

B 216

И 97

ИММ
Я

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПРЕПРИНТ ИМ-76-2

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

Об одной схеме инерциальной

навигации по земной сфере

Киев - 1976

УДК 531.383

B216.7

Ишлинский А. Ю. Об одной схеме инерциальной навигации по земной сфере. Препринт ИМ-76-2. Изд. Ин-та математики АН УССР, 1976, 56 с.

Излагается схема инерциальной навигации, исследованная автором еще в 1956 г. и получившая название "свободной в азимуте". В принципе эта схема впервые строго решает задачу об определении местоположения объекта, движущегося произвольным образом по поверхности Земли, принимаемой за сферу.

© Институт математики АН УССР, 1976 .

ПРЕДИСЛОВИЕ

Инерциальной навигацией принято теперь называть определение курса и местоположения подвижного объекта относительно Земли без привлечения внешней информации (наблюдения Солнца, Луны, планет и искусственных спутников Земли, приема радиосигналов, измерения магнетического поля Земли и т.п.), основываясь исключительно на данных чувствительных элементов механической природы (гироскопы и ньютонометры или измерители ускорений - акселерометры).

Первая схема инерциальной навигации, способная функционировать при произвольном движении объекта по земной сфере была предложена еще в 1932 году Л.М.Косманом и Е.Б.Левенталем под названием "Универсальный ориентатор". Предполагалось, что основная платформа этой схемы стабилизируется как по отношению к сторонам света, так и в плоскости местного горизонта.

Б.В.Булгаков дал в 1938 году исчерпывающий анализ схемы инерциальной навигации Космана-Левенталея и указал на принципиальные, хотя в ряде случаев и небольшие, погрешности схемы. Последние обуславливаются пренебрежением кориолисовыми силами инерции из-за движения вместе с объектом географической системы координат (оси направлены на Восток, Запад и в Зенит) с началом в геометрическом центре платформы.

Исследование Б.В.Булгакова - первое по теории инерциальных систем. По ряду причин оно увидело свет лишь

в 1969 году^{x/}. Вопрос о возможности существования схемы инерциальной навигации, лишенной принципиальных погрешностей, Б.В.Булгаков не рассматривал.

Предлагаемый препринт воспроизводит с точностью до исправления несущественных опечаток основную часть одного из технических отчетов Института математики АН УССР за 1956 год,^{xx/} в котором изложена новая по тому времени схема инерциальной навигации. Эта схема была предложена научным руководителем соответствующей исследовательской темы. В принципе, описываемая схема позволяет строго решать задачу об определении курса и местоположения объекта, перемещающегося по поверхности Земли, принимаемой за сферу с радиальным распределением плотности. Предполагается, разумеется, что чувствительные элементы и счетно-решающие устройства схемы не имеют каких-либо инструментальных погрешностей.

Решение указанной задачи навигации сводится, в конечном счете, к интегрированию совокупности трех дифференциальных уравнений относительно трех искомым переменных — долготы, широты и азимута некоторой стабилизированной в плоскости местного горизонта платформы, расположенной на подвижном объекте^{xxx/}. В уравнения входят две функции времени, образуемые в результате функционирования чувствительных элементов схемы и ее счетно-решающих устройств. Эти функции представляют собой текущие значения проекций угловой скорости упомянутой выше платформы на оси жестко связанной с нею некоторой системы координат. Посредством гироскопов значение проекции угловой скорости на нормаль к плоскости самой платформы поддерживается равным нулю.

^{x/}Булгаков Б.В. Теория одной гироскопической системы навигации. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3.

^{xx/}См. Технический отчет по теме: "Определение пути движущегося объекта методом интегрирования коррекции". Научный руководитель академик АН УССР А.Ю.Ишлинский. Исполнитель: мл. научный сотрудник М.Е.Темченко, К., 1956.

^{xxx/}Ишлинский А.Ю. Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. — ПММ, 1957, 21, вып.6.

На принципиальную часть схемы составляет гироскопическое устройство, осуществляющее стабилизацию платформы в плоскости местного горизонта и в азимуте. В предпринте предлагается осуществлять горизонтирование платформы посредством двух пар гироскопов (кожухи гироскопов каждой пары связаны между собой четырехзвенным механизмом — антипараллелограммом), корректируемых двумя плоскими физическими маятниками, установленными на платформе. Оси подвеса последних расположены в плоскости платформы.

Третья пара гироскопов (также связанных между собой четырехзвенным механизмом) стабилизирует платформу в азимуте, благодаря чему проекция угловой скорости платформы на ее нормаль и оказывается равной нулю.

В отчете рассматривается также возмущенное движение схемы, возникающее при неточном соблюдении начальных условий, т.е. при так называемой неточной начальной "выставке" схемы на старте объекта.

Использование в инерциальной навигации стабилизированной в горизонте платформы с равной нулю проекцией на нормаль к ней ее же угловой скорости было предложено автором излагаемой в препринте схемы для нужд морской техники и, независимо, Л.В.Кондратьевым применительно к авиации в 1956 году. В работе последнего не приведена совокупность дифференциальных уравнений инерциальной навигации и, как следствие, в ней отсутствует анализ возмущенного движения системы. Основное содержание состоит в описании предлагаемого счетно-решающего устройства, на выходе которого при идеальном функционировании схемы образуются долгота, широта и курс объекта. Приведен также подсчет некоторых возможных ошибок выходных данных схемы.

А.Ишлинский

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем отчете рассмотрена схема гиросустройства, используемого для определения координат местоположения объекта без наличия земных ориентиров. Для определения этих координат применен метод интегрирования коррекции.

Остановимся на кратком содержании работы.

В первой главе отчета рассмотрен вопрос об определении местоположения и пути объекта, движущегося по меридиану, которое производится при помощи устройства, представляющего собой стабилизированную в горизонте платформу с укрепленным на ней плоским физическим маятником. При исследовании задачи исключается из рассмотрения влияние вращения Земли.

Приведение стабилизированной платформы в плоскость горизонта осуществляется при помощи физического маятника. При этом на осях прецессии гироскопа, расположенного на платформе, создается момент, пропорциональный углу отклонения маятника от перпендикуляра к платформе.

Если в начальный момент времени платформа расположена в плоскости горизонта, то в произвольный момент времени t угол ψ , образованный платформой по отношению к первоначальному своему местоположению, равен $\varphi - \alpha$ (см. рис. 1), где φ - квазиширота местоположения объекта, α - угол, который образует перпендикуляр к платформе с истинной вертикалью. Если во все время движения угол α равняется нулю, то платформа располагается перпендикулярно к истинной вертикали места. Измеряя в этом случае величину корректирующего момента, мы тем самым легко определяем величину ψ , а следовательно, и квазишироту места φ и пройденный объектом путь.

В результате проведенного исследования оказалось, что для того, чтобы упомянутая выше платформа располагалась во все время движения объекта перпендикулярно к истинной вертикали места, необходимо установить на ней дополнительное устройство, при помощи которого

на оси прецессии гироскопа создавался бы постоянный по величине момент m . Тогда оказалось возможным наложить условия на параметры гиросустройства и начальные обстоятельства его движения, при выполнении которых упомянутый выше угол α будет равен нулю во все время движения объекта. В результате стало возможным определение при использовании описанного гиросустройства местоположения объекта и пройденного им пути по меридиану.

Во второй главе рассматривается вопрос об определении местоположения объекта при произвольном движении точки его подвеса по поверхности Земли, принимаемой за сферу.

Определение координат местоположения объекта производится при помощи гироскопа, схема и описание которого приведено в п.1°. Гироскоп представляет собой стабилизированную в пространстве платформу, стабилизация которой осуществляется по силовому принципу. Коррекция платформы в плоскость горизонта производится при помощи двух физических маятников. На коррекционные электромагниты гироскопов 1 и 3 (см. рис. 3) подаются моменты

$$N_{1,2} = k \int_0^t \theta dt \quad \text{и} \quad N_{3,4} = -k \int_0^t \psi dt$$
 (где k - коэффициент пропорциональности; θ и ψ - углы отклонения маятников от перпендикуляра к платформе в плоскостях xy и xz), а также постоянные моменты N_3 и N_4 , зависящие от начальных условий движения гироскопа.

На основании прецессионной теории гироскопов выведены дифференциальные уравнения движения описанного выше гироскопа в предположении, что центр его подвеса перемещается произвольным образом по неподвижной сфере S , коцентрической с Землей и не изменяющей своего расположения по отношению к неподвижным звездам.

В п.3° рассмотрены условия, налагаемые на параметры исследуемого гироскопа и начальные условия его движения для того, чтобы перпендикуляр к платформе (или что то же ось x системы координат xyz , связанной с гироскопом) все время была направлена к центру сферы S . Оказалось, что эти условия сводятся к ра-

венствам (2.48), именно:

$$H = \frac{kR}{g} \omega_z = 0 \quad (N_{5,6} = 0),$$

где H — кинетический момент гироблока; R — радиус сферы S ; g — ускорение силы тяжести; ω_z — проекция угловой скорости системы координат xuz на ее же ось z ; $N_{5,6}$ — стабилизирующий момент на оси x (рис. 3). Начальные условия движения гироблока должны при этом быть такими, чтобы упомянутые выше моменты N_3 и N_4 были равны [см. формулу (2.45)] величинам:

$$N_3 = \frac{kR}{g} \omega_x^0, \quad N_4 = -\frac{kR}{g} \omega_y^0,$$

где ω_x^0 , ω_y^0 — проекции угловой скорости системы xuz на ее же оси в начальный момент движения.

Для гироблока, параметры которого и начальные условия движения удовлетворяются точно, согласно п.3^о, получены уравнения (2.56) для определения искомых координат местоположения объекта: широты φ , долготы λ , а также курса объекта ε при известных величинах $N_{1,2}$, $N_{3,4}$, N_3 , N_4 , упоминавшихся ранее.

В гироблоке (см. рис.3) имеется счетно-решающее устройство, при помощи которого предусматривается решение системы уравнений (2.56) и тем самым определение искомых величин φ , λ и ε в любой момент времени.

Если курс ε является известной величиной, то формулы для определения широты φ и долготы λ значительно упрощаются. При этом нет необходимости решать систему уравнений: эти величины определяются непосредственно (см. формулы (2.57) и (2.60)).

В главе третьей отчета составлены уравнения движения возмущенного движения платформы π гироблока в предположении, что в начальный момент времени плоскость не находилась точно в горизонте и условия (2.45) были выполнены с небольшой ошибкой. При выполнении

условия п.3^о (гл. II), полученные уравнения удовлетворяются тождественно, если в них положить $\alpha = \beta = 0$ где α и β характеризуют углы отклонения системы xuz относительно к системе $x^0y^0z^0$, ось z^0 которой нормальна к сфере S , а оси x^0 , y^0 расположены в горизонтальной плоскости.

Далее в этой же главе исследованы линеаризованные уравнения возмущенного движения исследуемого гироблока в одном частном случае, когда проекции скорости движения точки подвеса ν гироблока относительно сферы S постоянны. Оказалось, что в рассматриваемом случае движение исследуемого гироблока устойчиво при любом значении параметров, его характеризующих. Следует заметить только, что вопрос об исследовании устойчивости возмущенного движения, определяемого системой нелинейных уравнений (3.15), полученных в этой главе, требует, разумеется, дополнительных исследований.

ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЕГО ВДОЛЬ МЕРИДИАНА

1°. Определение местоположения объекта, движущегося вдоль меридиана, будем производить при помощи устройства, расположенного на этом объекте и представляющего собой стабилизированную в горизонте платформу с укрепленным на ней плоским физическим маятником (см. [1]).

При решении этого вопроса исключим из рассмотрения влияние вращения Земли. С этой целью рассмотрим движение платформы по дуге большого круга сферы S радиуса R , окружающей Землю ([2]–[4]). Будем предполагать, что сфера S не участвует во вращении Земли и не изменяет своей ориентации по отношению к неподвижным звездам. Поступательное перемещение сферы для дальнейшего несущественно, так как оно происходит с исчезающе малым ускорением, поэтому можно условиться центр сферы S считать неподвижным.

Приведение стабилизированной платформы в плоскость горизонта осуществляется при помощи физического маятника, укрепленного на этой платформе (рис. 1). При этом на оси прецессии гироскопа, создается момент, пропорциональный интегралу от угла отклонения маятника от перпендикуляра к платформе.

На платформе установлено также устройство, при помощи которого на оси прецессии гироскопа создается постоянный по величине момент M , целесообразность введения которого будет обоснована несколько ниже.

Если в начальный момент времени платформа расположена в плоскости горизонта, то в произвольный момент времени t угол поворота платформы по отношению к исходному положению равен $\varphi - \alpha$ (см. рис. 1), где φ является квазиширотой местоположения объекта, в то время как угол α определяется отклонением от истинной вертикали перпендикуляра к платформе.

Если во все время движения угол α равняется нулю, то $\varphi = \psi$ и платформа в любой момент времени распо-

лагается перпендикулярно к истинной вертикали места. В этом случае весьма просто определить квазишироту ψ местоположения объекта, а также пройденный им путь.

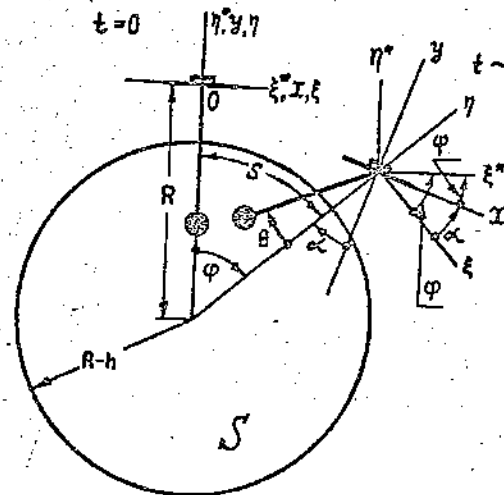


Рис. 1

Таким образом, возникает вопрос о выяснении условий, при выполнении которых упомянутый выше угол α будет равняться нулю во все время движения объекта. Выяснению этого вопроса и посвящена настоящая глава.

2°. Рассмотрим платформу, движущуюся по дуге большого круга сферы S . В точке подвеса платформы O поместим начало трех следующих систем координат:

$\xi^* \eta^* z^*$ — системы координат, ориентированной по неподвижным звездам и поступательно перемещающейся вместе с платформой;

$\xi \eta z$ — системы координат, ось z которой направлена по радиусу Земли, в то время как ось ξ направлена по касательной к траектории движения объекта,

и, наконец, системы координат xy , связанной с платформой так, что ось x расположена в плоскости платформы.

а ось y — перпендикулярная к ней.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ все три системы координат совпадают друг с другом.

Расположение осей $\xi^* \eta^*$, $\xi \eta$ и $x y$ в произвольный момент времени t указано на рис. 1. При этом угол, образованный осями ξ и ξ^* , равен, как легко видеть квазишироте места φ расположения объекта. Платформа (или что же ось x) отклонилась от своего первоначального положения (оси ξ^*) на угол, обозначенный ранее буквой ψ . В свою очередь, перпендикуляр к платформе (ось y) образует с истинной вертикалью (осью η) угол, который был уже обозначен буквой α . При этом маятник, укрепленный на исследуемой платформе, отклоняется от направления истинной вертикали на угол, который в дальнейшем будем обозначать буквой θ (см. рис. 1).

Как уже упоминалось выше, приведение стабилизированной платформы в плоскость горизонта производится путем создания момента на оси прецессии гироскопа, расположенного на движущейся платформе. Под действием этого момента возникает прецессионное движение платформы вокруг оси стабилизации с угловой скоростью

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{M_{кор.}}{H}, \quad (1.1)$$

где $M_{кор.}$ — корректирующий момент на оси прецессии гироскопа, H — его (гироскопа) собственный кинетический момент.

Величину корректирующего момента $M_{кор.}$ в рассматриваемом случае представим следующим образом:

$$M_{кор.} = k_1 \int_0^t (\alpha + \theta) d\tau + m, \quad (1.2)$$

в котором k_1 — коэффициент пропорциональности; $\alpha + \theta$ — угол между кажущейся вертикалью (см. рис. 1) и перпендикуляром к платформе; m — постоянный по величине момент, о котором упоминалось в п. 1^о настоящей главы.

При использовании равенства (1.2) соотношение (1.1) можно представить в виде:

$$\frac{d\psi}{dt} = k^2 \int_0^t (\alpha + \theta) d\tau + \frac{m}{H}, \quad (1.3)$$

где

$$k^2 = \frac{k_1}{H}.$$

Проинтегрируем уравнение (1.3) по времени t , получим тогда соотношение:

$$\psi = k^2 \int_0^t \int_0^t (\alpha + \theta) d\tau d\tau + \frac{m}{H} t + \psi_0, \quad (1.4)$$

в котором ψ_0 представляет собой значение угла ψ в начальный момент времени.

Принимая во внимание, что $\psi = \varphi - \alpha$ (см. рис. 1), уравнение (1.4) можно представить следующим образом:

$$\psi = \varphi - \alpha = k^2 \int_0^t \int_0^t (\alpha + \theta) d\tau d\tau + \frac{m}{H} t + \psi_0. \quad (1.5)$$

Если бы угол α равнялся нулю, то на основании последнего соотношения имело бы место равенство

$$\psi = \varphi,$$

то-есть, мы имели бы точно построенный горизонт.

Выясним теперь, какие условия необходимо наложить на движение исследуемой системы, чтобы упомянутый выше угол α равнялся нулю. Для этого займемся изучением уравнения (1.5).

Обозначим путь, пройденный платформой, буквой s , тогда, как легко видеть (см. рис. 1), широта

$$\varphi = \frac{s}{R}. \quad (1.6)$$

Определим теперь величину угла θ . При использовании рис. 2 можно записать следующее соотношение

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{j - \frac{v^2}{R}} = \frac{1}{g} \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (1.7)$$

где $w_1 = \frac{d^2 s}{dt^2}$ и $w_2 = -\frac{v^2}{R}$ — проекции ускорения точки O начала координат системы $\xi \eta$ соответственно на оси ξ и η ; $g = j - \frac{v^2}{R}$ — ускорение силы тяжести; v — скорость движения объекта вдоль меридиана; R — радиус сферы S .

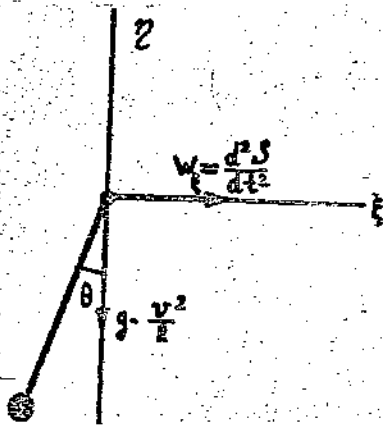


Рис. 2

Считая теперь, что отклонение маятника от истинной вертикали мало, уравнение (1.7) можно записать в виде

$$\theta = \frac{1}{g} \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (1.8)$$

Подставим выражения (1.6) и (1.8) в уравнение (1.5), получим тогда следующее уравнение:

$$\frac{s}{R} - \alpha = k^2 \int_0^t \int_0^t \left(\alpha + \frac{1}{g} \frac{d^2 s}{dt^2} \right) d\tau d\tau + \frac{m}{H} t + \psi_0, \quad (1.9)$$

которое после двойного дифференцирования преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k^2 \alpha = \left(\frac{1}{R} - \frac{k^2}{g} \right) \frac{d^2 s}{dt^2}. \quad (1.10)$$

Коэффициент k^2 в уравнении (1.10) выберем так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{k^2}{g} = \frac{1}{R}$$

или, что то же,

$$k = \sqrt{\frac{g}{R}}. \quad (1.11)$$

Тогда при выполнении условия (1.11) уравнение для определения угла α приобретает вид

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + k^2 \alpha = 0, \quad (1.12)$$

решение которого запишется следующим образом:

$$\alpha = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt. \quad (1.13)$$

Произвольные постоянные в решении (1.13) определим из следующих начальных условий: Пусть в момент времени $t=0$

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad (1.14)$$

$$\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0.$$

При учете этих условий решение (1.13) можно представить в виде:

$$\alpha = \alpha_0 \cos kt + \frac{\dot{\alpha}_0}{k} \sin kt. \quad (1.15)$$

Займемся теперь определением величин α_0 и $\dot{\alpha}_0$. Для этого обратимся к уравнению (1.9). При $t=0$ из этого уравнения немедленно получаем, что

$$\alpha_0 = \frac{s(0)}{R} - \psi_0. \quad (1.16)$$

Продифференцируем правую и левую части уравнения (1.9) по t один раз. Будем иметь тогда

$$\frac{1}{R} \frac{ds}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} = k^2 \int_0^t \left(\alpha + \frac{1}{g} \frac{d^2 s}{dt^2} \right) d\tau + \frac{m}{H}. \quad (1.17)$$

Положив в последнем уравнении $t=0$, немедленно получаем, что:

$$\dot{\alpha}_0 = \frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)_{t=0} - \frac{m}{H}. \quad (1.18)$$

При учете соотношений (1.16) и (1.18) решение (1.15) можно представить теперь следующим образом:

$$\alpha = \left[\frac{s(0)}{R} - \psi_0 \right] \cos kt + \frac{1}{k} \left[\frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right) - \frac{m}{H} \right] \sin kt. \quad (1.19)$$

Выберем величины ψ_0 и m так, чтобы имели место равенства

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{s(0)}{R} \\ m &= \frac{H}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)_{t=0} \end{aligned} \quad (1.20)$$

В этом случае из уравнения (1.19) вытекает, что

$$\alpha \equiv 0$$

в любой момент времени t .

Таким образом, мы видим, что если параметры гироскопа и начальные обстоятельства его движения удовлетворяют условиям (1.11) и (1.20), то упомянутая выше платформа в любой момент времени t будет располагаться перпендикулярно истинной вертикали места. В этом случае из равенства (1.5) немедленно получаем, что $\psi = \varphi$. Зная величину корректирующего момента $M_{кор}$, как функцию времени t , мы на основании равенства (1.1) сразу же определяем величину ψ , а следовательно, и широту места φ расположения объекта. Если же широта φ нам известна, то по формуле (1.6) мы немедленно получаем пройденный объектом путь s .

ГЛАВА II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЕГО ДВИЖЕНИИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

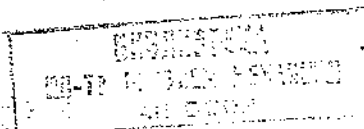
1°. Для определения координат местоположения объекта, движущегося произвольным образом по земной поверхности, используем гироскоп (расположенный на движущемся объекте), схема которого представлена на рис.3. Платформа Π стабилизирована в пространстве. Стабилизация ее осуществляется по силовому принципу, поэтому рассматриваемый гироскоп представляет собой сочетание трех гироскопов. Стабилизированная платформа Π имеет свободу вращения вокруг трех осей — x , y и z . Гироскопы 1,2 кожухи которых связаны между собой четырехзвенным механизмом — антипараллелограммом, — стабилизируют платформу Π вокруг оси x ; аналогично гироскопы 3,4 стабилизируют ее вокруг оси y . И, наконец, гироскопы 5,6 стабилизируют платформу Π вокруг оси z . С осями x , y и z связаны зубчатой передачей стабилизирующие двигатели, управляемые гироскопами посредством датчиков моментов, установленных на осях прецессии.

Коррекция платформы в плоскость горизонта осуществляется при помощи двух плоских физических маятников 7 и 8, установленных на платформе. Осью вращения первого из них служит ось x , осью вращения второго — соответственно ось y .

К маятникам 7 и 8 подключены интегрирующие устройства 9 и 10, вырабатывающие величины корректирующих моментов $N_{1,2}$ и $N_{3,4}$, которые определяются по формулам:

$$N_{1,2} = k \int_0^t \theta d\tau; \quad N_{3,4} = -k \int_0^t \psi d\tau.$$

Здесь k — коэффициент пропорциональности, θ — угол отклонения от перпендикуляра к платформе Π маятника 7 в плоскости xy ; соответственно ψ — угол отклонения от перпендикуляра к платформе Π в плоскости xz маятника 8.



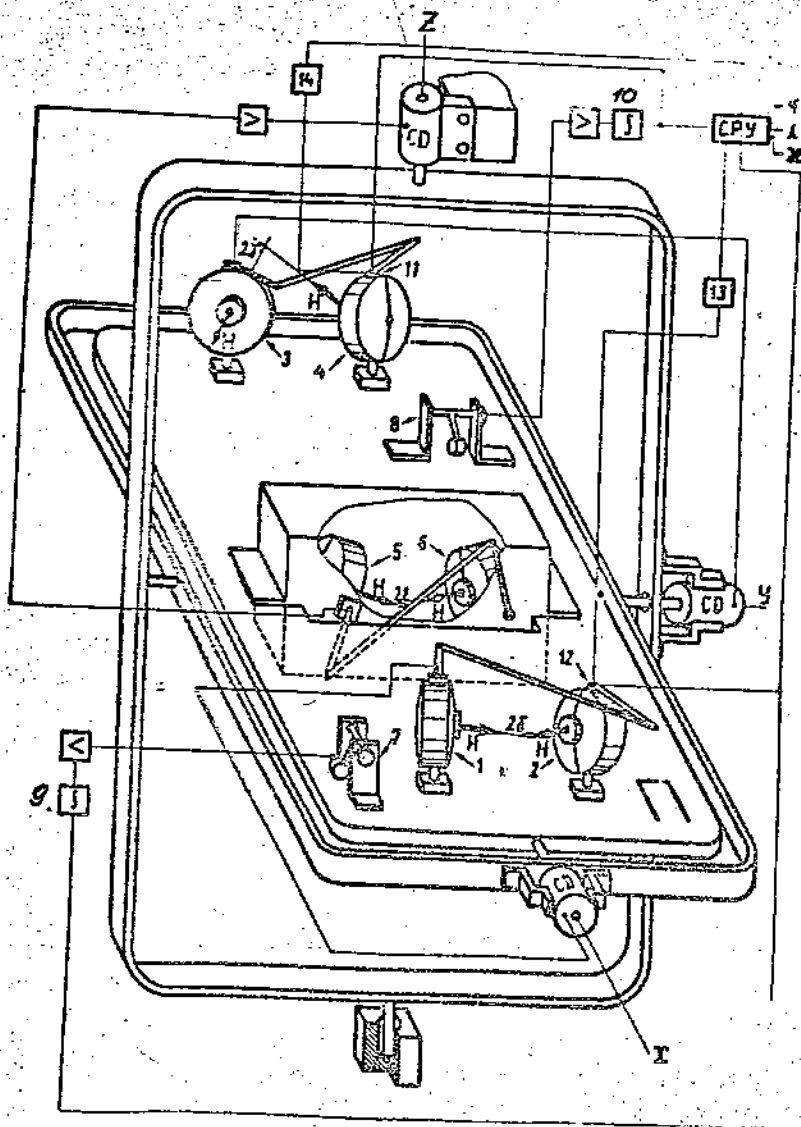


Рис. 3

Интегрирующие устройства 9 и 10 соединены с коррекционными электромагнитами 11 и 12, установленными на осях прецессии гироскопов. Упомянутые выше величины $N_{1,2}$ и $N_{3,4}$, выработанные интегрирующими моторами в устройствах 9 и 10, подаются соответственно на коррекционные электромагниты 11 и 12. Тем самым осуществляется коррекция платформы П в плоскость горизонта.

В схеме, изображенной на рис. 3, предусматриваются также устройства 13 и 14, подающие дополнительно на коррекционные электромагниты 11 и 12 постоянные по величине моменты N_3 и N_4 , необходимость введения которых будет обоснована в п. 3^о настоящей главы.

Моменты $N_{1,2}$ и $N_{3,4}$ из интегрирующих устройств 9 и 10, а также постоянные величины N_3 и N_4 из устройств 13 и 14 подаются также в счетно-решающее устройство, определяющее искомые величины φ , λ и α — соответственно широту, долготу местоположения и курс произвольно перемещающегося по поверхности Земли объекта.

2^о. При решении поставленной задачи об определении величин φ , λ и α будем считать вначале, что центр подвеса гироблока перемещается произвольным образом по неподвижной сфере S , особенности которой были рассмотрены в предыдущей главе настоящего отчета.

Введем в рассмотрение следующие системы координат: подвижную систему $\xi^* \eta^* \zeta^*$, начало которой расположено в точке подвеса гироблока, а оси ξ^* , η^* , ζ^* ориентированы по неподвижным звездам; систему координат $x^0 y^0 z^0$ такую, что ось z^0 ее во все время движения гироблока нормальна сфере S , а оси x^0 и y^0 расположены в горизонтальной плоскости; и, наконец, систему координат x, y и z , неизменно связанную с гироблоком. Оси x и y этой системы расположены в плоскости платформы П так, как указано на рис. 3, а ось z перпендикулярна плоскости платформы.

Определим положение системы координат $x^0 y^0 z^0$ по отношению к системе $x y z$ (так, как показано на рис. 4) при помощи двух углов α и β . Угол α определяет пово-

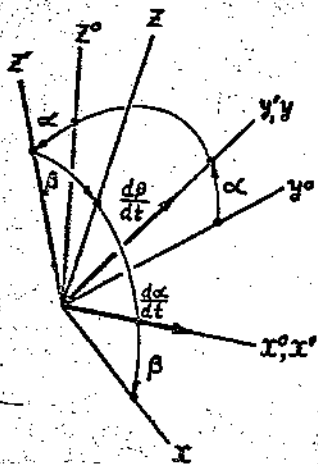


Рис. 4

рот вокруг оси x' (совпадающей с осью x°) вспомогательной системы $x'y'z'$ относительно системы $x^\circ y^\circ z^\circ$. В свою очередь, угол β представляет собой угол поворота вокруг оси y' (или, что то же оси y) системы координат $x'yz'$ относительно вспомогательной системы $x'y'z'$. Заметим при этом, что ось y° является проекцией оси y на горизонтальную плоскость.

Относительная угловая скорость системы координат $x'yz'$ по отношению к трехграннику $x^\circ y^\circ z^\circ$ равна геометрической сумме относительной угловой скорости $\frac{d\alpha}{dt}$, имеющей направление оси x° , и угловой скорости $\frac{d\beta}{dt}$, направленной по оси y .

Нетрудно построить таблицу косинусов углов между осями систем координат $x'yz'$ и $x^\circ y^\circ z^\circ$. Она имеет вид:

	x°	y°	z°
x	$\cos \beta$	$\sin \alpha \sin \beta$	$-\sin \beta \cos \alpha$
y	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
z	$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$

(2.1)

Чтобы получить проекции угловой скорости системы координат $x'yz'$ на ее же оси, следует взять сумму проекций на эти оси угловой скорости трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ и относительных угловых скоростей $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{d\beta}{dt}$. Учитывая это замечание и таблицу косинусов (2.1), приходим к следующим выражениям для искомым проекций ω_x , ω_y и ω_z :

$$\omega_x = \omega_{x^\circ} \cos \beta + \omega_{y^\circ} \sin \alpha \sin \beta - \omega_{z^\circ} \sin \beta \cos \alpha + \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta$$

$$\omega_y = \omega_{y^\circ} \cos \alpha + \omega_{z^\circ} \sin \alpha + \frac{d\beta}{dt}$$

(2.2)

$$\omega_z = \omega_{x^\circ} \sin \beta - \omega_{y^\circ} \sin \alpha \cos \beta + \omega_{z^\circ} \cos \alpha \cos \beta + \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta$$

3. Займемся теперь выводом уравнений движения гироскопа.

Следуя прецессионной (так называемой элементарной) теории гироскопических явлений, будем считать суммарный кинетический момент H всего гироскопа равным геометрической сумме одинаковых по величине собственных кинетических моментов гироскопов.

Рассмотрим скорость конца вектора H относительно системы $\xi^* \eta^* \zeta^*$, считая, что его начало совпадает с началом этой системы координат.

Нетрудно видеть, что проекции этой скорости на оси системы координат $x'yz'$ представляются выражениями:

$$\frac{dH_x}{dt} + \omega_y H_z - \omega_x H_y$$

$$\frac{dH_y}{dt} + \omega_x H_x - \omega_z H_z$$

(2.3)

$$\frac{dH_z}{dt} + \omega_x H_y - \omega_y H_x$$

в которых величины ω_x , ω_y , ω_z являются проекциями на оси $x'yz'$ угловой скорости гироскопа относительно системы координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$.

В соответствии с законами механики, выражения (2.3) равны суммам моментов сил, действующих на гироскоп, относительно тех же осей x , y и z . Обозначим эти суммы

через M_x , M_y и M_z . В результате будем иметь три уравнения, описывающие движение исследуемого гироскопа, именно:

$$\begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} + \omega_y H_z - \omega_z H_y &= M_x \\ \frac{dH_y}{dt} + \omega_z H_x - \omega_x H_z &= M_y \\ \frac{dH_z}{dt} + \omega_x H_y - \omega_y H_x &= M_z \end{aligned} \quad (2.4)$$

Гироскоп представляет собой в данном случае механическую систему с восемью степенями свободы. Поэтому для полного описания законов его движения к уравнениям (2.4) следует добавить еще пять уравнений.

Три из них получим на основании следующих соображений: Рассмотрим сначала первую пару гироскопов, именно, гироскопы 1 и 2 (рис. 3).

Для каждого из них в отдельности запишем выражения для проекций на ось x скорости концов векторов собственных кинетических моментов, именно:

$$\begin{aligned} \frac{dH_x^{(1)}}{dt} + \omega_x H_y^{(1)} - \omega_y H_x^{(1)} \\ \frac{dH_x^{(2)}}{dt} + \omega_x H_y^{(2)} - \omega_y H_x^{(2)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

В этих уравнениях $H_x^{(1)}$, $H_y^{(1)}$, $H_z^{(1)}$ и $H_x^{(2)}$, $H_y^{(2)}$, $H_z^{(2)}$ — проекции на оси x , y и z собственных кинетических моментов гироскопов 1 и 2.

По известной теореме механики об изменении скорости конца вектора кинетического момента равенства (2.5) должны быть равны суммам моментов сил, действующих соответственно на гироскопы 1 и 2 относительно оси x . Обозначим суммы этих моментов через $M_x^{(1)}$ и $M_x^{(2)}$. В результате будем иметь следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dH_x^{(1)}}{dt} + \omega_x H_y^{(1)} - \omega_y H_x^{(1)} &= M_x^{(1)} \\ \frac{dH_x^{(2)}}{dt} + \omega_x H_y^{(2)} - \omega_y H_x^{(2)} &= M_x^{(2)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Заметим, что гироскопы 1 и 2 расположены на платформе таким образом (см. рис.3), что оси их кожухов параллельны оси z . Таким образом, моменты $M_x^{(1)}$ и $M_x^{(2)}$ представляют собой суммы моментов сил, действующих на кожухи каждого из гироскопов вокруг осей этих кожухов.

Оси собственного вращения гироскопов 1 и 2, по которым, согласно прецессионной теории гироскопов, направлены кинетические моменты $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ расположены параллельно плоскости платформы Π . Обозначим через 2δ угол между осями собственного вращения гироскопов 1 и 2 (рис. 3). Тогда проекции собственных кинетических моментов $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ соответственно на оси координат x , y и z имеют вид:

$$\begin{aligned} H_x^{(1)} &= H^{(1)} \cos \delta & H_x^{(2)} &= H^{(2)} \cos \delta \\ H_y^{(1)} &= H^{(1)} \sin \delta & H_y^{(2)} &= -H^{(2)} \sin \delta \\ H_z^{(1)} &= 0 & H_z^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Вычтем из первого уравнения (2.6) второе. Тогда при учете соотношений (2.7) получим следующее равенство:

$$\omega_x [H^{(1)} + H^{(2)}] \sin \delta - \omega_y [H^{(1)} - H^{(2)}] \cos \delta = M_x^{(1)} - M_x^{(2)} \quad (2.8)$$

Обозначим теперь разность моментов, которая стоит в правой части уравнения (2.8), буквой $N_{1,2}$, именно,

$$M_x^{(1)} - M_x^{(2)} = N_{1,2} \quad (2.9)$$

Подставляя равенство (2.9) в уравнение (2.8) и вводя обозначение $H^{(1)} = H^{(2)} = H^{(1,2)}$, представим его в виде

$$2H^{(3,2)} \sin \delta \omega_x = N_{1,2} \quad (2.10)$$

Рассмотрим теперь следующую пару гироскопов, именно, гироскопы 3 и 4.

Для них, аналогично предыдущему, запишем следующие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dH_x^{(3)}}{dt} + \omega_x H_y^{(3)} - \omega_y H_x^{(3)} &= M_x^{(3)} \\ \frac{dH_x^{(4)}}{dt} + \omega_x H_y^{(4)} - \omega_y H_x^{(4)} &= M_x^{(4)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Обозначим через 2γ угол между осями собственного вращения гироскопов 3 и 4 (рис. 3). Тогда, как легко видеть, проекции собственных кинетических моментов обоих гироскопов на оси x , y и z имеют вид:

$$\begin{aligned} H_x^{(3)} &= H^{(3)} \sin \gamma & H_x^{(4)} &= -H^{(4)} \sin \gamma \\ H_y^{(3)} &= -H^{(3)} \cos \gamma & H_y^{(4)} &= -H^{(4)} \cos \gamma \\ H_z^{(3)} &= 0 & H_z^{(4)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Вычтем из первого уравнения (2.11) второе, подставив предварительно в них соотношения (2.12). Будем иметь тогда следующее равенство:

$$\omega_x [-H^{(3)} + H^{(4)}] \cos \gamma - \omega_y [H^{(3)} + H^{(4)}] \sin \gamma = M_x^{(3)} - M_x^{(4)} \quad (2.13)$$

Принимая во внимание, что $H_z^{(3)} = H_z^{(4)} = H^{(3,4)}$ и вводя обозначение $M_x^{(3)} - M_x^{(4)} = N_{3,4}$, уравнение (2.13) преобразуем к виду:

$$-2H^{(3,4)} \sin \gamma \cdot \omega_y = N_{3,4} \quad (2.14)$$

Рассмотрим, наконец, третью пару гироскопов — именно гироскопы 5 и 6 (рис. 3).

Для каждого из них в отдельности запишем выражения проекций на ось x скорости концов собственных кинетических моментов, то-есть:

$$\begin{aligned} \frac{dH_x^{(5)}}{dt} + \omega_y H_z^{(5)} - \omega_z H_y^{(5)} \\ \frac{dH_x^{(6)}}{dt} + \omega_y H_z^{(6)} - \omega_z H_x^{(6)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Как уже упоминалось выше, на основании теоремы об изменении скорости конца вектора кинетического момента можно написать уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dH_x^{(5)}}{dt} + \omega_y H_z^{(5)} - \omega_z H_y^{(5)} &= M_x^{(5)} \\ \frac{dH_x^{(6)}}{dt} + \omega_y H_z^{(6)} - \omega_z H_y^{(6)} &= M_x^{(6)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Обозначим через 2ε угол между осями собственного вращения гироскопов 5 и 6. Тогда проекции собственных кинетических моментов $H^{(5)}$ и $H^{(6)}$ соответственно на оси координат x , y и z можно будет представить следующим образом:

$$\begin{aligned} H_x^{(5)} &= 0 & H_x^{(6)} &= 0 \\ H_y^{(5)} &= H^{(5)} \sin \varepsilon & H_y^{(6)} &= -H^{(6)} \sin \varepsilon \\ H_z^{(5)} &= -H^{(5)} \cos \varepsilon & H_z^{(6)} &= -H^{(6)} \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (2.17)$$

Вычтем из первого равенства (2.16) второе. Тогда при учете соотношений (2.17) получим уравнение

$$-2H^{(5,6)} \sin \varepsilon \omega_z = N_{5,6} \quad (2.18)$$

в котором введены обозначения $H^{(5)} = H^{(6)} = H^{(5,6)}$, $M_x^{(5)} - M_x^{(6)} = N_{5,6}$. Будем считать теперь, что все гироскопы имеют одн-

законные собственные кинетические моменты. Тогда в уравнениях (2.10), (2.14) и (2.18) можно положить: $2H^{(1,2)} = 2H^{(3,4)} = 2H^{(5,6)} = H$ и представить их в виде:

$$\begin{aligned} H \sin \delta \omega_x &= N_{1,2} \\ -H \sin \gamma \omega_y &= N_{3,4} \\ -H \sin \varepsilon \omega_z &= N_{5,6} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Уравнения (2.19) должны быть присоединены к уравнениям (2.4).

На платформе гироблока укреплены два физических маятника 7 и 8 (см. рис. 3). В дальнейшем будем считать, что при перемещении гироблока маятники находятся в положении динамического равновесия. Поэтому займемся теперь определением условий, при которых маятники 7 и 8 находятся в положении динамического равновесия.

Будем предполагать, что на каждый из маятников действуют следующие силы: реакция связи N , сила тяготения маятника к Земле F .

Согласно законам механики относительного движения, в число действующих на маятники сил реакций связи и сил тяготения, должны быть включены силы инерции переносного движения и кориолисовы силы, обусловленные движением исходной системы координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$. Однако последние отсутствуют, так как система $\xi^* \eta^* \zeta^*$ перемещается поступательно. Элементарные силы инерции переносного движения, будучи по той же причине параллельными, сводятся к единственной силе Q , приложенной к центру тяжести каждого из маятников.

Как уже упоминалось выше, осью качания маятника 7 является ось x , в то время как осью качания маятника 8 — соответственно ось y . Тогда в проекциях на оси x , y и z условия равновесия можно представить в виде

$$\text{mom}_x \bar{F} + \text{mom}_x \bar{Q} = 0 \quad (2.20)$$

для первого маятника и

$$\text{mom}_y \bar{F} + \text{mom}_y \bar{Q} = 0 \quad (2.21)$$

соответственно для второго.

Присоединим теперь уравнения (2.20) и (2.21) к уравнениям (2.4) и (2.19). Мы получим, таким образом, систему уравнений, полностью определяющую движение исследуемого гироблока:

$$\begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} + \omega_y H_z - \omega_z H_y &= M_x \\ \frac{dH_y}{dt} + \omega_z H_x - \omega_x H_z &= M_y \\ \frac{dH_z}{dt} + \omega_x H_y - \omega_y H_x &= M_z \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} H \omega_x \sin \delta &= N_{1,2} \\ -H \omega_y \sin \gamma &= N_{3,4} \\ -H \omega_z \sin \varepsilon &= N_{5,6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mom}_x \bar{F} + \text{mom}_x \bar{Q} &= 0 \\ \text{mom}_y \bar{F} + \text{mom}_y \bar{Q} &= 0 \end{aligned}$$

где $H_x = H \cos \delta$; $H_y = H \cos \gamma$; $H_z = H \cos \varepsilon$.

3°. Оказывается, что параметры, характеризующие исследуемый гироблок, можно выбрать так, чтобы при соблюдении определенных начальных условий ось x , перпендикулярная к платформе Π гироблока, была во все время его

движения нормальна сфере S , то-есть, совпадала с осью z^0 системы координат $x^0 y^0 z^0$.

Для доказательства этого утверждения предположим, что оси системы координат $x y z$ совпадают с осями системы $x^0 y^0 z^0$, то-есть углы α и β (см. рис. 4) равны нулю. Определим, какие условия должны накладываться при этом на параметры гироскопа и начальные обстоятельства его движения. Для этого рассмотрим последние пять уравнений системы (2.22). Заметим, что первые три уравнения этой системы служат для определения углов δ^0 , ρ и ε , которые в настоящем исследовании нас не интересуют. Поэтому, опуская исследование этих уравнений, примем без доказательства, что углы δ^0 , ρ и ε близки к $\frac{\pi}{2}$. Учитывая это замечание, последние пять уравнений системы (2.22) можно будет преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \omega_x H &= N_{1,2} \\ -\omega_y H &= N_{3,4} \\ -\omega_z H &= N_{5,6} \\ \text{mom}_x \bar{F} + \text{mom}_x \bar{Q} &= 0 \\ \text{mom}_y \bar{F} + \text{mom}_y \bar{Q} &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Рассмотрим сначала последние два уравнения этой системы. Для этого представим их следующим образом

$$\begin{aligned} y_{c_1} F_x - x_{c_1} F_y + y_{c_1} Q_x - x_{c_1} Q_y &= 0 \\ x_{c_2} F_x - x_{c_2} F_z + x_{c_2} Q_x - x_{c_2} Q_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

В этих уравнениях y_{c_1} , x_{c_1} и x_{c_2} , x_{c_2} соответственно координаты центров тяжести маятников 7 и 8 относительно системы координат $x y z$, совпадающей с сис-

темой $x^0 y^0 z^0$.

Сила тяготения F маятников к Земле направлена параллельно оси z^0 (или в нашем случае оси z). Поэтому

$$F_x = F_y = 0; \quad F_z = -F. \quad (2.25)$$

Учитывая равенства (2.25) в уравнениях (2.24), получим

$$\begin{aligned} -y_{c_1} (F - Q_z) - x_{c_1} Q_y &= 0 \\ x_{c_2} (F - Q_z) + x_{c_2} Q_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

С большой степенью точности можно принять (см. [2-4]), что

$$F - Q_z = mg \quad (2.27)$$

и тогда уравнения (2.26) принимают вид:

$$\begin{aligned} -mg y_{c_1} - x_{c_1} Q_y &= 0 \\ mg x_{c_2} + x_{c_2} Q_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Обозначим расстояние от точки подвеса до центра тяжести каждого из маятников 7 и 8 буквой ρ .

Плоскостью качаний первого маятника (маятника 7) является (как уже упоминалось выше) плоскость $x y$. Поэтому координаты центра тяжести маятника 7 выражаются равенствами (см. рис. 5)

$$y_{c_1} = \rho \sin \theta \quad (2.29)$$

$$x_{c_1} = -\rho \cos \theta$$

В то время, как координаты центра тяжести маятника 8 соответственно равенствами (рис. 6)

$$x_{c_2} = -\rho \sin \psi \quad (2.30)$$

$$x_{c_2} = -\rho \cos \psi$$

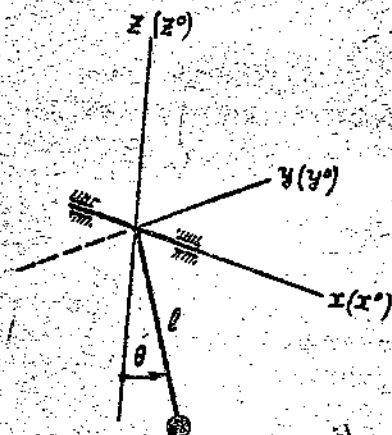


Рис. 5

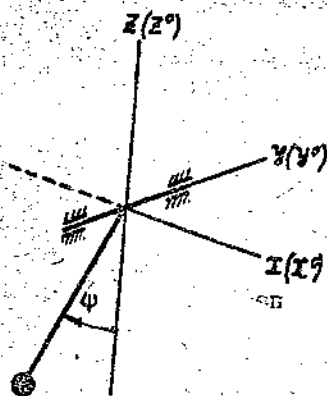


Рис. 6

Учитывая выражения (2.29) и (2.30) в уравнениях (2.28), представим последние в виде:

$$-mg \ell \sin \theta + \ell \cos \theta Q_y = 0 \quad (2.31)$$

$$-mg \ell \sin \psi - \ell \cos \psi Q_x = 0$$

В соответствии с теоремами механики относительно движения, проекции силы инерции переносного движения на оси x, y и z представляются формулами:

$$Q_x = -m \omega_x$$

$$Q_y = -m \omega_y \quad (2.32)$$

$$Q_z = -m \omega_z$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ являются проекциями на оси x, y и z ускорения центра тяжести соответствующего маятника.

Будем считать в дальнейшем углы θ и ψ малыми величинами. Тогда, учитывая в уравнениях (2.31) только члены первого порядка малости относительно ψ и θ а также равенства (2.32), представим уравнения (2.31) в виде

$$\theta = -\frac{\omega_y}{g}$$

$$\psi = \frac{\omega_x}{g} \quad (2.33)$$

Таким образом, система уравнений (2.23) при учете равенств (2.33) может быть представлена следующим образом:

$$\omega_x H = N_{1,2}$$

$$-\omega_y H = N_{3,4}$$

$$-\omega_z H = N_{5,6} \quad (2.34)$$

$$\theta = -\frac{\omega_y}{g}$$

$$\psi = \frac{\omega_x}{g}$$

Будем считать теперь, что моменты $N_{1,2}$ и $N_{3,4}$ выражаются, как уже упоминалось в п.1^о этой главы, соотношениями

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= k \int_0^t \theta d\tau \\ N_{3,4} &= -k \int_0^t \psi d\tau, \end{aligned} \quad (2.35)$$

которые при учете формул (2.33) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= -\frac{k}{g} \int_0^t \omega_y d\tau \\ N_{3,4} &= \frac{k}{g} \int_0^t \omega_x d\tau. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Определим величины ω_x и ω_y , которые входят в последние равенства.

Из кинематики известно (см. [5]), что

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \frac{d\dot{v}_x}{dt} + \omega_y v_x - \omega_z v_y \\ \dot{\omega}_y &= \frac{d\dot{v}_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \\ \dot{\omega}_z &= \frac{d\dot{v}_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где: v_x, v_y и v_z — проекции скорости точки подвеса и скорости самого гироблока, а, следовательно, и системы координат xyz на ее же собственные оси относительно сферы S .

Так как начало координат системы $x^0y^0z^0$ (или что то же системы xyz) перемещается по сфере S , то проекция скорости точки подвеса гироблока $v_z = 0$, вследствие чего

$$\dot{\omega}_x = \frac{d\dot{v}_x}{dt} - \omega_z v_y, \quad \dot{\omega}_y = \frac{d\dot{v}_y}{dt} + \omega_z v_x, \quad \dot{\omega}_z = \omega_x v_y - \omega_y v_x. \quad (2.38)$$

Проекции v_x и v_y выражаются соответственно через проекции угловой скорости ω_x, ω_y [2]. Оказывается, что

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y R \\ v_y &= -\omega_x R \end{aligned} \quad (2.39)$$

Подставляя выражения (2.39) в равенства (2.38), представим их следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= R \left(\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_x \right) \\ \dot{\omega}_y &= R \left(-\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_x \omega_y \right) \\ \dot{\omega}_z &= -R(\omega_x^2 + \omega_y^2). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Тогда соотношения (2.35) при учете первых двух равенств (2.40) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} N_{1,2} &= -\frac{kR}{g} \int_0^t \left(-\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_x \omega_y \right) d\tau \\ N_{3,4} &= -\frac{kR}{g} \int_0^t \left(\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_x \right) d\tau. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Подставим теперь соотношения (2.41) в первые два уравнения (2.34). Будем иметь тогда

$$\begin{aligned} \omega_x H &= \frac{kR}{g} \omega_x - \frac{kR}{g} \int_0^t \omega_y \omega_x d\tau - \frac{kR}{g} \omega_x^0 \\ -\omega_y H &= -\frac{kR}{g} \omega_y - \frac{kR}{g} \int_0^t \omega_x \omega_x d\tau + \frac{kR}{g} \omega_y^0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

В этих уравнениях ω_x^0 и ω_y^0 определяются из начальных условий движения.

В начале настоящего параграфа мы предположили, что система координат xyz совпадает с системой $x^0y^0z^0$.

вследствие чего ось z во все время движения нормальна на сфере S .

Уравнения (2.42) получены при учете этого предположения. Следовательно, они должны удовлетворяться тождественно при любом движении исследуемого гироскопа, то есть, при любых значениях ω_x , ω_y и ω_z .

Легко убедиться, что уравнения (2.42) удовлетворяются тождественно при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} H &= \frac{kR}{g} \\ \omega_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$-\frac{kR}{g} \omega_x^0 = 0; \quad \frac{kR}{g} \omega_y^0 = 0.$$

Из третьего уравнения (2.34) следует, что при выполнении второго условия (2.43) момент $N_{5,6}$ должен равняться нулю.

Заметим, что последние два условия (2.43) удовлетворяются при одновременном выполнении соотношений

$$\omega_x^0 = 0 \quad \text{в} \quad \omega_y^0 = 0 \quad (2.44)$$

Однако, как будет показано ниже, при любом выборе параметров гироскопа, величины ω_x^0 и ω_y^0 одновременно равны нулю быть не могут. Это значит, что мы не сможем подобрать параметры гироскопа так, чтобы ось z системы координат $x^0y^0z^0$ совпадала с осью z^0 системы совпадения, введем в конструкцию гироскопа устройства 13 и 14 (см. рис. 3), подающие дополнительно на корригирующие электромагниты 11 и 12 постоянные по величине моменты N_3 и N_4 , о которых упоминалось в п.1^о этой главы. Величины этих моментов выбираются так, чтобы

$$\begin{aligned} N_3 &= \frac{kR}{g} \omega_x^0 \\ N_4 &= -\frac{kR}{g} \omega_y^0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

При учете этих равенств в правые части первых двух уравнений систем (2.23) и (2.24) следует добавить величины (2.45): N_3 - в первое уравнение, а N_4 - соответственно во второе.

В частности, уравнения (2.34) при этом можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_x H &= N_{1,2} + \frac{kR}{g} \omega_x^0 \\ -\omega_y H &= N_{3,4} - \frac{kR}{g} \omega_y^0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$-\omega_z H = N_{5,6}$$

$$\theta = -\frac{\omega_y}{g}$$

$$\psi = \frac{\omega_x}{g}$$

Уравнения (2.42), полученные вследствие преобразования уравнений (2.46), можно представить тогда в виде:

$$\omega_x H = \frac{kR}{g} \omega_x - \frac{kR}{g} \int_0^t \omega_y \omega_x d\tau \quad (2.47)$$

$$-\omega_y H = -\frac{kR}{g} \omega_y - \frac{kR}{g} \int_0^t \omega_x \omega_y d\tau$$

Теперь эти уравнения, как легко видеть, удовлетворяются тождественно при выполнении первых двух условий (2.43), именно:

$$H = \frac{kR}{g} \quad (2.48)$$

$$\omega_z = 0 \quad (N_{5,6} = 0)$$

Мы получили, таким образом, условия (налагаемые на параметры гироскопа), при соблюдении которых связанная с ним система координат будет совпадать с системой

$x^o y^o z^o$ при произвольном движении гироскопа по сфере

4°. Займемся теперь непосредственно вопросом об определении координат местоположения гироскопа при его произвольном движении по поверхности Земли, принимаемой за сферу радиуса R .

При решении этого вопроса будем предполагать, что условия, налагаемые на гироскоп в п.3, соблюдены точно.

Введем подвижную систему координат $\xi\eta\zeta$, начало которой расположим в центре подвеса гироскопа. Ось ξ этой системы направим по касательной к параллели на Восток (рис. 7), ось η — по касательной к меридиану на Север, и ось ζ — по радиусу Земли кверху.

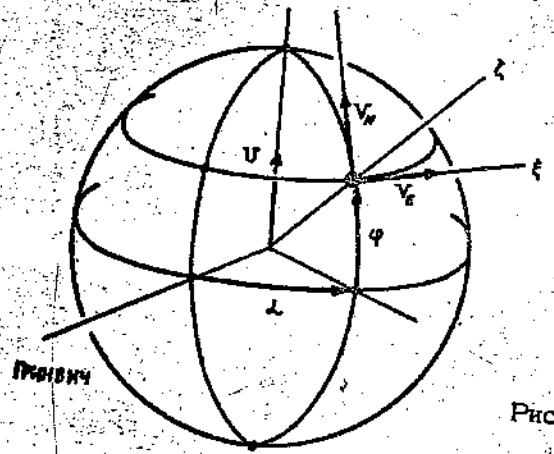


Рис. 7

Обозначим буквой U угловую скорость вращения Земли, буквами φ и λ соответственно широту и долготу местоположения объекта. Пусть далее V_E и V_N являются восточной и северной составляющими скорости движения объекта в системе координат $\xi\eta\zeta$.

Определим сначала проекции мгновенной угловой скорости ω трехгранника $\xi\eta\zeta$ на его же собственные оси.

Если трехгранник $\xi\eta\zeta$ неподвижен относительно Земли, то $\varphi = const$ и $\lambda = const$. В этом случае угловая скорость ω будет такой же, как и угловая скорость Земли. Легко видеть (см. рис. 8), что в этом случае

$$U_{\xi} = 0$$

$$U_{\eta} = U \cos \varphi$$

$$U_{\zeta} = U \sin \varphi.$$

(2.49)

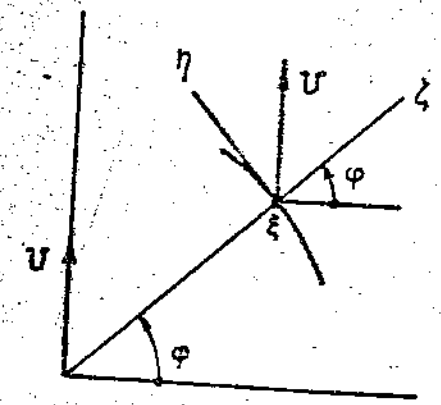


Рис. 8

Пусть теперь величины φ и λ изменяются с течением времени. Тогда легко убедиться (см. рис. 7), что

$$V_N = R \frac{d\varphi}{dt}$$

(2.50)

$$V_E = r \frac{d\lambda}{dt} = R \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}$$

Скорость $\frac{d\varphi}{dt}$ направлена в сторону, противоположную оси ξ , в то время как скорость $\frac{d\lambda}{dt}$ совпадает по направлению со скоростью вращения Земли U . На основании вышесказанного, проекции скорости ω на оси системы координат $\xi\eta\zeta$ можно представить в виде:

$$u_{\xi} = -\frac{d\varphi}{dt} \quad (2.51)$$

$$u_{\eta} = U \cos \varphi + \frac{d\lambda}{dt} \cos \varphi \quad (2.51)$$

$$u_{\zeta} = U \sin \varphi + \frac{d\lambda}{dt} \sin \varphi$$

Но из соотношения (2.50) следует, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_N}{R} \quad (2.52)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{V_E}{R \cos \varphi}$$

Тогда в окончательном виде равенства (2.51) запишутся следующим образом:

$$u_{\xi} = -\frac{V_N}{R} \quad (2.53)$$

$$u_{\eta} = U \cos \varphi + \frac{V_E}{R}$$

$$u_{\zeta} = U \sin \varphi + \frac{V_E}{R} \operatorname{tg} \varphi.$$

Определим теперь проекции угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ системы координат xyz на ее же собственные оси. При этом будем иметь в виду, что вследствие точного выполнения условий п.3^о, налагаемых на параметры гироскопа, ось x , с ним связанная, во все время движения нормальна сфере S и, следовательно, совпадает с осью ξ . Обозначим буквой α угол между осями y и η систем координат xyz и $\xi\eta\zeta$, отсчитывая положительное направление этого угла так, как показано на рис. 9.

Нетрудно видеть, что проекции угловой скорости системы координат xyz , связанной с гироскопом, на оси x, y, z имеют при этом вид:

$$\begin{aligned} \omega_x &= u_{\xi} \cos \alpha - u_{\eta} \sin \alpha \\ \omega_y &= u_{\xi} \sin \alpha + u_{\eta} \cos \alpha \\ \omega_z &= u_{\zeta} - \frac{d\alpha}{dt} \end{aligned} \quad (2.54)$$

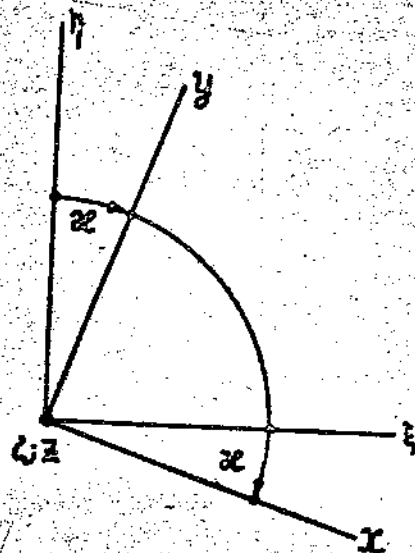


Рис. 9

Равенства (2.54) при учете соотношений (2.53) и (2.50) можно будет преобразовать к виду:

$$\omega_x = -\frac{d\varphi}{dt} \cos \alpha - \left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right) \cos \varphi \sin \alpha$$

$$\omega_y = -\frac{d\varphi}{dt} \sin \alpha + \left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right) \cos \varphi \cos \alpha \quad (2.55)$$

$$\omega_z = \left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right) \sin \varphi - \frac{d\alpha}{dt}$$

Подставим теперь эти выражения в первые три уравнения системы (2.46). Принимая во внимание формулы (2.45) и (2.48), будем иметь тогда:

$$\left[-\frac{d\varphi}{dt} \cos \alpha \varepsilon - \left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right) \cos \varphi \sin \alpha \varepsilon \right] H = N_{1,2} + N_3$$

$$\left[-\frac{d\varphi}{dt} \sin \alpha \varepsilon + \left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right) \cos \varphi \cos \alpha \varepsilon \right] H = N_{3,4} + N_4 \quad (2.56)$$

$$\left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right) \sin \varphi = \frac{d\alpha \varepsilon}{dt}$$

Моменты $N_{1,2}$ и $N_{3,4}$ в этих уравнениях являются известными. Величины N_3 и N_4 также известны и зависят только от начальных условий движения объекта.

Таким образом, зная эти величины, мы путем решения системы уравнений (2.56) можем определить координаты местоположения объекта на Земной поверхности:

именно, широту φ и долготу λ , а также его курс $\alpha \varepsilon$.

Для решения системы уравнений (2.56) в гироблоке, схематически изображенном на рис.3, и предусмотрено счетно-решающее устройство, определяющее искомые величины φ , λ и $\alpha \varepsilon$ в любой момент времени t .

5°. Рассмотрим случай, когда курс $\alpha \varepsilon$ движения объекта известен.

Обратимся тогда к системе уравнений (2.56). Умножим первое уравнение системы на $-\cos \alpha \varepsilon$ второе - на $\sin \alpha \varepsilon$ и сложим. Получим следующее соотношение для определения широты φ .

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{H} \left[(N_{1,2} + N_3) \cos \alpha \varepsilon - (N_{3,4} + N_4) \sin \alpha \varepsilon \right] \quad (2.57)$$

Возведем теперь первое, второе и третье равенства системы (2.56) в квадрат и сложим почленно правые и левые части. Будем иметь тогда

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = \left(\frac{d\alpha \varepsilon}{dt} \right)^2 + \left(\frac{N_{1,2} + N_3}{H} \right)^2 + \left(\frac{N_{3,4} + N_4}{H} \right)^2 \quad (2.58)$$

Подставляя в это равенство соотношения (2.57) для $\frac{d\varphi}{dt}$, получим для определения долготы λ формулу:

$$\left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = \frac{(N_{1,2} + N_3)^2 + (N_{3,4} + N_4)^2}{H^2} -$$

$$\frac{[-(N_{1,2} + N_3) \cos \alpha \varepsilon + (N_{3,4} + N_4) \sin \alpha \varepsilon]^2}{H^2} + \left(\frac{d\alpha \varepsilon}{dt} \right)^2 \quad (2.59)$$

которая после преобразования приобретает вид:

$$\left(U + \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = \left(\frac{d\alpha \varepsilon}{dt} \right)^2 + \frac{[(N_{1,2} + N_3) \sin \alpha \varepsilon + (N_{3,4} + N_4) \cos \alpha \varepsilon]^2}{H^2} \quad (2.60)$$

Формулы (2.57) и (2.60) служат для определения координат φ и λ местоположения объекта, по известным величинам $N_{1,2}$, $N_{3,4}$, N_3 и N_4 . Анализ этих формул показывает, что в рассматриваемом случае нет необходимости решать систему дифференциальных уравнений для определения координат φ и λ ; их можно определить непосредственно.

6°. В заключение, определим величины ω_x^0 и ω_y^0 , о которых речь шла в п.4° настоящей главы. На основании соотношений (2.53) и (2.54) имеем следующие формулы:

$$\omega_x^0 = u_E^0 \cos \alpha \varepsilon^0 + u_D^0 \sin \alpha \varepsilon^0 = -\frac{V_N^0}{R} \cos \alpha \varepsilon^0 - \left(U \cos \varphi^0 + \frac{V_E^0}{R} \right) \sin \alpha \varepsilon^0$$

$$\omega_y^0 = u_E^0 \sin \alpha \varepsilon^0 + u_D^0 \cos \alpha \varepsilon^0 = -\frac{V_N^0}{R} \sin \alpha \varepsilon^0 + \left(U \cos \varphi^0 + \frac{V_E^0}{R} \right) \cos \alpha \varepsilon^0 \quad (2.61)$$

Здесь V_E^0 , V_N^0 - проекции скорости V движения объекта на оси ξ и η в момент времени $t=0$; $\alpha \varepsilon^0$ - курс объекта, φ^0 - широта места в начальный момент времени.

В частности, начальное движение объекта можно выбрать таким, чтобы в момент времени $t=0$: $V_N^0 = V_E^0 = 0$. При этом равенства (2.61) преобразуются к виду:

$$\omega_x^0 = -U \cos \varphi^0 \sin \alpha \varepsilon^0$$

$$\omega_y^0 = U \cos \varphi^0 \cos \alpha \varepsilon^0 \quad (2.62)$$

ГЛАВА III. ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОБЛОКА

1°. В предыдущей главе настоящего отчета были получены условия, налагаемые на параметры гироблока и начальные обстоятельства его движения, при наблюдении которых оси системы координат xyz (связанной с гироблоком) все время совпадают с осями $x^0y^0z^0$ при произвольном перемещении гироблока по сфере S .

Рассмотрим теперь общий случай начальных условий движения гироблока и построим уравнения его движения относительно системы координат $x^0y^0z^0$, ось z^0 которой (как уже упоминалось выше) направлена по радиусу сферы S . Для этого воспользуемся уравнениями (2.23), которые при учете моментов N_3 и N_4 преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \omega_x H &= N_{1,2} + N_3 \\ -\omega_y H &= N_{3,4} + N_4 \\ -\omega_z H &= N_{5,6} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{mom}_x \bar{F} + \text{mom}_x \bar{Q} = 0$$

$$\text{mom}_y \bar{F} + \text{mom}_y \bar{Q} = 0.$$

В первые три уравнения этой системы при использовании равенства (2.2) подставим значения ω_x , ω_y и ω_z для проекций угловой скорости системы координат xyz на ее же собственные оси. Будем иметь тогда при учете формул (2.35) следующие уравнения

$$\begin{aligned} \left[\omega_{x^0} \cos \beta + \omega_{y^0} \sin \alpha \sin \beta - \omega_{z^0} \sin \beta \cos \alpha + \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \right] H &= k \int_0^t \theta d\tau + N_3 \\ - \left[\omega_{y^0} \cos \alpha + \omega_{z^0} \sin \alpha + \frac{d\beta}{dt} \right] H &= -k \int_0^t \psi d\tau + N_4 \end{aligned} \quad (3.2)$$

x/ См. п.3° главы 1 настоящего отчета.

$$-\left[\omega_{x^0} \sin \beta - \omega_{y^0} \sin \alpha \cos \beta + \omega_{z^0} \cos \alpha \cos \beta + \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta \right] H = N_{5,6}.$$

Рассмотрим два последних уравнения системы (3.1) или, что то же уравнения (2.24), именно:

$$y_{c_1} F_x - x_{c_1} F_y + y_{c_1} Q_x - x_{c_1} Q_y = 0 \quad (2.24)$$

$$x_{c_2} F_x - x_{c_2} F_y + x_{c_2} Q_x - x_{c_2} Q_y = 0.$$

В этих уравнениях, как уже упоминалось выше, y_{c_1} и x_{c_1} являются координатами центра тяжести маятника 7 в системе координат xyz , причем на основании формул (2.29) и рис. 10, имеем:

$$\begin{aligned} y_{c_1} &= l \sin \theta \\ x_{c_1} &= -l \cos \theta \end{aligned} \quad (2.29)$$

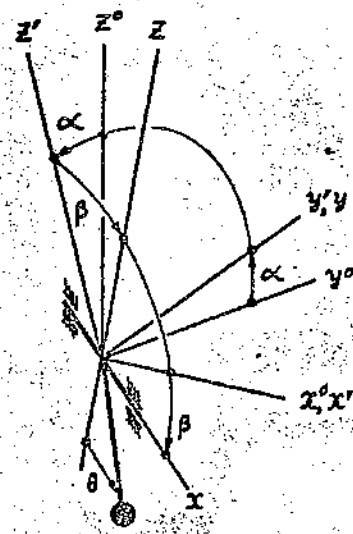


Рис. 10

Аналогично для координат центра тяжести маятника 8 в той же системе координат имеют место равенства (см. формулу (2.30) и рис. 11):

$$\begin{aligned} x_{c_2} &= -l \sin \psi \\ x_{c_2} &= -l \cos \psi \end{aligned} \quad (2.30)$$

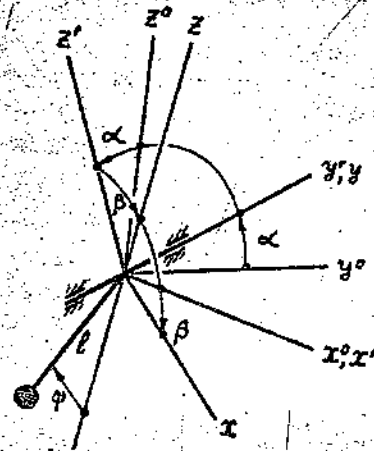


Рис. 11

Напомним при этом, что угол θ — представляет собой угол отклонения маятника 7 от перпендикуляра к платформе (или, что то же оси z в плоскости xy , в то время как угол ψ является углом отклонения маятника 8 от того же перпендикуляра в плоскости xz .

Определим теперь проекции силы тяготения F на оси системы координат xyz .

На основании таблицы (2.1) косинусов углов между осями xyz и $x'y'z'$ получим выражения для проекций этой силы в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{x'} \cos \beta + F_{y'} \sin \alpha \sin \beta - F_{z'} \sin \beta \cos \alpha \\ F_y &= F_{y'} \cos \alpha + F_{z'} \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$F_z = F_{x'} \sin \beta - F_{y'} \sin \alpha \cos \beta + F_{z'} \cos \alpha \cos \beta.$$

Аналогично для проекций силы инерции Q первого движения на оси системы координат xyz будем иметь соотношения:

$$Q_x = Q_{x'} \cos \beta + Q_{y'} \sin \alpha \sin \beta - Q_{z'} \sin \beta \cos \alpha.$$

$$Q_y = Q_{y'} \cos \alpha + Q_{z'} \sin \alpha \quad (3.4)$$

$$Q_z = Q_{x'} \sin \beta - Q_{y'} \sin \alpha \cos \beta + Q_{z'} \cos \alpha \cos \beta.$$

Проекции силы инерции Q на оси координат x', y', z' можно выразить [аналогично равенствам (2.32)] формулами

$$Q_{x'} = -m \omega_{x'}$$

$$Q_{y'} = -m \omega_{y'} \quad (3.5)$$

$$Q_{z'} = -m \omega_{z'}$$

Сила тяготения F , как уже упоминалось выше, направлена к центру сферы S , то-есть, параллельна оси z' . Тогда можем записать равенства:

$$F_{x'} = F_{y'} = 0; \quad F_{z'} = -F, \quad (3.6)$$

при использовании которых в уравнениях (3.3) получим

$$\begin{aligned} F_x &= F \sin \beta \cos \alpha \\ F_y &= -F \sin \alpha \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$F_z = -F \cos \alpha \cos \beta.$$

Уравнения (2.24) при учете формул (2.30), (2.31), (3.4), (3.5), (3.7) можно представить следующим образом:

$$-l[\sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta \sin \alpha](F + m\omega_{z^0}) + m\ell\omega_{y^0}(\sin \theta \sin \alpha \cos \beta - \cos \theta \cos \alpha) - m\ell\omega_{x^0} \sin \beta \sin \theta = 0 \quad (3.8)$$

$$-l[\sin \beta \cos \alpha \cos \psi + \cos \alpha \cos \beta \sin \psi](F + m\omega_{z^0}) + m\ell\omega_{x^0}(\cos \beta \cos \psi - \sin \beta \sin \psi) + m\ell\omega_{y^0}(\sin \alpha \sin \beta \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi \cos \beta) = 0.$$

Для определения проекций w_{x^0} , w_{y^0} и w_{z^0} ускорения точки подвеса гироскопа на оси $x^0 y^0 z^0$ можно воспользоваться равенствами (2.38). Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} w_{x^0} &= \frac{dv_{x^0}}{dt} - \omega_{z^0} v_{y^0} \\ w_{y^0} &= \frac{dv_{y^0}}{dt} + \omega_{z^0} v_{x^0} \\ w_{z^0} &= \omega_{x^0} v_{y^0} - \omega_{y^0} v_{x^0}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Согласно формулам (2.39), выше приведенные равенства (3.9) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} w_{x^0} &= \frac{dv_{x^0}}{dt} - \omega_{z^0} v_{y^0} \\ w_{y^0} &= \frac{dv_{y^0}}{dt} + \omega_{z^0} v_{x^0} \\ w_{z^0} &= -\frac{v_{y^0}^2 + v_{x^0}^2}{R}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Скорость точки подвеса гироскопа по поверхности сферы S обозначим буквой v . Тогда имеет место равенство:

$$v^2 = v_{x^0}^2 + v_{y^0}^2 + v_{z^0}^2 \quad (3.11)$$

Как уже упоминалось выше, движение точки подвеса гироскопа происходит по поверхности сферы S , вследствие чего $v_{z^0} = 0$, и формула (3.11) приобретает вид:

$$v^2 = v_{x^0}^2 + v_{y^0}^2 \quad (3.12)$$

Подставляя равенство (3.12) в третью формулу (3.10), получим

$$\begin{aligned} w_{x^0} &= \frac{dv_{x^0}}{dt} - \omega_{z^0} v_{y^0} \\ w_{y^0} &= \frac{dv_{y^0}}{dt} + \omega_{z^0} v_{x^0} \\ w_{z^0} &= -\frac{v^2}{R}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Уравнения (3.8) при использовании формул (3.13) можно записать теперь следующим образом:

$$\begin{aligned} -l[\sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta \sin \alpha] \left(F - \frac{mv^2}{R} \right) + m\ell(\sin \theta \sin \alpha \cos \beta - \cos \theta \cos \alpha) \left(\frac{dv_{y^0}}{dt} + \omega_{z^0} v_{x^0} \right) - m\ell \sin \beta \sin \theta \left(\frac{dv_{x^0}}{dt} - \omega_{z^0} v_{y^0} \right) = 0 \\ -l[\sin \beta \cos \alpha \cos \psi + \cos \alpha \cos \beta \sin \psi] \left(F - \frac{mv^2}{R} \right) + m\ell(\cos \beta \cos \psi - \sin \beta \sin \psi) \left(\frac{dv_{x^0}}{dt} - \omega_{z^0} v_{y^0} \right) + m\ell(\sin \alpha \sin \beta \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi \cos \beta) \left(\frac{dv_{y^0}}{dt} + \omega_{z^0} v_{x^0} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Обратимся теперь вновь к системе (3.1). При использовании уравнений (3.2) и (3.14) она приобретает вид:

$$\begin{aligned} \left[\omega_{x^0} \cos \beta + \omega_{y^0} \sin \alpha \sin \beta - \omega_{z^0} \sin \beta \cos \alpha + \frac{d\alpha}{dt} \cos \beta \right] H = k \int_0^t \theta d\tau + N_3 \\ - \left[\omega_{y^0} \cos \alpha + \omega_{x^0} \sin \alpha + \frac{d\beta}{dt} \right] H = -k \int_0^t \psi d\tau + N_4 \end{aligned}$$

$$-\left[\omega_{x^0} \sin \beta - \omega_{y^0} \sin \alpha \cos \beta + \omega_{z^0} \cos \alpha \cos \beta + \frac{d\alpha}{dt} \sin \beta\right] H = N_{5,6}$$

$$-R \left[\sin \theta \cos \alpha \cos \beta + \cos \theta \sin \alpha \right] \left(F - \frac{mv^2}{R} \right) + m \ell (\sin \theta \sin \alpha \cos \beta -$$

$$- \cos \theta \cos \alpha) \left(\frac{dv_{x^0}}{dt} + \omega_{x^0} v_{x^0} \right) - m \ell \sin \beta \sin \theta \left(\frac{dv_{y^0}}{dt} - \omega_{x^0} v_{y^0} \right) = 0$$

$$-R \left[\sin \beta \cos \alpha \cos \psi + \cos \alpha \cos \beta \sin \psi \right] \left(F - \frac{mv^2}{R} \right) +$$

$$+ m \ell (\cos \beta \cos \psi - \sin \beta \sin \psi) \left(\frac{dv_{x^0}}{dt} - \omega_{x^0} v_{y^0} \right) +$$

$$+ m \ell (\sin \alpha \sin \beta \cos \psi + \sin \alpha \sin \psi \cos \beta) \left(\frac{dv_{y^0}}{dt} + \omega_{x^0} v_{x^0} \right) = 0.$$

Если в уравнениях этой системы считать, как и ранее, углы θ и ψ малыми, положить, согласно формулам (2.45),

$$N_3 = \frac{kR}{g} \omega_{x^0}$$

$$N_4 = -\frac{kR}{g} \omega_{y^0}$$

и воспользоваться условиями (2.39) и (2.48), то они будут относиться к движению гироскопа, свойства которого изложены в п.3⁰ главы второй настоящего отчета. В этом случае уравнения (3.15), как и следовало ожидать, удовлетворяются тождественно, если в них положить

$$\alpha = \beta = 0, \quad (3.16)$$

а также предположить, что имеет место равенство:

$$F - \frac{mv^2}{R} = mg. \quad (3.17)$$

Функции ω_{x^0} , ω_{y^0} и ω_{z^0} , а также величины v_{x^0} и v_{y^0} , задающие движение точки подвеса гироскопа по поверхности сферы S , могут быть при этом совершенно произвольными.

Движение гироскопа при соблюдении равенств (2.45), (2.48), (3.17), (3.16) и (2.39) происходит так, как было описано в п.3⁰ главы II. Именно, ось x , перпендикулярная к платформе Π гироскопа, при любом движении точки его подвеса остается перпендикулярной сфере S .

2⁰. Уравнения движения (3.15) слишком сложны для исследования движения гироскопа в самом общем случае. Поэтому ограничимся изучением малых движений гироскопа относительно системы координат $x^0 y^0 z^0$. Вследствие этого сохраним в уравнениях (3.15) лишь члены первого порядка относительно углов $\alpha, \beta, \theta, \psi$ и их производных по времени.

Заметим при этом, что мы будем изучать движение гироскопа, свойства которого рассмотрены в предыдущей главе. Параметры этого гироскопа удовлетворяют условиям (2.48), именно:

$$H = \frac{kR}{g}$$

$$N_{5,6} = 0 \quad (\omega_z = 0)$$

и условию (3.17).

Имея в виду теперь приведенное выше замечание о малости углов α и β, θ, ψ , а также формулы (2.48) и (3.17), систему уравнений (3.15) представим в виде:

$$\frac{d\alpha}{dt} - \omega_{x^0} \beta + \omega_{z^0} = \frac{k}{H} \int_0^t \theta d\tau + \frac{N_3}{H}$$

$$\frac{d\beta}{dt} + \omega_{x^0} \alpha + \omega_{y^0} = \frac{k}{H} \int_0^t \psi d\tau - \frac{N_4}{H}$$

$$\omega_{x^0} \beta - \omega_{y^0} \alpha + \omega_{z^0} = 0$$

(3.18)

$$\begin{aligned}
 (\theta + \alpha)g + \left(\frac{dv_{y^0}}{dt} + \omega_{x^0} v_{x^0} \right) &= 0 \\
 (\beta + \psi)g - \left(\frac{dv_{x^0}}{dt} - \omega_{x^0} v_{y^0} \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Эти уравнения следует рассматривать, как уравнения возмущенного движения исследуемого гироскопа по отношению к движению, при котором углы α и β определяются соотношением (3.16).

Подставим значение ω_{x^0} из третьего уравнения системы (3.18) в остальные уравнения этой системы. Тогда, пренебрегая малыми величинами порядка выше первого, систему уравнений (3.18) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\alpha}{dt} + \omega_{x^0} &= \frac{k}{H} \int_0^t \theta d\tau + \frac{N_3}{H} \\
 \frac{d\beta}{dt} + \omega_{y^0} &= \frac{k}{H} \int_0^t \psi d\tau - \frac{N_4}{H} \\
 \theta + \alpha &= -\frac{1}{g} \left[\frac{dv_{y^0}}{dt} + \frac{v_{x^0}}{R} (v_{x^0} \alpha + v_{y^0} \beta) \right] \\
 \beta + \psi &= \frac{1}{g} \left[\frac{dv_{x^0}}{dt} - \frac{v_{y^0}}{R} (v_{x^0} \alpha + v_{y^0} \beta) \right].
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Продифференцируем первые два уравнения системы (3.19) по времени t . Вследствие этого систему (3.19) при учете, что N_3 и N_4 постоянные запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d\omega_{x^0}}{dt} &= \frac{k}{H} \theta \\
 \frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{d\omega_{y^0}}{dt} &= \frac{k}{H} \psi
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\theta + \alpha = -\frac{1}{g} \left[\frac{dv_{y^0}}{dt} + \frac{v_{x^0}}{R} (v_{x^0} \alpha + v_{y^0} \beta) \right]$$

$$\beta + \psi = \frac{1}{g} \left[\frac{dv_{x^0}}{dt} - \frac{v_{y^0}}{R} (v_{x^0} \alpha + v_{y^0} \beta) \right].$$

Исключим из первых двух уравнений системы (3.20) величины ψ и θ при помощи двух последних уравнений этой системы. Тогда после незначительных преобразований и учета формул (2.39) получим два уравнения для определения углов α и β , именно:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{1}{R} \frac{dv_{y^0}}{dt} = -\frac{k}{gH} \left[\frac{dv_{y^0}}{dt} + \frac{v_{x^0}}{R} (v_{x^0} \alpha + v_{y^0} \beta) \right] - \frac{k}{H} \alpha \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_{x^0}}{dt} = \frac{k}{gH} \left[\frac{dv_{x^0}}{dt} - \frac{v_{y^0}}{R} (v_{x^0} \alpha + v_{y^0} \beta) \right] - \frac{k}{H} \beta.$$

Учитывая первое равенство (2.48), систему уравнений (3.21) представим в виде:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \frac{k}{H} \beta = -\frac{k}{gHR} [v_{y^0} v_{x^0} \alpha + v_{y^0}^2 \beta] \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{k}{H} \alpha = -\frac{k}{gHR} [v_{x^0}^2 \alpha + v_{x^0} v_{y^0} \beta]$$

Введем в уравнениях (3.22) замену переменных

$$t = t' \sqrt{\frac{H}{k}} \quad (3.23)$$

Будем иметь тогда

$$\frac{d^2\alpha}{dt'^2} + \alpha = -\frac{1}{gR} [v_{x_0}^2 \alpha + v_{x_0} v_{y_0} \beta] \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2\beta}{dt'^2} + \beta = -\frac{1}{gR} [v_{x_0} v_{y_0} \alpha + v_{y_0}^2 \beta].$$

3°. Если проекции v_{x_0} , v_{y_0} скорости точки подвеса гироблока относительно сферы S постоянны, то система (3.24) становится однородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Исследуем устойчивость движения этой системы в рассматриваемом случае. При этом будем искать ее решение в виде:

$$\alpha = A_1 e^{i\lambda t'} \quad (3.25)$$

$$\beta = A_2 e^{i\lambda t'},$$

где A_1 и A_2 произвольные постоянные.

При учете равенств (3.25) и формулы (3.11) характеристическое уравнение этой системы будет следующим

$$\lambda^4 - \left[2 + \frac{v^2}{gR}\right] \lambda^2 + \left[1 + \frac{v^2}{gR}\right] = 0 \quad (3.26)$$

Чтобы движение системы (3.24) было устойчивым, корни характеристического уравнения (3.26) должны быть действительными. Обратимся поэтому к определению корней уравнения (3.26). Оказывается, что величины этих корней такие:

$$\lambda_{1,2} = \pm 1; \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{1 + \frac{v^2}{gR}} \quad (3.27)$$

Мы видим, что корни уравнения (3.26) действительны при любых значениях параметров, характеризующих систему (3.24). Следовательно, движение этой системы устойчиво. Таким образом, в рассматриваемом случае исследуемый гироблок совершает незатухающие колебания вокруг положения

равновесия, определяющегося равенствами (3.16).

В заключение следует отметить, что приведенное выше исследование малых движений гироблока вокруг подвижных осей системы координат $x^0 y^0 z^0$ проведено только в одном частном случае движения объекта ($v_{x_0} = v_{y_0} = \text{const}$).

Вопрос об исследовании устойчивости возмущенного движения, определяемого нелинейной системой уравнений (3.15), требует, разумеется, дополнительных исследований.

Л и т е р а т у р а

1. Зигмунд Рейш, Физические и технические основы развития новых гироскопов. (Материалы фирмы Сименс, 1941).
2. А.Ю.Ишлинский, Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. ПММ, т.ХХ, в.3, 1956.
3. А.Ю.Ишлинский, К теории гироскопического маятника. ПММ, т.ХХ, в.4, 1956.
4. А.Ю.Ишлинский, К теории гироскопического маятника. Прикладная математика и механика, т.ХХ1, в.11, 1957.
5. Г.К.Суслов, Теоретическая механика. ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Предисловие	3
Введение	6
Глава I. Определение местоположения объекта при движении его вдоль меридиана...	10
Глава II. Определение местоположения объекта при произвольном его движении по поверхности Земли	17
Глава III. Исследование малых движений гироскопа.....	42