Абсолютные объекты Андерсона и постоянный времениподобный вектор, скрытый в матрицах Дирака

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, 117526, Москва, пр. Вернадского 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site: *http://194.190.131.172/~rylov/yrylov.htm*

Аннотация

Теорема Андерсона, что симметрия динамических уравнений, записанных в релятивистски ковариантной форме, определяется симметрией ее абсолютных объектов, применяется к уравнению Дирака для свободной частицы. Есть два способа преобразования γ-матриц: (1) γ^i есть 4-вектор, а ψ является скаляром, (2) γ^i являются скалярами, а ψ есть спинор. В первом случае уравнение Дирака является нерелятивистским, во втором – оно релятивистское. Уравнение Дирака преобразуется к скалярно-векторным переменным и показывается, что правильным является первый способ преобразования и что уравнение Дирака не является полностью релятивистским.

Ключевые слова: абсолютный объект, релятивистская ковариантность, уравнение Дирака

1 Введение

Релятивистская ковариантность и ее роль в релятивистской физике интенсивно обсуждалась шестидесятых годах XX века. Кажется, что сейчас все проблемы описания релятивистских динамических систем обсуждены и решены. К сожалению, это не совсм так. Некоторые проблемы остаются. В частности, имеется проблема, связанная с применением так называемых абсолютных объектов.

Понятие абсолютного объекта, по-видимому, было введено Дж.Л. Андерсоном [1], который разделил все объекты, связанные динамическими системами на два сорта: динамические объекты и абсолютные объекты.

Динамические объекты (переменные) суть такие объекты, которые различны для разных решений динамических уравнений. Абсолютный объект – это такой объект, который остается одним и тем же для всех решений динамических уравнений [1].

Рассмотрим, например, систему уравнений Максвелла, описывающую тензор электромагнитного поля F^{ik}, порожденного заданным 4-током J^i.

$$\partial_k F^{ik} = 4\pi J^i, \qquad \varepsilon_{iklm} g^{jm} \partial_j F^{kl} = 0, \qquad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{1.1}$$

4-ток рассматривается как заданная функция $J^i = J^i(x)$ координат x инерциальной координатной системы K. Здесь тензор электромагнитного поля F^{ik} есть динамический объект. Псевдотензор Леви-Чивита ε_{iklm}, метрический тензор g^{jm} и внешний 4-ток $J^i(x)$ являются абсолютными объектами, потому что они одни и те же для всех решений динамических уравнений (1.1).

Если метрический тензор g^{ik} рассматривать как решение уравнений тяготения (а не как фиксированную величину), метрический тензор перестает быть абсолютным объектом и становится динамическим объектом. Аналогично, если 4-ток J^i определяется заряженными частицами, движение которых описывается некоторыми динамическим уравнениями, то J^i становится динамическим объектом.

Принято думать, что если динамические уравнения системы могут быть записаны в релятивистски ковариантной форме, то такая возможность автоматически делает релятивистской динамическую систему, описываемую этими уравнениями. Вообще говоря, это верно только в том случае, когда динамические уравнения не содержат абсолютных объектов, или эти абсолютные объекты имеют группу Пуанкаре в качестве своей группы симметрии [1]. Более точно, Андерсон показал, что группа симметрии системы динамических уравнений, записанных в релятивистски ковариантной форме, совпадает с группой симметрии всех абсолютных объектов этой системы.

Наибольший интерес представляет постоянный единичный вектор l_k, $k = 0, 1, 2, 3$

$$g^{ik} l_i l_k = 1, \qquad l_k = \text{const}. \tag{1.2}$$

Такой вектор должен интерпретироваться как вектор, описывающий выделенное направление в пространстве-времени. Существование выделенного направления в пространстве-времени несовместимо с принципами теории относительнсти.

Рассмотрим уравнения

$$m\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = eF^{\alpha}_{.0} + eF^{\alpha}_{.\beta}\frac{dx^\beta}{dt}, \qquad \alpha = 1, 2, 3; \tag{1.3}$$

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\alpha}{dt}\right) = eF^{\alpha}_{.0}\frac{dx^\alpha}{dt},$$

описывающие движение нерелятивистской частицы с массой m и зарядом e в заданном электромагнитном поле F^{ik}. Уравнения (1.3) записаны в нековариантной форме и несовместимы с принципами теории относительности. Введя постоянный единичный вектор l_k, можно записать четыре уравнения (1.3) в релятивистски ковариантной форме

$$m\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\dot{x}^i}{l_k\dot{x}^k}-\frac{1}{2}g^{ik}l_k\frac{\dot{x}^s g_{sl}\dot{x}^l}{(l_j\dot{x}^j)^2}\right]=eF^{il}g_{lk}\dot{x}^k;\qquad i=0,1,2,3 \tag{1.4}$$

$$\dot{x}^k\equiv\frac{dx^k}{d\tau},\qquad g_{ik}=\mathrm{diag}\left\{1,-1,-1,-1\right\}$$

где τ есть параметр вдоль мировой линии $x^l=x^l(\tau)$, $\ i=0,1,2,3$ частицы и F^{il} есть некоторая фиксированная функция координат x.

Уравнение (1.4) релятивистски ковариантно относительно векторов x^i, l_i, и тензоров F^{ik}, g_{ik}. Ссылка на величины x^i, l_i, F^{ik}, g_{ik} означает, что они рассматриваются как формальные переменные (а не как функции координат x).

Преобразуя величины x^i, l_i, F^{ik}, g_{ik} от системы координат K к системе координат $\tilde{K}$

$$x^i\to\tilde{x}^i=x^i+\omega^i_{.k}x^k+o(\omega)\,,\qquad l_i\to\tilde{l}_i=\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}l_k \tag{1.5}$$

$$F^{ik}\to\tilde{F}^{ik}=\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^m}F^{lm}\qquad g^{ik}\to\tilde{g}^{ik}=\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^l}\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^m}g^{lm}=g^{ik}, \tag{1.6}$$

получаем вместо (1.4)

$$m\frac{d}{d\tau}\left[\left(\tilde{l}_k\frac{d\tilde{x}^k}{d\tau}\right)^{-1}\frac{d\tilde{x}^i}{d\tau}-\frac{1}{2}g^{ik}\tilde{l}_k\left(\tilde{l}_j\frac{d\tilde{x}^j}{d\tau}\right)^{-2}g_{sl}\frac{d\tilde{x}^s}{d\tau}\frac{d\tilde{x}^l}{d\tau}\right]=e\tilde{F}^{il}g_{lk}\frac{d\tilde{x}^k}{d\tau} \tag{1.7}$$

Уравнения (1.4) и (1.7) имеют одинаковый вид при условии, что величины x^i, l_i, F^{ik} рассматриваются как формальные переменные. Например, если электромагнитное поле F^{ik} рассматривается, как функция координат x, (а не как формальная переменная) т.е. $F^{ik}=F^{ik}(x)$, то $F^{ik}(x)$ и $\tilde{F}^{ik}(\tilde{x})$ суть различные функции соответственно x и $\tilde{x}$. В этом случае уравнения (1.4) и (1.7) имеют различный вид, потому что правые части равенств суть различные функции соответственно от x и $\tilde{x}$. В этом случае можно сказать, что уравнение (1.4) не является релятивистски ковариантным относительно величин x^i, l_i, (теперь нет ссылки на переменные F^{ik}, и они рассматриваются как функции x).

Таким образом, уравнение (1.4) релятивистски ковариантно относительно величин x^i, l_i, F^{ik}. Тем не менее оно несовместимо с принципами теории относительности. Причина этой несовместимости – существование постоянного времениподобного единичного вектора l_k. Этот вектор описывает выделенное направление в пространстве-времени. Любая 3-плоскость, ортогональная к l_k, может рассматриваться как множество одновременных событий. Если выбрать систему координат таким образом, чтобы вектор l_k имел вид $l_k = \{1, 0, 0, 0\}$, $t = x^0 = \tau$, то уравнение (1.4) принимает вид (1.3).

Итак, нерелятивистский характер уравнения может описываться или нековариантной формой уравнения, или путем введения абсолютного объекта l_k, чья группа симметрии является подгруппой Лоренца и не совпадает с группой Лоренца. Если система динамических уравнений записывается в релятивистски ковариантной форме и содержит постоянный времениподобный вектор l_k, то этот вектор описывает расщепление пространства-времени на пространство и время, и система динамических уравнений несовместима с принципами теории относительности.

2 Уравнение Дирака для свободной частицы

Пусть $\mathcal{S}_\mathrm{D}$ есть динамическая система, описывемая свободным уравнением Дирака.

$$i\hbar\gamma^l\partial_l\psi - m\psi = 0 \tag{2.1}$$

которое может быть получено из вариационного принципа

$$\mathcal{S}_\mathrm{D}: \qquad \mathcal{A}_\mathrm{D}[\bar\psi, \psi] = \int(-m\bar\psi\psi + \frac{i}{2}\hbar\bar\psi\gamma^l\partial_l\psi - \frac{i}{2}\hbar\partial_l\bar\psi\gamma^l\psi)d^4x \tag{2.2}$$

Здесь ψ есть четырехкомпонентная комплексная волновая функция и ψ^* есть эрмитово сопряженная к ней волновая функция. γ^i, $i = 0, 1, 2, 3$ суть 4×4 постоянные комплексные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma^l\gamma^k + \gamma^k\gamma^l = 2g^{kl}I, \qquad k, l = 0, 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

где I есть единичная 4×4 матрица. Скорость света выбрана $c = 1$. Величины γ^l образуют абсолютный объект, потому что они одинаковы для всех решений уравнения Дирака (2.1).

Существуют два подхода к уравнению Дирака. В первом подходе [2, 3] волновая функция ψ рассматривается как скалярная функция, определенная над полем клиффордовых чисел γ^l,

$$\psi = \psi(x, \gamma)\Gamma, \qquad \overline{\psi} = \Gamma\overline{\psi}(x, \gamma), \tag{2.4}$$

где Γ есть постоянный нильпотентный множитель, который обладает тем свойством, что $\Gamma f(\gamma)\Gamma = a\Gamma$. Здесь $f(\gamma)$ есть произвольная функция от γ^l и a есть комплексное число, зависящее от вида функции f. При этом при преобразовании Лоренца ψ, $\bar\psi$ преобразуются как скаляры, а γ^l преобразуются как компоненты 4-вектора. В этом случае группа симметрии γ^l есть подгруппа группы Лоренца, и $\mathcal{S}_\mathrm{D}$ есть нерелятивистская динамическая система. Тогда матричный вектор γ^l описывает некоторое выделенное направление в пространстве-времени.

При втором (традиционном) подходе [4] ψ рассматривается как спинор, а $\gamma^l, \quad l=0,1,2,3$ суть скаляры по отношению к преобразованиям группы Лоренца. В этом случае группа симметрии абсолютных объектов γ^l есть группа Лоренца, и динамическая система $\mathcal{S}_{\rm D}$ рассматривается как релятивистская динамическая система.

Разумеется подходы, приводящие к несовместимым заключениям не могут быть оба правильными. По крайней мере, один из них ошибочен. Анализируя эти два подхода, А. Зоммерфельд [3] рассматривал первый подход как более обоснованный. Во втором случае анализ довольно труден из-за нестандартного преобразования γ^l и ψ при линейных координатных преобразованиях T. В самом деле, преобразование T для вектора $j^l=\bar{\psi}\gamma^l\psi$ имеет вид

$$\tilde{\bar{\psi}}\tilde{\gamma}^l\tilde{\psi}=\frac{\partial\tilde{x}^l}{\partial x^s}\bar{\psi}\gamma^s\psi, \tag{2.5}$$

где величины помеченные знаком тильды означают величины в преобразованной системе координат. Это преобразование может осуществляться двумя различными путями

$$1: \quad \tilde{\psi}=\psi, \qquad \tilde{\overline{\psi}}=\overline{\psi}, \qquad \tilde{\gamma}^l=\frac{\partial\tilde{x}^l}{\partial x^s}\gamma^s, \qquad l=0,1,2,3 \tag{2.6}$$

$$2: \quad \tilde{\gamma}^l=\gamma^l, \qquad l=0,1,2,3, \qquad \tilde{\psi}=S(\gamma,T)\psi, \qquad \tilde{\overline{\psi}}=\overline{\psi}S^{-1}(\gamma,T), \tag{2.7}$$

$$S^*(\gamma,T)\gamma^0=\gamma^0S^{-1}(\gamma,T) \tag{2.8}$$

Соотношения (2.6) соответствуют первому способу, а соотношения (2.7) – второму. Оба способа (2.6) и (2.7) ведут к одному и тому же результату, при условии, что

$$S^{-1}(\gamma,T)\gamma^lS(\gamma,T)=\frac{\partial\tilde{x}^l}{\partial x^s}\gamma^s \tag{2.9}$$

В частности для бесконечно малых преобразований Лоренца

$$x^i\to x^i+\delta\omega^i_{.k}x^k$$

$S(\gamma,T)$ имеет вид [4]

$$S(\gamma,T)=\exp\left(\frac{\delta\omega_{ik}}{8}\left(\gamma^i\gamma^k-\gamma^k\gamma^i\right)\right) \tag{2.10}$$

Второй способ (2.7) имеет дефект. Закон преобразования волновой функции ψ зависит от γ, т.е. при линейном преобразовании T компоненты волновой функции ψ преобразуются через ψ и γ^l, а не только через ψ. Заметим, что компоненты тензора в координатной системе преобразуются только через компоненты тензора в другой системе координат, и это преобразование не содержит каких-либо абсолютных объектов (например, соотношение (2.5)).

Тот факт, что группа симметрии динамической системы совпадает с группой симметрии абсолютных объектов был получен при предположении, что при

при преобразовании координат любой объект преобразуется только через его компоненты. Это условие нарушается во втором случае, и нельзя быть уверенным, что группа симметрии динамической системы совпадает с группой симметрии абсолютных объектов.

3 Случай двумерного пространства-времени

Чтобы определить, какой из этих двух подходов правильный, рассмотрим такое преобразование зависимых переменных ψ, которое исключает γ-матрицы. Сначала мы рассмотрим более простой случай двумерного пространства-времени. Пусть

$$\psi_{\mathrm{D}} = \binom{\psi_+}{\psi_-}, \qquad \bar{\psi}_{\mathrm{D}} = \psi_{\mathrm{D}}^* \gamma^0, \qquad \psi_{\mathrm{D}}^* = (\psi_+^*, \psi_-^*) \tag{3.1}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Представление (3.2) γ-матриц выбрано в таком виде, чтобы псевдоскалярная матрица $\gamma^0\gamma^1$ была диагональной, и компоненты волновой функции $\psi_{\mathrm{D}} = \binom{\psi_+}{0}$, $\psi_{\mathrm{D}} = \binom{0}{\psi_-}$ были собственными функциями для любого выбора ψ_+, ψ_-. В этом случае в силу (3.1) уравнение Дирака

$$i\hbar\gamma^l \partial_l \psi_{\mathrm{D}} - m\psi_{\mathrm{D}} = 0 \tag{3.3}$$

принимает вид

$$\psi_+ = i\lambda\partial_+\psi_-, \qquad \psi_- = i\lambda\partial_-\psi_+, \tag{3.4}$$

$$\lambda \equiv \hbar/m, \qquad \partial_\pm \equiv \partial_0 \pm \partial_1 \tag{3.5}$$

Из уравнения (3.4) следует, что обе волновые функции $\psi_\pm$ удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона для свободной частицы

$$\lambda^2 \partial_l \partial^l \psi_\pm + \psi_\pm = 0 \tag{3.6}$$

Введем двухкомпонентный дифференциальный оператор

$$\hat{\mathcal{L}}(w, \partial, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{w_+} + i\lambda\sqrt{w_-}\partial_+ \\ \sqrt{w_-} + i\lambda\sqrt{w_+}\partial_- \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

где $w_l = (w_0, w_1)$ есть постоянный времениподобны вектор и

$$w_+ = w_0 + w_1, \qquad w_- = w_0 - w_1$$

При непрерывном преобразовании Лоренца

$$\begin{aligned} x^0 &\to \tilde{x}^0 = x^0 \cosh\chi + x^1 \sinh\chi \\ x^1 &\to \tilde{x}^1 = x^1 \cosh\chi + x^0 \sinh\chi \end{aligned} \tag{3.8}$$

компоненты $w_\pm$ и $\partial_\pm$ преобразуются следующим образом

$$\begin{array}{cc} w_+ \to \tilde{w}_+ = e^{\chi} w_+, & w_- \to \tilde{w}_- = e^{-\chi} w_- \\ \partial_+ \to \tilde{\partial}_+ = e^{\chi}\partial_+, & \partial_- \to \tilde{\partial}_- = e^{-\chi}\partial_- \end{array} \tag{3.9}$$

В соответствии с соотношениями (3.8), (3.9) дифференциальный оператор (3.7) преобразуется следующим образом

$$\hat{\mathcal{L}}(w,\partial,\lambda) \to \hat{\mathcal{L}}(\tilde{w},\tilde{\partial},\lambda) = \left(\begin{array}{c} \sqrt{\tilde{w}_+} + i\lambda\sqrt{\tilde{w}_-}\tilde{\partial}_+ \\ \sqrt{\tilde{w}_-} + i\lambda\sqrt{\tilde{w}_+}\tilde{\partial}_- \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} e^{\chi/2}(\sqrt{w_+} + i\lambda\sqrt{w_-}\partial_+) \\ e^{-\chi/2}(\sqrt{w_-} + i\lambda\sqrt{w_+}\partial_-) \end{array} \right) = e^{-\gamma^0\gamma^1\chi/2}\hat{\mathcal{L}}(w,\partial,\lambda) \tag{3.10}$$

При пространственном отражении

$$x^0 \to \tilde{x}^0 = x^0, \qquad x^1 \to \tilde{x}^1 = -x^1 \tag{3.11}$$

имеем

$$\begin{array}{cc} w_+ \to \tilde{w}_+ = w_-, & w_- \to \tilde{w}_- = w_+ \\ \partial_+ \to \tilde{\partial}_+ = \partial_-, & \partial_- \to \tilde{\partial}_- = \partial_+ \end{array} \tag{3.12}$$

$$\hat{\mathcal{L}}(w,\partial,\lambda) \to \hat{\mathcal{L}}(\tilde{w},\tilde{\partial},\lambda) = c\gamma^0\hat{\mathcal{L}}(w,\partial,\lambda) \tag{3.13}$$

При отражении времени

$$x^0 \to \tilde{x}^0 = -x^0, \qquad x^1 \to \tilde{x}^1 = x^1 \tag{3.14}$$

можно написать

$$\begin{array}{cc} w_+ \to \tilde{w}_+ = e^{i\pi} w_-, & w_- \to \tilde{w}_- = e^{-i\pi} w_+ \\ \partial_+ \to \tilde{\partial}_+ = e^{i\pi}\partial_-, & \partial_- \to \tilde{\partial}_- = e^{-i\pi}\partial_+ \end{array} \tag{3.15}$$

$$\hat{\mathcal{L}}(w,\partial,\lambda) \to \hat{\mathcal{L}}(\tilde{w},\tilde{\partial},\lambda) = e^{i\pi/2}\gamma^1\hat{\mathcal{L}}(w,\partial,\lambda) \tag{3.16}$$

Это означает, что дифференциальный оператор $\hat{\mathcal{L}}(w,\partial,\lambda)$ преобразуется как спинор при любом преобразовании группы Лоренца.

Образуем двухкомпонентную величину

$$\psi_{\rm D} = \binom{\psi_+}{\psi_-} = \hat{\mathcal{L}}(w,\partial,\lambda)\psi \tag{3.17}$$

Если ψ есть скаляр, удовлетворяющий уравнению Клейна-Гордона

$$\lambda^2\partial_l\partial^l\psi + \psi = 0, \tag{3.18}$$

то $\psi_{\rm D}$ есть спинор, удовлетворяющий уравнению Дирака (3.3), для любого выбора постоянного времениподобного вектора $w_l = (w_0, w_1)$. Наоборот, если спинор $\psi_{\rm D}$ удовлетворяет уравнению Дирака (3.3), то скаляр ψ, определенный уравнением (3.17) удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона (3.18) для любого выбора времениподобного вектора w.

Сравним уравнения (3.3) и (3.18). Ни одно из них не содержит явно вектора w, но связь (3.17) между ψ и $\psi_{\rm D}$ содержит этот вектор w. Этот факт может быть обяснен только тем, что вектор w "спрятан" внутри γ-матриц. При исключении γ-матриц при помощи замены переменных в (3.3), обнаруживается постоянный временидобный вектор. Покажем это.

Действие для динамической системы $\mathcal{S}_{\rm D}$ имеет вид

$$\mathcal{S}_{\rm D}: \qquad \mathcal{A}_{\rm D}[\bar{\psi},\psi]=\int(-m\bar{\psi}\psi+\frac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi-\frac{i}{2}\hbar\partial_l\bar{\psi}\gamma^l\psi)d^2x \tag{3.19}$$

Заменим четыре вещественные составляющие двухкомпонентной комплексной волновой функции ψ четырьмя скалярно-векторными переменными ρ, j^i, φ

$$\rho=\bar{\psi}\psi, \qquad j^i=\bar{\psi}\gamma^i\psi, \qquad i=0,1 \tag{3.20}$$

Положим

$$\gamma^0=\sigma_1, \quad \gamma^1=i\sigma_2 \tag{3.21}$$

где $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ суть матрицы Паули, обладающие свойством

$$\sigma_\alpha\sigma_\beta=\sigma_0\delta_{\alpha\beta}+i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma, \qquad \alpha,\beta=1,2,3 \tag{3.22}$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть 3-псевдотензор Леви-Чивита $\varepsilon_{123}=1$, σ_0 есть единичная матрица.

Представим волновую функцию ψ в виде

$$\psi=A\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\,e^{i\varphi}\Pi, \qquad \bar{\psi}=A\Pi\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\,\sigma_1e^{-i\varphi}, \qquad (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\equiv\sigma_\alpha n_\alpha, \qquad \mathbf{n}^2=n_\alpha n_\alpha=1 \tag{3.23}$$

$$\Pi=\frac{1}{2}(1+\gamma^0)=\frac{1}{2}(1+\sigma_1), \tag{3.24}$$

где A, $\mathbf{n}=\{n_1,n_2,n_3\}$ суть промежуточные переменные, которые будут впоследствии заменены переменными ρ, j^i. Π есть делитель нуля. Используя тождество (3.22) и его следствие

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\,\sigma_\alpha\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\equiv-\mathbf{n}^2\sigma_\alpha+2n_\alpha\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \tag{3.25}$$

получаем

$$\rho=\bar{\psi}\psi=A^2\left(-1+2n_1^2\right) \qquad j^0=A^2 \qquad j^1=-2A^2n_{\mathbf{3}}n_{\mathbf{1}} \tag{3.26}$$

Разрешая (3.26) относительно составляющих 3-вектора $\mathbf{n}$ и принимая во внимание, что $\mathbf{n}^2=1$, получаем

$$n_1=\sqrt{\frac{j^0+\rho}{2j^0}}, \qquad n_2=\sqrt{\frac{j^ij_i-\rho^2}{2j^0\,(j^0+\rho)}}, \qquad n_3=-\frac{j^1}{\sqrt{2j^0\,(j^0+\rho)}}. \tag{3.27}$$

Вычислим плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ действия (3.19) в терминах составляющих вектора $\mathbf{n}$. Получаем

$$\mathcal{L} = -m\rho - \hbar A^2 n_2^2 \left(\partial_0 \frac{n_3}{n_2} - \partial_1 \frac{n_1}{n_2}\right) - \hbar j^i \partial_i \varphi \tag{3.28}$$

Подставляя $A^2 = j^0$ и (3.27) в (3.28), получаем

$$\mathcal{L} = -m\rho + \hbar \frac{j^i j_i - \rho^2}{(j^0 + \rho)} \left(\partial_0 \frac{j^1}{\sqrt{(j^i j_i - \rho^2)}} + \partial_1 \frac{j^0 + \rho}{\sqrt{j^i j_i - \rho^2}}\right) - \hbar j^i \partial_i \varphi \tag{3.29}$$

Плотность лагранижиана выражается в терминах двух скаляров ρ, φ и вектора j^i. Плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ записана в нековариантной форме. Не ясно, возможно ли преобразовать ее к релятивистски инвариантной форме. Чтобы осуществить это, введем двухкомпонентные величины

$$q^l = \frac{j^l + \rho f^l}{\sqrt{j^i j_i - \rho^2}}, \qquad l = 0, 1, \qquad f^l = \{1, 0\} \tag{3.30}$$

Теперь разрешая соотношения (3.30) относительно j^i в виде

$$j^l = \frac{2\rho\,(q^s f_s)}{(q^k q_k - 1)} q^l - \rho f^l, \qquad l = 0, 1 \tag{3.31}$$

и подставляя j^i в (3.29), получаем выражение для действия

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{D}}[\rho, \varphi, j] = \int (-m\rho - \hbar \frac{2\rho\,(\partial_0 q_1 - \partial_1 q_0)}{(q^s q_s - 1)} - \hbar j^i \partial_i \varphi) d^2 x \tag{3.32}$$

где q^l выражаются через зависимые переменные ρ, φ, j^i с помощью соотношения (3.30). Если f^i – вектор, то в соответствии с (3.30) q^i есть тоже вектор, и плотность лагранжиана в действии (3.32) имеет ковариантный вид. Тогда $\mathcal{L}$ есть инвариант.

Таким образом, исключая γ-матрицы и записывая плотность лагранжиана в ковариантной форме, обнаруживаем постоянный времениподобный единичный вектор f^i. Этот вектор есть абсолютный объект, описывающий выделенное направление в пространстве-времени, что несовместимо с принципами теории относительности.

4 Случай четырехмерного пространства-времени

Аналогичное исключение матриц Дирака может быть осуществлено в случае четырехмерного пространства-времени. Состояние динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ (2.2) описывается восемью вещественными зависимыми переменными (восемь вещественных компонентов четырехкомпонентной комплексной волновой функции ψ). Можно преобразовать переменные ψ и описать эту систему в терминах скалярно-векторных переменных j^l, S^l, $(l = 0, 1, 2, 3)$, φ, κ. 4-вектор тока j^l и 4-псевдовектор спина S^l определяются соотношениями

$$j^l = \bar{\psi}\gamma^l\psi, \qquad l = 0, 1, 2, 3, \qquad \bar{\psi} = \psi^*\gamma^0;$$

$$S^l = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^l\psi, \qquad l = 0, 1, 2, 3, \qquad \gamma_5 = \gamma^{0123} \equiv \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3; \tag{4.1}$$

Скаляр φ и псевдоскаляр κ определяются неявно через волновую функцию с помощью соотношений

$$\psi = Ae^{i\varphi+\frac{1}{2}\gamma_5\kappa}e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}}e^{\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}\Pi \tag{4.2}$$

$$\psi^* = A\Pi e^{-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}}e^{-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}}e^{-i\varphi-\frac{1}{2}\gamma_5\kappa} \tag{4.3}$$

где (*) означает эрмитово сопряжение.

Здесь использованы следующие обозначения

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \} = \{-i\gamma^2\gamma^3, -i\gamma^3\gamma^1, -i\gamma^1\gamma^2\} \tag{4.4}$$

$$\Pi = \frac{1}{4}(1 + \gamma^0)(1 + \mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}), \qquad \mathbf{z} = \{z^\alpha\} = \text{const}, \qquad \alpha = 1, 2, 3; \qquad \mathbf{z}^2 = 1 \tag{4.5}$$

Величины A, κ, φ, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n} = \{n^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ суть восемь вещественных параметров, определяющих волновую функцию ψ. Эти параметры могут рассматриваться как новые зависимые переменные, описывающие состояние динамической системы $\mathcal{S}_\mathrm{D}$. Величина φ есть скаляр, а κ – псевдоскаляр.

Остальные шесть переменных A, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n} = \{n^\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ являются промежуточными. Они выражаются через 4-вектор тока $j^l = \bar{\psi}\gamma^l\psi$ и 4-псевдовектор спина S^i и определены соотношением (4.1). Из-за двух тождеств

$$S^lS_l \equiv -j^lj_l, \qquad j^lS_l \equiv 0. \tag{4.6}$$

имеется только шесть независимых компонентов среди восьми составляющих величин j^l, и S^l, $l = 0, 1, 2, 3$. Связь между 4-векторм j^i и промежуточными параметрами A, η^α имеет вид

$$\begin{gathered} j^0 = A^2\cosh\eta \\ j^\alpha = A^2v^\alpha\sinh\eta, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \end{gathered} \tag{4.7}$$

где

$$\mathbf{v} = \{v^\alpha\}, \qquad v^\alpha = \eta^\alpha/\eta, \qquad \alpha = 1, 2, 3; \qquad \mathbf{v}^2 = 1. \tag{4.8}$$

Единичный 3-псевдовектор $\boldsymbol{\xi}$ связан с 4-псевдовектором спина S^l посредством соотношений

$$\xi^\alpha = \rho^{-1}\left[S^\alpha - \frac{j^\alpha S^0}{(j^0 + \rho)}\right], \qquad \alpha = 1, 2, 3; \qquad \rho \equiv \sqrt{j^lj_l} \tag{4.9}$$

$$S^0 = \mathbf{j}\boldsymbol{\xi}, \qquad S^\alpha = \rho\xi^\alpha + \frac{(\mathbf{j}\boldsymbol{\xi})j^\alpha}{\rho + j^0}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{4.10}$$

Сделаем замену переменных в действии (2.2), используя подстановку (4.2), (4.3), (4.5). Расчеты довольно громождки, и мы их опускаем (детальный расчет можно найти в [5] или в [6]). Результат подстановки имеет вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}}: \qquad \mathcal{A}_D[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}] = \int \mathcal{L}d^4x, \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}_{q1} + \mathcal{L}_{q2} \tag{4.11}$$

$$\mathcal{L}_{cl} = -m\rho - \hbar j^i\partial_i\varphi + \hbar j^s\varepsilon_{iklm}\mu^i\partial_s\mu^k z^l f^m, \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{4.12}$$

$$\mathcal{L}_{q1} = 2m\rho\sin^2(\frac{\kappa}{2}) - \frac{\hbar}{2}S^l\partial_l\kappa, \tag{4.13}$$

$$\mathcal{L}_{q2} = -\hbar\rho\varepsilon_{iklm}q^i(\partial^k q^l)\nu^m \tag{4.14}$$

где использованы следующие обозначения

$$f^i = \{1,0,0,0\}, \qquad z^i = \{0,z^1,z^2,z^3\} \tag{4.15}$$

$$\nu^i = \xi^i - (\xi^s f_s)f^i, \qquad i = 0,1,2,3; \qquad \nu^i\nu_i = -1, \tag{4.16}$$

$$\mu^i \equiv \frac{\nu^i}{\sqrt{-(\nu^l + z^l)(\nu_l + z_l)}} = \frac{\nu^i}{\sqrt{2(1-\nu^l z_l)}} = \frac{\nu^i}{\sqrt{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}}. \tag{4.17}$$

$$q^i \equiv \frac{j^i + f^i\rho}{\sqrt{(j^l + f^l\rho)(j_l + f_l\rho)}} = \frac{j^i + f^i\rho}{\sqrt{2\rho(\rho + j^l f_l)}}, \qquad q_s q^s = 1 \tag{4.18}$$

Плотность лагранжиана (4.11) – (4.14) оказывается релятивистски инвариантной по отношению к величинам $f^i, z^i, \xi^i, \nu^i, j^i, q^i, \varphi, \kappa$, при условии, что величины f^i, $i = 0,1,2,3$ рассматриваются как компоненты постоянного времениподобного единичного вектора и z^i есть постоянный 4-псевдовектор, ортогональный к f^i. Величины ξ^i и ν^i, определенные посредством (4.16) образуют 4-псевдовекторы. Величины μ^i и q^i оказываются соответственно 4-вектором и 4-псевдовектором. Составляющая 4-вектора ξ^i, параллельная вектору f^i оказывается произвольной и несущественной. 4-вектор z^i оказывется фиктивным.

После исключения γ-матриц и представления плотности лагранжиана в релятивистски инвариантной форме (4.11) – (4.14), обнаруживается дополнительный постоянный времениподобный единичный 4-вектор f^i. Имеется только одна возможная интерпретация этого 4-вектора. Он описывает расщепление пространства-времени на пространство и время. Это означает, что динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемая уравнением Дирака для свободной частицы, является нерелятивистской, т.е. несовместимой с принципами теории относительности. Этот результат согласуется с результатом, полученным при рассмотрении двумерного пространства-времени.

5 Заключительное замечание

Уравнение Дирака – очень важное уравнение. Это одно из фундаментальных уравнений квантовой электродинамики. Нерелятивистский характер уравнения Дирака означает, что оно неверно и нуждается в модификации. К счастью, нерелятивистское описание касается только внутренних степеней свободы, связанных со спиновыми переменными $\boldsymbol{\xi}$ [6]. В процессах с низкой энергией эти степени свободы не возбуждаются, переменные $\boldsymbol{\xi}$, описывающие их, рассматриваются как постоянные, и модификация уравнения Дирака несущественна. В процессах с высокой энергией модификация уравнения Дирака может оказаться существенной.

Список литературы

[1] J. L. Anderson, *Principles of relativity physics.* Academic Press, New-York, 1967, pp 75-88.

[2] F. Sauter, *Zs. Phys.* **63,** 803, (1930), **64**, 295, (1930).

[3] A. Sommerfeld, *Atombau and Spektrallinien.* bd.2, Braunschweig, 1951.

[4] S. S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory.* New York, 1961, chp. 4, sec.3.

[5] Yu. A. Rylov, Adv. Appl. Cliff. Alg. **5**, No. 1, 1, (1995).

[6] Yu. A. Rylov, eprint quant-ph/0011044