^{-rt} \right) + C_3 \frac{\gamma_3 + n}{\gamma_3 + r} \left( e^{\gamma_3 t} - e^{-rt} \right) \right] > \sigma_1 \text{ и}$$

$$bn \left[ \frac{C_1}{\gamma_1 + r} e^{\gamma_1 t} + \frac{C_2}{\gamma_2 + r} e^{\gamma_2 t} + \frac{C_3}{\gamma_3 + r} e^{\gamma_3 t} \right] - \frac{bn}{r-n} e^{-rt} \left[ C_1 \frac{\gamma_1 + n}{\gamma_1 + r} + C_2 \frac{\gamma_2 + n}{\gamma_2 + r} + C_3 \frac{\gamma_3 + n}{\gamma_3 + r} \right] > \sigma_2.$$

Так как в выражения  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  скорость  $v$  ударяющей массы входит множителем, то при достаточно большом значении скорости выполнение одного из написанных выше условий непременно будет иметь место и, следовательно, наступит разрушение бруса. В момент разрушения скорость массы  $m$ , вообще говоря, будет отличаться от нуля, и следовательно, не вся кинетическая энергия массы пойдет на разрушение. Можно подобрать такое значение начальной скорости  $v$ , при котором в момент разрушения скорость массы  $m$  равна нулю и, следовательно, вся энергия массы затратится на разрушение стержня.

При этом для разных значений массы будут получаться различные значения минимальных разрушающих скоростей и различные значения кинетической энергии  $\frac{mv^2}{2}$ .

Может быть и так, что для одной и той же массы получатся две минимальные скорости — одна сравнительно небольшая, соответствующая внутреннему разрушению, и другая — значительно большая, соответствующая внешнему разрушению. Приведенные выше формулы слишком сложны, чтобы можно было исследовать математически этот вопрос в общем виде.

\*