

будут
 T_{2p} (3.2)

силы (M_r, T_r),
ная нагрузка Z

чки (13 стр. 36)
т формы переходной

(3.3)

$j=1, 2$ (3.4)

ным условиям

(3.5)

рения оболочки,

$j=1, 2$ (3.6)

модуль упругости

д температурное
и только по тол-
1)), то под влия-
нное расширение,
я деформация от
мента M_p и опор-

ки любой формы
ния внешних на-
ми.

(3.1):
и как равномерно
ширения, равно

могут беспрепят-
формы, получает
).

июлю 10 11 1957

их оболочек. Изв.

1935.
чек. ГИТТЛ, 1953.
Гостехиздат, 1947.
нках и оболочках.

О РАЗВЕТВЛЕНИИ УСТОЙЧИВЫХ ПОЛОЖЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

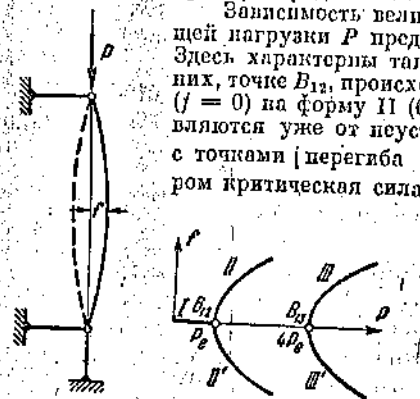
А. Ю. ИШЛИНСКИЙ, С. В. МАЛАШЕНКО, М. Е. ТЕМЧЕНКО

(Киев)

Впервые вопрос о возможности одновременного существования нескольких положений равновесия одной и той же механической системы при одних и тех же внешних обстоятельствах был теоретически обнаружен Эйлером и развит Лагранжем на примере продольного изгиба сжатого стержня (фиг. 1).

Зависимость величины прогиба стержня f от действия сжимающей нагрузки P представляется графиком, изображенным на фиг. 2. Здесь характерны так называемые точки бифуркации. В первой из них, точке B_{12} , происходит смена устойчивой прямолинейной формы I ($f=0$) на форму II (без точек перегиба). В дальнейших точках ответвляются уже от неустойчивой формы I новые неустойчивые формы с точками перегиба (при значении $P = n^2 P_c$). Определенная Эйлером критическая сила P_c для стержня, изображенного на фиг. 1, равна, как известно, выражению

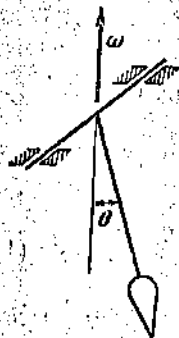
$$P_c = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$



Фиг. 1 Фиг. 2

ная форма движения, при которой центр тяжести маятника остается неподвижным, будет иметь место, если

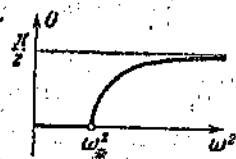
$$0 \leq \omega^2 \leq \omega_*^2 = \frac{mga}{A-C}$$



Фиг. 3

где A — момент инерции маятника вокруг оси его вращения; C — момент инерции относительно прямой, перпендикулярной оси вращения и проходящей через центр тяжести (линия маятника), m — масса маятника, a — расстояние между центром тяжести и осью. Если

$$\omega > \omega_* = \sqrt{\frac{mga}{A-C}}$$



Фиг. 4

то наряду с основной формой (центр тяжести неподвижен и занимает наименьшее положение) возможна стационарная форма движения, при которой центр тяжести совершает коническое движение. При этом линия маятника отклоняется от вертикали на угол θ , определяемый тригонометрическим соотношением

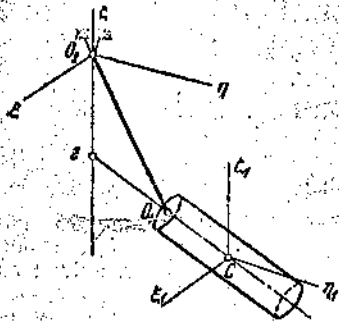
$$\cos \theta = \frac{mga}{(A-C)\omega^2}$$

Зависимость угла θ от изменения угловой скорости ω представлена на фиг. 4, где ω_* — критическое значение.

До сих пор молчаливо принималось, что в точках разветвления положений равновесия или стационарного движения (в точках бифуркации) всегда происходит либо смена одной устойчивой формы равновесия или стационарного движения на другую, либо возникают еще новые неустойчивые формы. Так по крайней мере обстояло дело во всех из известных нам задач об отыскании равновесия различных систем.

Однако в ходе работ, проводимых Институтами математики и строительной механики АН УССР, был обнаружен новый, с точки зрения теории, случай такой механической системы, где разветвляющаяся форма и старая форма являются одновременно устойчивыми.

Вспомогательные вторые случаи и возможности рассмотрены в статье.



Фиг. 5

В центр тяжести тела, точку C , поместим начало координат системы $\xi\eta\zeta$, оси которой параллельны осям системы $\xi\eta\zeta$, а также начало системы xyz , неизменно связанной с телом. Ось z этой системы направим по оси симметрии тела, а оси x и y расположим в плоскости, перпендикулярной оси z .

Обозначим буквой α — угол между направлением струны и вертикалью ζ , а буквой φ — угол между вертикалью и осью симметрии исследуемого тела. На фиг. 6 показано положительное направление этих углов. Натяжение струны обозначим буквой T .

При составлении уравнений относительного равновесия рассматриваемого тела следует присоединить к действующим на него силам (включая и силы реакции связей) также и силы инерции переносного движения.

Будем считать, что из внешних сил на тело действует только сила тяжести Mg и натяжению нити T . Тогда нетрудно убедиться (фиг. 6), что проекции на оси $\xi\eta\zeta$ главного вектора и главного момента системы этих сил относительно точки O_2 соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} F_\xi &= 0, & F_\eta &= -T \sin \alpha, & F_\zeta &= T \cos \alpha - Mg \\ M_\xi &= -Mg\eta_c, & M_\eta &= 0, & M_\zeta &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

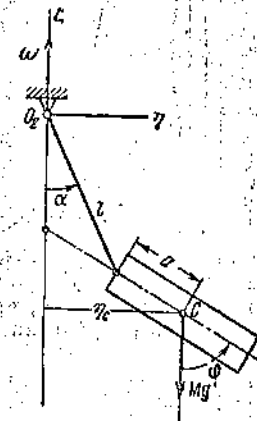
где M — масса исследуемого тела, g — ускорение силы тяжести, ξ_c, η_c, ζ_c — координаты центра тяжести тела в системе координат $\xi\eta\zeta$.

В свою очередь проекция главного вектора и главного момента сил инерции переносного движения выражаются следующими формулами

$$\begin{aligned} F_\xi^{(i)} &= M\omega^2\xi_c, & F_\eta^{(i)} &= M\omega^2\eta_c, & F_\zeta^{(i)} &= 0 \\ M_\xi^{(i)} &= -J_{\eta\zeta}\omega^2, & M_\eta^{(i)} &= J_{\xi\zeta}\omega^2, & M_\zeta^{(i)} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $J_{\eta\zeta}, J_{\xi\zeta}$ — центробежные моменты инерции относительно осей системы координат $\xi\eta\zeta$.

1. Рассмотрим осесимметричное твердое тело массы M , подвешенное на абсолютно гибкой, невесомой массе, струне длины l , которое находится в положении относительного равновесия по отношению к системе координат $\xi\eta\zeta$, вращающейся вокруг оси ζ с постоянной угловой скоростью ω (фиг. 5). Можно убедиться, что при этом ось ζ , струна и ось симметрии тела должны лежать в одной плоскости. Начало координат системы $\xi\eta\zeta$ расположим в точке крепления струны O_2 . Ось ζ направим вертикально вверх, а оси ξ и η расположим в плоскости, перпендикулярной оси ζ .



Фиг. 6

Вычислим $\xi_c =$
Неструдно $\xi_c =$

Между цен
координат $\xi\eta\zeta$.

Обозначим ξ_c
относительно ξ
Центробежн
А и С посред

Условия ω
формул (1) —

— $T \sin$
 $\omega^2 [$

Из первого
нити T . В р
углов α и φ ,
смастриасмог

$\omega^2 [(A - C) \sin$

2. Займем
Рассмотр
отклонилось с
совпадают с
представим с

Здесь вел
 α и φ оущен
Система у
условия

представим

При усло
всегда дейст
значения угл
ния, стлвильн
дуемой задач
 $\alpha = 0$ и $\varphi =$
 $\varphi = \varphi_0 \neq 0$.

Положен
 $\omega = \pm \omega_1$ и

Вычисляем теперь величины, которые входят в соотношения (4) и (2). Нетрудно видеть (фиг. 6), что

$$\xi_c = 0, \quad \eta_c = l \sin \alpha + a \sin \varphi, \quad \zeta_c = -l \cos \alpha - a \cos \varphi \quad (3)$$

Между центробежными моментами инерции относительно осей системы координат $\xi\eta\zeta$ и введенной ранее системы $\xi_1\eta_1\zeta_1$ имеют место соотношения

$$J_{\xi\zeta} = J_{\xi_1\zeta_1} + M\xi_c\zeta_c, \quad J_{\eta\zeta} = J_{\eta_1\zeta_1} + M\eta_c\zeta_c \quad (4)$$

Обозначим через A, B, C главные центральные моменты инерции тела относительно осей x, y, z (вследствие симметрии $A = B$).

Центробежные моменты инерции $J_{\xi_1\zeta_1}, J_{\eta_1\zeta_1}$ выражаются через величины A и C посредством формул

$$J_{\xi_1\zeta_1} = 0, \quad J_{\eta_1\zeta_1} = -(A - C) \cos \varphi \sin \varphi \quad (5)$$

Условия относительного равновесия исследуемого тела после учета формул (4) — (5) приводятся к виду

$$\begin{aligned} T \sin \alpha + M \omega^2 (l \sin \alpha + a \sin \varphi) &= 0, & T \cos \alpha - Mg &= 0 \\ \omega^2 [-(A - C) \sin \varphi \cos \varphi - M(l \sin \alpha + a \sin \varphi)(l \cos \alpha + \\ &+ a \cos \varphi)] + Mg(l \sin \alpha + a \sin \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Из первого и второго условий равновесия (6) исключим натяжение нити T . В результате получим следующие уравнения для определения углов α и φ , определяющих положение относительного равновесия рассматриваемого тела

$$\begin{aligned} \omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha + \omega^2 a \sin \varphi \cos \alpha - g \sin \alpha &= 0 \\ \omega^2 [(A - C) \sin \varphi \cos \varphi + Ma^2 \sin \varphi \cos \varphi + Mal \sin \alpha \cos \varphi] - Mga \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

2. Займемся теперь изучением соотношений (7).

Рассмотрим вначале случай, когда исследуемое тело незначительно отклонилось от положения, при котором струна и ось симметрии тела совпадают с вертикалью. Предполагая в этом случае углы α и φ малыми, представим соотношения (7) в виде

$$\begin{aligned} \omega^2 a \varphi + (\omega^2 l - g) \alpha &= 0 \\ [-Mga + Ma^2 \omega^2 + (A - C) \omega^2] \varphi + Mal \omega^2 \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь величины второго и более высоких порядков относительно углов α и φ опущены.

Система уравнений (8) будет иметь решение, отличное от нуля, при условии

$$\omega^4 - \frac{g}{l} \left[1 + \frac{Ma(l+a)}{A-C} \right] \omega^2 + \frac{g}{l} \frac{Mga}{A-C} = 0 \quad (9)$$

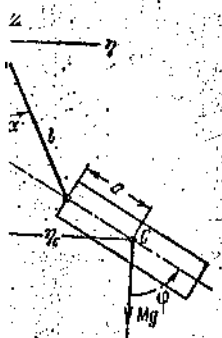
представляющем собой алгебраическое уравнение, корни которого

$$\begin{aligned} \omega_{1,2,3,4} &= \pm \left[\frac{g}{l} \left\{ \frac{1+\mu+\nu}{2} \pm \left[\left(\frac{1+\mu+\nu}{2} \right)^2 - \mu \right]^{1/2} \right\} \right]^{1/2} \\ \left(\mu &= \frac{Mal}{A-C}, \quad \nu = \mu \frac{a}{l} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

При условии $A > C$ (продолговатое тело) корни (10) уравнения (9) всегда действительны. При решении уравнения (9) получаются четыре значения угловой скорости $\pm \omega_1^*$ и $\pm \omega_2^*$; при которых возможны решения, отличные от нуля. Это означает, что в линейной постановке исследуемой задачи, кроме положения динамического равновесия, при котором $\alpha = 0$ и $\varphi = 0$, существуют и другие положения, при которых $\alpha = \alpha_0 \neq 0$, $\varphi = \varphi_0 \neq 0$.

Положения динамического равновесия, которые образуются при $\omega = \pm \omega_1^*$ и $\omega = \pm \omega_2^*$, качественно отличаются друг от друга.

ния положений рав-
зуда происходит либо
сближения на другую,
и мере обстоит дело
кных слетем.
и строительной меха-
случай такой меха-
являются одновре-
метричное твер-
эцнов на абсолют-
струне длины l ,
кении относитель-
но к системе коор-
покруг оси ζ с
тью ω (фиг. 5).
том ось ζ , струна
и лежать в одной
нат системы $\xi\eta\zeta$,
ения струны O_2 ,
ф вверх, а оси ξ
к, перпендикуляр-
координат свето-
а также начало



Фиг. 6

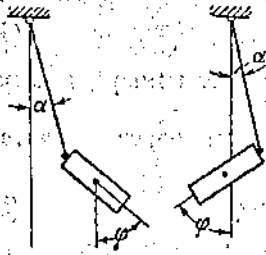
та системы этих
Mg
(1)
тяжести, ξ_c, η_c ,
ат $\xi\eta\zeta$.
ого момента сил
формулами
0
(2)
осительно осей

Покажем это. Из первого уравнения (8) определим отношение

$$\frac{\varphi}{\alpha} = \frac{g - \omega^2 l}{\omega^2 a} \quad (11)$$

Подставляя в это равенство вместо параметра ω значения $[\pm \omega_1^*]$, учитывая (10), получим

$$\frac{\varphi}{\alpha} = \frac{g[1 - \mu - \nu + \sqrt{(1 + \mu + \nu)^2 - 4\mu}]}{2a(\omega_1^*)^2} \quad (12)$$



Фиг. 7



Фиг. 8

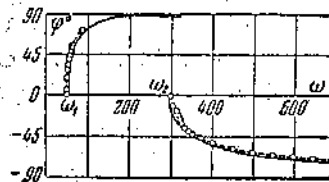
Учитывая, что $a > 0$, $\mu > 0$ и $\nu > 0$, нетрудно показать, что отношение φ/α в рассматриваемом случае $[\omega = \pm \omega_1^*]$ положительно.

Соответствующее положение динамического равновесия схематически изображено на фиг. 7. Движение модели в этом случае подобно движению сферического маятника. Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что отношение φ/α при $\omega = \pm \omega_2^*$ отрицательно. Положение модели в этом случае ($\varphi < 0$) схематически изображено на фиг. 8.

Чтобы построить зависимость углов α и φ от угловой скорости ω , следует решить численно систему уравнений (7). Анализ этого решения показывает, что при $0 < \omega < \omega_1^*$ эта система имеет единственное решение



Фиг. 9



Фиг. 10

$\alpha = \varphi = 0$, чему соответствует положение стационарного вращения тела, при котором его ось z вертикальна. Если $\omega_1^* < \omega < \omega_2^*$, то, кроме этого решения, существует еще другое решение, при котором $\varphi/\alpha > 0$. Соответствующее положение относительного равновесия тела имеет вид, схематически изображенный на фиг. 7. При значении скорости вращения тела, большем ω_2^* , кроме них существуют еще положения равновесия, изображенные схематически на фиг. 8. При этом $\varphi/\alpha < 0$.

Графики зависимости углов α и φ от угловой скорости ω для одной конкретной модели имеют вид¹, изображенный сплошными кривыми на фиг. 9, где $\alpha_0^* = \arcsin a/l$, и на фиг. 10.

Стационарное вращение тела, при котором ось вертикальна, устойчиво при любом значении числа оборотов его вращения. Это было теоретически доказано в [2] и подтверждено экспериментами, описание которых приведено ниже. Исследованию устойчивости одного из упомянутых выше стационарных движений твердого тела, при котором ось динамической симметрии тела наклонна к вертикали, посвящено исследование [4].

3. Для проверки теоретических результатов, изложенных выше, была проведена серия экспериментальных исследований².

Опыты проводились на установке, изображенной на фиг. 11.

¹ Если тело таково, что $A < C$, то уравнение (9) имеет два действительных корня. Соответственно форма стационарного вращения, соответствующая фиг. 8, становится в данном случае невозможной.

² Описанные ниже экспериментальные исследования проводились совместно с Э. В. Виртом и А. П. Польшинной.

К оси ве исследуемог устройства, ванное чисе оборотов, ме ный редукт оборотов пр опыта к опы

Стабильнаэ электрическ В ходе какаг причеи изме около двух

В качест прямой крур ф = 32 мм, до точки к

Опыты п на капроно

4. Наиме 30 об/мин. I

по окрйчанн кальной осн

оборотов от вертикально

жение, схем искровой фс

вом станцион

отношение
(11)
значения $(\pm \omega_1)$,

$v)^2 = 4\mu$
(12)

и $v > 0$, нетрудно рассмотреть динамическое равновесие на фиг. 7. Движение аналогичные рас- отношение φ/α м. случае ($\varphi < 0$)

вой скорости ω , из этого решения ственное решение



ращения тела, кроме этого реше- 0. Соответствую- щий, схематически ения тела, боль- шая, изображенные

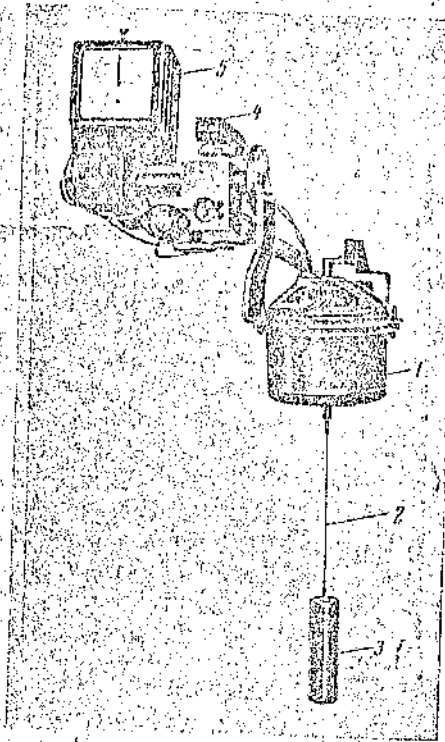
сти ω для одной кривыми на

ичальна, устой- Это было теоре- описание которых из упомянутых ком ось динами- чено исследова-

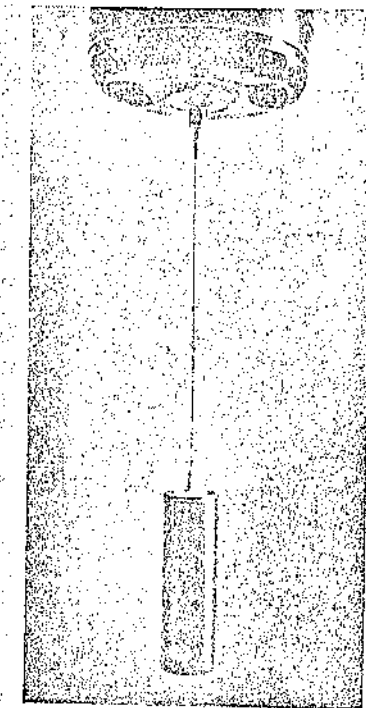
уженных выше, и 2- Фиг. 11.

нительных корня. Фиг. 8, становится- лись совместно с

К оси вертикально поставленного селсина 1 подвешивалась на струне 2 исследуемая модель 3. Селсин приводился в движение от инвертерного устройства, которое давало возможность получать строго стабилизированное число оборотов, начиная с 600 об/мин. Для получения чисел оборотов, меньших 600 об/мин, был использован специальный понижающий редуктор, наличие которого давало возможность получать число оборотов вращения модели порядка 30—50 об/мин и изменять его от опыта к опыту на 1—2 об/мин.



Фиг. 11



Фиг. 12

Стабилизированное число оборотов селсина измерялось при помощи электрического контактного счетчика 4 и электросекундомера 5 (фиг. 11). В ходе каждого опыта контролировалось число оборотов мотора привода, причем изменение числа оборотов мотора в течение опыта длительностью около двух часов не превышало долей процента.

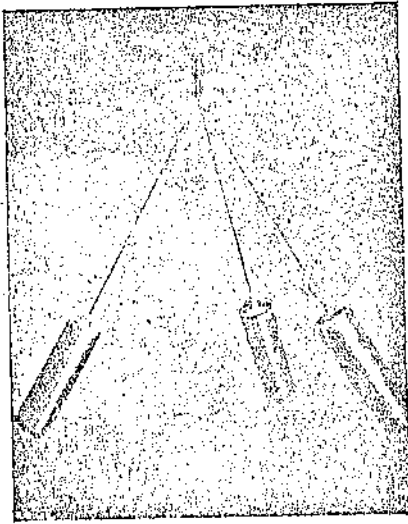
В качестве модели, над которой производились испытания, был взят прямой круговой цилиндр 3 (фиг. 11), вес которого $Mg = 580$ г, диаметр $\phi = 32$ мм, высота $h = 100$ мм, расстояние от центра тяжести модели до точки крепления ее со струной $a = 64$ мм.

Опыты проводились на стальной струне длины $l = 250$ мм, а также на капроновой пряжи той же длины.

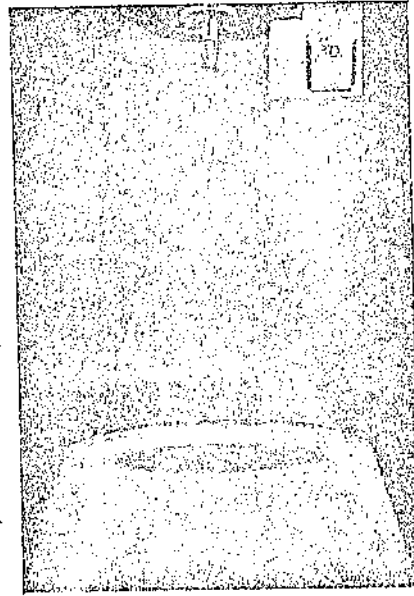
4. Наименьшая угловая скорость вращения струны была равна 30 об/мин. При различных угловых скоростях от 30 до 50 об/мин модель до окончания переходного процесса устойчиво вращалась вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью симметрии модели (фиг. 12). При числе оборотов от 50 об/мин и выше, кроме стационарного вращения вокруг вертикальной оси, можно было наблюдать и другое стационарное движение, схематически изображенное на фиг. 7. На фиг. 13 при помощи фотосъемки зафиксированы три положения модели в этом новом стационарном движении.

Стационарное движение, при котором ось симметрии модели вертикальна, будем в дальнейшем обозначать цифрой I, а новое стационарное движение с наклонной осью модели (фиг. 7 и фиг. 13) соответственно цифрой II.

В случае, когда модель прикреплена к мотору при помощи стальной струны, стационарное вращение I в интервале 50—58 об/мин становилось практически неустойчивым, и модель без возмущений извне, после сравнительно долгого переходного процесса (до 10—15 мин.) переходила в положение II. В отличие от стационарного вращения I, движение II в этом интервале значений угловой скорости было совершенно устойчиво.



Фиг. 13



Фиг. 14

Угол α (фиг. 7), характеризующий стационарное движение II, существенно зависит от угловой скорости ω . При увеличении ω угол α увеличивается, стремясь в пределе к $1/2\pi$. Угол φ в рассматриваемом случае мало отличается от угла α .

При изменении значения угловой скорости вращения модели переход ее от одного положения относительного равновесия к другому происходит довольно медленно, примерно в течение 5—10 мин. В процессе этого перехода модель совершает вращательные колебания вокруг оси собственного вращения, которые затухают, и движение модели в положении II становится подобным движению сферического маятника.

Для определения зависимости угла α от угловой скорости модели ω была проведена серия опытов с фоторегистрацией угла α при различных значениях угловой скорости, изменяющейся в пределах от 50 до 64 об/мин. Как только при определенном числе оборотов движение модели достигало стационарного состояния, ее движение непосредственно регистрировалось на фотопластинке. На фиг. 14 представлен образец фотосъемки модели. Измеряя угол между двумя крайними отклонениями модели на фотографии, можно определить тем самым искомый угол α .

При измерении угла φ оказалось, что в рассматриваемом случае его величина практически (с точностью до измерений) совпадает с величиной угла α . Результаты измерения приведены в табл. 1, где указаны также теоретические значения α' и φ' , вычисленные на основании соотношений (7).

В ходе экспериментальных исследований возник вопрос о том, возможно ли при значениях угловой скорости вращения модели в диапазоне

50—58 об/мин и стационарном креплении к мотору вращение I в При малейшем переходе во в

Тогда эта : тору селения в чае стационарн зоне 50—58 об движение II,

При углов ное вращение вым или зави крепления ли : помощи стру приди.

Таким обр ной струны и жения модел ного положк равновесия с весьма узком числа оборот менно 50—5 дования усто ного движени незначительн и стационарн

Переход в равновесии I ции. При последние у лась в стороу струны и вер отпускаясь, величина его

5. При у жения дна наблюдать и браженное и фиксирована.

В случае, струны, трог но, как только устойчиво с нарушается, тому на фиг I было неустойчивой скорости пятка долуя движения I лен при пом ционарное в вале, а имен скорости по значительно при помощи

и модели вертикальное стационарное) соответственно помощи стальной струны становилось выше, после сравнения) переходила к I, движение II



движение II, существующий угол α увеличивается в рассматриваемом случае

и модели переходя к круговому происхождению. В процессе этого движения в положении маятника.

угловой скорости модели ω при различных значениях от 50 до 64 об/мин. модели достигало регистрировалось с помощью фотоаппарата.

в рассматриваемом случае его значение α указывает также соотношение (7). Вопрос о том, возникнет ли в диапазоне

50—58 об/мин получить устойчивым не только движение II, но также и стационарное вращение I. Как уже было ранее отмечено, в случае крепления к мотору модели при помощи стальной струны стационарное вращение I в этом диапазоне угловых скоростей было неустойчивым. При малейшем возмущении, нанесенном модели, последняя стремилась перейти во второе положение динамического равновесия.

Тогда эта же серия опытов была проведена при подвесе модели к мотору селсива при помощи капроновой нити. Выяснилось, что в этом случае стационарное вращение I при изменении угловой скорости в диапазоне 50—58 об/мин устойчиво. Чтобы перевести модель в стационарное движение II, необходимо резко ударить ее металлическим предметом.

При угловой скорости модели, равной 58 об/мин и выше, стационарное вращение I (ось симметрии модели вертикальна) оказалось устойчивым вне зависимости от того, прикреплена ли модель к мотору при помощи струны или капроновой нити.

Таким образом, влияние стальной струны на устойчивость движения модели вокруг вертикального положения динамического равновесия существенно только в весьма узком диапазоне изменения числа оборотов ее вращения, именно 50—58 об/мин. Для исследования устойчивости стационарного движения II по модели наносились легкие удары. Оказалось, что незначительные возмущения не меняют характера движения модели, и стационарное движение II следует считать устойчивым.

Переход из стационарного движения I в положение динамического равновесия II возможен при нанесении модели соответствующего возмущения. Например, при угловой скорости модели, равной 65 об/мин, последняя устойчиво вращалась в положении I. Далее модель отводилась в сторону так, чтобы угол α , образующийся между направлением струны и вертикалью (фиг. 7), был равен около 5°. После этого модель отпускалась, после чего угол α медленно возрастал. Спустя 60—90 мин. величина его достигала, наконец, стационарного значения 48°5' (табл. 1).

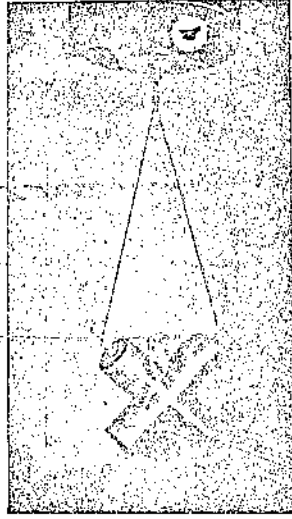
5. При угловой скорости модели, равной 270 об/мин, кроме положения динамического равновесия II, описанного выше, можно было наблюдать положение динамического равновесия III, схематически изображенное на фиг. 8. На фиг. 15 при помощи искровой фотосъемки зафиксирована модель в этом третьем стационарном движении.

В случае, когда модель прикреплялась к мотору при помощи стальной струны, третье положение равновесия легко образуется само собой. Именно, как только угловая скорость исследуемой модели достигнет 270 об/мин, устойчивое ее вращение, соответствующее стационарному движению I, нарушается, и она стремится к стационарному движению, зафиксированному на фиг. 15. При этом следует заметить, что стационарное вращение I было неустойчивым не только при 270 об/мин, но и в диапазоне угловой скорости 270—600 об/мин. В процессе испытаний была сделана попытка получить в этом диапазоне угловых скоростей оба стационарных движения I и III. С этой целью подвес модели к мотору был осуществлен при помощи капроновой нити. Оказалось, что и в этом случае стационарное вращение I было неустойчивым, но уже в более узком интервале, а именно 270—400 об/мин. Характерно, что в этом диапазоне угловой скорости потеря устойчивости стационарного вращения I происходит значительно медленнее, чем это имело место при подвесе модели к мотору при помощи стальной струны.

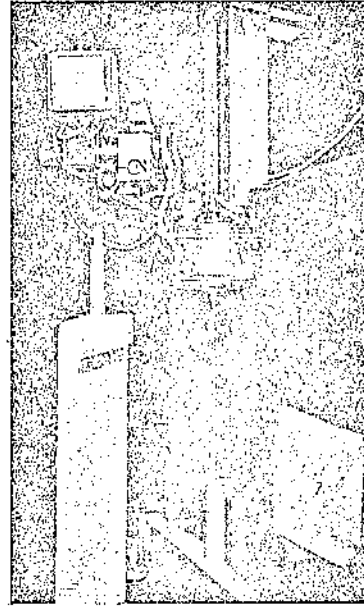
Таблица I

| об/мин ω | α , ° | α' | φ' |
|--------------------|--------------|-----------|------------|
| 53 | 4° | 34' | 36' |
| 55 | 18°50' | 20°15' | 21°29' |
| 57 | 28°05' | 29°18'.5 | 30°20' |
| 59 | 34° | 35°26'.5 | 36°35' |
| 61 | 41°45' | 40°18'.5 | 41°29' |
| 63 | 43°15' | 43°59' | 43°33' |
| 65 | 48°5' | 47°44' | 48°55' |
| 67 | 51°15' | 50°43' | 51°53' |
| 70 | 55°40' | 54°34' | 55°53' |

В дальнейших опытах была осуществлена тщательная балансировка модели, усовершенствовано крепление струны к мотору и к телу, осуществлен плавный переход изменения угловой скорости от одного значения к другому. В результате было обнаружено устойчивое стационарное вращение I во всем упомянутом выше диапазоне угловых скоростей. Чтобы получить стационарное движение III, необходимо было наложить на модель значительные возмущения.



Фиг. 15



Фиг. 16

Таким образом, в диапазоне изменения чисел оборотов вращения модели, равном 270—400 об/мин, весьма существенно сказываются на устойчивости стационарного вращения I неточности балансировки модели, способ крепления ее к мотору, плавность изменения чисел оборотов, т. е. факторы, не учитывавшиеся при изложении теории.

Начиная с угловой скорости 600—650 об/мин, стационарное вращение I, как и стационарное вращение III, становятся устойчивыми вне зависимости от балансировки модели и факторов, упомянутых выше.

Для регистрации углов α и φ (фиг. 8), характеризующих третье положение динамического равновесия модели, в зависимости от числа оборотов ее вращения, была проведена серия опытов с применением силуэтной фотосъемки. Общий вид испытательной установки представлен на фиг. 16.

К якорю селсина 1 на струне 2 подвешена испытуемая модель 3. Рядом с вращающейся моделью расположен экран 4. К экрану при помощи зажимов 5 прикрепляется полоса осциллографной фотобумаги 6, которая экспонируется световым лучом, проходящим через отверстие в экране 7 от фильмоскопа, расположенного за экраном. На фиг. 17 приведен образец такой фотосъемки. Цифрой 1 на этой фигуре обозначен силуэт конца якоря селсина, к которому при помощи струны прикреплена исследуемая модель, цифрой 3 обозначен силуэт двух крайних положений модели, цифрой 2 обозначен силуэт отсечки линии, необходимой для правильного ориентирования пертякала. Имен силуэт неподвижной модели и силуэт ее в положении динамического равновесия III при данном фиксированном числе оборотов, путем элементарных геометрических построений находим интересующие нас углы α и φ .

Результаты опытов приведены в табл. 2. В этой таблице приведены также теоретические значения углов α' и φ' , вычисленные по формулам (7).

Так же, как и авторского пособия, устойчивость ее для этого движение модели.

Данные та же соединенных и зависимостей от угловой скорости.

Как видно из эксперимента точно удовлетворяет.

При расчетах получены все динамического рама модель из веса в другом весьма значительный переход модели.

| об/мин | |
|--------|--|
| 293 | |
| 300 | |
| 305 | |
| 310 | |
| 315 | |
| 320 | |
| 330 | |
| 340 | |
| 350 | |
| 370 | |
| 400 | |
| 450 | |
| 500 | |
| 550 | |
| 600 | |
| 650 | |
| 700 | |

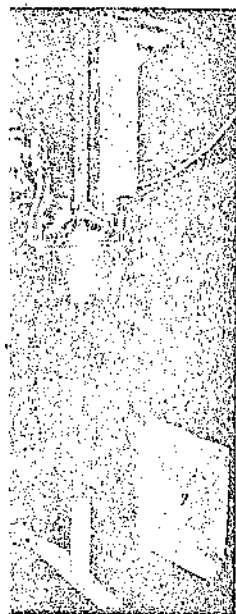
то равновесия I, так и

Замечание. о влиянии воздуха на твердого тела.

Для этого случая которой можно так и при помощи выше приведенных формул положения динамического равновесия в повышенном и

1. Селсина
2. Мотор и струна
3. Ишлинский
4. Темченко

льная балансировка
форму и к телу, осу-
ществит от одного зна-
тоимное стационар-
угловых скоростей.



Фиг. 16

оборотов вращения
не сказываются на
Балансировки моде-
меления чисел обо-
ки теории.

попарное вращение

устойчивыми вне

упомянутых выше.

Ющих третье поло-

и, от числа оборотов

асм силуэтной фото-

тавлей на фиг. 16.

ыгуемая модель 3.

экрану при помощи

бумаги 6, которая

верстие в экране 7

фиг. 17 приведен

обозначен силуэт

руны прикреплен

райных положений

, необходимой для

подвижной модели

я III при данном

их геометрических

таблице приведен

е по формулам (7).

Так же, как и при исследовании устойчивости движения модели вокруг второго положения динамического равновесия, была исследована устойчивость ее движения вокруг III положения равновесия. Оказалось, что это движение устойчиво при любых оборотах вращения модели.

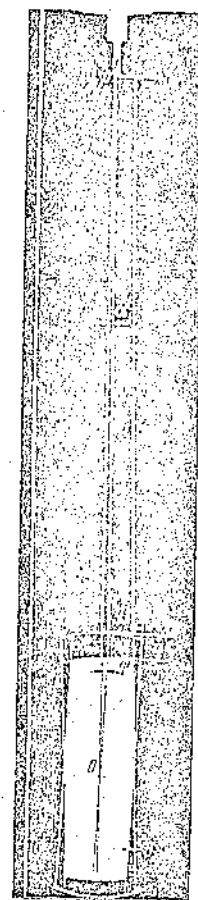
Данные табл. 1 и 2 нанесены в виде светлых точек, соединенных пунктиром, на графики (фиг. 9 и 10) зависимости стационарных значений углов α и φ от угловой скорости ω .

Как видно из этих графиков, данные теоретических и экспериментальных исследований согласуются достаточно удовлетворительно.

При числах оборотов, больших 650 об/мин, были получены все три упомянутых выше положения динамического равновесия. Чтобы переводить движущуюся модель из одного положения динамического равновесия в другое, необходимо было нанести модели весьма значительные возмущения. Характерно, что переход модели ко второму положению динамическо-

Таблица 2

| об/мин ω | α | α' | φ | φ' |
|--------------------|----------|-----------|-----------|------------|
| 293 | 2°23' | 10' | - 9°52' | - 14' |
| 300 | 3°30' | 5° 9' | -14° | -19°42' |
| 305 | 4°04' | 6°32' | -16°34' | -25°17' |
| 310 | 5° | 7°37' | -20°50' | -29°54' |
| 315 | 5°56' | 8°25' | -25°06' | -33°27' |
| 320 | 6°52' | 9° 6' | -29°22' | -36°37' |
| 330 | 9°06' | 10° 8' | -33°33' | -41°40' |
| 340 | 9°34' | 10°56' | -42°17' | -45°53' |
| 350 | 10°06' | 11°34' | -45°30' | -49°29' |
| 370 | 10°59' | 12°22' | -51°23' | -54°32' |
| 400 | 12°30' | 13°17' | -59° | -61°20' |
| 450 | 13°53' | 14° 2' | -66°51' | -68°28' |
| 500 | 14°11' | 14°23' | -70°06' | -72°56' |
| 550 | 14° | 14°36' | -74°25' | -76°43' |
| 600 | 14°15' | 14°40' | -78°17' | -78°12' |
| 650 | 14°30' | 14°47' | -80° | -81° 7' |
| 700 | | 14°48' | | -82° 1' |



Фиг. 17

го равновесия можно было осуществить как из стационарного движения I, так и из стационарного движения III.

Замечание. В заключение отметим, что в ходе исследований был изучен вопрос о влиянии аэродинамических сил на поведение подвешенного на струне вращающегося твердого тела.

Для этого была сконструирована и построена специальная установка, при помощи которой можно было проводить исследования как при повышенном (до 1.5 атм), так и при пониженном (до 0.04 атм) атмосферном давлении. Оказалось, что описанные выше положения динамического равновесия исследуемой модели существуют как при повышенном, так и при пониженном давлении по сравнению с атмосферным. Влияние воздушной среды сказывается только на переходных процессах при переходе от положения динамического равновесия при одном числе оборотов к положению динамического равновесия при другом числе оборотов. Этот переход происходит быстрее при повышенном и значительно медленнее при пониженном давлении.

Получено 29 V 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Суелов Г. К. Теоретическая механика. ГИИТЛ, 1946.
2. Морозова Е. П. Об устойчивости вращения твердого тела, подвешенного на струне. ПММ, т. XX, вып. 5, 1956.
3. И ш л и н с к и й А. Ю. Пример бифуркации, не приводящей к появлению неустойчивых форм стационарного движения. ДАН СССР, т. 117, № 1, 1957.
4. Т о м ч е н к о М. Е. Об устойчивости одного из положений динамического равновесия одной механической системы. ДАН СССР, т. 117, № 1, 1957.