

На правах рукописи

Лычев Сергей Александрович

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАСТУЩИХ ТЕЛ
И ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

01.02.04 - механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА – 2012

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН).

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Манжиров Александр Владимирович.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Зубов Леонид Михайлович,

доктор физико-математических наук, профессор
Лурье Сергей Альбертович,

доктор физико-математических наук, профессор
Шифрин Ефим Ильич.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем машиноведения Российской академии наук (ИПМаш РАН).

Защита состоится "____" мая 2012 г. в ____ час. на заседании диссертационного совета Д 002.240.01 при Учреждении Российской академии наук Институте проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН по адресу: 119526, Москва, проспект Вернадского, д. 101, корп. 1, ауд. 237.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМех РАН.

Автореферат разослан "____" апреля 2012 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 002.240.01 при ИПМех РАН
кандидат физико-математических наук

Е.Я. Сысоева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы.

Различные по физической природе технологические процессы, такие, как бетонирование крупномасштабных объектов, гальванопластика, лазерное напыление, газотермическое и парофазное осаждения, фотополимеризация, с позиции механики сплошных сред объединяет то, что их результатами являются растущие тела. Формирование растущих тел происходит как непрерывное присоединение инфинитезимальных предварительно деформированных частей к конечному телу, причем в процессе роста само растущее тело испытывает деформацию. Этим определяется принципиальное отличие механики растущих тел от классической механики тел постоянного состава. Характерной особенностью растущих тел являются поля остаточных напряжений, определяемые сценарием наращивания, что приводит к нежелательным последствиям, например, к искажениям геометрической формы создаваемого объекта, локальным нарушениям сплошности, потере устойчивости. В частности, учет искажений формы важен при разработке методов фотополимеризующей стереолитографии, а анализ устойчивости наращиваемых тонкостенных конструкций необходим при разработке микроэлектромеханических систем (MEMS). Вместе с тем возможность учета остаточных напряжений в растущих телах позволяет выбирать оптимальные в том или ином смысле режимы наращивания и осуществлять “механическое программирование”, создавая заданные поля остаточных напряжений в телах. Это — путь к созданию “smart”-материалов. Таким образом, развитие моделей и методов механики растущих тел является актуальной задачей современной механики континуума.

Следует также отметить, что модели механики растущих тел позволяют в рамках механики континуума описать природные феномены, такие, как аккреция гравитирующих космических объектов, рост кристаллов, рост биологических тканей.

Целью работы является формулировка краевых задач квазистатики и динамики растущих тел и тонкостенных конструкций, а также разработка методов построения их решений. Эта цель предполагает решение следующих задач:

- Формулировка полной системы уравнений механики растущих тел при конечных деформациях.
- Построение замкнутых решений модельных задач наращивания при конечных деформациях.
- Разработка регулярных методов решения задач квазистатики и динамики растущих упругих и термоупругих тел в приближении малых деформаций.
- Формулировка начально-краевых задач для наращиваемых по толщине тонкостенных конструкций в приближении малых деформаций и разработка регулярных методов решения соответствующих краевых задач.

На защиту выносятся следующие положения:

- Основные положения математической теории наращиваемых тел при конечных деформациях. Представление растущего тела в форме расслоения материального многообразия. Классификация возможных способов наращивания деформируемых тел в зависимости от размерности базы расслоения. Геометрические методы определения отсчетной конфигурации растущего тела, погружаемой в пространство аффинной связности с нетривиальным кручением.
- Полная система уравнений механики растущих тел при наращивании трехмерно-

го тела двумерными поверхностями при конечных деформациях. Классификация соответствующих краевых задач. Соотношения для определения кручения связности аффинного пространства, в которое может быть погружена натуральная отсчетная конфигурация.

- Универсальные решения для растущих тел. Конечные деформации растущего полого шара при центральносимметричном нагружении, растущего полого цилиндра и растущей изгибаемой панели.
- Спектральные представления решений начально-краевых задач для растущих термоупругих тел в приближении малых деформаций. Замкнутые решения для тел канонической формы в постановке связанной термоупругости. Оценка степени влияния связности в зависимости от характерного размера тела.
- Вариационные принципы конволютивного типа для растущих упругих и термоупругих тел.
- Уравнения равновесия и движения растущих по толщине тонкостенных конструкций. Классификация соответствующих краевых задач. Статические задачи об изгибе растущих круглых и прямоугольных пластин. Задачи динамики для растущих круглых, прямоугольных, эллиптических пластин и цилиндрических оболочек.

Научная новизна состоит в следующем:

- Дано определение растущего гладкого (в смысле W. Noll) тела как расслоение гладкого многообразия.
- Осуществлена классификация способов наращивания, основанная на геометрической структуре расслоения.
- Построена полная система уравнений механики растущих тел при наращивании трехмерного тела двумерными поверхностями при конечных деформациях.
- Получены новые универсальные решения для растущих тел, в частности, для растущей изгибаемой панели.
- Разработан метод построения замкнутых решений в форме биортогональных разложений по собственным и присоединенным функциям пучков несамосопряженных операторов и получены замкнутые решения связанных задач термоупругости для тел канонической формы в приближении малых деформаций. На основе предлагаемого метода сформулирован итерационный алгоритм определения напряженно-деформированного состояния и распределения температур в наращиваемом термоупругом теле.
- Сформулированы новые вариационные принципы конволютивного типа для растущих термоупругих тел.
- Построены новые уравнения статики и динамики тонкостенных наращиваемых конструкций.
- Построены аналитические и численно-аналитические решения начально-краевых задач для растущих пластин и оболочек канонической формы.

Достоверность обусловлена строгостью постановки задач, построением точных решений в рамках сформулированной модели, а так же сравнением частных случаев с известными результатами, полученными другими авторами.

Практическая значимость результатов.

- Полученные результаты позволяют перейти к практическому моделированию и расчетам широкого круга реальных технологических и природных процессов указанных выше.
- Для оценки влияния связности температурного и механических полей построены

специальные замкнутые решения модельных задач. Это позволило исследовать степень взаимного влияния температурного и механического полей в зависимости от размеров рассматриваемого тела. Показано, что для тел микронных размеров температурные волны, образующиеся вследствие взаимовлияния теплового и механического полей, наиболее выражены, их амплитуда составляет несколько процентов от величины начального температурного воздействия.

- Показана возможность управления полем остаточных напряжений за счет подбора специального сценария наращивания. Это позволяет осуществлять “механическое программирование“, что может быть полезным при создании “smart“-материалов.
- На основании полученных расчетных соотношений разработана экспериментальная методика идентификации моделей растущих тел.

Апробация работы. Основные положения и работа в целом докладывались и обсуждались на следующих конференциях, семинарах и школах:

- IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006);
- The International Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics" (Russia, St. Petersburg, 2003–2011);
- 35th, 36th, 37th Solid Mechanics Conference (Krakow, Poland, 2006; Gdansk, Poland, 2008; Warsaw, Poland, 2010);
- 13я, 15я Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 2003, 2007);
- MATHMOD 2009: 6th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (Vienna, Austria, 2009);
- XIII, XIV, XV Международная конференция "Современные проблемы механики сплошной среды"(Ростов-на-Дону, 2009–2011);
- MPSVA 2009: 7th International Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis (Cambridge, England, UK, 2009);
- Конференция "Асимптотические методы и математическая физика"(Москва, ИПМех РАН, 2010);
- TRPCM - 2010: International Conference "Topical Problems Of Continuum Mechanics" (Dilijan, Armenia, 2010);
- ICCES 2011: International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences (Nanjing, China, 2011);
- Семинар по механике деформируемого твердого тела (ИТД, Delhi, India, 2010);
- Совещание Council for Scientific and Industrial Research (ЮАР, Претория, 2011);
- X Всероссийская конференция по биомеханике “Биомеханика 2010“ (Саратов, 2010);
- Russian-Indian Workshop “Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics“ (Repino, 2011);
- II Всероссийская конференция “Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций“ (Новосибирск, 2011);

Публикации. По теме диссертационной работы опубликовано 32 печатные работы, список которых представлен в конце автореферата, 19 из них представлены в изданиях из перечня ВАК.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения. Объем работы — 290 страниц и список литературы из 290 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении определен предмет исследования диссертационной работы, приведен краткий обзор литературы, отмечается актуальность темы диссертации, а также формулируется цель и задачи исследования.

Пионерские исследования механики растущих тел принадлежат R.V. Southwell (1946 г.), Э.И. Рашбе (1953 г.), С.В. Brown, L.E. Goodman (1963 г.). Развитие теории растущих тел и методов решения соответствующих краевых задач осуществлено в работах Н.Х. Аратюняна, А.Д. Дроздова, А.В. Манжирова, В.В. Метлова, М.Н. Михина, В.Э. Наумова, Д.А. Паршина, В.К. Тринчера, В.Д. Харлаба, M. Epstein, J.R. Barber, M.E. Gurtin, A. Hoger, J. Kadish, A. Klarbring, V.A. Lubarda, G. Maugin, T. Olsson, G. Rodnay, E.K. Rodrigues, R. Segev, R. Skalak, J. Stalhand, L.A. Taber P.D. Washabaugh, и др. В большинстве опубликованных ранее работ теория растущих тел строилась как некоторый специальный вариант теории деформируемых твердых тел в трехмерном евклидовом пространстве. Однако оказывается, что геометрических свойств евклидова пространства недостаточно для описания напряженно-деформированного состояния тела, которое было образовано путем непрерывного объединения предварительно напряженных частей. Представляется чрезвычайно важным, что растущие тела могут быть рассмотрены как частный класс неоднородных (inhomogeneous) тел, в которых неоднородность возникает в силу неголономной дисторсии, вызванной соединением несогласованно напряженных элементов. С этой точки зрения механика растущих тел имеет много общего с теорией дефектов, в частности, с геометрической теорией непрерывно распределенных дислокаций, построенной во второй половине XX века (J.D. Eshelby *et al.*). Следует отметить, что на развитие этой теории значительное влияние оказали методы геометрической теории гравитации Эйнштейна-Картана и общей теории относительности. По-видимому, первым, кто применил методы геометрии Картана в механике сплошной среды был К. Kondo (1955 г.). Эти идеи быстро получили развитие в серии работ Bilby, E. Kröner и A. Seeger, в которых были установлены связи между тензорным полем несовместности деформаций, плотностью распределения дефектов и нетривиальной геометрией материального многообразия с отличными от нуля кручением и кривизной. В этой связи такие геометрические понятия, как *связность*, *кривизна*, *кручение*, *параллелизм*, оказались в числе основных понятий общей теории неоднородных тел, которая в логически завершенном виде была представлена в работах W. Noll и C.C. Wang, а также в серии работ M. Epstein and G. Maugin. Эти исследования замечательным образом согласуются с фундаментальными исследованиями по механике растущих тел, проведенными в рамках школы профессора А.В. Манжирова. Одним из основных результатов этой школы является построение математической теории наращиваемых тел, чему посвящена и настоящая диссертация.

Отметим, что исследование частного случая непрерывного наращивания как потока напряженных мембран, присоединяемых к деформируемому растущему телу, подразумевает анализ напряженно-деформированного состояния мембраны как двумерного многообразия, контактирующего с трехмерным телом. Моделирование такого взаимодействия может быть осуществлено в рамках так называемой теории материальных поверхностей, развитой в работах M.E. Gurtin и A. Ian Murdoch. Следует также отметить работы M. Elzapanowski и R. Segev, посвященные геометрическим аспектам механики континуума, оказавшие существенное влияние на структуру на-

стоящей работы.

Первая глава посвящена основам математической теории наращиваемых тел при конечных деформациях. Задачи механики растущих тел весьма разнообразны, в связи с чем в работе предлагается следующая классификация типов роста.

1. **Дискретное и непрерывное наращивание.** В первом случае в процессе деформирования происходит объединение тел конечных размеров. Задачи о дискретном наращивании рассматривались в рамках так называемой теории составных тел. При этом уравнения равновесия, сформулированные для отдельных частей составного тела, объединялись в систему, а краевые условия определялись из условия идеального контакта этих частей. В такой постановке математическая модель дискретно наращиваемого тела принципиально не отличалась от классических моделей тел постоянного состава. При непрерывном наращивании имеет место непрерывный приток материала к исследуемому телу. В этом случае процесс наращивания может быть представлен как последовательность элементарных актов присоединения бесконечно малых (инфинитезимальных) напряженных частей к растущему телу, причем каждый элементарный акт происходит за бесконечно малый интервал времени.

2. **Поверхностный рост и объемный рост.** При поверхностном наращивании присоединение материала происходит на границе тела, которая называется границей роста. Поверхностному росту соответствуют такие технологические и природные процессы, как намотка, пиролитическое и электролитическое осаждение, возведение массивных сооружений, аккреция планет, рост кристаллов. Объемный рост предполагает, что состав тела в процессе деформирования не меняется, однако масса элементарного отсчетного объема не сохраняется: она изменяется в процессе деформирования по некоторому заданному закону. Рост биологических тканей дает пример такого процесса.

3. **Рост, сохраняющий и не сохраняющий топологическую размерность тела.** В общем случае множество материальных точек, составляющих тело (далее будем обозначать это множество символом \mathfrak{B}), может иметь топологическую структуру, отличную от топологической структуры его образа в физическом пространстве. Действительно, согласно теореме Хана-Мазуркевича, локально связанный континуум может быть непрерывным образом интервала действительной оси. В этом случае топологическая размерность тела \mathfrak{B} может быть равна единице, в то время как топологическая размерность его образа может быть равна двум или трем. Конечно, такое отображение не будет биективным, т.е. одной и той же точке образа может соответствовать несколько различных прообразов на интервале, представляющим тело. Здесь можно увидеть противоречие с обычно принимаемым постулатом *непроницания*. Вместе с тем за счет специального выбора отображающей функции такие кратные точки могут быть преобразованы в точки соприкосновения (контакта), что становится вполне приемлемым в механике континуума. Образно говоря, тело \mathfrak{B} , занимающее в физическом пространстве некоторую область, можно ассоциировать с клубком нити, топологическая размерность которой равна единице.

4. Непрерывное наращивание рассматривается как процесс непрерывного присоединения к телу инфинитезимальных областей, т.е. областей инфинитезимальной меры. В качестве меры используется мера массы. Таким образом, к инфинитезимальным областям могут быть причислены, например, бесконечно тонкие слои, нити, точки. Так как такие инфинитезимальные области представляют собой непрерывные тела различных размерностей, то они могут переносить напряженно-деформированное

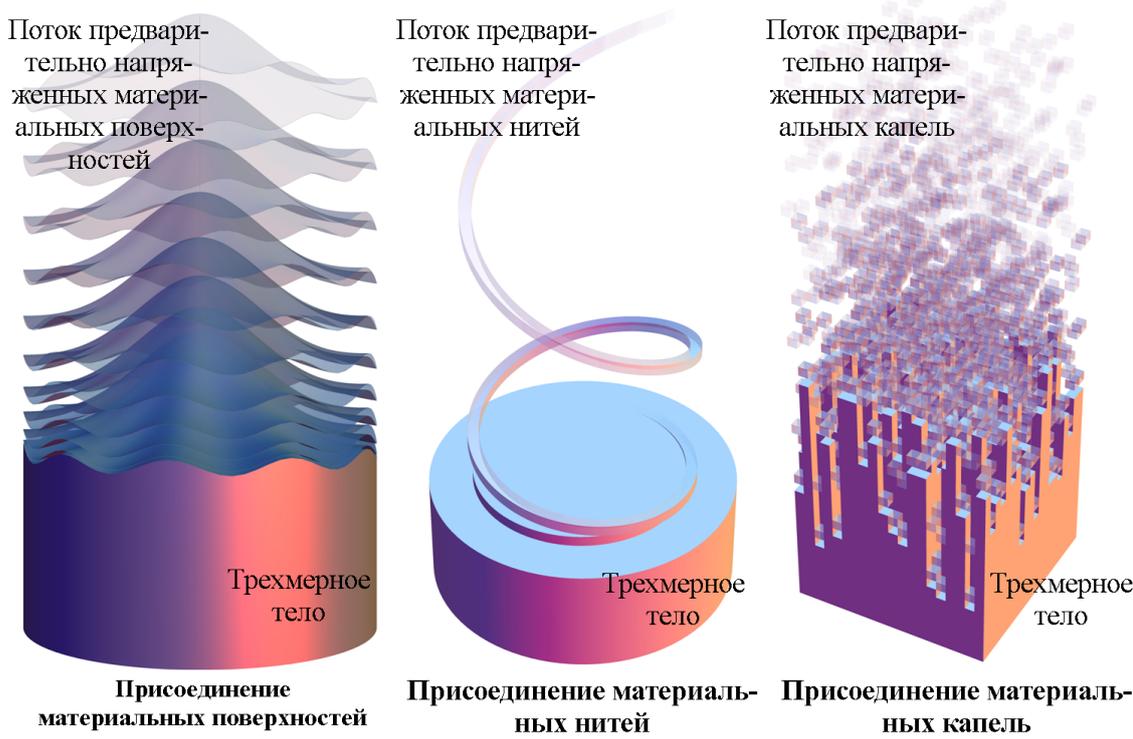


Рис. 1: Классификация процессов роста

состояние, соответствующее их размерности, например, слои могут переносить мембранные напряжения, нити – линейное и т.д. В этой связи характер распределения напряжений в непрерывно растущем теле зависит от **геометрического класса присоединяемых инфинитезимальных областей**, что подразумевает построение различных вариантов теории наращивания (Рис. 1).

В настоящей работе нет возможности охватить все перечисленные модели роста: она ограничена исследованием поверхностного роста, в ходе которого к телу непрерывно присоединяются предварительно деформированные поверхности. Поясним это более подробно. Рост рассматривается как объединение деформированных тел, образы конфигураций которых не проникают друг в друга, но имеют в физическом пространстве общую границу. С механической точки зрения объединение по границе сводится к установке связей между граничными точками, которые в момент объединения занимали одно и то же место в физическом пространстве. В общем случае напряженно-деформированные состояния этих тел не согласованы, в связи с чем у их объединения отсутствует естественная отсчетная конфигурация. Следует отметить, что этот факт упоминался в работах по механике растущих тел, однако чаще указывалось лишь на несовместность поля малых деформаций.

В качестве геометрического фундамента математической теории растущих тел используется теория расслоений дифференцируемых многообразий. Аналитические свойства дифференцируемых многообразий определяются без привлечения априорно заданных метрики и связности. Многообразия в таком виде позволяют сформулировать краевую задачу, в ходе решения которой определяется частный вид связности, соответствующий кинематическим и статическим характеристикам процес-

са наращивания. Кроме того, геометрическое понятие расслоения многообразия соответствует физически реализуемому распределению свойств растущего тела, рост которого моделируется как непрерывный процесс присоединения деформированных материальных поверхностей. Такая сборка тела порождает нетривиальное расслоение материального многообразия, причем структура этого расслоения полностью определяется режимом наращивания.

В работе дается определение растущего гладкого тела в терминах аксиоматики рациональной механики (W. Noll). Для идентификации точек тела вводится гладкое трехмерное материальное многообразие \mathfrak{M} . Связность на \mathfrak{M} определяется тензорным полем (несовместной) дисторсии, которая возникает в результате сборки растущего тела из предварительно напряженных частей. Поле дисторсии и, соответственно, связность заранее не известны и определяются из решения краевой задачи о равновесии растущего тела и присоединяемых к нему материальных поверхностей. В дополнение к стандартным математическим конструкциям (в том числе к аксиоматике W. Noll), определяющим тело как гладкое многообразие, вводится дополнительная структура – расслоение материального многообразия (это расслоение не следует смешивать с касательным расслоением, которое естественно возникает на любом гладком многообразии при определении на нем связности). Представление материального многообразия \mathfrak{M} как расслоения $\pi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ дает естественную интерпретацию результата наращивания, которое реализуется как непрерывный поток материальных поверхностей \mathfrak{M}_α , $\alpha \in \mathbb{R}$, осаждаемых на поверхности роста.

В работе под телом \mathfrak{B} понимается открытое подмножество материального многообразия \mathfrak{M} , граница которого $\partial\mathfrak{B}$ образуется двумя различными слоями \mathfrak{M}_α и \mathfrak{M}_β , т.е. $\partial\mathfrak{B} = \mathfrak{M}_\alpha \cup \mathfrak{M}_\beta$. В этом случае тело \mathfrak{B} может быть представлено как объединение множества слоев, индексы которых принадлежат интервалу (α, β) :

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\alpha, \beta) = \bigcup_{\zeta \in (\alpha, \beta)} \mathfrak{M}_\zeta.$$

Растущее тело определяется как параметрическое семейство таких множеств:

$$\mathfrak{C} = \{ \mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{B}(\alpha, \gamma) \mid \gamma \in (\alpha, \beta) \}, \quad (1)$$

где γ – параметр семейства, причем при $\gamma \rightarrow \alpha$ тело вырождается в бесконечно тонкий слой или точку. При этом γ является параметром, характеризующим эволюцию растущего тела. Геометрическая иллюстрация сказанного приведена на Рис. 2. Разумеется, можно вести речь и о наращивании заранее созданного основного или исходного тела. Очевидно обобщение этого определения

$$\mathfrak{C} = \{ \mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{B}(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \mid (\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \subset (\alpha, \beta) \},$$

где $(\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$ совокупность вложенных интервалов.

Согласно данным выше определениям граница растущего тела должна быть топологически эквивалентна типовому слою, который сам представляет собой гладкое многообразие и, следовательно, растущая граница топологически эквивалентна геометрически замкнутой поверхности. Если растущая граница топологически эквивалентна *многообразию с краем*, то растущее тело может быть определено следующим образом

$$\mathfrak{C} = \{ \mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{B}_0 \cap \mathfrak{B}(\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \mid (\alpha_\gamma, \beta_\gamma) \subset (\alpha, \beta) \}.$$

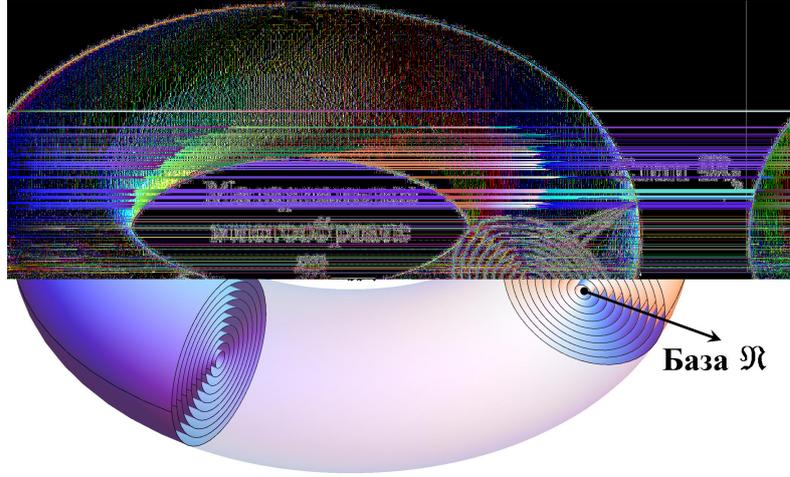


Рис. 2: Расслоение материального многообразия

Здесь \mathfrak{B}_0 — фиксированное подмножество \mathfrak{M} с гладкой границей.

Характерной особенностью моделей, рассматриваемых в работе, является их неевклидовость. Неевклидовость проявляется в нетривиальной связности. Для задания связности на \mathfrak{M} используется метод подвижного репера, который предполагает определение на многообразии дифференцируемого тензорного поля $\mathfrak{K}_{\cdot\beta}^\alpha$, осуществляющего аффинную трансформацию натурального репера ∂_α , т.е. $\mathfrak{e}_\beta = \mathfrak{K}_{\cdot\beta}^\alpha \partial_\alpha$. С геометрической точки зрения тензорное поле $\mathfrak{K}_{\cdot\beta}^\alpha$ задает правило параллельного переноса на многообразии \mathfrak{M} и тем самым определяет на нем, вообще говоря, неметрическую связность: два вектора, заданные в различных точках многообразия, являются \mathfrak{K} -параллельными, если они имеют одни и те же компоненты в реперах \mathfrak{e}_β . Это приводит к следующему определению коэффициентов аффинной связности $\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta$:

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta = (\mathfrak{K}^{-1})_{\cdot\gamma,\alpha}^\rho \mathfrak{K}_{\rho}^\beta. \quad (2)$$

Использование довольно абстрактных геометрических концепций при определении понятия тела приводит к необходимости тщательного и деликатного определения связанных с ним понятий. Разумеется, это относится и к понятию конфигурации. Под *конфигурацией* будем понимать отображение $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow V_\varkappa \subset \mathbb{E}^3$, где \mathbb{E}^3 — трехмерное аффинное пространство. Образ конфигурации V_\varkappa будем называть *формой* тела. Форму, представляющую собой связное множество с регулярной (в смысле Келлога) границей будем называть *регулярной*.

В настоящей работе рассматриваются только *простые* материалы и, соответственно, простые тела. Напряжения в них определяются функционалом отклика, определенном на множестве линейных преобразований, трансформирующих инфинитезимальную окрестность материальной точки из натурального (свободного от напряжений) состояния. В растущем теле регулярной формы, свободной от напряжений, может не существовать, более того, такая форма существует лишь в исключительных случаях *согласованного* роста.

Под *деформацией* будем понимать отображение $\lambda : V_{\varkappa_R} \rightarrow V_\varkappa$, $\lambda = \varkappa \circ \varkappa_R$. Здесь \varkappa_R — отсчетная конфигурация, образ которой V_{\varkappa_R} , вообще говоря, не свободен от напряжений. Это обстоятельство приводит к необходимости вводить *локальную конфигурацию*: каждой материальной точке $\mathfrak{X} \in \mathfrak{B}$ ставится в соответствие линейное

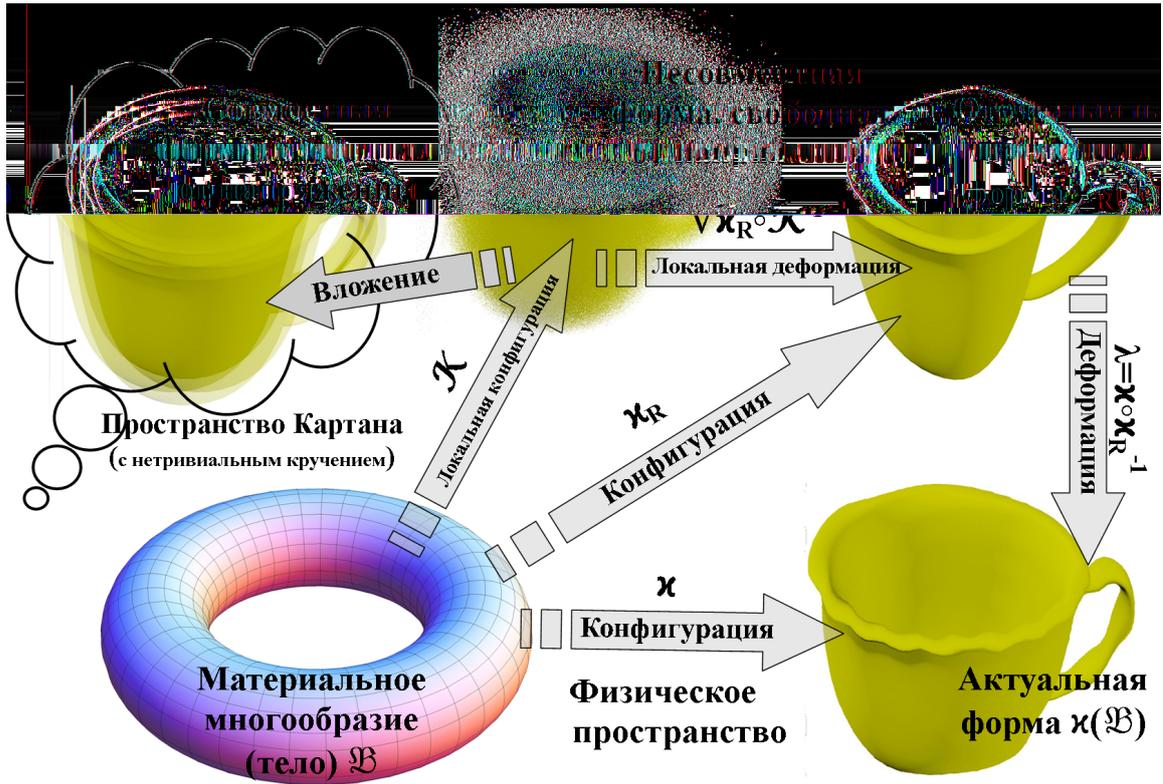


Рис. 3: Несовместные конфигурации и их вложение

отображение $K(\mathfrak{X})$, переводящее окрестность точки $\kappa_R(\mathfrak{X})$ в состояние, свободное от напряжений. Поле $K : \mathcal{B} \ni \mathfrak{X} \mapsto K(\mathfrak{X})$, вообще говоря, несовместно: поле реперов $e_i \cdot K \circ \kappa^{-1}$, $i = 1, 2, 3$, где e_i — фиксированный декартов репер, неголономно. В этой связи указанная выше методология подвижного репера оказывается удобной для описания совокупности локальных конфигураций как *единой* натуральной конфигурации, погружаемой в пространство Картана с нетривиальным кручением. Это позволяет установить связь теории растущих тел и теории распределенных дислокаций (W. Noll, C.C. Wang).

Напомним, что материальное многообразие представляет собой расслоение, причем каждый слой ассоциируется с материальной поверхностью, напряженной до ее присоединения к телу. Предполагается, что каждый слой перед его присоединением деформировался из ненапряженного состояния. Это формализуется следующим образом: сужение поля K на любой фиксированный слой \mathcal{M}_ζ совместно: соответствующее поле реперов определяет поверхность, погружаемую в аффинное пространство \mathbb{E}^3 , т.е. существуют послойные конфигурации $\kappa_f^\zeta : \mathcal{M}_\zeta \rightarrow B_{\kappa_f}^\zeta \subset \mathbb{E}^3$. Совокупность поверхностей $B_{\kappa_f}^\zeta$, т.е. множество образов всех слоев $\bigcup_{\zeta \in (\alpha, \gamma)} B_{\kappa_f}^\zeta$ образует несвязное подмножество \mathbb{E}^3 . Однако при вложении их в пространство Картана со связностью (2) совокупность образов слоев оказывается связным множеством с регулярной границей. Геометрическая иллюстрация сказанного выше приведена на Рис. 2.

Деформация в составе тела определяется относительным градиентом деформаций $F = \nabla_{\kappa_R} \kappa = (\nabla \kappa) \cdot (\nabla \kappa_R)^{-1}$. Полный тензор дисторсии материальной точки $\mathfrak{X} \in \mathcal{B}$ имеет вид $H(\mathfrak{X}) = K(\mathfrak{X}) \cdot F(\mathfrak{X})$. Преобразование $H(\mathfrak{X})$ переводит инфинитезималь-

ную окрестность точки \mathfrak{X} из ненапряженного состояния в напряженное, реализуемое в составе формы B_{\varkappa} .

Для построения полной системы уравнений механики растущих тел в работе производятся рассуждения, суть которых состоит в следующем. Пусть тело \mathfrak{B} находится в конфигурации \varkappa . Тогда в квазистатическом приближении уравнения баланса импульса имеют вид

$$\nabla_{\varkappa} \cdot \mathbf{T}_{\varkappa} + \mathbf{b}_{\varkappa} = \mathbf{0},$$

где \mathbf{T}_{\varkappa} — тензорное поле истинных напряжений (Коши), возникающих в теле в конфигурации \varkappa , \mathbf{b}_{\varkappa} — объемная плотность массовых сил (в случае квазистатики это — собственно массовые силы, а в случае динамики — массовые силы и силы инерции). Далее для определенности будем полагать, что функционал отклика принадлежит классу функционалов для гиперупругих неоднородных анизотропных материалов¹. Тогда напряжения могут быть определены послойно следующим образом

$$\mathbf{T}_{\varkappa} = J_{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial W_{\varkappa}^{\varkappa f}}{\partial \mathbf{H}}, \quad (3)$$

где $W_{\varkappa}^{\varkappa f}$ — плотность внутренней энергии, запасенной в конфигурации \varkappa , и отнесенной к единице объема послойной конфигурации \varkappa_f^{ζ} .

Глобально упругий потенциал может быть определен относительно евклидовой конфигурации \varkappa_R , а именно, вводится упругий потенциал $W_{\varkappa}^{\varkappa R}$ — запасенная энергия, отнесенная к единице объема в отсчетном состоянии \varkappa_R , т.е.:

$$W_{\varkappa}^{\varkappa R}(\mathbf{K}, \mathbf{F}, \mathfrak{X}) = J_{\mathbf{K}}^{-1} W_{\varkappa}^{\varkappa f}(\mathbf{H}, \mathfrak{X}) = J_{\mathbf{K}}^{-1} W_{\varkappa}^{\varkappa f}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{F}, \mathfrak{X}).$$

Если функционал однороден $W_{\varkappa}^{\varkappa f}$, т.е. он явно не зависит от материальных координат \mathfrak{X} , то функционал $W_{\varkappa}^{\varkappa R}$, вообще говоря, не будет таковым, поскольку \mathbf{K} зависит от \mathfrak{X} . В этом случае растущее тело будет материально единообразным, но неоднородным (С. А. Truesdell, G. Maugin).

Уравнения равновесия в объеме и на границе $\Omega(\gamma)$ (напомним, что γ — параметр семейства (1)) имеют вид:

$$\nabla_{\varkappa} \cdot \left[J_{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial W_{\varkappa}^{\varkappa f}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})}{\partial \mathbf{H}} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\mathbf{F}} \right] + \mathbf{b}_{\varkappa} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}_{\varkappa} \cdot \left[J_{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial W_{\varkappa}^{\varkappa f}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})}{\partial \mathbf{H}} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\mathbf{F}} \right] \Big|_{\Omega(\gamma)} = \mathbf{p},$$

где \mathbf{n}_{\varkappa} — внешняя единичная нормаль к поверхности $\Omega(\gamma)$, \mathbf{p} — заданное поле поверхностных сил².

Формально постановка краевой задачи отличается от классической постановки для тела постоянного состава лишь тем, что граница пространственной области параметрически зависит от γ . Однако имеется и более глубокое отличие, которое состоит в

¹Здесь может быть построено более общее, однако и более абстрактное изложение, если вместо упругих напряжений ввести понятие дескрипторов отклика. Подобное обобщение не изменит сущности дела, однако потребует дополнительных рассуждений, которые мы не имеем возможности привести здесь в виду ограничения объема.

²Здесь мы полагаем, что граница $\Omega(\gamma)$ геометрически замкнута, а растущее тело топологически эквивалентно шару. Это означает, что вся граница тела является растущей. В более общих случаях, обсуждаемых выше, следует выделить стационарную часть границы, т.е. не изменяющуюся в процессе роста, и определить на ней классические краевые условия. Обобщения всех последующих соотношений очевидны, хотя и более громоздки

зависимости упругого потенциала от тензорного поля дисторсии, для определения которого требуются дополнительные условия. Формулировка этих условий, в свою очередь, зависит от геометрической структуры присоединяемых элементов, т.е. от вида расслоения материального многообразия. Если рост тела происходит за счет непрерывного притока к телу предварительно напряженных материальных поверхностей, то это условие может быть сформулировано в виде

$$\mathbf{P}_\varkappa \cdot \left[J_{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial W_\varkappa^{\varkappa f}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})}{\partial \mathbf{H}} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{KF}} \right] \cdot \mathbf{P}_\varkappa \Big|_{\Omega(\gamma)} = \mathcal{T}_s. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{P}_\varkappa = (\mathbf{E} - \mathbf{n}_\varkappa \otimes \mathbf{n}_\varkappa)$ – проектор на касательную плоскость к границе $\Omega(\gamma)$. Записанное соотношение выражает тот факт, что слои присоединяются с заданным натягом, определяемым поверхностным тензором натяга \mathcal{T}_s .

Уравнение для определения \mathcal{T}_s при условии, что наращивание происходит в результате непрерывного присоединения предварительно напряженных поверхностей, может быть получено из соотношений теории материальных поверхностей (М.Е. Gurtin, А. Ian Murdoch). При этом уравнение равновесия материальной границы $\Omega(\gamma)$ имеет вид

$$\nabla_s \cdot \hat{\mathcal{T}}_s + \mathbf{b}_s = \mathbf{n}_\varkappa \cdot \mathcal{T}_\varkappa \Big|_{\Omega(\gamma)}, \quad \hat{\mathcal{T}}_s = \hat{\mathcal{T}}(\mathbf{F}_s, \mathfrak{X}), \quad (5)$$

где $\hat{\mathcal{T}}_s$ – тензор натяжения, двумерный аналог тензора напряжений Коши, $\nabla_s = \mathbf{P}_\varkappa \cdot \nabla_\varkappa$ – поверхностный набла-оператор, \mathbf{b}_s – поверхностная плотность внешних сил, действующих на $\Omega(\gamma)$, \mathbf{F}_s – градиент деформации поверхности

$$\mathbf{F}_s = \nabla_{\varkappa f} \mathbf{z}, \quad \mathbf{z} : \Omega_0 \rightarrow \Omega(\gamma),$$

причем $\Omega_0 \subset \mathbb{E}_3$ – образ отсчетной конфигурации поверхности \varkappa_f^ζ , которая полагается натуральной.

Напряжения \mathcal{T}_s могут быть найдены по натяжению $\hat{\mathcal{T}}_s$ с помощью оператора вложения \mathbf{In} , т.е. $\mathcal{T}_s = \mathbf{In} \left[\hat{\mathcal{T}}_s \right]$. Структура оператора вложения, вообще говоря, может быть нетривиальной и зависеть от физической природы процессов, происходящих на интерфейсе $\Omega(\gamma)$. Здесь начинает играть роль свойство многомасштабности исследуемых моделей, когда физический процесс на микроуровне в той или иной степени учитывается в рамках континуальной макромодели. Однако исследование этих вопросов выходит за рамки настоящей работы. Далее полагается, что оператор вложения лишь согласует размерности дву- и трехмерных многообразий, т.е. является в обсуждаемом смысле тривиальным.

Для замкнутой постановки краевой задачи следует указать краевое условие на границе $\partial\Omega(\gamma)$ поверхности $\Omega(\gamma)$

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathcal{T}}_s \Big|_{\partial_1\Omega(\gamma)} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} \Big|_{\partial_2\Omega(\gamma)} = \mathbf{u}, \quad \partial_1\Omega(\gamma) \cup \partial_2\Omega(\gamma) = \partial\Omega(\gamma).$$

Здесь \mathbf{n} – внешняя единичная нормаль к кривой $\partial\Omega(\gamma)$, лежащая в касательной плоскости к $\Omega(\gamma)$, \mathbf{f} – линейная плотность сил, распределенных на кривой $\partial_1\Omega(\gamma)$, \mathbf{u} – заданные смещения точек на кривой $\partial_2\Omega(\gamma)$. Все сказанное иллюстрируется Рис. 4.

Итак, полная система уравнений математической теории наращиваемых тел, в случае, когда трехмерное тело растет за счет присоединения предварительно напряженных материальных поверхностей, имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{X}} + \mathbf{b}_{\mathcal{X}} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{n}_{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{X}} \Big|_{\Omega(\gamma)} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{P}_{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{P}_{\mathcal{X}} \Big|_{\Omega(\gamma)} = \mathcal{T}_s, \\ \mathbf{T}_{\mathcal{X}} &= J_{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial W_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}f}(\mathbf{H}, \mathfrak{X})}{\partial \mathbf{H}} \Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{K}\mathbf{F}}, \quad \mathcal{T}_s = \mathbf{I} \mathbf{n} \left[\hat{\mathcal{T}}_s \right], \\ \nabla_s \cdot \hat{\mathcal{T}}_s + \mathbf{b}_s &= \mathbf{n}_{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{X}} \Big|_{\Omega(\gamma)}, \quad \hat{\mathcal{T}}_s = \hat{\mathcal{T}}(\mathbf{F}_s, \mathfrak{X}), \quad \mathbf{F}_s = \nabla_{\mathcal{X}f} \mathbf{z}, \\ \mathbf{n} \cdot \hat{\mathcal{T}}_s \Big|_{\partial_1 \Omega(\gamma)} &= \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} \Big|_{\partial_2 \Omega(\gamma)} = \mathbf{u}. \end{aligned}$$

В диссертационной работе определяется ряд частных формулировок приведенной выше системы уравнений, удобных при решении прикладных задач. Поскольку поверхностная дивергенция поля $\hat{\mathcal{T}}_s$ удовлетворяет соотношению $(\nabla_s \cdot \hat{\mathcal{T}}_s) \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{T}}_s : \mathbf{L}$, $\mathbf{L} = -\nabla_s \mathbf{n}_{\mathcal{X}}$, то проекция уравнения (5) на нормаль $\mathbf{n}_{\mathcal{X}}$ определяет уравнение

$$\hat{\mathcal{T}}_s : \mathbf{L} + \mathbf{b}_s \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{X}} = \mathbf{n}_{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{X}} \Big|_{\Omega(\gamma)}. \quad (6)$$

Если предположить, что касательная нагрузка на поверхности роста отсутствует, то условие (6) определяет действие нормальной нагрузки, которую оказывает материальная поверхность на пространственное тело. Такое взаимодействие можно охарактеризовать как гладкий контакт растущего тела и материальной поверхности, т.е. последняя может скользить без трения по телу.

Если поверхностный тензор натяга известен, то полную систему уравнений задачи можно получить, добавив к первым двум уравнениям приведенной системы условие (4). Если, кроме того, предположить, что на поверхности роста касательная нагрузка отсутствует, то условие (4) следует заменить условием (6), которое в свою очередь, эквивалентно следующему векторному условию:

$$\mathbf{n}_{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{X}} \Big|_{\Omega(\gamma)} = \left(\hat{\mathcal{T}}_s : \mathbf{L} \right) \mathbf{n}_{\mathcal{X}} + \mathbf{b}_s.$$

В диссертации осуществлена классификация краевых задач, порождаемых указанными формулировками. Выделены следующие классы.

- Задан отсчетная геометрия, т.е. известны с точностью до жесткого движения отсчетные конфигурации слоев, погружаемые в евклидово пространство (т.е. известны Ω_0 для всех слоев).
- Задана актуальная геометрия растущего тела, т.е. заданы все силовые поля в актуальной конфигурации и позиции точек на поверхности роста (известно $\Omega(\gamma)$).
- Задано натяжение на поверхности роста (известно \mathcal{T}_s).

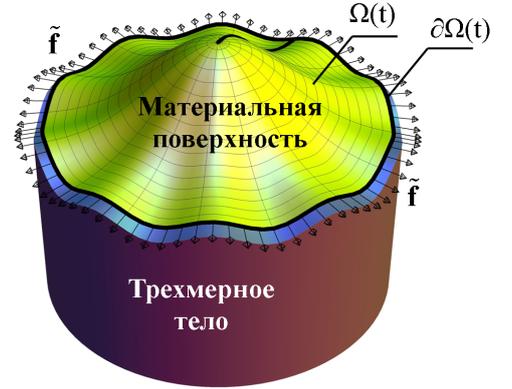


Рис. 4: Взаимодействие материальной поверхности и трехмерного тела

- Заданы условия деформирования материальной поверхности роста (определен закон состояния $\hat{T}(\dots)$ и заданы поля $\mathbf{b}_s, \mathbf{f}, \mathbf{u}$).

Эта классификация является общей для всех задач, рассматриваемых в настоящей работе.

В заключение первой главы приводятся соотношения для материальной связности и ее кручения, а так же осуществляется формулировка уравнений равновесия относительно глобальной натуральной конфигурации, погружаемой в пространство Картана с соответствующим кручением.

Во второй главе исследованы классы универсальных деформаций наращиваемых гиперупругих несжимаемых тел. Отмечается, что для растущих тел множество универсальных деформаций значительно богаче, чем для тел постоянного состава. Это легко можно объяснить. Классические типы универсальных деформаций (R. Rivlin, J. Ericksen) могут быть найдены в два этапа. На первом этапе удовлетворяются собственно условия универсальности, из которых вытекает, что инварианты мер деформаций должны быть постоянными на сферических, цилиндрических поверхностях или плоскостях, а на втором этапе удовлетворяется условие евклидовости, т.е. возможности погружения образа натуральной конфигурации в евклидово пространство. В случае растущих тел второе условие не выставляется. Исследование универсальных деформаций, приведенное в диссертационной работе, не претендует на полноту. Здесь лишь выделены некоторые классы, которые следует рассматривать как модельные задачи, иллюстрирующие характерные свойства растущих тел. Деформации послойно соответствуют:

- центральносимметричной деформации тонкого сферического слоя;
- осесимметричной деформации тонкого кругового цилиндра;
- преобразованию параллелепипеда в полый круговой цилиндр.

Решения краевых задач для упругого потенциала Муни–Ривлина доведены до численных результатов. Для сопоставления результатов наряду с непрерывным наращиванием рассмотрено дискретное наращивание. Ясно, что при достаточной гладкости функций, характеризующих процесс роста, дискретное наращивание должно в пределе переходить в непрерывное. Таким образом, сопоставление решений для дискретного и непрерывного наращивания, кроме всего прочего, позволяет осуществить контроль вычислений. В работе показана сходимость решений задач для дискретного наращивания к решениям соответствующих задач для непрерывного наращивания при увеличении количества слоев и уменьшении их толщины.

Здесь укажем лишь задачу о центральносимметричном деформировании растущего упругого полого шара. Материальное многообразие \mathfrak{M} может быть представлено в \mathbb{R}^3 открытым шаром, который допускает естественное раслоение на концентрические сферы \mathfrak{M}_ζ . Полагаем, что материал несжимаем. Это позволяет воспользоваться универсальными решениями Ривлина–Эриксона для описания деформирования каждого слоя. Пусть $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$ – физический базис сферической системы координат. Поле \mathbf{K} имеет вид

$$\mathbf{K} = \frac{(r^3 - \alpha)^{2/3}}{r^2} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{r}{(r^3 - \alpha)^{1/3}} (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta).$$

Здесь $\alpha = \alpha(\zeta)$ – параметр дисторсии, подлежащий определению. В силу симметрии он полностью характеризует поле \mathbf{K} . Учитывая выражение для градиента деформа-

ции \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \frac{r^2}{(r^3 + A)^{2/3}} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \frac{(r^3 + A)^{1/3}}{r} (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta),$$

представим полную дисторсию как композицию $\mathbf{H} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}$. Для рассматриваемой задачи уравнения равновесия при отсутствии объемных сил имеют вид $\nabla_{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{X}} = \mathbf{0}$, а краевые условия формулируются следующим образом:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{X}} \Big|_{r=r_1} = nq(\gamma), \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{X}} \Big|_{r=r_2(\gamma)} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Здесь $q(\gamma)$ — нормальная нагрузка на внутренней поверхности шара, $r_2(\gamma)$ — радиус поверхности роста. Дополнительное условие определяет натяг $f(\gamma)$, т.е.

$$\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{T}_{\mathcal{X}} \cdot \mathbf{e}_\theta \Big|_{r=r_2(\gamma)} = T_{\theta\theta} \Big|_{r=r_2(\gamma)} = f(\gamma). \quad (8)$$

Методология построения универсальных решений Эриксона для шара, приводит к соотношениям для радиальных T_{rr} и окружных $T_{\theta\theta}$ компонент напряжений. В результате подстановки этих соотношений в краевые условия (7) и в условие, определяющее натяг (8), получаем систему уравнений относительно $\alpha = \alpha(r)$ и $A = A(\gamma)$:

$$4 \int_{r_0}^{r_1(\gamma)} \frac{r^2(A + \alpha)(2r^3 + A - \alpha)}{(r^3 - \alpha)^{4/3}(r^3 + A)^{5/3}} \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r^3 - \alpha)^{2/3}}{(r^3 + A)^{2/3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} \right) dr = -q(\gamma),$$

$$2 \left[\frac{(A + \alpha)(2r_1^3 + A - \alpha)}{(r_1^3 - \alpha)^{4/3}(r_1^3 + A)^{2/3}} \left(\frac{\partial W}{\partial I_2} + \frac{(r_1^3 - \alpha)^{2/3}}{(r_1^3 + A)^{2/3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} \right) \right] \Big|_{r=r_1(\gamma)} = f(\gamma),$$

где $W = W_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}f}$, I_1 , I_2 — первый и второй инварианты поля \mathbf{H} . По решению этой системы определяется дисторсия \mathbf{K} и, следовательно, связность на материальном многообразии, полная дисторсия и все компоненты напряжений.

Обратим внимание на то, что первое уравнение записанной системы — интегральное, фактически представляет семейство уравнений относительно параметра γ . Это означает, что каждому элементу семейства (1) соответствует интегральное соотношение. Поскольку параметр дисторсии α зависит от пространственной координаты r , а параметр раздувания A от γ , то получаемые решения для некоторого фиксированного γ_0 зависят от всех предшествующих решений для $\gamma < \gamma_0$. В этом проявляется свойство памяти растущих тел: в силу сказанного их можно классифицировать как **тела с памятью** (подразумевается параллель с термином “среды с памятью”).

Таким образом решается задача, принадлежащая третьему классу (по общей классификации, приведенной в первой главе). Аналогичным образом решаются задачи других классов. В диссертации приводятся численные решения, графики, осуществляется их анализ.

Третья глава посвящена задачам в приближении малых деформаций. Для исследования задач динамического наращивания упругих и термоупругих тел разработан метод построения решений в форме спектральных разложений по биортогональным системам собственных и присоединенных функций несамосопряженных пучков дифференциальных операторов. Метод построения решения является обобщением метода биортогональных интегральных преобразований, введенных Ю.Э. Сеницким,

и основан на спектральных методах исследования пучков несамосопряженных операторов, развитых в работах И.Ц. Гохберга, М.Г. Крейна, М.В. Келдыша. Кратко остановимся на существовании метода.

На множестве комплекснозначных n -мерных вектор-функций, интегрируемых с квадратом на интервале \mathbb{I} , вводится гильбертово пространство \vec{L}_μ^2 со скалярным произведением $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \int_a^b \mathbf{v}^T \mu \bar{\mathbf{w}} dx,$$

где $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \vec{L}_\mu^2$, μ – симметричная невырожденная матрица весовых функций, T – знак транспонирования, $\bar{\mathbf{w}}$ – вектор, комплексно сопряженный к \mathbf{w} . Симметричность и невырожденность μ обеспечивают положительную определенность метрики \vec{L}_μ^2 .

Рассматривается задача Коши с операторными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^m \mathcal{A}_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{y}(x, t) = \mathbf{f}(x, t), \quad \left. \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{y}(x, t) \right|_{t=0} = \mathbf{y}_0^{(i)}(x), \quad \mathbf{y}(x, t) \in \mathcal{D}, \quad (9)$$

причем операторы \mathcal{A}_i имеют общую область определения \mathcal{D} , задаваемую оператором краевых условий \mathcal{B} :

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} \in \vec{L}_\mu^2 \wedge \mathcal{B}(\mathbf{y}) = 0\}, \quad \mathcal{B}\mathbf{y}(x) = \mathcal{B}_a \mathbf{y}(x) + \mathcal{B}_b \mathbf{y}(x).$$

Задаче Коши (9) соответствует полиномиальный пучок дифференциальных операторов \mathcal{L}_λ $\mathcal{L}_\lambda = \sum_{i=0}^m \lambda^i \mathcal{A}_i$, где λ – комплексный параметр. Операторному пучку \mathcal{L}_λ ставится в соответствие сопряженный пучок $\mathcal{L}_\lambda^* = \sum_{i=0}^m \bar{\lambda}^i \mathcal{A}_i^*$. Его коэффициенты \mathcal{A}_i^* и область определения \mathcal{D}^* находятся из условия

$$\forall \mathbf{u} \forall \mathbf{v} (\mathbf{u} \in \mathcal{D} \wedge \mathbf{v} \in \mathcal{D}^*) \Leftrightarrow (\langle \mathcal{L}_\lambda^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathcal{L}_\lambda \mathbf{v} \rangle = 0).$$

Собственные функции пучка \mathcal{L}_λ отыскиваются как решения обобщенной задачи Штурма–Лиувилля $\mathcal{L}_\lambda \mathbf{G}_s = 0$, $\mathcal{B} \mathbf{G}_s = 0$, а присоединенные – из решений последовательности неоднородных краевых задач

$$\mathcal{L}_\lambda \mathbf{G}_{s-i} = - \sum_{j=1}^i \frac{1}{j!} \mathcal{L}_\lambda^{(j)} \mathbf{G}_{s-i+j}, \quad \mathcal{B} \mathbf{G}_{s-i} = 0. \quad (10)$$

В диссертации разработана процедура определения алгебраической и геометрической кратностей собственных значений, позволяющая определить максимальную длину s цепочки присоединенных функций и, следовательно, количество итераций в (10). Собственные и присоединенные функции сопряженного пучка определяются из решений следующих краевых задач

$$\mathcal{L}_\lambda^* \mathbf{G}_s^* = 0, \quad \mathcal{B}^* \mathbf{G}_s^* = 0, \quad \mathcal{L}_\lambda^* \mathbf{G}_{s-i}^* = - \sum_{j=1}^i \frac{1}{j!} \mathcal{L}_\lambda^{*(j)} \mathbf{G}_{s-i+j}^*, \quad \mathcal{B} \mathbf{G}_{s-i}^* = 0.$$

Система собственных и присоединенных функций сопряженных пучков L_λ, L_λ^* определяет конечные интегральные преобразования $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$

$$\varphi = \mathcal{F}^* \mathbf{u} = -\frac{1}{\lambda} \langle \mathcal{K}^*, \mathcal{A}_0 \mathbf{u} \rangle, \quad \mathbf{u} = \mathcal{F} \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}_{1i} \mathcal{Q}_{1i} \varphi,$$

где $\mathcal{K}_\lambda, \mathcal{K}_\lambda^*$ — матричные ядра $\mathcal{K} = (\mathbf{G}_s \mathbf{G}_{s-1} \dots \mathbf{G}_1)$, $\mathcal{K}_v^* = (\mathbf{G}_s^* \mathbf{G}_{s-1}^* \dots \mathbf{G}_1^*)$, Q_v — нормирующая матрица, $\lambda_i (i = 1, \dots, \infty)$ — собственные значения операторного пучка.

Построение спектрального представления решения начально-краевой задачи (9) вначале осуществляется для линейного операторного пучка, т.е. для начально-краевой задачи, в которой присутствуют производные по времени только первого порядка:

$$\mathcal{A}_1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}(x, t) + \mathcal{A}_0 \mathbf{y}(x, t) = \mathbf{f}(x, t), \quad \mathbf{y}(x, t) \Big|_{t=0} = \mathbf{y}_0(x), \quad \mathbf{y}(x, t) \in \mathcal{D}. \quad (11)$$

Действуя на левую часть (11) и краевые условия прямым преобразованием \mathcal{F}^* получаем в пространстве изображений

$$\mathcal{F}^* \mathcal{A}_0 \mathbf{y} + \partial_t \mathcal{F}^* \mathcal{A}_1 \mathbf{y} = \mathcal{F}^* \mathbf{f}. \quad (12)$$

Воспользовавшись операционным свойством

$$\sum_{i=0}^m [\bar{\Lambda}^T]^i \mathcal{F}_\lambda^* \mathcal{A}_i = 0 \Rightarrow \mathcal{F}^* \mathcal{A}_0 \mathbf{y} + \bar{\Lambda}^T \mathcal{F}^* \mathcal{A}_1 \mathbf{y} = 0,$$

приведем (12) к виду $(\partial_t \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^T) \varphi = \Phi$, где $\varphi = \mathcal{F} \mathcal{A} \mathbf{y}$, $\Phi = \mathcal{F} \mathbf{f}$, Λ — блочно-диагональная жорданова матрица, блоки которой s -мерны. Обращая оператор $(\partial_t \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^T)$, приходим к выражению $\varphi = (\partial_t \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^T)^{-1} \Phi$. Если теперь принять во внимание обратимость интегрального преобразования, то решение задачи (11) можно представить в виде $\mathbf{y} = \mathcal{F} (\partial_t \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^T)^{-1} \mathcal{F}^* \mathbf{f}$. Формулируя оператор $(\partial_t \mathbf{I} - \bar{\Lambda}^T)^{-1}$ в терминах матричной экспоненты и учитывая начальные условия для $\varphi_0 = \mathcal{F}^* \mathcal{A} \mathbf{y}_0$, окончательно получим следующее представление решения

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} \left[\exp(\bar{\Lambda}^T t) \mathcal{F}^* \mathcal{A}_1 \mathbf{y}_0 + \int_0^t \exp[\bar{\Lambda}^T (t - \tau)] \mathcal{F}^* \mathbf{f}(\tau) d\tau \right].$$

В общем случае задача (9) может быть сведена к (11), если положить $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}$ и сформулировать расширенную систему операторных уравнений и определить начальные условия следующим образом

$$\mathcal{A}_0 \mathbf{y}_1 + \sum_{i=1}^m \mathcal{A}_i \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}_i = \mathbf{f}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{y}_{i-1} - \mathbf{y}_i = 0, \quad i = 2, \dots, m, \quad \mathbf{y}_i \Big|_{t=0} = \frac{\partial^{i-1}}{\partial t^{i-1}} \mathbf{y} \Big|_{t=0} = \mathbf{y}_0^{(i-1)}. \quad (13)$$

Начально-краевой задаче (13) соответствует линейный пучок, действующий в расширенном пространстве вектор-функций $\vec{H}_\mu^2 = (\vec{L}_\mu^2)^m$

$$\mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}_1 = 0, \quad (14)$$

где операторы $\mathcal{H}_{0,1}$ образуются из блоков \mathcal{A}_i полиномиального пучка \mathcal{L}_λ

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \dots & \mathcal{A}_{m-1} & \mathcal{A}_m \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопряженный к (14) пучок определяется операторными коэффициентами сопряженного пучка \mathcal{L}_λ^*

$$\mathcal{H}_0^* + \lambda \mathcal{H}_1^* = 0, \quad \mathcal{H}_0^* = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_1^* = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1^* & I & \dots & 0 \\ \mathcal{A}_2^* & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{A}_{m-1}^* & 0 & \dots & I \\ \mathcal{A}_m^* & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Повторяя построения, приведенные выше для линейного пучка, получим представление решения в виде

$$\mathbf{y} = \mathcal{F} \left[\exp(\bar{\Lambda}^\top t) \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m \bar{\Lambda}^{\top(j-i)} \mathcal{F}^* \mathcal{A}_j \mathbf{y}_0^{(i-1)} + \int_0^t \exp[\bar{\Lambda}^\top(t-\tau)] \mathcal{F}^* \mathbf{f}(\tau) d\tau \right]. \quad (15)$$

Следует отметить, что полученные спектральные представления в классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом, по своей структуре подобны разложениям по системам скалярных собственных и присоединенных функций, введенных М.В. Келдышем.

В диссертационной работе метод продемонстрирован на решении ряда несамосопряженных начально-краевых задач. Получены в замкнутой форме решения модельных задач для термоупругих тел канонической формы: шара, цилиндра и параллелепипеда в постановке связанной теории. Рассмотрены три типа связанных уравнений термомеханики, порождаемых 1) законом теплопроводности Фурье; 2) законом Каттанео-Джеффриса; 3) определяющими соотношениями бездиссипативной теплопроводности Грина-Нахди. Исследована зависимость степени взаимного влияния механических и температурных полей от геометрического масштаба тела. Установлено, что оно существенно для тел микронного масштаба. Следует отметить, что размер присоединяемых частиц-капель, соответствующий ряду технологических процессов, принадлежит этому диапазону. Это говорит о необходимости учета связанности для определения начальных термомеханических полей при анализе наращивания в классе моделей, соответствующих расслоению с трехмерной базой (см. Главу 1).

На основе сформулированных спектральных представлений предлагается итерационная процедура определения полей напряжений и температуры в растущих термоупругих телах.

В четвертой главе излагается общая методология построения вариационных принципов на основе функционала свертки (конволюции) и других билинейных симметричных форм. Предлагаются новые вариационные принципы для упругих, термоупругих и вязкоупругих сред и растущих тел. Рассматриваются постановки как в линейном приближении, так и в конечных деформациях.

Большинство вариационных принципов, соответствующих краевым задачам механики сплошных сред, могут быть сформулированы в рамках следующих рассуждений. Известно, что с линейным оператором A , который определен на гильбертовом пространстве $H(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v d\mu \quad (u, v \in H(\Omega)), \quad (16)$$

связан квадратичный функционал $I[\vartheta] = 1/2 (\vartheta, A[\vartheta])$ ($\vartheta \in H(\Omega)$), причем, если оператор A является **самосопряженным** $(Au, v) = (u, Av)$, этот функционал достигает своих экстремальных значений на функциях, принадлежащих ядру оператора A : $A[\vartheta] = 0$, и только на них. Таким образом, краевая задача эквивалентна вариационному принципу $\delta I[\vartheta] = 0$. Утверждение остается верным, если оператор A определен в $H(\Omega)$, но его область определения D_A плотна в пространстве $H(\Omega)$.

Аналогичным образом формулируются вариационные принципы для нелинейных операторов, которые в линейном приближении оказываются самосопряженными. Согласно теореме М.М. Вайнберга функционал, достигающий экстремальных значений на решениях нелинейной задачи $\mathfrak{A}[\vartheta] = 0$ имеет вид

$$I[\vartheta] = \left(\vartheta, \int_0^1 \mathfrak{A}[\lambda\vartheta] d\lambda \right). \quad (17)$$

Здесь \mathfrak{A} — нелинейный дифференцируемый оператор, такой, что его производная Гато

$$\mathfrak{A}'[x, h] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{A}(x + \varepsilon h) - \mathfrak{A}(x)}{\varepsilon}$$

является самосопряженным оператором, т.е. $(\mathfrak{A}'[x, u], v) = (u, \mathfrak{A}'[x, v])$ с плотной в $H(\Omega)$ областью определения.

Данная методология, основанная на использовании классического (евклидова) скалярного произведения, имеет следующие ограничения. Во-первых, вариационная формулировка для **начальных** и **начально-краевых** задач не может быть получена, поскольку начальные условия формулируются на одном конце рассматриваемого интервала времени, а при использовании функционала, построенного на основе скалярного произведения (16), подразумевается, что заданы условия в начальной и конечной точках (как, например, в принципе Остроградского–Гамильтона). Это приводит к известным неопределенностям и затруднениям в динамических задачах механики сплошных сред.

Во-вторых, операторы, возникающие в задачах механики сплошных сред, часто оказываются непотенциальными (т.е. несамосопряженными в линейном приближении по отношению к скалярному произведению соответствующего гильбертова пространства). Таковыми, например, являются операторы, порождаемые уравнениями связанной термоупругости, вязкоупругости, ползучести. Как правило, для подобных задач предлагались не вариационные принципы, а вариационные уравнения (например, вариационное уравнение Био для термоупругих сред).

Если наряду с евклидовым скалярным произведением (16) использовать функционал свертки (конволюцию)

$$\langle \vartheta, \omega \rangle = \int_0^t \vartheta(t - \tau) \omega(\tau) d\tau, \quad (18)$$

то область применения изложенного выше вариационного формализма может быть расширена.

Следует отметить, что впервые свертка была использована для формулировки вариационного принципа, порождаемого начально-краевой задачей, М. Гертиным

в 1964 г. Идея, высказанная М. Гертиным, была развита Э. Тонти (1969 г.). Тонти показал, что может быть использована любая билинейная форма $B(\vartheta, \omega)$, если она удовлетворяет условиям симметричности $B(\vartheta, \omega) = B(\omega, \vartheta)$ и отделимости $\forall \vartheta \quad B(\vartheta, \omega) = 0 \Rightarrow \omega \equiv 0$. Таким образом, если линейный оператор A (с плотной в $H(\Omega)$ областью определения D_A) оказывается самосопряженным относительно билинейной формы B , т.е.

$$\forall \vartheta, \omega \in D_A \quad B(A[\vartheta], \omega) = B(\omega, A[\vartheta])$$

то порождаемый этим оператором вариационный принцип может быть сформулирован следующим образом $I[\vartheta] = \frac{1}{2}B(A[\vartheta], \vartheta)$, $\delta I[\vartheta] = 0$. Соответственно, вариационный принцип для нелинейного оператора \mathfrak{A} , производная которого является самосопряженной по отношению к билинейной форме B , имеет вид

$$I[\vartheta] = B \left(\vartheta, \int_0^1 \mathfrak{A}[\lambda \vartheta] d\lambda \right).$$

В диссертации в рамках единой методологии построены новые конволютивные вариационные принципы для упругих и термоупругих тел постоянного состава и растущих тел³.

Вводится симметричная и невырожденная билинейная форма

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{N}_{\mathbf{x}}} \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \mathbf{u}(\mathbf{x}; t + \tau^* - \tau) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}; \tau) d\tau dV.$$

Соответствующий вариационный принцип для растущего линейно-упругого тела при заданной отсчетной геометрии (заданным полем \mathbf{K}) сформулирован следующим образом:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{J}[\mathbf{u}] &= \\ &= \int_{\mathcal{B}} \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \mathbf{u}(\mathbf{x}; t + \tau^* - \tau) \{ \nabla \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{x}) : (\mathbf{K} + \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}; \tau))] - \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \tau) + 2\rho \mathbf{f}(\mathbf{x}; \tau) \} d\tau dV + \\ &+ \int_{\partial \mathcal{B}} \int_{\tau^*}^t \mathbf{p}(\mathbf{x}; t + \tau^* - \tau) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}; t) d\tau dV - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \cdot \rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; t) dV, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{D}, \quad \delta \mathcal{J} = 0. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{u} – перемещения в составе тела, $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ – тензор упругостей (приведенная форма записи предполагает, что тензор $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ как линейный оператор выделяет симметричную часть своего аргумента, т.е. он отличается от классического композицией с симметризирующей тензорной единицей).

Обобщение вариационного принципа на нелинейный случай имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[\mathbf{u}] &= \int_{\mathcal{B}} \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \mathbf{u}(\mathbf{x}; t + \tau^* - \tau) \cdot \left[\int_0^1 \nabla \cdot \left(J_{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial W(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{K} \cdot \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}; \tau))}{\lambda \partial (\mathbf{K} \cdot \nabla \otimes \mathbf{u})} \right) d\lambda - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho}{2} \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; \tau) + \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}; \tau) \right] d\tau dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial \mathcal{B}} \int_{\tau^*(\mathbf{x})}^t \mathbf{p}(\mathbf{x}; t + \tau^* - \tau) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}; t) d\tau dV - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}^*(\mathbf{x}) \cdot \rho \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}; t) dV, \end{aligned}$$

$$\mathbf{u} \in \mathcal{D}, \quad \delta \mathcal{J} = 0.$$

³Вариационный принцип для термоупругого тела постоянного состава, предлагаемый в работе, может рассматриваться как модификация принципа G.Belli, C.Morosi.

Аналогичные вариационные постановки даны для термоупругих растущих тел. На основе вариационных принципов сформулированы алгоритмические процедуры, позволяющие находить механические и температурные поля для слабо неоднородных тел, используя в качестве нулевого приближения аналитические решения, построенные в Главе 3.

В **пятой главе** сформулированы краевые и начально-краевые задачи для растущих по толщине тонкостенных конструкций и приведены решения ряда модельных задач.

Уравнения равновесия растущих по толщине пластин выводятся из следующих соображений. Рассмотрим пластину с произвольной гладкой границей. Пусть Π — плоскость осреднения, $\{y^1, y^2\}$ — соответствующие криволинейные координаты на ней и \mathbf{k} единичный вектор, ортогональный к плоскости Π . Будем использовать кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} - z\nabla w, \quad w = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(y^1, y^2), \quad (19)$$

где \mathbf{a} — перемещения в плоскости пластины и w — поперечные перемещения (прогибы). Символом ∇ обозначим плоский оператор Гамильтона: $\nabla = \mathbf{e}^1 \partial_1 + \mathbf{e}^2 \partial_2$, $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ — локальный векторный базис, ∂_1, ∂_2 — частные производные по переменным y^1, y^2 . Тензорное поле $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ определяет малые деформации в составе тела:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{a} + (\nabla \otimes \mathbf{a})^* - \mathbf{k} \otimes \nabla w - \nabla w \otimes \mathbf{k}) - z \nabla \otimes \nabla w. \quad (20)$$

Перед присоединением к растущему телу каждый слой деформируется независимо согласно заданному сценарию наращивания. Перемещения точек слоя ζ в напряженной отсчетной конфигурации может быть определено гладким полем $\mathbf{d}_\zeta(y^1, y^2) = \mathbf{e}^\alpha d_\alpha(y^1, y^2)$. Предположим, что 'склейка' этих полей $\mathbf{d}(y^1, y^2, z) = \mathbf{d}_\zeta(y^1, y^2) \Big|_{\zeta=z}$ представляет собой гладкое поле, определенное в трехмерном пространстве. Это соответствует предположению о том, что все функции, определяющие процесс роста, непрерывны по времени. Теперь мы можем определить послойные $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ и полные $\boldsymbol{\varepsilon}$ деформации

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{d} + (\nabla \otimes \mathbf{d})^*), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_b + \mathbf{In} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_f \cdot \mathbf{In}. \quad (21)$$

Здесь \mathbf{In} — оператор вложения, который вкладывает двумерное тензорное поле в трехмерное. Заметим, что полные деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ не удовлетворяют условиям совместности, т.е. $\hat{\nabla} \times (\hat{\nabla} \times \boldsymbol{\varepsilon})^* \neq \mathbf{0}$, $\hat{\nabla} = \nabla + \mathbf{k} \partial_z$.

Предположим, что материал растущей пластины линейно упругий и изотропный. Тогда тензор напряжений может быть представлен формулой

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu \left(\nabla \otimes \mathbf{a} + (\nabla \otimes \mathbf{a})^* - \mathbf{k} \otimes \nabla w - \nabla w \otimes \mathbf{k} - 2z \nabla \otimes \nabla w + \right. \\ \left. + \nabla \otimes \mathbf{d} + (\nabla \otimes \mathbf{d})^* \right) + \lambda \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{a} - z \nabla^2 w + \nabla \cdot \mathbf{d}),$$

где λ, μ — упругие модули Ламе. Тензор напряжений в отсчетной послойной конфигурации имеет вид $\boldsymbol{\sigma} = \mu \left(\nabla \otimes \mathbf{d} + (\nabla \otimes \mathbf{d})^* \right) + \lambda \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{d})$. Заметим, что в силу несовместности полных деформаций, невозможно освободить тело от напряжений посредством гладкой деформации.

Осредним напряжения по толщине пластины. В результате получаем тензор мембранных усилий \mathbf{N} и тензор изгибающих и крутящих моментов \mathbf{M}

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \int_{-h_-}^{h_+} \boldsymbol{\sigma} dz = 2\mu \left[(h_+ + h_-) \mathbf{def} \mathbf{a} - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \otimes \nabla w \right] + \\ + \lambda \mathbf{I} \left[(h_+ + h_-) \nabla \cdot \mathbf{a} - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla^2 w \right] + \int_{-h_-}^{h_+} (2\mu \mathbf{def} \mathbf{d} + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{d}) dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \int_{-h_-}^{h_+} \boldsymbol{\sigma} z dz = -2\mu \left[\frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \nabla \otimes \nabla w - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \otimes \mathbf{a} \right] - \\ - \lambda \mathbf{I} \left[\frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \nabla^2 w - \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla^2 \cdot \mathbf{a} \right] + \int_{-h_-}^{h_+} (2\mu \mathbf{def} \mathbf{d} + \lambda \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{d}) z dz. \end{aligned}$$

В отличие от классической теории пластин в этих выражениях присутствуют дополнительные слагаемые в силу того, что плоскость осреднения Π не совпадает с срединной плоскостью пластины и индивидуальным натяжением слоев перед присоединением.

Полный тензор усилий может быть представлен в форме $\mathbf{T} = \mathbf{N} + \mathbf{k} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{k}$, где \mathbf{Q} — поперечные силы, которые могут быть определены как усилия в связях из уравнения $\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Явные формулы для поперечных сил имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = -(2\mu + \lambda) \frac{h_+^3 + h_-^3}{3} \nabla \otimes \nabla^2 w + \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} [(\mu + \lambda) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a} + \mu \nabla^2 \mathbf{a}] + \\ + \int_{-h_-}^{h_+} [(\lambda + \mu) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{d} + \mu \nabla^2 \mathbf{d}] dz. \end{aligned}$$

Обозначим осредненные массовые силы символом \mathbf{K} , причем $\mathbf{K} = \mathbf{K}_\Pi + q\mathbf{k}$, $q = \mathbf{K} \cdot \mathbf{k}$. В результате несложных преобразований уравнения равновесия $\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{K} = \mathbf{0}$ преобразуются к двум уравнениям

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left[\frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{a} - \frac{h_+^3 - h_-^3}{3} \nabla^2 \nabla^2 w \right] + q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h_-}^{h_+} (\nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{d}) z dz = \mathbf{0}, \\ D \nabla^2 \nabla^2 w = q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h_-}^{h_+} \left[\left(z - \frac{h_+ - h_-}{2} \right) \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{d} \right] dz - \frac{h_+ - h_-}{2} \nabla \cdot \mathbf{K}_\Pi, \quad (22) \end{aligned}$$

где D — цилиндрическая жесткость, т.е. $D = (\lambda + 2\mu)h^3/12$, $h = h_- + h_+$.

Уравнение (22) определяет равновесие текущей конфигурации растущей пластины. Эти уравнения совместно с краевыми условиями определяют краевую задачу для растущей изгибаемой пластины. Может быть дана следующая классификация краевых задач, согласованная с классификацией, приведенной в первой главе:

- задана отсчетная геометрия, т.е. задано поле $\mathbf{d}(z; y^1, y^2)$.
- задана актуальная геометрия, т.е. заданы прогибы $w(t)$.
- задан двумерный тензор натяжения на растущих поверхностях, либо заданы уравнения для его определения.

В последнем случае приходим к системе уравнений относительно функций $w = w(y^1, y^2; t)$, $\mathbf{d} = \mathbf{d}(y^1, y^2; z)$, а именно

$$\begin{aligned}
D\nabla^2\nabla^2w &= q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h_-}^{h_+} \left[\left(z - \frac{h_+ - h_-}{2} \right) \nabla^2\nabla \cdot \mathbf{d} \right] dz - \frac{h_+ - h_-}{2} \nabla \cdot \mathbf{K}_\Pi, \\
(h_- + h_+) [\mu \nabla \mathbf{a} + (\lambda + \mu) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{a}] &- (\lambda + 2\mu) \frac{h_+^2 - h_-^2}{2} \nabla \nabla^2 w + \\
&+ \mathbf{K}_\Pi + \int_{-h_-}^{h_+} (\mu \nabla^2 \mathbf{d} + (\lambda + \mu) \nabla \otimes \nabla \cdot \mathbf{d}) dz = \mathbf{0}, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbf{f}_+ &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+|_{\Gamma_+} = \mathbf{g}_+, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_- + \mathbf{f}_- = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_-|_{\Gamma_-} = \mathbf{g}_-, \\
\boldsymbol{\sigma}_+ &= 2\mu \left(\mathbf{def} \mathbf{a} - h_+ \nabla \otimes \nabla w + \mathbf{def} \mathbf{d}|_{z=h_+} \right) + \lambda \mathbf{I} \left(\nabla \cdot \mathbf{a} - h_+ \nabla^2 w + \nabla \cdot \mathbf{d}|_{z=h_+} \right), \\
\boldsymbol{\sigma}_- &= 2\mu \left(\mathbf{def} \mathbf{a} + h_- \nabla \otimes \nabla w + \mathbf{def} \mathbf{d}|_{z=h_-} \right) + \lambda \mathbf{I} \left(\nabla \cdot \mathbf{a} + h_- \nabla^2 w + \nabla \cdot \mathbf{d}|_{z=h_-} \right).
\end{aligned}$$

Здесь заданными являются следующие объекты $h_+ = h_+(t)$, $h_- = h_-(t)$ — функции, определяющие движение границы роста, Γ_+ , Γ_- — границы присоединяемых материальных поверхностей (замкнутые кривые), $\mathbf{g}_+ = \mathbf{g}_+(t)$, $\mathbf{g}_- = \mathbf{g}_-(t)$ — линейная плотность сил, распределенных на них, $q = q(t)$ — поперечная нагрузка, $\mathbf{K}_\Pi = \mathbf{K}_\Pi(t)$ — нагрузка в плоскости осреднения.

В некоторых случаях более удобной оказывается формулировка краевой задачи в терминах скоростей:

$$\begin{aligned}
\dot{D}\nabla^2\nabla^2w + D\nabla^2\nabla^2\dot{w} &= \dot{q} + (\lambda + 2\mu) \left[\frac{h}{2} \left(\dot{h}_+ \nabla^2\nabla \cdot \mathbf{d}|_{z=h_+} - \dot{h}_- \nabla^2\nabla \cdot \mathbf{d}|_{z=-h_-} \right) - \right. \\
&- \left. \int_{-h_-}^{h_+} \left(\frac{\dot{h}_+ - \dot{h}_-}{2} \nabla^2\nabla \cdot \mathbf{d} \right) dz \right] - \frac{\dot{h}_+ - \dot{h}_-}{2} \nabla \cdot \dot{\mathbf{K}}_\Pi - \frac{h_+ - h_-}{2} \nabla \cdot \dot{\mathbf{K}}_\Pi, \quad \dot{D} = (\lambda + 2\mu) \frac{h^2 \dot{h}}{4}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Для ряда частных случаев наращивания уравнения движения существенно упрощаются. Если наращивание симметричное, т.е. $h_+ = h_- = h/2$, то уравнение (23) может быть записано в следующей форме

$$D\nabla^2\nabla^2w = q + (\lambda + 2\mu) \int_{-h/2}^{h/2} (\nabla^2\nabla \cdot \mathbf{d}) z dz. \tag{24}$$

Дифференцирование левой и правой части этого уравнения дает

$$\dot{D}\nabla^2\nabla^2w + D\nabla^2\nabla^2\dot{w} = \dot{q} + (\lambda + 2\mu) \frac{h\dot{h}}{4} \nabla^2\nabla \cdot (\mathbf{d}|_{z=h/2} - \mathbf{d}|_{z=-h/2}). \tag{25}$$

Если задан натяг, т.е. в каждый момент времени определены функции $\boldsymbol{\sigma}_+(y^1, y^2)$, $\boldsymbol{\sigma}_-(y^1, y^2)$, то дивергенция поля \mathbf{d} может быть выражена следующим образом

$$\nabla \cdot \mathbf{d}|_{z=h/2} = \frac{\mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}_+}{2(\lambda + \mu)} - \nabla \cdot \mathbf{a} + \frac{h}{2} \nabla^2 w, \quad \nabla \cdot \mathbf{d}|_{z=-h/2} = \frac{\mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma}_-}{2(\lambda + \mu)} - \nabla \cdot \mathbf{a} - \frac{h}{2} \nabla^2 w.$$

В результате приходим к уравнению симметричного наращивания в терминах скоростей

$$D\nabla^2\nabla^2\dot{w} = \dot{q} + \frac{\lambda + 2\mu}{8(\lambda + \mu)} h\dot{h} \nabla^2 \mathbf{I} : (\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-). \tag{26}$$

Следует отметить, что если натяжение присоединяемых поверхностей обеспечивать специальным образом: $\mathbf{I}:\boldsymbol{\sigma}_+ = -\mathbf{I}:\boldsymbol{\sigma}_- = -h/2\nabla w$, то уравнения равновесия приводятся к виду $(D\nabla^2\nabla^2 w)^\cdot = \dot{q}$. Если же присоединяемые слои свободны от напряжений, то

$$\mathbf{d}\Big|_{z=h/2} = \frac{h}{2}\nabla w, \quad \mathbf{d}\Big|_{z=-h/2} = -\frac{h}{2}\nabla w,$$

Окончательно приходим к уравнению равновесию для пластины, симметрично наращиваемой слоями, свободными от напряжений

$$D\nabla^2\nabla^2\dot{w} = \dot{q}. \quad (27)$$

Заметим, что уравнение (27) подобно классическому уравнению Софи-Жермен, если в нем осуществить формальную замену $w \rightarrow \dot{w}$, $q \rightarrow \dot{q}$.

В диссертационной работе получено обобщение полученных уравнений на случай наращиваемых по толщине оболочек. Эти уравнения в совокупности с краевыми условиями, задающими условия закрепления тонкостенных конструкций на опорном контуре, определяют математическую формулировку рассматриваемых задач.

В работе построены аналитические решения для ряда модельных задач квазистатики для растущих по толщине тонкостенных конструкций, в том числе

- задачи о неосесимметричном изгибе растущей по толщине круглой жестко заделанной пластины при переменной, в том числе подвижной нагрузке;
- задачи об изгибе растущей жестко заделанной прямоугольной пластины;
- задачи об изгибе растущей цилиндрической оболочки.

Отметим приемы, позволяющие построить эффективные модельные решения.

1. Если для круговой пластины выражение для скорости изменения поперечной нагрузки представляется многочленом по пространственным переменным, т.е. $\dot{q}(t) = \sum_{m,n=0}^N \dot{q}_{mn}(t) x^m y^n$, то аналитическое решение задачи (27), соответствующей симметричному наращиванию, может быть представлено в форме суммы $\dot{w} = \dot{w}^0 + \dot{w}^*$, где

$$\dot{w}^* = - \sum_{m,n=0}^N \frac{\dot{q}_{mn}(t)}{16D(t)} \sum_{\xi=-m}^n \frac{2^{-m-n} (x-iy)^{n-\xi} (x+iy)^{m+\xi} (x^2+y^2)^2 \psi(\xi, n, m)}{i^m (1+n-\xi) (2+n-\xi) (1+m+\xi) (2+m+\xi)}, \quad (28)$$

$$\psi(\xi, n, m) = \sum_{p=0}^m (-1)^{m-p} \binom{n}{p+\xi} \binom{m}{p}.$$

$$\begin{aligned} \dot{w}^0 = \sum_{n=0}^N \frac{1}{R^n} & \left((a_n (x+iy)^n + \bar{a}_n (x-iy)^n) \left(1 + \frac{n}{2} \left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2} \right) \right) + \right. \\ & \left. + (b_n (x+iy)^n + \bar{b}_n (x-iy)^n) \frac{R}{2} \left(\frac{x^2+y^2}{R^2} - 1 \right) \right), \end{aligned}$$

где a_n, b_n — коэффициенты разложения функции $\dot{w}^*(r, \varphi)$, и ее производной в комплексный ряд Фурье.

2. Конечная форма представления фундаментального решения для бигармонического оператора в круге (при краевых условиях, соответствующих жесткому закреплению) позволяет представить решение задачи (27) для правой части, соответствующей сосредоточенной силе, движущейся по растущей жестко заделанной пластине

радиусом a вдоль окружности радиусом $b < a$ со скоростью $\dot{\theta}$ в виде

$$\dot{w} = \frac{br\dot{\theta}}{8D(t)} \sin(\theta - \varphi) \left(\ln \frac{r^2 + b^2 - 2rb \cos(\varphi - \theta)}{a^2 + r^2 b^2 / a^2 - 2rb \cos(\varphi - \theta)} + \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - r^2)}{a^2 - 2a^2 br \cos(\varphi - \theta) + b^2 r^2} \right).$$

Соответственно, прогибы пластины определяются выражением $w(t) = w_0 + \int_0^t \dot{w}(\tau) d\tau$, где w_0 — прогиб в начальный момент наращивания.

3. Построение аналитического решения для жестко закрепленной прямоугольной пластины встречает известные трудности. Преодолеть их оказывается возможным с помощью процедуры построения базиса, ортогонального относительно специального соотношения ортогональности, обеспечивающего диагональность матрицы коэффициентов соответствующей системы Рунге. При этом решение задачи представляется в форме ряда, частичные суммы которого могут быть выписаны в замкнутой форме. По этой причине предлагаемое решение следует классифицировать как замкнутое.

Вводятся вспомогательные функции $\{\psi_k(x, y)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathfrak{D}$, образующие базис в $\mathfrak{L}_2(\Omega)$. По ним строится система функций $w_k(x, y)$ следующим образом:

$$w_k = \frac{1}{\sqrt{N_k N_{k-1}}} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{k1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1k-1} & b_{2k-1} & \cdots & b_{kk-1} \\ \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_k \end{vmatrix}, \quad N_k = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{k1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1k-1} & b_{2k-1} & \cdots & b_{kk-1} \\ b_{1k} & b_{2k} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix},$$

$b_{nm} = \langle w_n, w_m \rangle$, $N_{-1} = 1$. Выражение для $\dot{w}(x, y)$ может быть записано в виде ряда:

$$\dot{w}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{k1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(x, y) & \cdots & \psi_k(x, y) \end{vmatrix}}{\sqrt{N_k N_{k-1}}} \int_{\Omega} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{k1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_1(x', y') & \cdots & \psi_k(x', y') \end{vmatrix} \dot{q}(x', y') dx' dy'. \quad (29)$$

В качестве вспомогательного базиса предлагается использовать систему функций

$$\psi_k(x, y) = \phi_m \left(\frac{x}{a} \right) \phi_n \left(\frac{y}{b} \right) \quad \left(m, n = 1, \dots, \infty, \quad k = \frac{(m+n-1)^2 + m - n - 1}{2} \right),$$

где $\phi_n(t)$ — счетное множество решений двухточечной краевой задачи

$$\frac{d^4}{dt^4} \phi_n + \lambda_n^4 \phi_n = 0, \quad \phi(0) = \phi(1) = \phi'(0) = \phi'(1) = 0.$$

В работе сформулированы уравнения движения растущих по толщине пластин и построены аналитические решения для ряда модельных задач динамики для растущих по толщине тонкостенных конструкций, в том числе

- задачи о вынужденных колебаниях растущей по толщине круглой жестко заземленной пластины;
- задачи о вынужденных колебаниях растущей по толщине эллиптической жестко заземленной пластины;
- задачи о вынужденных колебаниях растущей по толщине прямоугольной жестко заземленной пластины.

- задачи о вынужденных колебаниях растущей по толщине закрепленной на торцах цилиндрической оболочки.

Уравнения движения в общем случае имеют вид $L_t[\mathbf{u}] + a(t)\ddot{\mathbf{u}} + b(t)\dot{\mathbf{u}} + c(t)\mathbf{u} = \mathbf{f}(t)$, где $L_t[\dots]$ – дифференциальный оператор, коэффициенты которого, вообще говоря, зависят от времени. Однако в ряде случаев эту зависимость можно представить как произведение некоторого зависящего от времени множителя на дифференциальный оператор, коэффициенты которого не зависят от времени. Для растущих пластин, деформация которых рассматривается в рамках кинематических гипотез Кирхгофа-Лява, это – бигармонический оператор. В этом случае замкнутое решение удается получить в форме разложения по его собственным функциям. Ниже это показано на примере круглой пластины.

Предположим, что $b(t) = c(t) = 0$. В безразмерных переменных соответствующая начально-краевая задача формулируется следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{h}^2(\tilde{t})\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2\partial_{\tilde{t}}\tilde{w} + \partial_{\tilde{t}}^3\tilde{w} &= \tilde{q}, & \tilde{w}\Big|_{\tilde{r}=1} &= \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{r}}\Big|_{\tilde{r}=1} = 0, \\ \tilde{w}\Big|_{\tilde{t}=0} &= \tilde{w}_0, & \partial_{\tilde{t}}\tilde{w}\Big|_{\tilde{t}=0} &= \tilde{v}_0, & \partial_{\tilde{t}}^2\tilde{w}\Big|_{\tilde{t}=0} &= \tilde{a}_0, \end{aligned} \quad (30)$$

где $\tilde{h} = h(t)/(R\sqrt{12(1-\nu^2)})$ – безразмерная переменная толщина, $\tilde{q} = R^2/h\sqrt{\rho/E^3}\dot{q}$ – безразмерная скорость изменения поперечной динамической нагрузки, $\tilde{w}_0 = \tilde{w}_0(\tilde{\mathbf{r}})$, $\tilde{v}_0 = \tilde{v}_0(\tilde{\mathbf{r}})$, $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_0(\tilde{\mathbf{r}})$ – безразмерные начальные перемещения, скорости и ускорения. Решение начально-краевой задачи (30) представляется в форме разложения

$$\tilde{w}(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}(\tilde{\mathbf{r}})b_{nm}(\tilde{t}), \quad (31)$$

где $a_{nm} = a_{nm}(\mathbf{r})$ – собственные функции оператора $\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2$, т.е. нетривиальные решения следующей задачи Штурма-Лиувилля

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2 a_{nm} = \lambda_{nm}^4 a_{nm}, \quad a_{nm}\Big|_{\tilde{r}=1} = \frac{\partial a_{nm}}{\partial\tilde{r}}\Big|_{\tilde{r}=1} = 0. \quad (32)$$

Решения дифференциального уравнения (32) образуют два семейства, первому из них принадлежат четные по переменной φ функции a_{nm}^e , а второму – нечетные a_{nm}^o :

$$a_{nm}^e = [c_1 J_n(\lambda\tilde{r}) + c_2 I_n(\lambda\tilde{r})] \cos n\varphi, \quad a_{nm}^o = [c_1 J_n(\lambda\tilde{r}) + c_2 I_n(\lambda\tilde{r})] \sin n\varphi.$$

Здесь c_1, c_2 – произвольные постоянные, $J_n(z)$ – функции Бесселя первого рода порядка n , $I_n(z)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода порядка n .

Собственные значения λ_{nm} задачи (32) определяются из уравнения

$$\lambda (I_n(\lambda)J_{n+1}(\lambda) + I_{n+1}(\lambda)J_n(\lambda)) = 0.$$

Собственные функции a_{nm} могут быть представлены в виде:

$$a_{nm} = c_{nm} [J_n(\lambda_{nm}\tilde{r})I_n(\lambda_{nm}) - I_n(\lambda_{nm}\tilde{r})J_n(\lambda_{nm})] \begin{cases} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{cases},$$

где c_{nm} – постоянные, которые выбираются таким образом, что бы квадрат нормы собственных функций был равен единице.

Для определения координатных функций $b_{nm}(\tilde{t})$ осуществим ортогональное проекирование левых и правых частей уравнения (30) и начальных условий на собственные подпространства бигармонического оператора. В результате получим последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка и последовательность начальных условий (далее будем использовать штрих для обозначения производной по переменной \tilde{t})

$$\tilde{h}^2(\tilde{t})\lambda_{nm}^4 b'_{nm} + b'''_{nm} = \Phi_{nm}, \quad b_{nm}\Big|_{\tilde{t}=0} = \Psi_{nm}^0, \quad b'_{nm}\Big|_{\tilde{t}=0} = \Psi_{nm}^1, \quad b''_{nm}\Big|_{\tilde{t}=0} = \Psi_{nm}^2. \quad (33)$$

где Φ_{nm} — коэффициенты разложения правой части уравнения (30) по базису a_{nm} :

$$\Phi_{nm} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} a_{nm}(\tilde{r}, \varphi) \tilde{q}(\tilde{r}, \varphi, \tilde{t}) \tilde{r} d\tilde{r} d\varphi,$$

а $\Psi_{nm}^0, \Psi_{nm}^1, \Psi_{nm}^2$ — коэффициенты разложения функций, определяющих начальные данные задачи.

В виду ортогональности системы функций $a_{nm}(\tilde{r})$ проекции представляют собой последовательность несвязанных задач Коши. Их решения определяют координатные функции $b_{nm}(\tilde{t})$. Таким образом, все компоненты представления (31) определены. Отметим, что дифференциальные уравнения (33) имеют третий порядок, а коэффициент при первой производной является, вообще говоря, произвольно заданной функцией переменной \tilde{t} . В этой связи решения $b_{nm}(\tilde{t})$, в отличие от классических задач динамической теории упругих пластин, не являются периодическими. В общем случае аналитическое решение задачи Коши (33) найти не удастся, но для частных видов функции $\tilde{h}(\tilde{t})$ такие решения могут быть выражены через известные специальные функции.

Пусть скорость роста пластины постоянна, т.е. $h(t) = \alpha + \beta t$. Параметр α задает начальную толщину пластины, а параметр β — скорость изменения ее толщины, вызванную присоединением нового материала. Безразмерная толщина $\tilde{h}(\tilde{t})$ определяется безразмерными начальной толщиной $\tilde{\alpha}$ и скоростью $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{h}(\tilde{t}) = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\tilde{t}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \quad \tilde{\beta} = \beta\sqrt{\frac{\rho}{12E(1-\nu^2)}}.$$

Решение дифференциального уравнения (33) может быть записано в виде

$$b_{nm}(\tilde{t}) = \int_0^{\tilde{t}} \left\{ d_{nm}\omega_{nm}(\tau) + g_{nm}\xi_{nm}(\tau) + \int_0^{\tau} \frac{\xi_{nm}(\tau)\omega_{nm}(\sigma) - \omega_{nm}(\tau)\xi_{nm}(\sigma)}{\omega_{nm}(\sigma)\xi'_{nm}(\sigma) - \xi_{nm}(\sigma)\omega'_{nm}(\sigma)} \Phi(\sigma) d\sigma \right\} d\tau + f_{nm},$$

$$\omega_{nm}(\tilde{t}) = y_1 \left(\lambda_{nm} \left[\tilde{\alpha}/\sqrt{\tilde{\beta}} + \sqrt{\tilde{\beta}\tilde{t}} \right] \right), \quad \xi_{nm}(\tilde{t}) = y_2 \left(\lambda_{nm} \left[\tilde{\alpha}/\sqrt{\tilde{\beta}} + \sqrt{\tilde{\beta}\tilde{t}} \right] \right).$$

Здесь f_{nm}, d_{nm}, g_{nm} — постоянные, определяемые начальными условиями, $y_1(\zeta), y_2(\zeta)$ — линейно независимые решения однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{d\zeta^2} + \zeta^2 y = 0, \quad (34)$$

которые могут быть представлены в виде

$$y_1(\zeta) = \sqrt{2} \Gamma(5/4) \sqrt{\zeta} J_{1/4} \left(\frac{\zeta^2}{2} \right), \quad y_2(\zeta) = \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{2}} \sqrt{\zeta} J_{-1/4} \left(\frac{\zeta^2}{2} \right). \quad (35)$$

Решения (35) нормированы таким образом, что в окрестности нуля они подобны функциям $\sin(\zeta)$, $\cos(\zeta)$, т.е. координатным функциям для пластин постоянного состава. Важно отметить, что производные и первообразные этих функций вычисляются в замкнутом виде. Это позволяет представить координатные функции $b_{nm}(\tilde{t})$ аналитически.

Постоянные d_{nm} , g_{nm} определяются по заданным начальным скоростям и ускорениям, т.е. из решения следующей системы уравнений

$$d_{nm} \omega_{nm}(0) + g_{nm} \xi_{nm}(0) = \Psi_{nm}^1, \quad [d_{nm} \omega'_{nm} + g_{nm} \xi'_{nm}]|_{\tilde{t}=0} = \Psi_{nm}^2, \quad (36)$$

которое может быть представлено в виде

$$d_{nm} = \frac{\pi}{\Gamma(1/4)} \left(\zeta^{3/2} J_{3/4}(\zeta^2/2) \Psi_{nm}^1 + \zeta^{1/2} J_{-1/4}(\zeta^2/2) \frac{\Psi_{nm}^2}{\lambda_{nm} \tilde{\beta}^{1/2}} \right) \Big|_{\zeta=\lambda_{nm} \tilde{\alpha} / \sqrt{\tilde{\beta}}},$$

$$g_{nm} = \frac{2\pi}{\Gamma(-1/4)} \left(\zeta^{3/2} J_{-3/4}(\zeta^2/2) \Psi_{nm}^1 - \zeta^{1/2} J_{1/4}(\zeta^2/2) \frac{\Psi_{nm}^2}{\lambda_{nm} \tilde{\beta}^{1/2}} \right) \Big|_{\zeta=\lambda_{nm} \tilde{\alpha} / \sqrt{\tilde{\beta}}}.$$

Постоянные f_{nm}^1 определяются по заданным начальным перемещениям $f_{nm}^1 = \Psi_{nm}^0$.

Решения начально-краевых задач для растущих жестко закрепленных эллиптической и прямоугольной пластин построены по той же схеме. Собственные функции бигармонического оператора для эллиптической области выражаются через обычные и модифицированные функции Матьё, а собственные функции бигармонического оператора в прямоугольной области находятся методом Релея-Ритца.

Построено решение динамической задачи для цилиндрической оболочки. В этом случае оператор $L_t[\dots]$ параметрически зависит от времени t более сложным образом, чем в задачах динамики пластин. Разложение ведется по собственным функциям, параметрически зависящим от времени. В результате начально-краевая задача сводится к бесконечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих в совокупности с начальными данными задачу Коши, которая решается методом усечения. На основе построенных решений реализованы вычислительные алгоритмы и произведен численный анализ различных режимов наращивания. В частности, показана возможность создания предписанного поля остаточных напряжений за счет выбора специального сценария наращивания. На основании полученных расчетных соотношений разработана экспериментальная методика идентификации моделей растущих тел.

ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

- 1 Дано определение растущего гладкого тела как расслоения гладкого многообразия. Осуществлена классификация способов наращивания, основанная на геометрической структуре расслоения. Предложен способ построения глобальной натуральной конфигурации растущего тела, погружаемый в пространство Картана, кручение связности которого определяется структурой расслоения и сценарием наращивания и построена полная система уравнений механики растущих тел при наращивании трехмерного тела двумерными поверхностями при конечных деформациях. В отличие от задач для тел постоянного состава эти уравнения содержат тензорное поле дисторсии, которое может быть найдено из дополнительных условий. В общем случае в качестве таких условий используются уравнения равновесия границы роста, которая рассматривается как деформируемая материальная поверхность, контактирующая с деформируемым трехмерным телом. Растущее тело, вообще говоря, не имеет естественной (свободной от напряжений) конфигурации в трехмерном евклидовом пространстве, однако таковая имеется на некотором трехмерном многообразии с неевклидовой аффинной связностью. Неевклидовость проявляется в отличии от нуля тензора кручения, который является мерой несовместности деформаций растущего тела. С этих позиций математическое описание напряженно-деформированного состояния растущего тела эквивалентно моделям тел с непрерывным распределением дислокаций.
- 2 Получены новые универсальные решения для растущих тел. Решения краевых задач для упругого потенциала Муни–Ривлина доведены до численных результатов. Наряду с непрерывным наращиванием рассмотрено дискретное наращивание. Показана сходимость решений задач для дискретного наращивания к решениям соответствующих задач для непрерывного наращивания при увеличении количества слоев и уменьшении их толщины.
- 3 Разработан метод построения замкнутых решений в форме биортогональных разложений по собственным и присоединенным функциям пучков несамосопряженных операторов и получены замкнутые решения связанных задач термоупругости для тел канонической формы в приближении малых деформаций. Для оценки влияния связности температурного и механических полей построены специальные замкнутые решения модельных задач. Исследована степень взаимного влияния температурного и механического полей в зависимости от размеров рассматриваемого тела. Показано, что для тел микронных размеров температурные волны, образующиеся вследствие взаимовлияния теплового и механического полей, наиболее выражены. Сформулирован итерационный алгоритм определения напряженно-деформированного состояния и распределения температур в наращиваемом термоупругом теле.
- 4 Сформулированы новые вариационные принципы конволютивного типа для растущих упругих и термоупругих тел. На основе вариационных принципов сформулированы алгоритмические процедуры, позволяющие находить механические и температурные поля для слабо неоднородных тел.
- 5 Построены новые уравнения статики и динамики тонкостенных наращиваемых конструкций. Осуществлена классификация соответствующих краевых задач. Построены аналитические и численно-аналитические решения начально-краевых задач для растущих пластин и оболочек канонической формы. Показана возмож-

ность управления полем остаточных напряжений за счет подбора специального сценария наращивания. Это позволяет осуществлять “механическое программирование”, что может быть полезным при создании “smart”-материалов. На основании полученных расчетных соотношений разработана экспериментальная методика идентификации моделей растущих тел.

Публикации по теме диссертации

1. Сеницкий Ю.Э., Лычёв С.А. Расчет тонкостенных железобетонных конструкций на локальные динамические воздействия // Изв. вузов. Строительство, 1995, №3. С. 3–8.
2. Сеницкий Ю.Э., Лычёв С.А. Определение нормы ядер конечных интегральных преобразований и их приложения // Изв. вузов. Математика, 1999. №8. С. 60–69.
3. Лычёв С.А., Сидоров Ю.А. Нестационарные колебания трехслойных сферических оболочек с кратным спектром // Изв. вузов. Строительство. 2001. №4. С. 31–39.
4. Лычёв С.А., Сеницкий Ю.Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2002. Специальный выпуск. С. 16–38.
5. Лычёв С.А. Нестационарные колебания стареющего вязкоупругого стержня // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. Специальный выпуск. С. 95–119.
6. Лычёв С.А. Связанная динамическая задача для конечного цилиндра // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №4(30). С.112–124.
7. Федяев И.М., Никольский В.Ю., Лычёв С.А. Двухзубцовые (П-образные) дентальные имплантаты и доклиническое обоснование их применения // Стоматология №2004. С.45–49.
8. Лычёв С.А., Сайфутдинов Ю.Н. Уравнения движения трехслойной вязкоупругой сферической оболочки // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2005. №6. С.70–88.
9. Лычёв С.А., Салеев С.В. Замкнутое решение задач об изгибе жестко закрепленной прямоугольной пластины // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2006. №2. С.62–73.
10. Лычёв С.А., Сайфутдинов Ю.Н. Динамика трехслойной непологой сферической оболочки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. №2. С. 55–90.
11. Лычёв С.А. Законы сохранения консервативной микроморфной термоупругости // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2007. №4. С. 225–262.
12. Лычёв С.А., Семенов Д.А. Законы сохранения в недиссипативной термомеханике // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2008. №2. С. 183–217.
13. Лычёв С.А. Связанная динамическая задача термовязкоупругости // Известия РАН. МТТ. 2008. №5. С. 95–113.
14. Жигалин А.Г., Лычёв С.А. Замкнутые решения динамических задач связанной термоупругости для цилиндра и шара // Вычислительная механика сплошных сред. 2011. Т. 4, №2. С. 17–34.
15. Лычёв С.А., Манжиров А.В., Юбер С.В. Замкнутые решения краевых задач связанной термоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2010. №4. С.138–154.
16. Лычёв С.А., Лычёва Т.Н., Манжиров А.В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Изв. РАН. МТТ. 2011. №2. С. 199–208.

17. Лычёв С.А. Деформирование растущих упругих пластин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, №4 (4). С. 1588–1590.
18. Лычёв С.А. Универсальные деформации растущих тел // Изв. РАН. МТТ. 2011. №6. С. 63–79.
19. Манжиров А.В., Лычёв С.А. Математическая теория растущих тел при конечных деформациях // Доклады РАН. Т. 443. №4 (в печати).
20. Lychev S.A. Finite deformations of accreted elastic globe. Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды II между-народной конференции. 4-8 октября, Дилижан, Армения. Том 1. Ер.: ЕГУАС, 2010. С. 301–306.
21. Сеницкий Ю.Э., Лычёв С.А. Динамика трехслойных сферических оболочек несимметричной структуры // Труды XVIII международной конференции по теории оболочек и пластин. Саратов, 1997, Т. 1. С. 47–52.
22. Lychev S.A. Coupled dynamics thermoviscoelastic problem // Journal Prace IPPT - IFTP Reports. 2008. Vol. 2. (Proceeding 36th Solid Mechanics Conference. Gdansk(Poland). 9–12 September 2008.)
23. Kovalev V., Lychev S. Nonsymmetric finite integral transformations and their application in thermoviscoelasticity // Proceedings MATHMOD 09 Vienna. ARGESIM Reports No 35. Vienna, 2009. P. 2604–2607.
24. Kovalev V.A., Lychev S.A. Nonstationary vibrations of 3-layered thermoviscoelastic thin-walled structures // Proceedings of the XXXVII Summer School-Conference APM2009. St.Petersburg, 2009. P. 380–388.
25. Лычёв С.А. Теоретическое и экспериментальное определение прогибов растущих пластин // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIII Междунар. конф. - Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, - 2009. - Т.1. С.137–141.
26. Lychev S.A., Manzhiriv A.V. Differential operators associated with the equations of motion and nondissipative heat conduction in the Green-Naghdi theory of thermoelasticity // 2009 J. Phys.: Conf. Ser. 181 012096 (8pp) doi: 10.1088/1742-6596/181/1/012096
27. Manzhiriv A.V., Lychev S.A. Mathematical modeling of growth processes in nature and engineering: A variational approach // 2009 J. Phys.: Conf. Ser. 181 012018 (8pp) doi: 10.1088/1742-6596/181/1/012018
28. Манжиров А.В., Лычёв С.А., Гупта Н.К. Конволютивные вариационные принципы и их приложения в механике сплошных сред. // В кн. Успехи механики сплошных сред: к 70-летию академика В.А. Левина: сб. науч. тр. - Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 506–524.
29. Lychev S.A., Levitin A.L. Stress strain state of an accreted hyperelastic hoop. Numerical approach // Book of Abstracts of the 37th Solid Mechanics Conference. Warsaw, Poland, September 6–10. 2010.
30. Lychev S.A., Manzhiriv A.V. Residual Stresses in Growing Bodies. In “Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics.” Eds A.V. Manzhiriv, N.K. Gupta, D.A. Indeitsev. Delhi: Elit Publ. House Pvt Ltd. 2011. P. 66–79.
31. Manzhiriv A.V., Lychev S.A. On the Equilibrium of Accreted Plates. In “Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics.” Eds A.V. Manzhiriv, N.K. Gupta, D.A. Indeitsev. Delhi: Elit Publ. House Pvt Ltd. 2011. P. 294–300.
32. Лычев С.А. Конечные деформации растущего упругого шара. Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV Международной конференции, гг. Ростов-на-Дону, Азов, 19-24 июня 2010 г. Т. 2. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2010. С. 207–212.