

## ГІДРОМЕХАНІКА

Академік АН УРСР О. Ю. ІШЛІНСЬКИЙ

## ДО ПИТАННЯ ПРО ЕЛЕКТРОМОДЕЛЮВАННЯ РУСЛОВИХ ПОТОКІВ

При моделюванні повільних руслових потоків О. М. Сенков та П. Ф. Фільчаков запропонували використовувати електропровідний папір змінного питомого опору [2].

Зміст аналогії полягає в тому, що осередненій по висоті  $h(x, y)$  швидкості потоку  $v(x, y)$  ставиться у відповідність градієнт потенціалу електричного поля провідного паперу  $V(x, y)$ , тобто

$$v_x = k \frac{\partial V}{\partial x}; \quad v_y = k \frac{\partial V}{\partial y} \quad (1)$$

де  $k$  — деякий сталий коефіцієнт.

В моделі Сенкова й Фільчакова глибина потоку  $h(x, y)$  вважається відомою функцією координат\*.

Нижче дається математичне обґрунтування згаданої аналогії.

Розглянемо будь-який замкнений контур  $s$  в плані потоку і позначимо літерою  $v$  осереднену по координаті  $z$  його горизонтальну швидкість (рис. 1).

Інтеграл

$$\oint_s h v \cos \widehat{v n} ds = \oint_s [h v_x \cos \widehat{x n} + h v_y \cos \widehat{y n}] ds$$

являє собою витрату рідини через вертикальну циліндричну поверхню, яка визначається контуром  $s$ .

З огляду на стаціонарність потоку ця витрата повинна бути рівна нулеві:

$$\oint_s (h v_x \cos \widehat{x n} + h v_y \cos \widehat{y n}) ds = \iint_\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial x} (h v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (h v_y) \right] dx dy = 0. \quad (2)$$

Оскільки рівність (2) має місце при будь-якій формі області  $\sigma$ , то

$$\frac{\partial}{\partial x} (h v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (h v_y) = 0. \quad (3)$$

Вважаючи потік потенціальним, у той же час приходимо до співвідношення

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

\* В цій статті ми не розглядаємо моделі, яку запропонував Н. Т. Мелешенко [1]. У тій моделі беруться до уваги і динамічні елементи потоку, зокрема те, що вільна поверхня рідини не збігається з горизонтальною площиною. Модель Мелешенка приводить до більш складної методики електромоделювання повільних руслових потоків.

яке визначає  
вміру.  
в сміливі

тобто існував  
Враховув

внаслідок чого  
еліптичного

Згадаємо  
папері.

Позначив  
електричного

Згідно з

де  $R$  — величина  
ного куска па  
квадрата.

Опір вим  
затиснути в м  
Із співвід

яке визначає осереднення по висоті рівної нулевій вертикальній компоненті вихру.

Із співвідношення (4) випливає існування функції  $\Phi(x, y)$ , такої, що

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (5)$$

тобто існування потенціалу для осереднених швидкостей потоку.

Враховуючи формули (5), рівність (3) зводимо до вигляду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0, \quad (6)$$

ГІДРОМЕХАНІКА

ШВИДКОСТЕЙ ПОТОКІВ

ав О. М. Сенков та електропровідний папір

висоті  $h(x, y)$  швидкості потенціалу електрич-

(1)

$h(x, y)$  вважається

аналогії. і потоку  $I$  позначимо изотипальну швидкість

$$|s \hat{y}| ds$$

ричну поверхню, яка

а повинна бути рівна

$$-(h v_y) | dx dy = 0, \quad (2)$$

обов'язує, то

(3)

приходимо до співвід-

(4)

онував Н. Т. Мелещенко потоку, зокрема те, що площинною. Модель Мелещювання повільних русло-

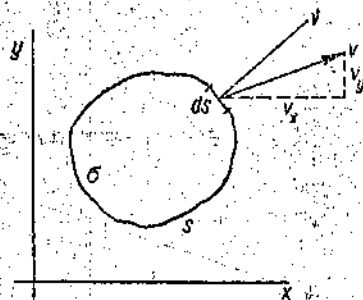


Рис. 1.

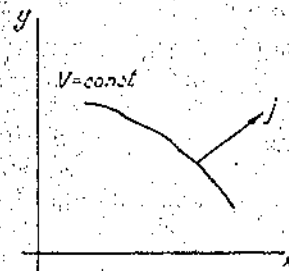


Рис. 2.

внаслідок чого одержуємо диференціальне рівняння в частинних похідних еліптичного типу, що визначає функцію  $\Phi(x, y)$ .

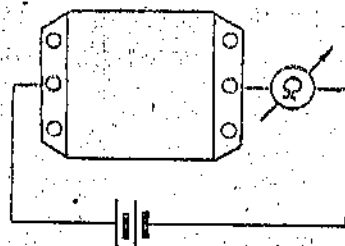


Рис. 3.

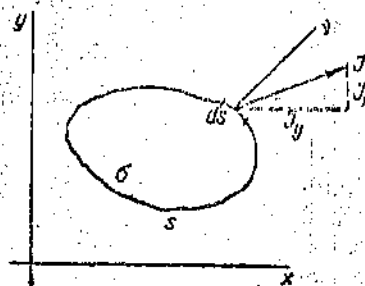


Рис. 4.

Згадаємо тепер закони руху електричного струму в електропровідному папері.

Позначимо літерами  $j$  та  $V$  густину електричного струму та значення електричного потенціалу в будь-якій точці паперу з координатами  $x, y$ .

Згідно з законами електротехніки (рис. 2),

$$j = \frac{1}{R} \text{grad } V, \quad (7)$$

де  $R$  — величина питомого опору паперу, тобто опір відповідного квадратного куска паперу однорідної провідності, віднесений до величини площі квадрата.

Опір вимірюється між протилежними сторонами квадрата, які щільно затиснуті в металеві шини (рис. 3).

Із співвідношення (7) випливає:

$$j_x = \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial x}; \quad j_y = \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial y}. \quad (8)$$

Якщо немає джерел та стоків електрики за межами паперу, то, згідно з законом Кірхгофа, маємо рівність (рис. 4):

$$\oint (j_x \cos \widehat{x\nu} + j_y \cos \widehat{y\nu}) ds = \iint \left( \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} \right) dx dy = 0. \quad (9)$$

Ця рівність має місце для будь-якої області  $\sigma$ , внаслідок чого одержуємо співвідношення:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

Підставляючи сюди, згідно з формулами (8), проекції вектора густини струму  $j_x, j_y$ , приходимо до рівняння електричного потенціалу

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0, \quad (11)$$

яке цілком аналогічне рівнянню для потенціалу рідини (6), якщо тільки підібрати питомий опір паперу  $R(x, y)$  так, щоб він був обернено-пропорційний до глибини потоку  $h(x, y)$ . Тим самим аналогія О. М. Сенкова і П. Ф. Фільчакова стає виправданою.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Т. Мелешенко, Изв. ВНИИГ, 36, 3 (1948).
2. О. М. Сенков і П. Ф. Фільчаков, ДАН УРСР, 394 (1953).

Інститут математики  
АН УРСР

Надійшло до редакції  
17.X 1955 р.

Академик АН УССР А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

### К ВОПРОСУ ОБ ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИИ РУСЛОВЫХ ПОТОКОВ

#### Резюме

Для моделирования медленно текущих русловых потоков А. М. Сенков и П. Ф. Фильчаков предложили использовать электропроводящую бумагу переменного удельного сопротивления [2].

В данной статье излагается математическое обоснование предложенной методики.

ДИНА  
МИ

Хай піс  
G + Q. Вся  
(1) замість  
r + p<sub>1</sub>σ бу.  
формулами

де m<sub>n</sub>(τ) —

Викорис  
сс. 47—53,  
3, 7 ізотензи,  
лою. Аналіти  
гальненням  
для парних

для непарних

σ  
Σ<sub>n=0</sub><sup>∞</sup>