РАЗРУШЕНИЕ ТИТАНОВЫХ ДИСКОВ КОМПРЕССОРА ПРИ МАЛОЦИКЛОВОЙ И СВЕРХМНОГОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ

FRACTURE OF TITANIUM COMPRESSOR DISKS IN LOW- AND VERY-HIGH-CYCLE FATIGUE

Н.Г. Бураго¹-д.ф.-м.н., А.Б. Журавлев¹-к.ф.-м.н., И.С. Никитин² -д.ф.-м.н., А.А. Шанявский³-д.т.н.

i_nikitin@list.ru

¹Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского ² МАТИ - Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского ³Государственный центр безопасности полетов

Abstract: Present research is devoted to criteria of multiaxial fracture for cases of low-cycle fatigue (LCF) and very-high-cycle fatigue (VHCF). The model parameters are determined by using the data of uniaxial fatigue tests for various stress ratios. The procedure for stress state calculating of a compressor disk of a gas turbine engine subjected to simultaneously flight cycle loading conditions and blades vibrations is outlined. Discussed models of multiaxial fatigue fracture, based on calculated various stress states, are used to estimate the durability of the compressor disk under LCF and VHCF conditions. Two model problems are analytically solved for confirmation of the numerical results obtained.

Введение

В настоящее время существует несколько основных типов критериев и моделей усталостного разрушения, позволяющих оценить число циклов нагружения образца материала или элемента конструкции до разрушения по напряженному состоянию, по деформированному состоянию или по накопленной повреждаемости. Определение параметров рассматриваемых моделей является непростой экспериментальной задачей и осуществляется, как правило, по результатам одноосных усталостных испытаний на растяжение, кручение или изгиб с различными коэффициентами асимметрии цикла.

В качестве примера решена задача усталостного разрушения диска 1 ступени компрессора низкого давления газотурбинного двигателя серии Д30 в полетных циклах нагружения. Приведено описание вычислительной процедуры определения напряженно-деформированного состояния (НДС) контактной системы диска и лопаток компрессора. На основе рассчитанного НДС и выбранных критериев получены оценки долговечности диска компрессора в условиях, моделирующих эксплуатационные для двух альтернативных режимов усталостного разрушения.

С целью подтверждения полученных результатов решены две модельные задачи теории упругости о нагружении кольцевого диска постоянной

толщины. В первой задаче к диску приложена центробежная нагрузка, а на внешнем контуре переменное по углу радиальное напряжение, моделирующее центробежную нагрузку от лопаток (аналог режима МЦУ). Во второй задаче решается уравнение для изгиба диска под действием переменных по углу крутящих моментов на внешнем контуре. Эти моменты моделируют влияние колебаний лопаток (аналог режима СВМУ). В обоих случаях напряжения резко возрастают в окрестности внешнего контура и приводят к появлению зон усталостного разрушения. Оценки долговечности также указывают, что усталостное разрушение в режимах МЦУ и СВМУ может происходить за период реального времени одного масштаба.

1. Модели многоосного усталостного разрушения в режиме МЦУ

Основой для определения параметров моделей многоосного усталостного разрушения являются экспериментальные кривые одноосных циклических испытаний при различных значениях параметра асимметрии цикла $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max}$, где σ_{\max} и σ_{\min} - максимальное и минимальное значения напряжения в цикле. При описании результатов одноосных испытаний на усталостную прочность принимаются следующие обозначения: $\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$ - амплитуда напряжения в цикле, $\Delta \sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ - размах напряжений в цикле одноосного нагружения.

Экспериментальные данные одноосных испытаний описываются кривыми Веллера, которые аналитически могут быть представлены соотношением Баскина [1,2]

$$\sigma = \sigma_{\mu} + \sigma_{c} N^{\beta}$$

где σ_u - предел усталости, σ_c - коэффициент усталостной прочности, β - показатель усталостной прочности, N - число циклов до разрушения. Общий вид усталостной кривой представлен на рис. 1, в данном режиме представляет интерес левая ветвь при $N < 10^7$.

(1)



Рис. 1 – Бимодальная усталостная кривая для режимов МЦУ и СВМУ

Задача исследования усталостного разрушения состоит в определении пространственного распределения функции числа циклов до разрушения *N* из уравнений типа (1), обобщенных на случай многоосного напряженного состояния и содержащих рассчитанные напряжения в рассматриваемой конструкции.

Рассмотрим основные варианты обобщения результатов одноосных испытаний на общий случай многоосного напряженного состояния [2].

1.1. Критерии многоосного МЦУ разрушения

Обобщение одноосной усталостной кривой (1) на случай многоосного напряженного состояния согласно Сайнсу [4] имеет вид:

$$\Delta \tau / 2 + \alpha_s \sigma_{\text{mean}} = S_0 + A N^{\beta}, \quad \sigma_{\text{mean}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)_{\text{mean}},$$

$$\Delta \tau = \sqrt{(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_2)^2 + (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)^2 + (\Delta \sigma_2 - \Delta \sigma_3)^2} / 3$$
(2)

где σ_{mean} - сумма главных напряжений, осредненная за цикл нагружения, $\Delta \tau$ - изменение октаэдрического касательного напряжения за цикл; $\Delta \tau/2$ - его амплитуда; α_s , S_0 , A, β - параметры, определяемые по данным эксперимента.

Параметры модели, определенные по одноосным усталостным кривым при R = -1 и R = 0 определены в [2]:

 $S_0 = \sqrt{2}\sigma_u/3, \ A = 10^{-3\beta}\sqrt{2}(\sigma_B - \sigma_u)/3, \ \alpha_s = \sqrt{2}(2k_{-1} - 1)/3, \ k_{-1} = \sigma_u/(2\sigma_{u0})$ (3) где σ_u и σ_{u0} - пределы усталости по кривым $\sigma_a(N)$ при R = -1 и R = 0 соответственно, σ_B - предел прочности.

Обобщение одноосной усталостной кривой на случай многоосного напряженного состояния согласно Кроссланду [5] имеет вид:

$$\Delta \tau / 2 + \alpha_c (\overline{\sigma}_{\max} - \Delta \tau / 2) = S_0 + AN^{\beta}, \quad \overline{\sigma}_{\max} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)_{\max}$$
(4)

где σ_{\max} - сумма главных напряжений, максимальная за цикл нагружения.

В этом случае параметры модели равны [2]:

$$S_{0} = \sigma_{u} \left[\sqrt{2}/3 + (1 - \sqrt{2}/3)\alpha_{c} \right], \quad A = 10^{-3\beta} \left[\sqrt{2}/3 + (1 - \sqrt{2}/3)\alpha_{c} \right] (\sigma_{B} - \sigma_{u})$$
(5)
$$\alpha_{c} = (k_{-1}\sqrt{2}/3 - \sqrt{2}/6) / \left[(1 - \sqrt{2}/6) - k_{-1}(1 - \sqrt{2}/3) \right]$$

Обобщение одноосной усталостной кривой на случай многоосного напряженного состояния по критерию Финдли имеет вид [6]:

 $\left(\Delta\tau_{s}/2 + \alpha_{F}\sigma_{n}\right)_{\max} = S_{0} + AN^{\beta} \tag{6}$

где τ_s , σ_n - модуль касательного напряжения и нормальное напряжение на площадке с нормалью n_i , индекс max означает выбор площадки, на которой комбинация $\Delta \tau_s / 2 + \alpha_F \sigma_n$ принимает максимальное значение. По одноосным усталостным кривым при R = -1 и R = 0 определены параметры модели:

$$S_{0} = \sigma_{u} \left(\sqrt{1 + \alpha_{F}^{2}} + \alpha_{F} \right) / 2, \qquad A = 10^{-3\beta} \left(\sqrt{1 + \alpha_{F}^{2}} + \alpha_{F} \right) \left(\sigma_{B} - \sigma_{u} \right) / 2$$

$$\alpha_{F} = \left[\sqrt{5k_{-1}^{2} - 2k_{-1}} / 2 - k_{-1} (1 - k_{-1}) \right] / \left[k_{-1} (2 - k_{-1}) \right]$$
(7)

Имея в виду конкретный расчетный пример, рассмотренный далее, приведем приближенные значения параметров для титанового сплава Ti-6Al-4V [7]: предел прочности $\sigma_B = 1100$ MPa; пределы усталости по кривым $\sigma_a(N)$ при R = -1 и R = 0 соответственно: $\sigma_u = 450$ MPa и $\sigma_{u0} = 350$ MPa; показатель степенной зависимости от числа циклов $\beta = -0.45$; модуль Юнга E = 116 GPa; модуль сдвига G = 44 GPa; коэффициент Пуассона v = 0.32.

2. Пример расчета многоосного напряженного состояния и оценки долговечности в полетном цикле нагружения (режим МЦУ)

В качестве примера рассмотрим задачу усталостного разрушения диска компрессора газотурбинного двигателя в полетных циклах нагружения. Предполагается, что циклом многоосного нагружения системы диск-лопатка является полетный цикл нагружения (ПЦН), состоящий в достижении максимальных нагрузок на крейсерской скорости полета воздушного судна и соответствующих угловых скоростях вращения диска компрессора. Задача состоит в определении долговечности диска *N* (число ПЦН до разрушения) из соотношений (2), (4), (6). Для этого необходимо произвести расчет НДС системы диск-лопатка при действии комбинации внешних нагрузок, представленных центробежными силами, распределенными аэродинамическими давлениями на лопатки и силами нелинейного контактного взаимодействия диска и лопаток. Анализ трехмерного напряженно-деформированного состояния контактной системы диска и лопаток компрессора (рис. 2, a) выполнен численно. Расчеты проводились с помощью конечно-элементного пакета программ, а распределенные аэродинамические нагрузки определены приближенно аналитически с использованием классических решений об обтекании решетки пластинок под произвольным углом атаки на основе гипотезы изолированного профиля [8] с учетом деформированного состояния лопаток (аэроупругий эффект).

Параметры расчета принимались такими: угловая скорость вращения ω = 314 рад/с (3000 об/мин), скорость потока 200 м/с при плотности 1.3 кг/м³. Свойства материалов принимались следующими: диск (титановый сплав): E=116 GPa, v = 0.32, $\rho = 4370$ кг/м³; лопатки (алюминиевый сплав): E=69 GPa, v = 0.33, $\rho = 2700$ кг/м³; фиксирующие штифты (сталь): E=207 GPa, v = 0.27, $\rho = 7860$ кг/м³. На рис. 2,6 показана зона концентрации максимальных растягивающих напряжений в левом углу паза в диске, в который вставляет-ся лопатка. Видно, что концентрация напряжений нарастает от фронтальной к тыльной части паза, что совпадает с данными о расположении зон зарождения усталостных трещин в тыльной части диска [1,8].



Рис.2 – Геометрическая модель сектора диска с лопаткой (a) и зона концентрации напряжений (б)

2.1. Оценка долговечности элемента конструкции по критериям малоцикловой усталости

На рис. 3, a для окрестности левого угла контактного соединения диска и лопатки типа «ласточкин хвост» (в зонах максимальной концентрации напряжений) показаны рассчитанные величины числа полетных циклов до разрушения N для выбранных критериев многоосного усталостного разрушения. На рис. 3, δ рассматриваемая окрестность левого угла контактного паза диска выделена сплошной линией.



Рис. 3 – Оценки долговечности титанового диска в зоне концентрации (а) и выделенная зона концентрации (б)

Критерии Сайнса и Финдли дали оценку долговечности дисков ГТД на уровне 20 000 - 50 000 циклов. Критерий Кроссланда предсказал возможность усталостного разрушения менее, чем в 20 000 полетных циклов. В целом, все критерии дали сходное расположение зон усталостного разрушения.

3. Пример расчета многоосного напряженного состояния и оценки долговечности элементов конструкций при низкоамплитудных осевых воздействиях в режиме СВМУ

Дополнительно исследовался альтернативный механизм усталостного нагружения, связанный с наблюдаемыми высокочастотными осевыми колебаниями бандажных полок. Амплитуды этих колебаний и вызываемые ими возмущения напряженного состояния в окрестности концентратора напряжений относительно невелики, однако число циклов при высокой частоте коле-

баний за время эксплуатации может достичь величин $10^9 \div 10^{10}$, что приводит к необходимости исследования режима сверхмногоцикловой усталости (СВМУ) и возможности усталостного разрушения при уровне напряжений, меньшем классического предела усталости материала [1].

В настоящее время отсутствуют экспериментально обоснованные модели многоосной усталости в режиме СВМУ. Поэтому для оценок долговечности применялись известные критерии многоосного усталостного разрушения МЦУ (2), (4) и (6) с учетом общих предположений о характере поведения усталостных кривых в рассматриваемом режиме. Характерный вид усталостной кривой показан на фиг.1, в данном режиме представляет интерес правая ветвь при $N > 10^8$.

3.1. Обобщенные критерии сверхмногоцикловой усталости

Для определения параметров модели в режиме СВМУ по одноосным усталостным кривым используем соображения, которые применялись при их определении для режима МЦУ. При этом учтено подобие левой и правой ветвей усталостной кривой с заменами $\sigma_B \to \sigma_u$, $\sigma_u \to \tilde{\sigma}_u$, $\sigma_{u0} \to \tilde{\sigma}_{u0}$, где $\tilde{\sigma}_u$ и $\tilde{\sigma}_{u0}$ - «новые» пределы усталости на правой ветви усталостной кривой для коэффициентов асимметрии R = -1 и R = 0. Значения параметров для обобщенной модели Сайнса (2) в режиме СВМУ имеют вид:

$$S_{0} = \sqrt{2\tilde{\sigma}_{u}}/3, \ A = 10^{-8\beta}\sqrt{2(\sigma_{u} - \tilde{\sigma}_{u})}/3, \ \alpha_{s} = \sqrt{2(2k_{-1} - 1)}/3, \ k_{-1} = \tilde{\sigma}_{u}/\tilde{\sigma}_{u0}/2$$

Аналогично, параметры обобщенной модели Кроссланда (4) в режиме СВМУ имеют значения:

$$S_{0} = \tilde{\sigma}_{u} \left[\sqrt{2} / 3 + (1 - \sqrt{2} / 3) \alpha_{c} \right], \quad A = 10^{-8\beta} \left(\sigma_{u} - \tilde{\sigma}_{u} \right) \left[\sqrt{2} / 3 + (1 - \sqrt{2} / 3) \alpha_{c} \right]$$

Также определены параметры обобщенной модели Финдли (6) в режиме СМВУ:

$$S_{0} = \tilde{\sigma}_{u} \left(\sqrt{1 + \alpha_{F}^{2}} + \alpha_{F} \right) / 2 , \ A = 10^{-8\beta} \left(\sigma_{u} - \tilde{\sigma}_{u} \right) \left(\sqrt{1 + \alpha_{F}^{2}} + \alpha_{F} \right) / 2$$

Для расчетов выбраны следующие значения усталостных параметров титанового сплава в режиме CBMУ σ_{μ} =450Mpa, $\tilde{\sigma}_{\mu}$ =250Mpa, $\tilde{\sigma}_{\mu 0}$ =200Mpa, β =-0.3.

3.2. Расчетная модель низкоамплитудных осевых колебаний бандажных полок

Осевые смещения бандажных полок связаны с волновыми возмущениями, которые распространяются по угловой координате. На полный набор лопаток обычно укладывается 12-16 полуволн. Это дает возможность ввести в качестве крайних состояний элементарного цикла данного типа нагружения два положения сектора диска с одной лопаткой. В этих положениях при нулевом осевом смещении правого конца бандажной полки осевые смещения левого конца направлены в противоположных направлениях и в режимах эксплуатации достигают величины порядка 1мм. Рассматриваемые низкоамплитудные воздействия накладываются на основное напряженное состояние в полетном цикле нагружения.

На рис. 4,*а* показана схема приложения низкоамплитудных осевых смещений. Таким образом, рассматриваются случаи, когда на левую границу приходится максимум или минимум амплитуды колебаний, равной ±1мм при частоте 3000 об/мин.



Рис.4 - Схема приложения низкоамплитудных осевых смещений (a) и оценки долговечности титанового диска в зоне концентрации (б)

3.3. Оценка долговечности элемента конструкции по критериям СВМУ

На рис. 4, δ для окрестности левого угла контактного соединения диска и лопатки (в зонах максимальной концентрации напряжений) показаны рассчитанные величины числа циклов до разрушения N для трех выбранных критериев по напряженному состоянию (Сайнса, Кроссланда и Финдли) в режиме СВМУ.

Несмотря на относительно невысокий уровень амплитуд напряжений в цикле, расчетами показано, что и в этом случае возникают зоны возможного усталостного разрушения, расположенные в тыльной зоне левого угла паза диска, примерно там же, где и в случае полетных циклов нагружения. Вели-

чина N, при которой они появляются, имеет порядок $10^9 \div 10^{10}$, что в пересчете на реальное время процесса с периодом цикла 0.02с (при выбранной частоте колебаний) дает величину 50 000 час, вполне достижимую в процессе эксплуатации. Хотя эти оценки весьма приблизительны, они указывают на принципиальную возможность развития усталостного разрушения в указанных зонах диска компрессора как по механизму МЦУ (полетный цикл нагружения), так и по механизму СВМУ (высокочастотные, низкоамплитудные вибрации элементов конструкции). Тем большую опасность может иметь результат взаимовлияния этих механизмов, поскольку они проявляют себя в близкорасположенных зонах и на близких масштабах реального времени.

4. Модельные задачи для кольцевого диска **4.1.** Напряженное состояние в режиме МЦУ

С целью подтверждения полученных результатов решены две модельные задачи теории упругости о нагружении кольцевого диска с внутренним радиусом a и внешним радиусом b. В первой задаче к диску приложена центробежная нагрузка, а на внешнем контуре переменное по углу радиальное напряжение, моделирующее центробежную нагрузку от лопаток и согласованное с ней по амплитуде (аналог режима МЦУ).

Для определения напряжений в диске решается бигармоническое уравнение для функции Эри с граничными условиями [9]:

$$\begin{split} \Delta^2 F &= 0 \\ \sigma_{rr} &= 0 \\ \sigma_{rr} &= \sigma_0 S_{\delta}(\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= 0 \\ \sigma_{rr} &= F_r / r + F_{\theta\theta} / r^2, \\ \sigma_{r\theta} &= F_{\theta} / r^2 - F_{r\theta} / r, \\ \sigma_{\theta\theta} &= F_{rr} \\ 3 \text{десь} \\ \sigma_0 &= \rho \omega^2 (b_1^2 - b^2) / 2, \\ b_1 - \text{ внешний радиус лопатки, } \delta - \text{ ее ширина.} \end{split}$$

Периодическая функция распределения радиального напряжения на внешнем контуре (один период $-\pi / N_0 < \theta < \pi / N_0$), N_0 - число лопаток.

 $S_{\delta}(\theta) = 1$ при $\theta \in [-\delta/2, \delta/2], S_{\delta}(\theta) = 0$ при $\theta \notin [-\delta/2, \delta/2].$

Общее решение для функции Эри получается методом разделения переменных:

 $F = \left(Ar^{n} + Br^{-n} + Cr^{n+2} + Dr^{-n+2}\right)\cos n\theta$

К вычисленным на его основе напряжениям добавляются напряжения от центробежной силы в диске [10]. Зависимости радиальных σ_{rr} и тангенциальных $\sigma_{\theta\theta}$ напряжений от радиуса диска при $\theta = 0$ (под лопаткой) для приведены на рис. 5,*a*.



Рис. 5 – Распределение напряжений при МЦУ нагружении (а); распределение напряжений при кручении лопаток по- (б) и против часовой стрелки (в)

4.2. Напряженное состояние в режиме СВМУ

Во второй задаче решается уравнение для изгиба диска под действием переменных по углу крутящих моментов на внешнем контуре. Эти моменты моделируют влияние колебаний лопаток (аналог режима CBMУ).

Уравнение для изгиба пластинки и граничные условия [10]:

$$\Delta^2 w = 0$$

 $V_r = 0$ $M_r = 0$ при $r = a$
 $V_r = \frac{2}{r} \frac{\partial M_{r\theta}^*}{\partial \theta}$ $M_r = 0$ при $r = b$, где $M_{r\theta}^* = M_0 \Omega_{\delta}(\theta)$

$$V_{r} = \frac{1}{r} \left(M_{\theta} + 2 \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial (rM_{r})}{\partial r} \right), \quad M_{r} = -D_{0} \left(w_{rr} + v w_{\theta\theta} / r^{2} + v w_{r} / r \right)$$
$$M_{\theta} = -D_{0} \left(v w_{rr} + w_{\theta\theta} / r^{2} + w_{r} / r \right), \quad M_{r\theta} = D_{0} (1 - v) \left(w_{r\theta} / r - w_{\theta} / r^{2} \right)$$

Периодическая функция распределения крутящего момента на внешнем контуре (один период $-2\pi / N_0 < \theta < 2\pi / N_0$) отлична от нуля на интервалах $\Theta_1 = [\pi / N_0 - \delta / 2, \pi / N_0 + \delta / 2]$ и $\Theta_2 = [-\pi / N_0 - \delta / 2, -\pi / N_0 + \delta / 2]$. $\Omega_{\delta}(\theta) = 1$ при $\theta \in \Theta_1$, $\Omega_{\delta}(\theta) = -1$ при $\theta \in \Theta_2$, $\Omega_{\delta}(\theta) = 0$ при $\theta \notin \Theta_1, \theta \notin \Theta_2$.

Общее решение для изгибных смещений диска имеет вид:

$$w = \left(Ar^{n} + Br^{-n} + Cr^{n+2} + Dr^{-n+2}\right)\cos n\theta$$

Компоненты напряжений связаны с моментами формулами [11]: $\sigma_{rr} = 12M_{rz} / h^3$ $\sigma_{\theta\theta} = 12M_{\theta}z / h^3$ $\sigma_{r\theta} = 12M_{r\theta}z / h^3$

Величина амплитуды крутящего момента равна $M_0 = G\gamma \delta^2 h/3$ и определяется из решения задачи о кручении пластины эллипсоидального поперечного сечения с полуосями δ и h и с погонным углом кручения γ в предположении $\delta \ll h$ [11]. Жесткость диска $D_0 = Eh^3/12/(1-v^2)$, модуль Юнга E, модуль сдвига G. Напряжения от центробежной силы в лопатках и диске, определенные ранее, суммируются с полученными напряжениями от крутящих моментов, соответствующих максимальным углам поворота лопаток пои против часовой стрелки.

Зависимости радиальных (сплошная линия), тангенциальных (штрихпунктирная) и касательных (пунктирная) напряжений от радиуса диска для крайних состояний цикла (под лопаткой) приведены на рис. 5, δ и 5, ϵ . В обоих режимах МЦУ (рис.5,a) и СВМУ (рис. 5, δ и 5, ϵ) напряжения резко возрастают в окрестности внешнего контура и приводят к появлению зон усталостного разрушения.

4.3. Оценки долговечности в режиме МЦУ и СВМУ

На основе критерия многоосного усталостного разрушения Сайнса (режим МЦУ) и его обобщения (режим СВМУ) были проведены оценки долговечности *N* для рассматриваемых нагружений диска.



Рис.6 – Распределение логарифма долговечности при МЦУ (а) и СВМУ режиме (б)

Эти оценки для lgN приведены на рис. 6,a (~ 4.3 для МЦУ) и рис.6, δ (~ 9.7 для CBMУ). С учетом значений периодов цикла T=2ч и T=0.02с легко вычислить, что усталостное разрушение в режимах МЦУ и CBMУ происходит за примерно одинаковый период реального времени ~ 50 000ч. Тем самым подтвержден вывод об альтернативности данных режимов усталостного разрушения для титановых дисков.

Выводы. В работе проведен сравнительный анализ и оценка долговечности диска компрессора ГТД для двух альтернативных механизмов усталостного разрушения МЦУ и СВМУ. Выполненные расчеты указывают на близкое расположение зон усталостного разрушения и близость оценок долговечности для МЦУ и СВМУ в реальном времени.

Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы и проектов РФФИ 12-08-00366-а, 12-08-01260-а.

Литература.

1. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. Уфа. Изд-во научно-технической литературы «Монография». 2007. 498с.

2. Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S. Models of Multiaxial Fatigue Fracture and Service Life Estimation of Structural Elements.// Mechanics of Solids. 2011. Vol. 46. No. 6. Pp. 828-838.

3. Bonnand V., Chaboche J.L., Cherouali H., Kanoute P., Ostoja-Kuczynski E., Vogel F. Investigation of multiaxial fatigue in the prospect of turbine disc applications: Part II – Fatigue criteria analysis and formulation of a new combined one. Proceedings the 9-th Intern. Conf. of Multiaxial Fatigue and Fracture (ICMFF9) 2010. Parma, Italy. Pp.691-698.

4. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses. Metal fatigue. McGraw-Hill. 1959. Pp. 145-169.

5. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel.//Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. London.1956. Pp.138-149.

6. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. J. of Eng. for Indust.1959.Pp.301-306.
7. Kallmeyer A.R., Krgo A., Kurath P. Evaluation of multiaxial fatigue life prediction methodologies for Ti-6Al-4V.// ASME J. Eng. Mat. Technol.2002. V.124.Pp. 229-237.

8. Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Анализ напряженного состояния контактной системы «диск-лопатка» газотурбинного двигателя. // Вычисл. мех. сплош. сред. 2011. Т. 4. № 2. С. 5-16.

9. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872с.

10. Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение. 1978. 247с.

11. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1979. 744с.