

## УСТАЛОСТНАЯ ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ПРИ МНОГООСНОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СДВИГОМ ФАЗ<sup>1</sup>

Бураго Н.Г.<sup>1</sup>, Никитин А.Д.<sup>2</sup>, Никитин И.С.<sup>2</sup>, Стратула Б.А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского

<sup>2</sup>Институт автоматизации проектирования РАН

<sup>3</sup>«МАИ» - Национальный Исследовательский Университет

Опыт эксплуатации разнообразных конструкционных элементов показывает, что, как правило, конструкционные элементы находятся в условиях сложного (трехосного) циклического нагружения. Для расчета усталостной прочности в этом случае необходимо использовать многоосные критерии усталостного разрушения. Современные многоосные усталостные критерии позволяют оценить число циклов  $N$  до разрушения образца или элемента конструкции (долговечность эксплуатации). При этом в них учитывается возможность произвольного сдвига фаз между циклически меняющимися компонентами напряжений и определяется ориентация так называемой критической плоскости развития усталостных повреждений [1-4]. В данной работе предлагается процедура расчёта усталостной долговечности и ориентации критической плоскости при многоосных циклических нагрузках с произвольным сдвигом фаз для классического усталостного диапазона – малоциклового (МЦУ) и многоциклового усталости (МНЦУ), основанная на хорошо апробированном критерии [2].

Рассмотрим материальную частицу в однородном напряженном состоянии с тензором напряжений  $\sigma(t)$ , который меняется циклическим образом. Выберем систему координат, связанную с главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Выберем площадку, ориентированную единичной нормалью  $\mathbf{n}$ . Многоосный критерий усталостного разрушения записывается в следующей форме:

$$\max_{\mathbf{n}} T_a + \alpha_{\infty} \sigma_{H, \max} = S_0 + AN^{\beta}$$

Параметры  $S_0, A, \alpha_{\infty}$  и  $\beta$  определяются из усталостных испытаний на растяжение-сжатие при двух коэффициентах асимметрии цикла  $R=0$  и  $R=-1$  [4].

Слагаемое  $\max_{\mathbf{n}} T_a$  является максимальным разбросом касательного напряжения на всём множестве площадок с нормалью  $\mathbf{n}$ , проходящих через заданную точку пространства, за один цикл нагружения:

---

<sup>1</sup> Материалы XXI международной конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСПИС'2019) - М.: Изд-во МАИ, 2019. С. 242-244. ISBN 978-5-4316-0589-5.

$$T_a^2(\mathbf{n}) = \int_0^{2\pi} \tau_a^2(\mathbf{n}, \chi) d\chi / \pi \quad \tau_a(\mathbf{n}, \chi) = \left[ \max_{t \in P} \tau(\mathbf{n}, \chi, t) - \min_{t \in P} \tau(\mathbf{n}, \chi, t) \right]$$

Слагаемое  $\alpha_\infty \sigma_{H,\max}$  является эквивалентной максимальной величиной гидростатического давления в заданной точке за один цикл нагружения:

$$\sigma_{H,\max} = \max_{t \in P} \sigma_{kk}(t) / 3.$$

Касательное напряжение на площадке определяется формулой  $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ .

Можно вывести формулу для размаха касательного напряжения в цикле [4]:

$$T_a^2(\mathbf{n}) = |\Delta\boldsymbol{\tau}|^2 = (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2)^2 n_1^2 n_2^2 + (\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)^2 n_1^2 n_3^2 + (\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_3)^2 n_2^2 n_3^2$$

Выберем гармонический закон изменения главных касательных напряжений в цикле с частотой  $\omega$  и с учетом произвольного сдвига фаз  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$

$$\sigma_1 = \sigma_{1m} + \sigma_{1a} \cos \omega t, \quad \sigma_2 = \sigma_{2m} + \sigma_{2a} \cos(\omega t + \varphi_2), \quad \sigma_3 = \sigma_{3m} + \sigma_{3a} \cos(\omega t + \varphi_3)$$

где  $\sigma_{1m}, \sigma_{2m}, \sigma_{3m}$  - средние напряжения, а  $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}, \sigma_{3a}$  - амплитуды главных напряжений в цикле. Размах главных напряжений в цикле:

$$\Delta\sigma_1 = \sigma_{1a} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2), \quad \Delta\sigma_2 = \sigma_{2a} (\cos(\omega t_1 + \varphi_2) - \cos(\omega t_2 + \varphi_2)),$$

$$\Delta\sigma_3 = \sigma_{3a} (\cos(\omega t_1 + \varphi_3) - \cos(\omega t_2 + \varphi_3)),$$

где моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  определяются из условия максимума по времени размаха касательного напряжения на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$ ,  $t_1, t_2 \in [0, T]$ ,  $T = 2\pi / \omega$ .

В более краткой форме размах касательного напряжения запишется в виде:

$$\Delta\tau^2 = 4 \left\{ A_{12}^2 \sin^2(\omega\xi - \psi_{12}) n_1^2 n_2^2 + A_{13}^2 \sin^2(\omega\xi - \psi_{13}) n_1^2 n_3^2 + A_{23}^2 \sin^2(\omega\xi - \psi_{23}) n_2^2 n_3^2 \right\}$$

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \xi, \quad A_{12}^2 = \Delta\sigma_{12}^2 + \tilde{\sigma}_{2a}^2, \quad A_{13}^2 = \Delta\sigma_{13}^2 + \tilde{\sigma}_{3a}^2, \quad A_{23}^2 = \Delta\sigma_{23}^2 + \Delta\tilde{\sigma}_{23}^2,$$

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\omega} = t_1 + T/2, \quad \psi_{12} = \arctg \frac{\tilde{\sigma}_{2a}}{\Delta\sigma_{12}}, \quad \psi_{13} = \arctg \frac{\tilde{\sigma}_{3a}}{\Delta\sigma_{13}}, \quad \psi_{23} = -\arctg \frac{\Delta\tilde{\sigma}_{23}}{\Delta\sigma_{23}},$$

где введены дополнительные обозначения

$$\Delta\sigma_{12} = \sigma_{1a} - \sigma_{2a} \cos \varphi_2, \quad \Delta\sigma_{13} = \sigma_{1a} - \sigma_{3a} \cos \varphi_3, \quad \Delta\sigma_{23} = \sigma_{2a} \cos \varphi_2 - \sigma_{3a} \cos \varphi_3,$$

$$\tilde{\sigma}_{2a} = \sigma_{2a} \sin \varphi_2, \quad \tilde{\sigma}_{3a} = \sigma_{3a} \sin \varphi_3, \quad \Delta\tilde{\sigma}_{23} = \sigma_{2a} \sin \varphi_2 - \sigma_{3a} \sin \varphi_3,$$

$$A_S = A_{12}^2 \sin 2\psi_{12} n_1^2 n_2^2 + A_{13}^2 \sin 2\psi_{13} n_1^2 n_3^2 + A_{23}^2 \sin 2\psi_{23} n_2^2 n_3^2,$$

$$A_C = A_{12}^2 \cos 2\psi_{12} n_1^2 n_2^2 + A_{13}^2 \cos 2\psi_{13} n_1^2 n_3^2 + A_{23}^2 \cos 2\psi_{23} n_2^2 n_3^2.$$

$$b_1 = A_{13}^2 \sin^2(\omega\xi_0 - \psi_{13}), \quad b_2 = A_{23}^2 \sin^2(\omega\xi_0 - \psi_{23}),$$

$$b_{12} = A_{13}^2 \sin^2(\omega\xi_0 - \psi_{13}) + A_{23}^2 \sin^2(\omega\xi_0 - \psi_{23}) - A_{12}^2 \sin^2(\omega\xi_0 - \psi_{12})$$

Были определены моменты времени, для которых достигаются экстремальные значения размаха касательных напряжений внутри цикла при произвольном  $\mathbf{n}$ .

$$t_1 = \frac{T}{4} \left( \frac{\text{arctg}(A_S / A_C)}{\pi} + k - 1 \right), \quad t_2 = \frac{T}{4} \left( \frac{\text{arctg}(A_S / A_C)}{\pi} + k + 1 \right), \quad \omega\xi_0 = \frac{\text{arctg}(A_S / A_C)}{2} + \frac{\pi k}{2}, \quad k=1,2,3.$$

Для этих значений  $t_1, t_2$  были найдены значения компонент нормали  $x_{1,2,3} = n_{1,2,3}^2$  к критической плоскости  $x_1 = (2b_1b_2 - b_2b_{12}) / (4b_1b_2 - b_{12}^2)$ ,  $x_2 = (2b_1b_2 - b_1b_{12}) / (4b_1b_2 - b_{12}^2)$ ,

при которых достигаются максимальные значения размаха касательного напряжения.

Таким же способом был определен момент времени внутри цикла, где достигается максимум величины  $\sigma_{H,\max} = \max_{t \in P} \sigma_{kk}(t) / 3$ .

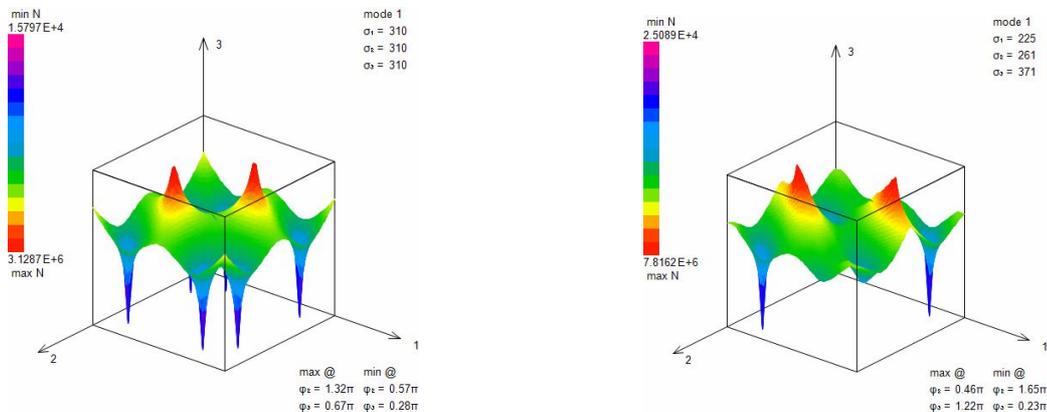


Рис. 1

Эта методика позволяет получить оценки долговечности  $N$  для произвольных амплитуд трехосных циклических нагружений в зависимости от сдвигов фаз. Расчеты показали существенное влияние фазовых параметров на длительность процесса накопления усталостной поврежденности вплоть до разрушения (Рис. 1- а, б).

### Литература

1. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending// J. of Eng. for Indust. 1959. pp. 301–306.
2. Papadopoulos I. V. Long life fatigue under multiaxial loading// International Journal of Fatigue. 2001. Vol. 23. Pp. 839-849.
3. Morel F. A critical plane approach for life prediction of high cycle fatigue under multiaxial variable amplitude loading// Int. J. of Fatigue. 2000. V.22. No 2. pp. 101-119.
4. Carpinteri A., Karolczuk A., Macha E. and Vantadori S. Expected position of the fatigue plane by using the weighted mean principal Euler angles// International Journal of Fatigue. 2002. Vol. 115. Pp. 87-99.
5. Никитин И.С., Бурого Н.Г., Никитин А.Д., Якушев В.Л. Определение критической плоскости и оценка усталостной долговечности при различных режимах циклического нагружения // Вестник ПНИПУ. Механика. 2017. № 4. С.238-252.