Деформации евклидовой геометрии и возможности их применения к пространственно-временно́й геометрии микромира

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, 119526, Москва, пр. Вернадского 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site: *http://194.190.131.172/~rylov/yrylov.htm*

Аннотация

Обычно риманова геометрия рассматривается как наиболее общая геометрия, пригодная для использования в качестве геометрии пространства-времени. На самом деле, риманова геометрия есть результат деформации евклидовой геометрии. Класс этих римановых деформаций ограничен рядом необоснованных ограничений. При устранении этих ограничений возникает более широкий класс возможных геометрий пространства-времени (Т-геометрий). Всякая Т-геометрия полностью описывается мировой функцией Σ. Т-геометрия является мощным инструментом исследования микромира, благодаря трем ее характерным чертам: (1) Любой геометрический объект определяется во всех Т-геометриях сразу, потому что его определение не зависит от вида мировой функции. (2) Язык Т-геометрии не использует внешних средств описания, таких как координаты или кривые; он использует только изначальные геометрические понятия подпространства и мировой функции. (3) Нет необходимости строить всю аксиоматику Т-геометрии, потому что используется уже построенная аксиоматика Евклида, и есть возможность рассматривать только те геометрические соотношения, которые интересны. В работе обсуждаются возможности Т-геометрий для описания микромира. Когда мировая функция симметрична и Т-геометрия невырождена, масса частицы геометризуется, и квантовые эффекты описываются как геометрические эффекты, т.е. без ссылки на принципы квантовой теории. Когда мировая функция несимметрична, то будущее геометрически не эквивалентно прошлому, и возможности Т-геометрии многократно возрастают. Антисимметричная составляющая мировой функции порождает дополнительные метрические поля, чье влияние на свойства геометрии особенно сильно в микромире.

Ключевые слова: пространственно-временнáя геометрия, невырожденная геометрия, геометризация массы, геометризация квантовых эффектов, геометрическая неэквивалентность прошлое–будущее

1 Введение

В случае, когда существующая теория не в состоянии объяснить наблюдаемые физические явления, выбор подходящей геометрии пространства-времени представляется наиболее простым и эффективным способом решения возникших проблем. С помощью изменения пространственно-временнóй геометрии были созданы специальная и общая теории относительности – наиболее надежные и не подвергаемые сомнениям концепции современной теоретической физики. Принято считать, что риманова концепция геометрии является наиболее общей концепцией геометрии, и дальнейшее развитие обычной геометрии применительно к модели пространства-времени невозможно. В этой связи делаются попытки применить геометрию к микромиру, снабдив ее такими необычными свойствами, как стохастичность или некоммутатативность.

На самом деле, римнова концепция геометрии не является наиболее общей концепцией геометрии, и порождаемый ею список возможных римановых геометрий ограничен целым рядом условий, наложение которых порождено рядом исторических причин и не может быть оправдано. Например, нет необходимости необходимости вводить стохастичность в геометрию с помощью специальных дополнительных условий. Достаточно отбросить некоторые ограничения, налагаемые на риманову геометрию. После этого движение свободной частицы в такой пространстранственно-временнóй геометрии автоматически станет стохастическим.

Чтобы понять все это, рассмотрим вопрос о том, что такое геометрия, вообще, и риманова геометрия, в частности. Известный математик Феликс Клейн [2] полагал, что геометрией является только такое построение на точечном множестве, где все точки множества обладают одинаковыми свойствами. Например, евклидова геометрия и геометрия Лобачевского являются геометриями, а римановы геометрии геометриями не являются. Римановы геометрии в виде общего правила неоднородны, и их точки обладают различными свойствами. По мнению Ф. Клейна, их следовало называть "римановыми топографиями" или "римановыми географиями".

Сейчас вряд ли уместно обсуждать вопрос о том, как правильно называть риманову геометрию, однако важно понять, почему Ф. Клейн настаивал на различных названиях для евклидовой и римановой геометрии. Дело в том, что для евклидовой геометрии можно сформулировать аксиоматику (систему аксиом), определяющую евклидову геометрию как самодостаточную конструкцию, не нуждающуюся во вспомогательных средствах для своего построения.

Для римановой геометрии такой аксиоматики не существует. Во-первых, чисто технически очень трудно создать аксиоматику для каждой из возможных римановых геометрий, а, во-вторых, в этом нет необходимости. В приложениях римановой геометрии к модели пространства-времени важны главным образом соотношения между векторами и мировыми линиями, описывающими реальные объекты – частицы. Сама геометрия как таковая представляет лишь незначительный интерес. Интересные с физической точки зрения соотношения римановой геометрии получаются как разультат модификации (деформации) соответствующих евклидовых соотношений.

Практически эта деформация осуществляется с помощью замены бесконечно малого евклидова интервала $ds_{\mathrm{E}}^2 = \eta_{ik}dx^i dx^k, \quad \eta_{ik} =\mathrm{const}$ на бесконечно малый интервал $ds_{\mathrm{R}}^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, где g_{ik} суть функции от точки x. Такая замена есть изменение расстояния между точками пространства-времени, что по определению является деформацией пространства-времени. Таким образом, риманова геометрия не является самодостаточным построением (она не имеет своей собственной аксиоматики). Риманова геометрия есть деформированная евклидова геометрия. Римановы деформации пространства-времени, превращающие евклидову геометрию в риманову, образуют класс деформаций, ограниченных рядом условий.

Вообще говоря, деформация описывается изменением расстояния между всеми парами точек пространства. В случае пространства-времени это расстояние может быть вещественным (времениподобным) или мнимым (пространственноподобным). По этой причине для описания деформаций удобнее использовать величину $\Sigma(P,Q)$, называемую мировой функцией [3] и представляющую собой половину квадрата расстояния между точками P и Q. Мировая функция всегда вещественна, и это очень удобно при описании геометрии. Однако, самым замечательным оказывается то обстоятельство, что мировая функция содержит в себе исчерпывающую информацию о геометрии. Применительно к евклидовой геометрии это обстоятельство формулируется в виде теоремы [4, 5, 6], которая утверждает, что если и только если мировая функция удовлетворяет некоторым условиям евклидовости, сформулированным в терминах мировой функции, то соответствующая геометрия является евклидовой. Эти условия будут выписаны, как только будет развит надлежащий математический формализм. В данный момент важно лишь то, что эти условия содержат ссылки только на мировую функцию и конечные подмножества множества Ω. Размерность n пространства, как и все остальные параметры евклидовой геометрии, определяются видом мировой функции.

Если в случае евклидовой геометрии вся информация о геометрии содержится в мировой функции, то это остается верным и тогда, когда мировая функция не удовлетворяет упомянутым выше условиям, и геометрия не является евклидовой. Тогда каждому выбору мировой функции Σ соответствует некоторая геометрия $\mathcal{G}_\Sigma$. Это обстоятельство можно истолковать в том смысле, что мировая функция описывает деформацию пространства и каждой деформации Σ соответствует геометрия $\mathcal{G}_\Sigma$, которая может интерпретироваться как результат деформации евклидовой геометрии.

С этой точки зрения риманова геометрия есть результат деформации евклидовой геометрии, при котором мировая функция между точками x и x' определяется соотношением

$$\Sigma(x, x') = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_g} \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}\right)^2 \tag{1.1}$$

где интегрирование производится вдоль кратчайшей кривой (геодезической), $\mathcal{L}_g$ между точками x и x'.

Соотношение (1.1) описывает риманову деформацию евклидова пространства в терминах метрического тензора g_{ik}. Эта деформация определяется размерностью n пространства и метрическим тензором g_{ik}, представляющим собой набор из $n(n+1)/2$ функций от одной точки пространства. Информация, заключенная в этих $n(n+1)/2$ функциях неизмеримо меньше информации, заключенной в одной функции Σ от двух пространственных точек. Иными словами, риманова деформация представляет собой деформацию очень специального вида. В этой связи возникает вопрос. Какие у нас основания рассматривать риманову деформацию, как наиболее общую допустимую деформацию пространства-времени, а риманову геометрию, как наиболее общую геометрию пространства-времени?

Не существует каких-либо разумных оснований для претензий римановой геометрии на роль наиболее общей геометрии пространства-времени. Рассмотрение римановой геометрии как единственно возможной пространственно-временно́й геометрии является заблуждением, которое должно быть отвергнуто. Вопрос о том, что является причиной подобного заблуждения, безусловно является важным и интересным. Мы не будем его здесь касаться, ограничившись замечанием, что это заблуждение является ассоциативным заблуждением [7], т.е. заблуждением того же сорта, которое побудило научное сообщество один раз в течение длительного времени придерживаться доктрины Птолемея, а другой раз (в середине XIX века) отвергнуть идею неевклидовой геометрии.

Как только мы принимаем, что возможны не-римановы деформации евклидовой геометрии, порождающие более общие геометрии, чем риманова (мы будем называть их Т-геометриями), то немедленно возникает простая и очевидная идея объяснять особенности поведения частиц в микромире спецификой геометрии микромира. В это связи уместно напомнить, что специальная теория относительности решила проблемы движения частиц с большими скоростями с помощью простого изменения геометрии пространства-времени. Аналогично общая теориия относительности решила проблемы релятивистской теории гравитации, заменив геометрию Минковского на более общую риманову геометрию, связав при этом вид геометрии с распределением материи в пространстве-времени.

Описание нерелятивистских квантовых эффектов тоже может быть получено простым изменением геометрии пространства-времени [1]. При этом возникшая геометрия пространства-времени явно зависит от квантовой постоянной и движение микрочастиц в такой геометрии оказывается стохастическим (при этом о принципах квантовой механики речи не идет). Такое объяснение квантовых эффектов выгодно отличается от традиционного квантовомеханического объяснения полным отсутствием каких бы то ни было предположений. Просто рассматриваются все возможные геометрии, порожденные произвольными деформациями (а не только римановыми) евклидовой геометрии и среди них выбирается та геометрия, которая наилучшим образом соответствует опытным данным.

Поскольку мировая функция как функция двух точек, содержит много больше информации, чем компоненты метрического тензора, то резервы объяснения различных эффектов, заложенные в возможности использования T-геометрий в качестве геометрии пространства-времени, оказываются значительно превосходящими все другие возможности объяснения, используемые в настоящее время в теории элементарных частиц и квантовой теории поля. И это при том, что не нужно делать никаких дополнительных предположений о свойствах физических явлений в микромире. Достаточно рассмотреть все возможные T-геометрии и выбрать из них ту, которая наилучшим образом согласуется с наблюдаемыми данными. Разумеется, проблема выбора нужной T-геометрии – не простая проблема, поскольку для ее решения нужно изучить большой массив опытных данных, однако здесь важно то, что не нужно придумывать ничего нового. Достаточно исследовать уже имеющийся материал.

С точки зрения логики и здравого смысла стратегия исследования микромира, основанная на доминирующей роли геометрии представляется наиболее обнадеживающей в свете того, что эта стратегия оказалась успешной при создании СТО, ОТО и объяснении нерелятивистских квантовых эффектов.

Идея описания геометрии в терминах только расстояния очень старая идея. были попытки осуществить эту программу, используя так называемую дистантную геометрию [8, 9], когда отбрасывались некоторые ограничения, налагаемые на метрику метрического пространства. К сожалению T-геометрия не была построена, потому что использовались внешние средства описания, в частности, понятие кривой.

В предыдущих работах [4, 5, 6] рассматривалась симметричная T-геометрия, т.е. T-геометрия с симметричной мировой функцией $\Sigma(P,Q) = \Sigma(Q,P)$. Такое ограничение на мировую функцию $\Sigma(Q,P)$ представлялось привычным и естественным. В настоящей работе рассматривается несимметричная T-геометрия, когда мировая функция несимметрична. Несимметричная T-геометрия ассоциируется с ситуацией, когда прошлое и будущее геометрически неравноправны. Мы не настаиваем на том, что это действительно так, но полезно исследовать эту ситуацию, чтобы выяснить резервы описания геометрии, скрытые в подобной несимметрии.

Основные ограничения, налагаемые на римановы деформации, следующие (1) фиксированная размерность, (2) непрерывность, (3) невозможность деформации одномерной кривой в поверхность или в точку. Эти специфические ограничения обусловлены использованием систем координат при описании евклидовой и римановой геометрий. В самом деле, любая система координат имеет фиксированное число координат (размерность). Координаты меняются непрерывно, и это свойство приписывается самой геометрии, потому что координаты маркируют точки пространства. Наконец, преобразования координат превращают одномерную кривую в одномерную кривую, и это свойство системы координат приписывается самой геометрии.

Существуют методы отделения геометрических свойств от свойств систем координат. Рассматривается описание геометрии во всех возможных системах координат. Свойства, общие для всех этих описаний, являются свойствами рассматриваемой геометрии. Но не существует преобразований от n координат к m координатам ($m \neq n$). Не существует преобразований координат, которые преобразовывали бы одномерную кривую в n-мерную поверхность ($n \neq 1$), и принято приписывать эти свойства системы координат самой геометрии.

Таким образом, ограничения на средства описания приписываются самой геометрии. Чтобы устранить эти ограничения, порожденные средствами описания, следует устранить внешние средства описания и использовать язык, эксплоатирующий только понятия, являющиеся атрибутами самой геометрии. Это означает, что геометрию следует описывать в терминах подпространств и мировой функции между точками этих подпространств.

На практике оказывается достаточным использовать только конечные подпространства всего пространства. В результате описание геометрии осуществляется в терминах конечного числа точек и мировой функции между их парами. Такое описание, которое не содержит внешних средств описания, мы будем называть σ-имманентным описанием. Такое σ-имманентное описание удобно в том отношении, что оно позволяет иметь дело непосредственно с геометрией. При этом нет нужды рассматривать системы координат и группы их преобразований. Иногда мы все же будем использовать координатное описание, чтобы связать σ-имманентное описание с традиционным описанием геометрии. Однако, само построение Т-геометрии производится в σ-имманентном виде.

Во втором разделе формулируются основные положения Т-геометрии. В третьем разделе вводятся понятия мультивектора, скалярного Σ-произведения и коллинеарности. Четвертый раздел посвящен исследованию свойств трубок. В пятом разделе исследуется связь между стохастичностью движения частиц и вырожденностью Т-геометрии. Динамика частиц в невырожденной пространственно-временно́й геометрии исследуется в шестом разделе. Асимметричная Т-геометрия на многообразии исследуется в седьмом разделе. Восьмой раздел посвящен свойствам мировой функции в окрестности совпадения ее аргументов. Свойства различных сортов тензоров кривизны исследуются в девятом разделе. Десятый раздел посвящен исследованию градиентных линий. Условия невырожденности нейтральной трубки первого порядка исследуются в одиннадцатом разделе. В двенадцатом разделе рассматриваются примеры трубок первого порядка.

2 Т-геометрия и σ-пространство. Бескоординатное описание

Введем необходимые определения.

Определение 2.1 *Т-геометрия есть множество всех утверждений о свойствах всех геометрических объектов.*

Т-геометрия строится на произвольном точечном множестве Ω заданием мировой функции Σ. Σ-пространство $V = \{\Sigma, \Omega\}$ получается из из метрического пространства после удаления ограничений, налагаемых на метрику и введения мировой функции Σ

$$\Sigma(P,Q) = \frac{1}{2}\rho^2(P,Q), \qquad P,Q \in \Omega \tag{2.1}$$

вместо метрики ρ:

Определение 2.2 *Σ-пространство $V = \{\Sigma, \Omega\}$ есть непустое множество Ω точек P с заданной на $\Omega \times \Omega$ вещественной функцией Σ*

$$\Sigma : \quad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \Sigma(P,P) = 0, \qquad \forall P \in \Omega. \tag{2.2}$$

Функция Σ известна как мировая функция [3], или Σ-функция. Метрика ρ может быть введена в Σ-пространстве с помощью соотношения (2.1). Если Σ положительна, то метрика ρ тоже положительна, но если Σ отрицаетльна, то метрика мнима.

Определение 2.3 . *Непустое точечное множество $\Omega' \subset \Omega$ Σ-пространства $V = \{\Sigma, \Omega\}$ с мировой функцией $\Sigma' = \Sigma|_{\Omega' \times \Omega'}$, которая является сужением Σ на $\Omega' \times \Omega'$, называется Σ-подпространством $V' = \{\Sigma', \Omega'\}$ Σ-пространства $V = \{\Sigma, \Omega\}$.*

Далее мировая функция $\Sigma' = \Sigma|_{\Omega' \times \Omega'}$, которая является сужением Σ будет обозначаться как Σ. Любое Σ-подпространство Σ-пространства является Σ-пространством. В Т-геометрии геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается с помощью каркас-оболочного метода. Это означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ определяется следующим образом.

Определение 2.4 *Геометрический объект $\mathcal{O}$ есть некоторое Σ-подпространство Σ-пространства, которое может быть представлено как множество пересечений и объединений элементарных геометрических объектов (ЭГО).*

Определение 2.5 *Элементарный геометрический объект $\mathcal{E} \subset \Omega$ есть множество нулей оболочной функции*

$$f_{\mathcal{P}^n}: \qquad \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \in \Omega^{n+1} \tag{2.3}$$

т.е.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_f\left(\mathcal{P}^n\right) = \left\{R | f_{\mathcal{P}^n}\left(R\right) = 0\right\} \tag{2.4}$$

Конечное множество $\mathcal{P}^n \subset \Omega$ параметров оболочной функции $f_{\mathcal{P}^n}$ есть каркас элементарного геометрического объекта (ЭГО). Множество $\mathcal{E} \subset \Omega$ точек, образующих ЭГО, называется оболочкой каркаса $\mathcal{P}^n$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$ есть алгебраическая функция от s аргументов $w = \{w_1, w_2, ...w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)$. Каждый аргумент $w_k = \Sigma\left(Q_k, L_k\right)$ есть Σ-функция от двух аргументов $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$.

Для непрерывных Т-геометрий оболочка $\mathcal{E}$ обычно представляет собой непрерывное множество точек. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$, определяющая ЭГО, есть функция бегущей точки $R \in \Omega$ и параметров $\mathcal{P}^n \in \Omega^{n+1}$. Итак, элементарный геометрический объект определяется своим каркасом $\mathcal{P}^n$ и видом оболочной функции $f_{\mathcal{P}^n}$.

Пусть исследуется Т-геометрия на Σ-пространстве $V = \{\Sigma, \Omega\}$. Для некоторого специального выбора $\Sigma_{\rm E}$ мировой функции Σ-пространство V превращается в Σ-подпространство $V'_{\rm E} = \{\Sigma_{\rm E}, \Omega\}$ n-мерного собственно евклидового прострaства $V_{\rm E} = \{\Sigma_{\rm E}, \Omega_{\rm E}\}$, $\Omega \subset \Omega_{\rm E}$. (Это будет показано). Тогда все соотношения между геометрическими объектами в $V'_{\rm E}$ суть соотношения собственно евклидовой геометрии. Замена $\Sigma_{\rm E}$ на Σ означает деформацию Σ-пространства $V'_{\rm E}$, потому что мировая функция Σ описывает расстояние между двумя точками, и изменение этих расстояний есть деформация пространства. Мы будем использовать понятие деформации, понимая его в широком смысле и включая в этот термин всякое увеличение и уменьшение числа точек в множестве Ω. Тогда всякий переход от $\{\Sigma_{\rm E}, \Omega_{\rm E}\}$ к $\{\Sigma, \Omega\}$ есть деформация Σ-пространства $\{\Sigma_{\rm E}, \Omega_{\rm E}\}$.

Запишем евклидовы соотношения между геометрическими объектами в $V_{\rm E}$ в σ-имманентной форме (т.е. в виде, который содержит ссылки только на геометрические объекты и Σ-функцию). Заменяя в этих соотношениях мировую функцию $\Sigma_{\rm E}$ на Σ, получаем соотношения между геометрическим объектами в Σ-пространстве $V = \{\Sigma, \Omega\}$.

Геометрия в собственно евклидовом пространстве изучена очень хорошо, и можно использовать деформацию, описываемую мировой функцией, чтобы установить геометрию в произвольном Σ-пространстве. При рассмотрении деформации евклидового пространства обходится проблема установления аксиоматики в Σ-space $V = \{\Sigma, \Omega\}$. При этом используется только евклидова аксиоматика. Т-геометрия произвольного Σ-пространства получается как результат деформации собственно евклидовой геометрии. Этот пункт очень важен, поскольку аксиоматика произвольной Т-геометрии очень сложна. Она относительно проста только для высоко симметричных пространств. Исследование произвольных деформаций много проще, чем исследование произвольных аксиоматик. Формально работа с деформациями Σ-пространств представляет собой манипуляции в мировой функцией. Эти манипуляции можно осуществлять, не упоминая о деформациях пространства.

Описание ЭГО с помощью (2.3) осуществляется в деформ-инвариантной форме (инвариантной относительно деформаций Σ-пространства). Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$, рассматриваемая как функция аргументов $w_k = \Sigma(Q_k, L_k)$, $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$ не зависит от вида мировой функции Σ. Таким образом, определение оболочной функции инвариантно относительно деформаций (деформ-инвариантно), и оболочная функция определяет любой ЭГО во всех Σ-пространствах сразу.

Пусть $\mathcal{E}_{\mathrm{E}}$ есть ЭГО в евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Пусть $\mathcal{E}_{\mathrm{E}}$ описывается каркасом $\mathcal{P}^n$ и оболочной функцией $f_{\mathcal{P}^n}$ в Σ-пространстве $V_{\mathrm{E}} = \{\Sigma_{\mathrm{E}}, \Omega\}$. Тогда в Т-геометрии $\mathcal{G}$ элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$, описываемый тем же самым каркасом $\mathcal{P}^n$ и той же самой оболочной функцией $f_{\mathcal{P}^n}$ в Σ-пространстве $V = \{\Sigma, \Omega\}$, есть аналог евклидова ЭГО $\mathcal{E}_{\mathrm{E}}$ в геометрии $\mathcal{G}$. Т-геометрия $\mathcal{G}$ может рассматриваться как результат деформации евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, когда расстояния $\sqrt{\Sigma(P,Q) + \Sigma(Q,P)}$ между парами точек P и Q изменяются. При такой деформации евклидов ЭГО $\mathcal{E}_{\mathrm{E}}$ превращается в свой аналог $\mathcal{E}$.

Евклидово пространство имеет очень мощную группу движений, и одна и та же оболочка $\mathcal{E}_{\mathrm{E}}$ может быть порождена оболочной функцией $f_{\mathcal{P}^n}$ с различными значениями $\mathcal{P}^n_{(1)}$, $\mathcal{P}^n_{(2)}, \ldots$ каркаса $\mathcal{P}^n$, или даже с помощью другой оболочной функции $f_{(1)\mathcal{Q}^m}$. Это означает, что евклидов ЭГО $\mathcal{E}_{\mathrm{E}}$ может иметь несколько различных аналогов $\mathcal{E}_{(1)}, \mathcal{E}_{(2)}, \ldots$ в геометрии $\mathcal{G}$. Другими словами, деформация евклидова пространства может расщеплять ЭГО (а не только деформировать его. Впрочем, расщепление можно интерпретировать как разновидность деформации.

Понятие кривой определяется как непрерывное отображение

$$\mathcal{L}: \quad [0,1] \to \Omega, \qquad [0,1] \subset \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

Принято рассматривать кривую $\mathcal{L}([0,1]) \subset \Omega$ как важный геометрический объект. С точки зрения Т-геометрии множество точек $\mathcal{L}([0,1]) \subset \Omega$ не может рассматриваться как ЭГО, потому что отображение (2.5) не является деформ-инвариантным. В самом деле, рассмотрим сферу $\mathcal{S}_{P_0P_1}$, проходящую через точку P_1 и имеющую центр в точке P_0. Сфера описывается оболочной функцией

$$f_{P_0P_1}(R) = \sqrt{\Sigma(P_0, R) + \Sigma(R, P_0)} - \sqrt{\Sigma(P_1, R) + \Sigma(R, P_1)} \tag{2.6}$$

В двумерном собственно евклидовом пространстве оболочная функция (2.6) описывает одномерную окружность $\mathcal{L}_1$, тогда как в трехмерном собственно евклидовом пространстве оболочная функция (2.6) описывает двумерную сферу $\mathcal{S}_2$. Точечное множество $\mathcal{L}_1$ может быть представлено как непрерывное отображение (2.5), тогда как поверхность $\mathcal{S}_2$ – не может. Таким образом, деформация Σ-пространства может разрушить свойство ЭГО быть кривой (2.5).

Применение объектов, определенных свойством (2.5) для исследования Т-геометрий оказывается неудобным, потому что исследование Т-геометрии основано на деформ-инвариантных методах. С формальной точки зрения нельзя выбрать подходящую оболочную функцию для описания множества (2.5), потому что оболочная функция деформ-инвариантна, тогда как множество (2.5) – нет. Следовательно, (2.5) несовместимо с определением 2.5 ЭГО.

Несимметричную T-геометрию можно исследовать теми же методами, что и симметричную. Мировая функция Σ в несимметричной T-геометрии представляется в виде

$$\Sigma(P,Q) = G(P,Q) + A(P,Q), \qquad P,Q \in \Omega \tag{2.7}$$

$$G(P,Q) = G(Q,P), \qquad A(P,Q) = -A(Q,P) \tag{2.8}$$

$$G(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\Sigma(P,Q) + \Sigma(Q,P)\right), \tag{2.9}$$

$$A(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\Sigma(P,Q) - \Sigma(Q,P)\right) \tag{2.10}$$

где G означает симметричную часть мировой функции Σ, тогда как A означает ее антисимметричную часть.

Мотивы введения несимметричной T-геометрии таковы. В симметричной геометрии расстояние от точки P до точки Q такое же, как расстояние от точки Q до точки P. В несимметричной геометрии это не так. По-видимому, это не очень важно для пространственноподобных интервалов в пространстве-времени, потому что это можно проверить экспериментально для пространственных интервалов. В случае, когда интервал между точками P и Q времениподобен, для его измерения надо использовать часы. Но часы измеряют интервал только в одном направлении, и нельзя быть уверенным, что временно́й интервал будет тем же самым, если его измерить в обратном направлении.

Если антисимметричная часть A мировой функции не обращается в нуль, то это означает, что прошлое и будущее не эквивалентны геометрически. Мы не настаиваем на том, что это так, но мы допускаем это. Тогда полезно построить несимметричную T-геометрию, применить ее к пространству-времени и получить те следствия несимметрии, которые могут быть проверены экспериментально. Симметричная часть мировой функции порождает поле метрического тензора g_{ik}. Аналогичным образом антисимметричная часть порождает силовое векторное поле a_i. Может быть, существование этого поля может быть проверено экспериментально. Для построения несимметричной геометрии не надо делать дополнительных предположений. Достаточно отказаться от ограничения $\Sigma(P,Q) = \Sigma(Q,P)$ и использовать математический аппарат, разработанный для симметричной T-геометрии.

Кроме того есть надежда, что несимметричная T-геометрия окажется полезной в теории элементарных частиц, где главным объектом являются суперструны. Трубки первого порядка (главный объект T-геометрии) ассоциируются с мировыми трубками струн и бран. В несимметричной геометрии появляются антисимметричные величины. Они отсутствуют в обычной симметричной T-геометрии, но антисимметричные (точнее антиперестановочные) величины характерны для теории суперструн.

Два важных общих замечания.

1. Несимметричная геометрия, также как и симметричная, рассматривается на произвольном множестве Ω точек P. Она формулируется в рамках чисто метрической концепции геометрии, которая очень проста, потому что использует только очень простые инструменты для описания геометрии. Т-геометрия формулируется в терминах мировой функции Σ и конечных подмножеств $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\}$ множества Ω. Математически это означает, что чисто метрическая концепция геометрии использует только отображения

$$m_n: \quad I_n \to \Omega, \qquad I_n \equiv \{0, 1, ...n\} \subset \{0\} \cup \mathbb{N} \tag{2.11}$$

тогда как тополого-метрическая концепция геометрии [10, 11, 12] использует более сложные отображения (2.5), известные как кривые $\mathcal{L}$. Оба отображения (2.11) и (2.5) суть методы описания (и построения) геометрии. Но метод (2.11) много проще. Он может быть изучен полностью, тогда как изучить полностью множество всех отображений (2.5) не представляется возможным.

2. Несимметричная Т-геометрия будет интерпретироваться главным образом как симметричная Т-геометрия, определяемая двухточечным скаляром $G(P, Q)$, с некоторыми добавочными метрическими структурами, вводимыми в симметричную геометрию при помощи добавочного двухточечного скаляра $A(P, Q)$. Например, в симметричной пространственно-временно́й Т-геометрии мировая линия свободной частицы описывается геодезической. В несимметричном пространственно-временно́й геометрии имеется, вообще говоря, несколько различных типов геодезических. Этот факт может быть истолкован в том смысле, что свободная частица имеет некоторые внутренние степени свободы и может находиться в различных состояниях. В этих состояниях свободная частица различно взаимодействует с силовыми полями, порожденными двухточечным скаляром $A(P, Q)$. Несколько различных типов геодезических являются результатом этого взаимодействия.

Определение 2.6 . *Σ-пространство $V = \{\Sigma, \Omega\}$ называется изометрически вложимым в Σ-пространство $V' = \{\Sigma', \Omega'\}$, если существует такой мономорфизм $f: \Omega \to \Omega'$, что $\Sigma(P, Q) = \Sigma'(f(P), f(Q)), \quad \forall P, \forall Q \in \Omega, \quad f(P), f(Q) \in \Omega'$,*

Любое Σ-подпространство V' Σ-пространства $V = \{\Sigma, \Omega\}$ изометрически вложимо в него.

Определение 2.7 . *Два Σ-пространства $V = \{\Sigma, \Omega\}$ и $V' = \{\Sigma', \Omega'\}$ называются изометричными (эквивалентными), если V изометрически вложимо в V', и V' изометрически вложимо в V.*

Определение 2.8 *Σ-пространство $M = \{\Sigma, \Omega\}$ называется конечным Σ-пространством, если множество Ω содержит конечное число точек.*

Определение 2.9 . *Σ-подпространство $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\Sigma, \mathcal{P}^n\}$ Σ-пространства $V = \{\Sigma, \Omega\}$, состящее из $n+1$ точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ..., P_n\}$ называется Σ-подпространством n-ого порядка.*

Т-геометрия есть множество всех утверждений о свойствах всех Σ-подпространств Σ-пространства $V = \{\Sigma, \Omega\}$. Т-геометрия излагается на языке, содержащем ссылки только на Σ-функцию и конституенты Σ-пространства, т.е. на его Σ-подпространства.

Определение 2.10 *Описание называется σ-имменентным, если оно не содержит ссылок на объекты или понятия, отличные от конечных подпространств Σ-пространства и его мировой функции.*

σ-имманентность обеспечивает независимость описания от метода описания. В некотором отношении σ-имманентность напоминает понятие ковариантности в римановой геометрии. Ковариантность некоторого соотношения в римановой геометрии означает, что рассматриваемое соотношение верно во всех системах координат и, следовательно, описывает только свойства римановой геометрии самой по себе. Рассматривая описание некоторого геометрического соотношения во всех системах координат сразу, ковариантное описание обеспечивает отстройку от свойств координатной системы. σ-имманентность обеспечивает независимость от метода описания благодаря отсутствию ссылок на объекты, не имеющие отношения к геометрии самой по себе (система координат, понятие кривой, размерность).

Идея построения Т-геометрии очень проста. Все соотношения собственно евклидовой геометрии записываются в σ-имманентном виде и объявляются справедливыми в Т-геометрии с любой Σ-функцией. Отсюда следует, что любое соотношение собственно евклидовой геометрии соответствует некоторому соотношению Т-геометрии.

3 Мультивекторы как главные объекты Т-геометрии. Σ-скалярное произведение и понятие коллинеарности.

Основными элементами Т-геометрии являются конечные Σ-подпространства $M_n(\mathcal{P}^n)$, т.е. конечные множества

$$\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\} \subset \Omega \tag{3.1}$$

Простейшим конечным подмножеством является ненулевой вектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^1} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \equiv \overrightarrow{P_0P_1}$. Вектор $\overrightarrow{P_0P_1}$ есть упорядоченное множество из двух точек $\{P_0, P_1\}$. Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \Sigma\left(P_0, Q_1\right) - \Sigma\left(P_1, Q_1\right) - \Sigma\left(P_0, Q_0\right) + \Sigma\left(P_1, Q_0\right) \tag{3.2}$$

есть основное построение Т-геометрии. Обоснуем это определение.

Соотношение (3.2) представляет собой σ-имманентное выражение для скалярного произведения $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в собственно евклидовом пространстве. Действительно, в собственно евклидовом пространстве три вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1$, и $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$ связаны соотношением

$$|\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 + |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1|^2 - 2(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1) \qquad (3.3)$$

где $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1)$ означает скалярное произведение двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1$ в собственно евклидовом пространстве, и $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \equiv (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)$. Из (3.3) следует

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1) = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1|^2 + |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 - |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1|^2\right) \qquad (3.4)$$

Заменяя в (3.4) точку Q_1 на Q_0, получаем

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0) = \frac{1}{2}\{|\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0|^2 + |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 - |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_0|^2\} \qquad (3.5)$$

Вычитая (3.5) из (3.4) и используя свойства скалярного произведения в собственно евклидовом пространстве, получаем

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \frac{1}{2}\{|\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1|^2 + |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_0|^2 - |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0|^2 - |\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1|^2\} \qquad (3.6)$$

Принимая во внимание, что в собственно евклидовой геометрии $|\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1|^2 = 2\Sigma(P_0, Q_1) = 2G(P_0, Q_1)$, получаем соотношение (3.2) из соотношения (3.6).

В собственно евклидовой геометрии мировая функция симметрична, и порядок аргументов в правой части (3.2) не существенен. В несимметричной Т-геометрии порядок аргументов в правой части равенства (3.2) важен. Порядок аргументов выбирается таким образом, чтобы

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{s}} &\equiv \frac{1}{2}\left((\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) + (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)\right) \\ &= G(P_0, Q_1) - G(P_1, Q_1) - G(P_0, Q_0) + G(P_1, Q_0) \qquad (3.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathrm{a}} &\equiv \frac{1}{2}\left((\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) - (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)\right) \\ &= A(P_0, Q_1) - A(P_1, Q_1) - A(P_0, Q_0) + A(P_1, Q_0) \qquad (3.8)\end{aligned}$$

Из (3.2) следует, что

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = -(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1), \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = -(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_0) \qquad (3.9)$$

Таким образом, скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ антисимметрично относительно перестановки $P_0 \leftrightarrow P_1$ точек, определяющих вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, так же как относительно перестановки $Q_0 \leftrightarrow Q_1$.

Определение 3.1 *Конечное Σ-пространство $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\Sigma, \mathcal{P}^n\}$ называется ориентированным $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)}$, если порядок его точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \ldots P_n\}$ фиксирован.*

Определение 3.2 . *Мультивектор n-ого порядка m_n есть отображение*

$$m_n: \qquad I_n \to \Omega, \qquad I_n \equiv \{0, 1, ..., n\} \tag{3.10}$$

Множество I_n имеет естественное упорядочение, которое порождает упорядочение образов $m_n(k) \in \Omega$ точек k множества I_n. Упорядоченный список образов точек в I_n имеет одно-однозначную связь с мультивектором и может использоваться как идентификатор мультивектора. Различные варианты списка точек будут использоваться для записи идентификатора мультивектора n-ого порядка.

$$\overrightarrow{P_0 P_1 ... P_n} \equiv \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 ... \mathbf{P}_n \equiv \overrightarrow{\mathcal{P}^n}$$

Оригиналы точек P_k в I_n определяются порядком точек P_k в списке, определяющем идентификатор мультивектора. Индекс точки P_k не имеет отношения к оригиналу точки P_k. Далее мы будем использовать идентификатор $\overrightarrow{P_0 P_1 ... P_n}$ мультивектора вместо самого мультивектора. В этом смысле мультивектор n-ого порядка $\overrightarrow{P_0 P_1 ... P_n}$ в Σ-пространстве $V = \{\Sigma, \Omega\}$ может быть определен как упорядоченное множество $\{P_l\}, \quad l = 0, 1, \ldots n$ из $n+1$ точек $P_0, P_1, ..., P_n$, принадлежащих Σ-пространству V. Точка P_0 есть начало мультивектора $\overrightarrow{P_0 P_1 ... P_n}$. Образ $m_n(I_n)$ множества I_n содержит k точек $(k \leq n+1)$. Множество всех мультивекторов n-ого порядка m_n образует множество $\Omega^{n+1} = \bigotimes\limits_{k=1}^{n+1} \Omega$, и любой мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \in \Omega^{n+1}$.

Определение 3.3 . *Скалярное Σ-произведение $(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})$ двух мультивекторов n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ есть вещественное число*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = \det \|(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_i . \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_k)\|, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_i . \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_k) \quad &\equiv \quad \Sigma(P_0, Q_k) + \Sigma(P_i, Q_0) - \Sigma(P_0, Q_0) - \Sigma(P_i, Q_k), \qquad (3.12) \\ P_0, P_i, Q_0, Q_k \quad &\in \quad \Omega, \qquad \overrightarrow{\mathcal{P}^n}, \overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1} \end{aligned}$$

Операция перестановки точек мультивектора может быть эффективно определена в Σ-пространстве. Рассмотрим два мультивектора n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = \overrightarrow{P_0 P_1 P_2 ... P_n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(k \leftrightarrow l)}} = \overrightarrow{P_0 P_1 ... P_{k-1} P_l P_{k+1} ... P_{l-1} P_k P_{l+1} ... P_n}, \quad (n \geq 1)$. Последний является результатом перестановки точек P_k, P_l, $\quad (k < l)$. Скалярное Σ-произведение $(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})$ определяется соотношением (3.11). Можно показать, что

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0 \leftrightarrow l)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) \qquad l = 0, 1, ...n, \qquad \forall \overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1}, \tag{3.13}$$

Поскольку соотношение (3.13) верно для перестановки любых двух точек мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и для $\forall \overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1}$, то можно написать

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(i \leftrightarrow k)}} = -\overrightarrow{\mathcal{P}^n}, \qquad i, k = 0, 1, ...n, \qquad i \neq k, \qquad n \geq 1. \tag{3.14}$$

Итак, изменение знака любого мультивектора n-ого порядка $(n \geq 1)$ (умножение на число $a=-1$) всегда может быть определено как нечетная перестановка точек.

Рассмотрим соотношение

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n} T \overrightarrow{\mathcal{R}^n}: \qquad (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = (\overrightarrow{\mathcal{R}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) \wedge (\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) = (\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}.\overrightarrow{\mathcal{R}^n}), \qquad \forall \overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1}, \tag{3.15}$$

между двумя мультивекторами n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \in \Omega^{n+1}$ и $\overrightarrow{\mathcal{R}^n} \in \Omega^{n+1}$. Соотношение (3.15) рефлексивно, симметрично и транзитивно. Оно может рассматриваться как соотношение эквивалентности.

Определение 3.4 . *Два мультивектора n-ого порядка* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \in \Omega^{n+1}$ *и* $\overrightarrow{\mathcal{R}^n} \in \Omega^{n+1}$ *эквивалентны* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = \overrightarrow{\mathcal{R}^n}$, *если имеют место соотношения (3.15).*

Определение 3.5 . *Если мультивектор n-ого порядка* $\overrightarrow{\mathcal{N}^n}$ *удовлетворяет соотношениям*

$$(\overrightarrow{\mathcal{N}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = 0 \wedge (\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}.\overrightarrow{\mathcal{N}}) = 0, \qquad \forall \overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \in \Omega^{n+1}, \tag{3.16}$$

$\overrightarrow{\mathcal{N}^n}$ *есть нулевой мультивектор n-ого порядка.*

Определение 3.6 . *Длина* $|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|$ *мультивектора* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ *есть число*

$$|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| = \begin{cases} \mid \sqrt{(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n})} \mid = |\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}|, & (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) \geq 0 \\ i \mid \sqrt{(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n})} \mid = i|\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}|, & (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) < 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\mathcal{P}^n} \in \Omega^{n+1} \tag{3.17}$$

где величина $F_n(\mathcal{P}^n)$ *определяется соотношениями*

$$F_n: \quad \Omega^{n+1} \to \mathbb{R}, \qquad \Omega^{n+1} = \bigotimes_{k=1}^{n+1} \Omega, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3.18}$$

$$F_n\left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\right) = \det || \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right) ||, \qquad P_0, P_i, P_k \in \Omega, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{3.19}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) \equiv \Sigma\left(P_i, P_0\right) + \Sigma\left(P_0, P_k\right) - \Sigma\left(P_i, P_k\right), \qquad i,k = 1,2,...n, \tag{3.20}$$

Функция (3.18) есть симметричная функция всех своих аргументов $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ..., P_n,\}$, т.е. она инвариантна относительно перестановки любых точек $P_i,\ P_k,\ \ i,k = 0,1,...n$. Это следует из представления

$$F_n\left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\right) = F_n\left(\mathcal{P}^n\right) = \left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\right)$$

и соотношения (3.14). Это означает, что квадрат длины $|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 = |M\left(\mathcal{P}^n\right)|^2$ любого мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ не зависит от порядка точек. Квадрат длины любого конечного подмножества $\mathcal{P}^n$ определяется однозначно.

В случае, когда мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ не содержит одинаковых точек, он совпадает с конечным ориентированным Σ-подпространством $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)}$, и является конституентом Σ-пространства. В случае, когда, по крайней мере, две точки мультивектора совпадают, длина мультивектора обращается в нуль, и мультивектор может рассматриваться как нулевой мультивектор. Нулевой мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ не является конечным Σ-подпространством $M_n(\mathcal{P}^n)$, или конечным ориентированным Σ-подпространством $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)}$, но использование нулевых мультивекторов помогает в создании более простого формализма, потому что нулевые мультивекторы $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ играют роль нулей. По существу, мультивекторы являются основными объектами T-геометрии. Что касается непрерывных геометрических объектов, которые являются аналогами плоскости, сферы, эллипсоида и т.д., то они конструируются на основе каркас-оболочного метода (см. [6]) с мультивекторами или конечными Σ-подпространствами, используемыми в качестве каркаса. В результате T-геометрия описывается σ-имманентно, т.е. без ссылок на объекты, внешние по отношению к Σ-пространству.

Обычный вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \equiv \overrightarrow{P_0P_1} \equiv \overrightarrow{\mathcal{P}^1} = \{P_0, P_1\}$, $P_0, P_1 \in \Omega$ есть специальный случай мультивектора. Квадрат длины $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2$ вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяется соотношением (3.2). Это дает

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \equiv (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) = \Sigma(P_0, P_1) + \Sigma(P_1, P_0) = 2G(P_0, P_1) \tag{3.21}$$

Следующие величины также ассоциируются с вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$

$$|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0|^2 \equiv (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0) = 2G(P_1, P_0), \tag{3.22}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0) = -\Sigma(P_0, P_1) - \Sigma(P_1, P_0) = -2G(P_0, P_1), \tag{3.23}$$

Довольно неожиданно, что $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = 2G(P_0, P_1)$, а не $2\Sigma(P_0, P_1)$. Но в то же время хорошо, что вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ имеет только одну длину, а не две $\sqrt{2\Sigma(P_0, P_1)}$ и $\sqrt{2\Sigma(P_1, P_0)}$

Определение 3.7 *Квадрат длины $|M(\mathcal{P}^n)|^2$ конечного Σ-подпространства n-ого порядка $M(\mathcal{P}^n) \subset \Omega$ Σ-пространства $V = \{\Sigma, \Omega\}$ есть вещественное число*

$$|M(\mathcal{P}^n)|^2 = F_n(\mathcal{P}^n),$$

где $M(\mathcal{P}^n) = \{P_0, P_1, ..., P_n,\} \subset \Omega$ со всеми различными $P_i \in \Omega$, $i = 0, 1, ...n$, $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \in \Omega^{n+1}$, и величина $F_n(\mathcal{P}^n)$ определяется соотношениями (3.19) – (3.20).

Смысл написанных соотношений следующий. В том специальном случае, когда Σ-пространство есть евклидово пространство, его Σ-функция симметрична и совпадает с Σ-функцией евклидова пространства. Любые две точки P_0, P_i определяют вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, и соотношение (3.20) есть σ-имманентное выражение для скалярного произведения $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)$ двух векторов. Тогда соотношение

(3.19) есть определитель Грама для n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $\quad i = 1, 2, \ldots n$, и величина $\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}/n!$ есть евклидов объем $(n+1)$-эдра с вершинами в точках $\mathcal{P}^n$.

Теперь мы можем сформулировать в терминах мировой функции необходимые и и достаточные условия того, что Σ-пространство является n-мерным евклидовым пространством

I.

$$\Sigma(P, Q) = \Sigma(Q, P), \qquad P, Q \in \Omega \tag{3.24}$$

II.

$$\exists \mathcal{P}^n \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_{n+1}(\Omega^{n+2}) = 0, \tag{3.25}$$

III.

$$\Sigma(P, Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)[x_i(P) - x_i(Q)][x_k(P) - x_k(Q)], \qquad \forall P, Q \in \Omega, \tag{3.26}$$

где величины $x_i(P)$, $x_i(Q)$ определяются соотношениями

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad x_i(Q) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}), \qquad i = 1, 2, ...n \tag{3.27}$$

Контравариантные составляющие $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ метрического тензора определяются ковариантными составляющими $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ с помощью соотношений

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(\mathcal{P}^n) g^{kl}(\mathcal{P}^n) = \delta_i^l, \qquad i, l = 1, 2, \ldots n, \tag{3.28}$$

где ковариантные составляющие $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$ определяются соотношениями

$$g_{ik}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k), \qquad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{3.29}$$

IV. Соотношения

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = x_i, \qquad x_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{3.30}$$

рассматриваемые как уравнения для определения $P \in \Omega$, всегда имеют одно и только одно решение.

Замечание 3.1 *Условие (3.25) есть следствие условия (3.26). Оно сформулировано в виде специального условия для того, чтобы определение размерности было отделено от определения системы координат.*

Условие II определяет размерность пространства. Условие III описывает σ-имманентно свойства скалярного σ-произведения собственно евклидова пространства. Задавая $n + 1$ точек $\mathcal{P}^n$, удовлетворяющих условию II, мы определяем n-мерный базис векторов в евклидовом пространстве. Соотношения

(3.29), (3.28) определяют ковариантные и контравариантные составляющие метрического тензора, а соотношения (3.27) определяют ковариантные координаты точек P и Q в этом базисе. Соотношение (3.26) определяет выражение для Σ-функции от двух произвольных точек в терминах координат этих точек. Наконец, условие IV описывает непрерывность множества Ω и возможность построения многообразия. Необходимость условий I – IV для евклидовости Σ-пространства очевидна. Можно доказать их достаточность [5]. Связь условий I – IV с евклидовостью σ-пространства может быть сформулирована в виде теоремы

Теорема 3.1 *Σ-пространство $V = \{\Sigma, \Omega\}$ есть n-мерное евклидово пространство, если и только если выполнены σ-имманентные условия I – IV.*

Замечание 3.2 *Для того, чтобы σ-пространство было собственно евклидовым, собственные значения матрицы $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $\quad i,k = 1,2,\ldots n$ должны иметь один и тот же знак. В противном случае оно будет псевдоевклидовым.*

Теорема означает, что достаточно знать мировую функцию (метрику), чтобы построить евклидову геометрию. Понятия топологического пространства и кривой, которые используются обычно в метрической геометрии для увеличения ее содержательности, оказываются избыточными в том смысле, что они не нужны для построения геометрии. Доказательство этой теоремы можно найти в [5].

Определение 3.8 *Два мультивектора n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$, $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ являются нейтрально коллинеарными (n-коллинеарными) $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \parallel_{(\mathrm{n})} \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$, если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})(\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}|^2 \tag{3.31}$$

Определение 3.9 *Мультивектор n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ f-коллинеарен мультивектору n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ $\left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \parallel_{(\mathrm{f})} \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}\right)$, если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})^2 = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}|^2 \tag{3.32}$$

Определение 3.10 *Мультивектор n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ p-коллинеарен мультивектору n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ $\left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \parallel_{(\mathrm{p})} \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}\right)$, если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n})^2 = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}|^2 \tag{3.33}$$

Здесь индексы "f" и "p" ассоциируются соответственно с понятиями "future" и "past".

В симметричной геометрии есть только один тип коллинеарности, потому что все три вышеупомянутые типа коллинеарности совпадают в симметричной T-геометрии. Свойство нейтральной коллинеарности коммутативно, т.е. если $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \parallel_{(\mathrm{n})} \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$, то $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \parallel_{(\mathrm{n})} \overrightarrow{\mathcal{P}^n}$. Свойство p-коллинеарности и f-коллинеарности, вообще говоря, некоммутативно. Вместо него в соответствии с (3.32) и (3.33) получаем, что если $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \parallel_{(\mathrm{p})} \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$, то $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \parallel_{(\mathrm{f})} \overrightarrow{\mathcal{P}^n}$.

Определение 3.11 . *Мультивектор n-ого порядка* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ *f-параллелен мультивектору n-ого порядка* $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ $\left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\uparrow\uparrow_{(\mathrm{f})}\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}\right)$, *если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|\cdot|\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}| \tag{3.34}$$

Мультивектор n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ *f-антипараллелен мультивектору n-ого порядка* $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ $\left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\uparrow\downarrow_{(\mathrm{f})}\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}\right)$, *если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|\cdot|\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}| \tag{3.35}$$

Определение 3.12 *Мультивектор n-ого порядка* $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ *p-параллелен мультивектору n-ого порядка* $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ $\left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\uparrow\uparrow_{(\mathrm{p})}\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}\right)$, *если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|\cdot|\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}| \tag{3.36}$$

Мультивектор n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ *p-параллелен мультивектору n-ого порядка* $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ $\left(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\uparrow\uparrow_{(\mathrm{p})}\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}\right)$, *если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) = -|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|\cdot|\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}| \tag{3.37}$$

f-параллелизм и p-параллелизм связаны следующим образом. Если $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}\uparrow\uparrow_{(\mathrm{p})}\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$, то $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}\uparrow\uparrow_{(\mathrm{f})}\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и наоборот.

Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \overrightarrow{\mathcal{P}^1}$ так же как вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \overrightarrow{\mathcal{Q}^1}$ суть мультивекторы первого порядка. Если $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\uparrow\uparrow_{(\mathrm{f})}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, то $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\uparrow\downarrow_{(\mathrm{f})}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\uparrow\downarrow_{(\mathrm{f})}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_0$

4 Геометрические объекты в Σ-пространстве. Трубки и их свойства.

Простейший геометрический объект в Т-геометрии есть трубка n-ого порядка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, определяемая ее каркасом $\mathcal{P}^n$. Трубка есть аналог n-мерной евклидовой плоскости, которая тоже определяется $n+1$ точками $\mathcal{P}^n$, не принадлежащими к одной $(n-1)$-мерной плоскости.

Определение 4.1 *Σ-подпространствао n-ого проядка* $M(\mathcal{P}^n) = \mathcal{P}^n$ *ненулевой длины* $|M(\mathcal{P}^n)|^2 = |\mathcal{P}^n|^2 = F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0$ *определяет геометрический объект* $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, *называемый трубкой n-ого порядка, с помощью соотношения*

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \equiv \mathcal{T}_{\mathcal{P}^n} = \left\{P_{n+1}|F_{n+1}\left(\mathcal{P}^{n+1}\right) = 0\right\}, \qquad P_i\in\Omega, \qquad i = 0,1\ldots n+1, \tag{4.1}$$

где функция F_n *определена соотношениями (3.18) – (3.20).*

Форма трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ не зависит от порядка точек мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$. Базовые точки $\mathcal{P}^n$, определяющие трубку $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^n}$ принадлежат к $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^n}$.

Трубка первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ может быть определена с помощью понятия n-коллинеарности (3.31)

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mathcal{P}^1) &\equiv \mathcal{T}_{(\mathrm{n})P_0P_1} = \left\{P_2|F_2(\mathcal{P}^2)=0\right\} \equiv \left\{P_2\left|\overrightarrow{P_0P_1}||_{(\mathrm{n})}\overrightarrow{P_0P_2}\right.\right\} \\ &\equiv \left\{P_2\left|\ |\overrightarrow{P_0P_1}|^2|\overrightarrow{P_0P_2}|^2-\left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0P_2}\right)\left(\overrightarrow{P_0P_2}.\overrightarrow{P_0P_1}\right)=0\right.\right\} \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Поскольку имеются понятия f-коллинеарности и p-коллинеарности, то можно определить также f-трубку и p-трубку первого порядка на основе этих коллинеарностей. f-трубка первого порядка определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{(\mathrm{f})P_0P_1} = \left\{R\left|\overrightarrow{P_0P_1}||_{(\mathrm{f})}\overrightarrow{P_0R}\right.\right\} = \left\{R\left|\ |\overrightarrow{P_0P_1}|^2|\overrightarrow{P_0R}|^2-\left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0R}\right)^2=0\right.\right\} \qquad (4.3)$$

p-трубка первого порядка определяется следующим образом

$$\mathcal{T}_{(\mathrm{p})P_0P_1} = \left\{R\left|\overrightarrow{P_0P_1}||_{(\mathrm{p})}\overrightarrow{P_0R}\right.\right\} = \left\{R\left|\ |\overrightarrow{P_0P_1}|^2|\overrightarrow{P_0R}|^2-\left(\overrightarrow{P_0R}.\overrightarrow{P_0P_1}\right)^2=0\right.\right\} \qquad (4.4)$$

В симметричной Т-геометрии все три трубки (4.2) – (4.4) совпадают. В несимметричной геометрии они, вообще говоря, различны. Трубки (4.2), (4.3), (4.4) можно разделить на части, каждая из которых описывается одним из множителей в выражениях (4.2) – (4.4).

Во всех трех случаях факторизация выражений

$$F_{(\mathrm{f})}(P_0,P_1,R) = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|^2\left|\overrightarrow{P_0R}\right|^2-\left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0R}\right)^2$$

$$F_{(\mathrm{p})}(P_0,P_1,R) = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|^2\left|\overrightarrow{P_0R}\right|^2-\left(\overrightarrow{P_0R}.\overrightarrow{P_0P_1}\right)^2,$$

$$F_{(\mathrm{n})}(P_0,P_1,R) = \left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|^2\left|\overrightarrow{P_0R}\right|^2-\left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0R}\right)\left(\overrightarrow{P_0R}.\overrightarrow{P_0P_1}\right) \qquad (4.5)$$

имеет один и тот же вид

$$F_{(\mathrm{q})}(P_0,P_1,R) = -F_{(\mathrm{q}0)}F_{(\mathrm{q}1)}F_{(\mathrm{q}2)}F_{(\mathrm{q}3)} \qquad (4.6)$$

Здесь индекс q пробегает значения f,p,n, и выражения $F_{(\mathrm{q})}(P_0,P_1,R)$, $q=f,p,n$ факторизуются одинако

$$F_{(\mathrm{q}0)} = F_{(\mathrm{q}0)}(P_0,P_1,R) = \sqrt{G_{0R}}+\sqrt{G_{01}}+\sqrt{G_{1R}-\eta_{\mathrm{q}}} \qquad (4.7)$$

$$\begin{aligned}F_{(\mathrm{q}1)} &= F_{(\mathrm{q}1)}(P_0,P_1,R) = \sqrt{G_{0R}}-\sqrt{G_{01}}+\sqrt{G_{1R}-\alpha_{\mathrm{q}}\eta_{\mathrm{q}}} \\ F_{(\mathrm{q}2)} &= F_{(\mathrm{q}2)}(P_0,P_1,R) = \sqrt{G_{0R}}+\sqrt{G_{01}}-\sqrt{G_{1R}-\eta_{\mathrm{q}}} \qquad (4.8) \\ F_{(\mathrm{q}3)} &= F_{(\mathrm{q}3)}(P_0,P_1,R) = \sqrt{G_{0R}}-\sqrt{G_{01}}-\sqrt{G_{1R}-\alpha_{\mathrm{q}}\eta_{\mathrm{q}}}\end{aligned}$$

где для краткости используются обозначения

$$G_{ik} = G(P_i, P_k), \qquad A_{ik} = A(P_i, P_k), \qquad i, k = 0, 1$$
$$G_{iR} = G(P_i, R), \qquad A_{iR} = A(P_i, R), \qquad i = 0, 1$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mathrm{f}} &= -\eta_{\mathrm{p}} = A_{10} + A_{0R} + A_{R1}, \qquad \eta_{\mathrm{n}} = \frac{\eta_{\mathrm{f}}^2}{\sqrt{4G_{01}G_{0R} + \eta_{\mathrm{f}}^2} + 2\sqrt{G_{01}G_{0R}}} \\ \alpha_{\mathrm{p}} &= \alpha_{\mathrm{f}} = 1, \qquad \alpha_{\mathrm{n}} = -1 \end{aligned} \tag{4.9}$$

В симметричной Т-геометрии, когда $A(P,Q) = 0, \quad \forall P, Q \in \Omega$, $\eta = 0$, и все выражения (4.8), для $F_{(\mathrm{n}i)}, F_{(\mathrm{f}i)}, F_{(\mathrm{p}i)}, \quad i = 0, 1, 2, 3$ совпадают.

Факторизации (4.6) – (4.8) определяют разбиение трубок на сегменты. Как следует из (4.9) $\eta_{\mathrm{p}} = \eta_{\mathrm{f}} = \eta_{\mathrm{n}} = 0$, если $R = P_0$, или $R = P_1$. Тогда легко увидеть, что

$$\begin{aligned} P_0, P_1 \in \mathcal{T}_{(\mathrm{q})[P_0P_1]} &= \left\{R | F_{(\mathrm{q}1)}(P_0, P_1, R) = 0\right\} \\ &= \left\{R | \sqrt{G_{0R}} - \sqrt{G_{01}} + \sqrt{G_{1R} - \alpha_{\mathrm{q}}\eta_{\mathrm{q}}} = 0\right\} \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} P_0 \in \mathcal{T}_{(\mathrm{q})P_0]P_1} &= \left\{R | F_{(\mathrm{q}2)}(P_0, P_1, R) = 0\right\} \\ &= \left\{R | \sqrt{G_{0R}} + \sqrt{G_{01}} - \sqrt{G_{1R} - \eta_{\mathrm{q}}} = 0\right\} \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} P_1 \in \mathcal{T}_{(\mathrm{q})P_0[P_1} &= \left\{R | F_{(\mathrm{q}3)}(P_0, P_1, R) = 0\right\} \\ &= \left\{R | \sqrt{G_{0R}} - \sqrt{G_{01}} - \sqrt{G_{1R} - \alpha_{\mathrm{q}}\eta_{\mathrm{q}}} = 0\right\} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Сегмент трубки

$$\mathcal{T}_{(\mathrm{q}0)P_0P_1} = \left\{R | F_{(\mathrm{q}0)}(P_0, P_1, R) = 0\right\} \tag{4.13}$$

определяемый (4.7), вообще, не содержит базисных точек P_0, P_1. $\mathcal{T}_{(\mathrm{q}0)P_0P_1} = \emptyset$ для любой времениподобной трубки $\mathcal{T}_{P_0P_1}$. В соотношениях (4.10) – (4.13) индекс q пробегает значения f, p, n. Значения величин η_{q}, α_{q} определяются соотношениями (4.9).

Сегменты трубки можно классифицировать по числу базисных точек P_0, P_1, принадлежащих сегменту. Сегмент $\mathcal{T}_{(\mathrm{q})[P_0P_1]}$, содержащий две базисные точки, будем называть внутренним сегментом трубки. Сегменты $\mathcal{T}_{(\mathrm{q})P_0[P_1}$ и $\mathcal{T}_{(\mathrm{q})P_0]P_1}$ содержат по одной базисной точке. Их мы будем называть внешними сегментами трубкиб или лучами трубки, направленными соответственно вдоль векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0$. Сегмент $\mathcal{T}_{(\mathrm{q}0)P_0P_1}$, который не содержит базисных точек, будем называть нулевым сегментом. Как правило он пуст.

В геометрии Минковского времениподобная трубка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, определяемая времениподобным вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, есть прямая, проходящая через точки P_0 и P_1. $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ есть сегмент $[P_0, P_1]$ прямой между точками P_0 и P_1. Лучи трубки $\mathcal{T}_{P_0[P_1}$, $\mathcal{T}_{P_0]P_1}$ суть лучи прямой $[P_1, \infty)$ и $(-\infty, P_0]$. Нулевой сегмент $\mathcal{T}_{(0)P_0P_1}$ пуст.

Определение 4.2 *Сечение $\mathcal{S}_{n;P}$ трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ в точке $P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ минимально, если $\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \{P\}$*

Определение 4.3 *Трубка первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ вырождена, если ее сечение в любой точке $P \in \mathcal{T}_{P_0P_1}$ минимально.*

Минимальность сечения трубки первого порядка означает, что трубка первого порядка вырождается в кривую, и любое ее сечение состоит из одной точки. Это означает, что имеется только один вектор $\overrightarrow{P_0R}$, $R \in \mathcal{T}_{P_0P_1}$ фиксированной длины, который параллелен или антипараллелен вектору $\overrightarrow{P_0P_1}$. Поскольку в несимметричной Т-геометрии есть несколько видов параллелизма, то имеется, вообще говоря, несколько видов вырождения. В симметричной Т-геометрии есть только один вид вырождения.

Определение 4.4 *Σ-пространство $V = \{\Sigma, \Omega\}$ вырождено на множестве $\mathcal{T}$ трубок первого порядка, если множество $\mathcal{T}$ содержит только вырожденные трубки $\mathcal{T}_{P_0P_1}$.*

Определение 4.5 *Σ-пространство $V = \{\Sigma, \Omega\}$ является локально f-вырожденным, если все трубки первого порядка $\mathcal{T}_{(\mathrm{f})P_0P_1}$ вырождены.*

Определение 4.6 *Σ-пространство $V = \{\Sigma, \Omega\}$ локально p-вырождено, если все трубки первого порядка $\mathcal{T}_{(\mathrm{p})P_0P_1}$ вырождены.*

Определение 4.7 *Σ-пространство $V = \{\Sigma, \Omega\}$ локально n-вырождено, если все трубки первого порядка $\mathcal{T}_{(\mathrm{n})P_0P_1} \equiv \mathcal{T}_{P_0P_1}$ вырождены.*

Заметим, что риманово пространство, рассматриваемое как Σ-пространство, является локально вырожденным.

5 Невырожденные трубки в пространстве-времени и их интерпретация

Невырожденность трубок первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ означает, что трубка не является одномерной кривой, хотя ее евклидовым аналогом является прямая. В пространственно-временнóй геометрии Минковского геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ времениподобная прямая описывает мировую линию свободной частицы. Следует ожидать, что невырожденная трубка первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ также описывает свободную частицу в невырожденной пространственно-временнóй геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$.

Будем описывать σ-имманеннтно частицу массы m в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Мировая линия частицы есть ломаная линия $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$, состоящая из из прямолинейных внутренних сегментов $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2...$

$$\mathcal{T}_{\mathrm{br}} = \bigcup_i \mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} \tag{5.1}$$

Предполагается, что все сегменты $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ имеют одну и ту же длину μ, которая пропорциональна массе m частицы.

$$m = b\mu, \qquad b = \mathrm{const}, \tag{5.2}$$

где b есть некоторая универсальная постоянная, преобразующая длину сегмента в его массу. Импульс $\mathbf{p}_i$ частицы на сегменте $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ определяется соотношением

$$(\mathbf{p}_i.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = bc\,(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)\,, \qquad \forall Q_0, Q_1 \in \mathbb{R}^4 \tag{5.3}$$

где c есть скорость света. Это означает, что импульс $\mathbf{p}_i$ пропорционален вектору $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$, определяющему внутренний сегмент $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$. Это можно записать символически в виде

$$\mathbf{p}_i = bc\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}, \qquad |\mathbf{p}_i|^2 = b^2c^2\mu^2 = m^2c^2, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2... \tag{5.4}$$

Сегмент $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$ определяется соотношением (4.10). В случае геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, так же как в случае симметричной T-геометрии получаем

$$\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]} = \left\{R|\sqrt{G\,(P_i, P_{i+1})} - \sqrt{G\,(P_i, R)} - \sqrt{G\,(R, P_{i+1})}\right\} \tag{5.5}$$

Формулы (5.1) – (5.5) осуществляют σ-имманентное описание мировой линии частицы. Это означает, что эти соотношения (5.1) – (5.5) описывают мировую трубку частицы в любой симметричной T-геометрии.

Если частица свободная, то следует добавить условие параллельности $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}$:

$$(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}.\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}) = |\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}| \cdot |\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}|\,, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2... \tag{5.6}$$

В $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ соотношения (5.1) – (5.6) описывают σ-имманентно мировую линию свободной частицы массы m. Это будет времениподобная прямая линия, потому что в геометрии Минковского есть только один времениподобный вектор $\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}$ длины μ, который параллелен вектору $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$. Тогда, если вектор $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ фиксирован, точка $\mathbf{P}_{i+2}$ определяется однозначно. Это означает, что если один сегмент, например, $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ зафиксирован, то положение всех остальных сегментов $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2...$ и вся ломаная трубка $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$ определяются однозначно. Другими словами, движение свободной частицы в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ детерминировано.

Уравнения (5.1) – (5.6), записанные в σ-имманентном виде, определяют мировую трубку свободной частицы в любой симметричной T-геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$. Рассмотрим случай, когда пространственно-временна́я геометрия симметрична и невырождена. Тогда имеется много времениподобных векторов $\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}$ длины μ, которые параллельны вектору $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$. При фиксированном векторе $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$, точка P_{i+2} не определяется однозначно. Тогда при фиксированном сегменте $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ положения всех других сегментов $\mathcal{T}_{[P_iP_{i+1}]}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2...$ и вся ломаная трубка $\mathcal{T}_{\rm br}$ не определяются однозначно. Это означает, что мировая трубка свободной частицы стохастическая.

Рассмотрим случай геометрии $\mathcal{G}_{\rm D}$ с симметричной мировой функцией

$$\mathcal{G}_{\rm D}: \qquad G = \Sigma = \Sigma_{\rm M} + D\left(\Sigma_{\rm M}\right) \tag{5.7}$$

$$D\left(\Sigma_{\rm M}\right) = \left\{ \begin{array}{cc} d & \text{if } \ \sigma_0 < \Sigma_{\rm M} \\ \frac{d}{\sigma_0}\Sigma_{\rm M} & \text{if } \ 0 < \Sigma_{\rm M} < \sigma_0 \\ 0 & \text{if } \ \Sigma_{\rm M} < 0 \end{array} \right. , \qquad d = \frac{\hbar}{2bc} \tag{5.8}$$

где c есть скорость света, $\hbar$ есть квантовая постоянная, а постоянная b определяется соотношением (5.2). Величина $\sigma_0 \approx d \approx 10^{-20}$см. Функция D есть функция дисторсии, а постоянная d есть интегральная дисторсия. Функция дисторсии есть величина, ответственная за невырожденность пространственно-временнóй геометрии $\mathcal{G}_{\rm D}$. Геометрия $\mathcal{G}_{\rm D}$, описываемая мировой функцией (5.7), (5.8), однородна и изотропна. Внутренний сегмент $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ имеет форму полой трубки. Радиус R трубки примерно равен $R \approx \sqrt{3d/2}$. более точно форма трубки описывается соотношением [13]

$$R^2\left(\tau\right) = \frac{3}{2}d + \frac{2\mu^2 d}{\mu^2 - 2d}\left(\tau - \frac{1}{2}\right)^2, \qquad \frac{\sqrt{2d}}{\mu} < \tau < 1 - \frac{\sqrt{2d}}{\mu} \tag{5.9}$$

где $R\left(\tau\right)$ есть радиус сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ трубки как функция параметра τ вдоль оси этого сегмента ($\tau = 0$ в точке P_0, и $\tau = 1$ в точке P_1). μ есть длина сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$.

Векторы $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ и $\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}$ параллельны в $\mathcal{G}_{\rm D}$. Но они не являются параллельными в $\mathcal{G}_{\rm M}$. Угол $\vartheta_{\rm D}$ между $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ и $\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}$ равен 0, потому что

$$\cosh\vartheta_{\rm D} = \frac{\left(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}.\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}\right)}{\mu^2} = 1 \tag{5.10}$$

В $\mathcal{G}_{\rm M}$ угол $\vartheta_{\rm M}$ между $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}$ и $\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}$ определяется соотношением

$$\cosh\vartheta_{\rm M} = \frac{\left(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}.\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}\right)_{\rm M}}{\left|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\right|_{\rm M}\cdot\left|\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}\right|_{\rm M}} = \frac{\left(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}.\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{P}_{i+2}\right) + d}{\mu^2 - 2d} \tag{5.11}$$

где индекс "M" означает, что соответсвующая величина вычислена в $\mathcal{G}_{\rm M}$. Принимая во внимание (5.10) и предполагая, что $\sqrt{d} \ll \mu$, получаем из (5.11)

$$\cosh\vartheta_{\rm M} = 1 + \frac{3d}{\mu^2}, \qquad \vartheta_{\rm M}^2 = \frac{6d}{\mu^2} \tag{5.12}$$

Угол $\vartheta_{\rm M}$ описывает интенсивность стохастичности движения частицы. Диффузионное смещение λ частицы, определяемое стохастичностью, описывается величиной

$$\lambda = \mu\left\langle\vartheta_{\rm M}^2\right\rangle \approx \frac{3\hbar}{b\mu c} = \frac{3\hbar}{mc}$$

что довольно близко к комптоновской длине волны частицы.

Можно увидеть из (5.12), что эта стохастичность велика для частиц малой массы $m = b\mu$. Это довольно неожиданно, потому что имея дело с общей теорией относительности, мы привыкли думать, что влияние пространственно-временно́й геометрии на движение частицы не зависит от ее массы. Эта зависимость (5.12) от массы частицы есть следствие геометризации массы в невырожденной Т-геометрии. В самом деле, геометрическая масса μ частицы зависит от формы мировой трубки (5.1). Геометрическая масса μ есть расстояние между соседними точками перетяжки P_i и P_{i+1}, где радиус трубки обращается в нуль. В $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ этот радиус равен нулю везде, и масса не может быть определена по форме мировой трубки (линии).

Геометризация массы частицы – очень важное явление, которое существенно для эффективного описания физических явлений в микромире.

6 Динамика частицы в невырожденной пространственно-временно́й геометрии

В пространственно-временно́й геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ движение частицы детерминировано, и можно описывать движение отдельной частицы, написав динамические уравнения для ее мировой линии. В $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ это невозможно из-за стохастичности мировой трубки. В $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ используется статистический метод описания движения частицы. Этот метод детально описан в работах [14, 15]. Здесь мы рассмотрим только характерные черты этого метода, которые существенны для понимания геометрической природы нерелятивистских квантовых явлений.

Рассмотрим в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ детерминированную динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, состоящую из детерминированной частицы. Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ описывается функцией Лагранжа $L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, где $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, x^3\}$ – координаты частицы в некоторой инерциальной системе координат, а $\dot{\mathbf{x}}$ – ее скорость. По определению чистый статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ есть такой ансамбль, для которого функция распределения $F_{\mathrm{p}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]: \qquad F_{\mathrm{p}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \rho(t, \mathbf{x})\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(t, \mathbf{x})) \tag{6.1}$$

где $\rho(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \{P_\alpha(t, \mathbf{x})\}$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть функции только времени t и $\mathbf{x}$. Другими словами, чистый ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ есть динамическая система, рассматриваемая в конфигурационном пространстве координат $\mathbf{x}$. Это флюидоподобная непрерывная динамическая система, описываемая действием [15]

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]: \quad \mathcal{A}[j, \varphi, \boldsymbol{\xi}] = \int \{L(x^0, \mathbf{x}, \mathbf{j}/j^0)\, j^0 - b_0 j^i [\partial_i \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \partial_i \xi_\alpha]\} \mathrm{d}^4 x, \tag{6.2}$$

где $j^i = \{j^0, \mathbf{j}\}, \varphi, \boldsymbol{\xi}$ суть зависимые переменные, которые рассматриваются как функции от $x = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{t, \mathbf{x}\}$. $L(x^0, \mathbf{x}, \mathbf{j}/j^0)$ есть функция Лагранжа для

$\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. b_0 есть произвольная постоянная и $g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть произвольные функции аргумента $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Эти функции описывают начальное состояние статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$. 4-ток j^i, описывает течение флюида. Действие (6.2) как и динамические уравнения, порождаемые этим действием, содержат производные $j^k\partial_k$ только в направлении вектора j^i. Это означает, что система динамических уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих отдельную динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Таким образом, функция Лагранжа L описывает обе динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ и $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$.

Если динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ подвергается влиянию некоторого стохастического агента, она превращается в стохастическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, и параметры статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ перестают быть постоянными. Они становятся функциями состояния ансамбля j^i и его производных $\partial_k j^i$. Действие для $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ перестает зависеть только от $j^k\partial_k$. В этом случае динамические уравнения содержат производные во всех направлениях, и система динамических уравнений уже не может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Физически это означает, что не существует динамических уравнений для отдельной системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, хотя они существуют для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{p}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$.

Итак, если мы хотим рассматривать детерминированную динамическую систему и стохастическую систему как разные частные случаи динамической системы и описывать их динамику одним и тем же способом, то нам следует описывать динамику чистого статистического ансамбля, а не динамику отдельной системы. В этом смысле понятие динамики чистого статистического ансамбля является более общим и фундаментальным понятием, чем понятие динамики отдельной системы. Подобная идея не является новой [16].

Если динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ есть свободная частица, ее функция Лагранжа имеет вид

$$L(\dot{\mathbf{x}}) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{6.3}$$

Функция Лагранжа зависит только от параметра m. В случае пространственно-временно́й геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$ масса m зависит от состояния ансамбля $\rho = j^0$. При этом масса m видоизменяется следующим образом [1]

$$m^2 \to m_{\mathrm{q}}^2 = m^2 + \frac{\hbar^2}{4c^2}(\boldsymbol{\nabla}\ln\rho)^2, \qquad \rho = j^0 \tag{6.4}$$

Подставим (6.3), (6.4) в действие (6.2). Получаем в нерелятивистском приближении

$$\mathcal{A}[j,\varphi,\boldsymbol{\xi}] = \int\{-\rho mc^2 + \frac{m\mathbf{j}^2}{2\rho} - \frac{\hbar^2\rho}{8m}(\boldsymbol{\nabla}\ln\rho)^2 - b_0 j^i[\partial_i\varphi + g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\partial_i\xi_{\alpha}]\}\mathrm{d}^4x, \tag{6.5}$$

Всякая идеальная жидкость может быть описана в терминах волновой функции [14]. Описывая действие (6.5) в терминах волновой функции и рассматривая специальный случай, когда течение флюида потенциально, и волновая функция имеет только одну составляющую, получаем вместо (6.5)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] &= \int\left\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi-mc^2\psi^*\psi\right.\\ &\left.+\frac{b_0^2}{8m\psi^*\psi}(\nabla(\psi^*\psi))^2-\frac{\hbar^2}{8m\psi^*\psi}(\nabla(\psi^*\psi))^2\right\}\mathrm{d}^4x, \qquad (6.6)\end{aligned}$$

Последний член в действии (6.6) описывает влияние геометрической стохастичности. Этот член содержит квантовую постоянную $\hbar$. Если положить $\hbar=0$ в (6.6), действие начинает описывать статистический ансамбль свободных детерминированных частиц. Действие (6.6) порождает нелинейное динамическое уравнение для волновой функции ψ. Динамическое уравнение становится линейным дифференциальным уравнением, если положить $b_0=\hbar$, потому что в этом случае два последних члена в (6.6) компенсируют друг друга. Заметим, что постоянная b_0 есть произвольная константа интегрирования, которая может принимать любое значение и, в частности, $b_0=\hbar$. После этой подстановки действие (6.6) принимает вид

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*]=\int\left\{\frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi-mc^2\psi^*\psi\right\}\mathrm{d}^4x \qquad (6.7)$$

Теперь все члены действия стали квантовыми, потому что они содержат квантовую постоянную. Теперь уже нельзя получить действие для статистического ансамбля детерминированных (классических) частиц, положив $\hbar=0$, как это можно было сделать в действии (6.6). Теперь нельзя подавить геометрическую (квантовую) стохастичность, положив $\hbar=0$. В действии (6.7) квантовые свойства (постоянная $\hbar$) приписываются тем членам, которые были чисто динамическими в (6.6), и теперь нельзя указать член, ответственный за квантовые эффекты. Это есть цена, которая платится за линейность динамического уравнения.

Возможность компенсации двух последних членов (динамического и квантового) в действии (6.6) связана с нерелятивистским характером функции Гамильтона для классической частицы, которая имеет вид $H_{\mathrm{nr}}=mc^2+\mathbf{p}^2/(2m)$. Например, если нерелятивистскую функцию Гамильтона H_{nr} заменить на релятивистскую $H_{\mathrm{r}}=\sqrt{m^2c^4+\mathbf{p}^2c^2}$, отождествление $b_0=\hbar$ не приводит к линейному динамическому уравнению для волновой функции.

С геометрической точки зрения линейность динамического уравнения для волновой функции имеет место только в нерелятивистском случае. С этой точки зрения представляется сомнительным, что линейность следует использовать как принцип в релятивистской квантовой теории, хотя с практической точки зрения линейность – это очень удобное свойство динамического уравнения.

Таким образом, отбрасывая необоснованные ограничения на геометрию и используя пространственно-временну́ю геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{D}}$, можно непринужденно объяснить нерелятивистские квантовые эффекты. Нет никакой необходимости изобретать и использовать квантовые принципы. Квантовые эффекты оказываются следствием квантовой (или геометрической) стохастичности, порожденной невырожденным характером пространственно-временно́й геометрии.

Свойства мировой функции (5.8) в окресности совпадающих точек ($0 < \Sigma_{\mathrm{M}} < \sigma_0$) не имеют значения для стохастического поведения частиц, потому что оно зависит только от интегральной дисторсии d. С этой точки зрения применение методов дифференциальной геометрии к исследованию свойств мировой функции бесполезно, потому что дифференциальная геометрия изучает свойства мировой функции $\Sigma(x, x')$ в пределе, когда $x \to x'$. Однако, методы дифференциальной геометрии полезны для исследования антисимметричной составляющей $A(x, x')$ несимметричной мировой функции. Мы увидим далее, что антисимметричная составляющая $A(x, x')$ порождает поля в пространстве-времени и, как правило, вызывает дополнительную невырожденность геометрии. Другими словами, $A(x, x')$ порождает не только взаимодействие между частицами, но их дополнительную стохастичность. В этом смысле поля, порождаемые $A(x, x')$, являются квантовыми полями.

7 Несимметричная геометрия на многообразии

Мы рассмотрели Т-геометрию в бескоординатной форме. Но чтобы обнаружить связь между Т-геометрией и обычной дифференциальной геометрией, нужно ввести координаты и рассмотреть Т-геометрию на многообразии. Это важно также с точки зрения использования Т-геометрии в качестве возможной геометрии пространства-времени. Несимметричная Т-геометрия на многообразии может рассматриваться как традиционная симметричная геометрия (например, риманова) с дополнительными силовыми полями $a_i(x)$, $a_{ikl}(x)$, порожденными на многообразии антисимметричной составляющей A мировой функции. Проверяя экспериментально существование этих полей, можно определить существует ли антисимметричная составляющая A и как она велика, если она существует.

Пусть каждой точке P можно таким образом приписать $n+1$ вещественных чисел $x = \{x^i\}$, $i = 0, 1, ...n$, что установится одно-однозначное соответствие между точкой P и упорядоченным множеством x из $n + 1$ координат $\{x^i\}$, $i = 0, 1, ...n$. Все точки x образуют множество $\mathcal{M}_{n+1}$. Тогда мировая функция $\Sigma(P, P')$ будет функцией $\Sigma(x, x')$

$$\Sigma : \quad \mathcal{M}_{n+1} \times \mathcal{M}_{n+1} \to \mathbb{R}, \qquad \Sigma(x, x) = 0, \qquad \forall x \in \mathcal{M}_{n+1} \tag{7.1}$$

координат $x, x' \in \mathcal{M}_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ точек $P, P' \in \Omega$. Двухточечные величины (Σ-функция и ее производные) обозначаются в виде общего правила прописными буквами. Одноточечные величины обозначаются строчными буквами.

Пусть функция $\Sigma(x,x')$ многократно дифференцируема. Тогда множество $\mathcal{M}_{n+1}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ может быть названо $(n+1)$-мерным многообразием. Можно дифференцировать $\Sigma(x,x')$ по x^i и по x'^i, образуя двухточечные тензоры. Например,

$$\begin{aligned}\Sigma_{,k}(x,x') &\equiv \frac{\partial}{\partial x^k}\Sigma(x,x'), \qquad \Sigma_{,k'}(x,x')\equiv\frac{\partial}{\partial x'^k}\Sigma(x,x')\\ \Sigma_{,kl'}(x,x') &\equiv \Sigma_{,l'k}(x,x')\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x'^l}\Sigma(x,x'),\end{aligned}$$

суть двухточечные тензоры. Здесь индексы после запятой означают дифференцирование по x^k, если индекс k не имеет штриха, и дифференцирование по x'^k, если индекс k штрихованный. Первый аргумент двухточечной величины обозначается нештрихованной переменной, тогда как второй обозначается – штрихованной. Штрихованные индексы относятся ко второму аргументу, тогда как нештрихованные – к первому.

Ведичина $\Sigma_k\equiv\Sigma_{,k}=\Sigma_{,k}(x,x')$ есть вектор в точке x и скаляр в точке x'. Наоборот, $\Sigma_{k'}\equiv\Sigma_{,k'}=\Sigma_{,k'}(x,x')$ есть вектор в точке x' и скаляр в точке x. Величина $\Sigma_{,kl'}=\Sigma_{,kl'}(x,x')$ есть вектор в точке x и вектор в точке x'. Другие производные не являются тензорами. Например, $\Sigma_{,kl}(x,x')\equiv\Sigma_{,lk}(x,x')\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\Sigma(x,x')$ есть скаляр в точке x', но не является тензором в точке x.

Чтобы сконструировать тензоры высших рангов, введем ковариантные производные. Пусть $\Sigma_{,kl'}\equiv\Sigma_{kl'}\equiv\Sigma_{l'k}$ и $\det||\Sigma_{kl'}||\neq 0$. Величину $\Sigma_{kl'}$ условимся называть ковариантным фундаментальным метрическим тензором. Можно ввести контравариантный фундаментальный метрический тензор $\Sigma^{ik'}\equiv\Sigma^{k'i}$, определив его соотношением

$$\Sigma^{ik'}\Sigma_{lk'}=\delta^i_l \qquad \Sigma^{i'k}\Sigma_{l'k}=\delta^{i'}_{l'} \tag{7.2}$$

Заметим, что величина

$$\tilde\Gamma^i_{kl}(x,x')\equiv\Sigma^{is'}\Sigma_{,kls'}, \qquad \Sigma_{,kls'}\equiv\frac{\partial^3\Sigma}{\partial x^k\partial x^l\partial x'^s} \tag{7.3}$$

есть скаляр в точке x' и символ Кристоффеля в точке x. Наоборот величина

$$\tilde\Gamma^{i'}_{k'l'}(x,x')\equiv\Sigma^{si'}\Sigma_{,k'l's}, \qquad \Sigma_{,k'l's}\equiv\frac{\partial^3\Sigma}{\partial x'^k\partial x'^l\partial x^s} \tag{7.4}$$

есть скаляр в точке x и символ Кристоффеля в точке x'.

Тем же самым способом можно ввести другие символы Кристоффеля на основе функции G

$$\Gamma^i_{kl}(x,x') \equiv G^{is'}G_{,kls'}, \qquad G_{,kls'}\equiv\frac{\partial^3 G}{\partial x^k\partial x^l\partial x'^s}, \qquad G^{is'}G_{,ks'}=\delta^i_k \tag{7.5}$$

$$\Gamma^{i'}_{k'l'}(x,x') \equiv G^{si'}G_{,k'l's}, \qquad G_{,k'l's}\equiv\frac{\partial^3 G}{\partial x'^k\partial x'^l\partial x^s} \tag{7.6}$$

Используя символы Кристоффеля (7.3) - (7.6), можно ввести две ковариантные производные $\tilde{\nabla}_i^{x'}$, $\nabla_i^{x'}$ по координатам x^i и две ковариантные производные $\tilde{\nabla}_{i'}^{x}$, $\nabla_{i'}^{x}$ по координатам x'^i. Например, величины

$$\Sigma_{ik} \equiv \tilde{\nabla}_k^{x'}\tilde{\nabla}_i^{x'}\Sigma \equiv \Sigma_{,i||k} = \Sigma_{,ik} - \tilde{\Gamma}_{ik}^{s}(x,x')\,\Sigma_{,s} = \Sigma_{,ik} - \Sigma^{ls'}\Sigma_{,iks'}\Sigma_{,l} \tag{7.7}$$

$$G_{ik} \equiv \nabla_k^{x'}\nabla_i^{x'}G \equiv G_{,i|k} = G_{,ik} - \Gamma_{ik}^{s}(x,x')\,G_{,s} = G_{,ik} - G^{ls'}G_{,iks'}G_{,l} \tag{7.8}$$

являются скалярами в точке x' и тензорами второго ранга в точке x. Здесь две вертикальные черты обозначают ковариантную производную с символом Кристоффеля $\tilde{\Gamma}_{ik}^{s}$, а одна ветрикальная черта означает ковариантную производную с символом Крисоффеля Γ_{ik}^{s}. Тем же самым путем получаем

$$\Sigma_{i'k'} \equiv \tilde{\nabla}_{k'}^{x}\tilde{\nabla}_{i'}^{x}\Sigma \equiv \Sigma_{,i'||k'} = \Sigma_{,i'k'} - \tilde{\Gamma}_{i'k'}^{s'}\Sigma_{,s'} = \Sigma_{,i'k'} - \Sigma^{l's}\Sigma_{,i'k's}\Sigma_{,l'} \tag{7.9}$$

$$G_{i'k'} \equiv \nabla_{k'}^{x}\nabla_{i'}^{x}G \equiv G_{,i'|k'} = G_{,i'k'} - \Gamma_{i'k'}^{s'}G_{,s'} = G_{,i'k'} - G^{l's}G_{,i'k's}G_{,l'} \tag{7.10}$$

Ковариантные производные $\tilde{\nabla}_k^{x'}$, $\tilde{\nabla}_i^{x'}$ по x коммутируют, так же как и $\nabla_k^{x'}$, $\nabla_i^{x'}$ т.е.

$$\left(\tilde{\nabla}_k^{x'}\tilde{\nabla}_i^{x'} - \tilde{\nabla}_i^{x'}\tilde{\nabla}_k^{x'}\right)T_{ml'}^{sp'} \equiv 0, \qquad \left(\nabla_k^{x'}\nabla_i^{x'} - \nabla_i^{x'}\nabla_k^{x'}\right)T_{ml'}^{sp'} \equiv 0, \tag{7.11}$$

где $T_{ml'}^{sp'}$ есть произвольный тензор в точках x и x'. Нештрихованные индексы ассоциируются с точкой x, а штрихованные – с точкой x'. Ковариантные производные коммутируют, потому что тензоры кривизны Римана-Кристоффеля $\tilde{R}_{i.kl}^{\cdot j}$, $R_{i.kl}^{\cdot j}$ построенные соответственно из символов Кристоффеля $\tilde{\Gamma}_{il}^{s}$ и Γ_{il}^{s} обращаются тождественно в нуль

$$\tilde{R}_{i.lm}^{\cdot s} \equiv \tilde{\Gamma}_{il,m}^{s} - \tilde{\Gamma}_{im,l}^{s} + \tilde{\Gamma}_{il}^{j}\tilde{\Gamma}_{jm}^{s} - \tilde{\Gamma}_{im}^{j}\tilde{\Gamma}_{jl}^{s} \equiv 0 \tag{7.12}$$

$$R_{i.lm}^{\cdot s} \equiv \Gamma_{il,m}^{s} - \Gamma_{im,l}^{s} + \Gamma_{il}^{j}\Gamma_{jm}^{s} - \Gamma_{im}^{j}\Gamma_{jl}^{s} \equiv 0 \tag{7.13}$$

Тождество (7.12) можно проверить прямой подстановкой (7.3) в (7.12).

Ковариантные производные $\tilde{\nabla}'_k x$, $\tilde{\nabla}'_i x$ по x' коммутируют так же как и $\nabla_{k'}^{x}$, $\nabla_{i'}^{x}$. Коммутатативность ковариантных производных $\tilde{\nabla}_i^{x'}$, $\tilde{\nabla}_k^{x'}$ по x для всех значений x' означает, что ковариантные производные $\tilde{\nabla}_i^{x'}$, $\tilde{\nabla}_k^{x'}$ суть ковариантные производные в некоторых плоских пространствах $\tilde{E}_{x'}$. То же самое верно для ковариантных производных $\nabla_i^{x'}$, $\nabla_k^{x'}$, которые являются ковариантными производными в плоских пространствах $E_{x'}$. Пространства $\tilde{E}_{x'}$, $E_{x'}$ ассоциируются соответственно с Σ-пространствами $V = \{\Sigma, \mathcal{M}_{n+1}\}$ и $V_{\mathrm{s}} = \{G, \mathcal{M}_{n+1}\}$, заданными на $\mathcal{M}_{n+1}$ с помощью мировой функции Σ и ее симметричной части G. Любые двухточечные инвариантные величины Σ и G с ненулевыми определителями $\det||\Sigma_{ik'}|| \neq 0$, и $\det||G_{ik'}|| \neq 0$ реализуют два множества отображений. Например, величина Σ порождает отображения $V = \{\Sigma, \mathcal{M}_{n+1}\} \to \tilde{E}_{x'}$, $V \to \tilde{E}_x$. Двухточечная величина G порождает также два множества отображений $V_{\mathrm{s}} = \{G, \mathcal{M}_{n+1}\} \to E_{x'}$, $V_{\mathrm{s}} \to E_x$. Отображения каждого множества маркируются точками x или x' многообразия $\mathcal{M}_{n+1}$. В случае мировой функции G оба множества отображений $V \to E_{x'}$ и $V \to E_x$ совпадают, но в случае мировой функции Σ множества отображений $V \rightarrow \tilde{E}_{x'}$ и $V \rightarrow \tilde{E}_x$, вообще говоря, различны.

Легко видеть, что

$$\tilde{\nabla}_s^{x'} \Sigma_{ik'} = \Sigma_{ik'||s} = \Sigma_{,ik's} - \tilde{\Gamma}_{is}^p \Sigma_{pk'} = \Sigma_{,ik's} - \Sigma^{pl'} \Sigma_{isl'} \Sigma_{pk'} \equiv 0$$

Ковариантные производные имеют следующие свойства

$$\tilde{\nabla}_k^{x'} t_{l'}^{i'}(x') = 0, \qquad \nabla_k^{x'} t_{l'}^{i'}(x') = 0, \qquad \tilde{\nabla}_{k'}^{x} t_l^i(x) = 0 \qquad \nabla_{k'}^{x} t_l^i(x) = 0 \tag{7.14}$$

$$\tilde{\nabla}_s^{x'} \Sigma_{ik'} = \Sigma_{ik'||s} = 0 \qquad \Sigma_{ik'||s'} = 0, \qquad G_{ik'|s} = 0 \qquad G_{ik'|s'} = 0, \tag{7.15}$$

где $t_{l'}^{i'}(x')$ есть произвольный тензор в точке x', и $t_l^i(x)$ есть произвольный тензор в точке x.

Рассмотренные отображения являются мощным инструментом для описания свойств Σ-пространства. Заметим в этой связи, что риманово пространство может рассматриваться как множество бесконечно малых кусков евклидова пространства, склеенных между собой некоторым образом. Способ склейки определяет риманово пространство в том смысле, что различные способы склейки порождают разные римановы пространства. Способ склейки определяется различием метрического тензора в точке x и в соседней точке $x + dx$, где он имеет вид соответственно $g_{ik}(x)$ и $g_{ik}(x + dx)$. Метрический тензор зависит от точки и от выбора системы координат. Довольно сложно разделить эти зависимости от точки и от выбора системы координат. Тем не менее процедура такого разделения хорошо разработана. Она приводит к рассмотрению тензора кривизны, который является индикатором способа склейки.

В случае Σ-пространства рассматривается множество *конечных евклидовых пространств* $E_{x'}$ (вместо бесконечно малых кусков его) и множество отображений $\Sigma \rightarrow E_{x'}$. Здесь "способ склеивания" определяется зависимостью отображения от параметра x' и не зависит от выбора системы координат. Это обстоятельство упрощает исследование. Дифференцируя отображение по параметрам x', получаем локальные характеристики "способа склеивания", которые являются модификацией тензора кривизны. Например, рассматривая коммутаторы производных $\tilde{\nabla}_i^{x'}$ и $\tilde{\nabla}_{i'}^{x}$, можно ввести двухточечный тензор кривизны для Σ-пространства так, как это было сделано для риманова пространства [17, 18]. Мы увидим это в шестом разделе.

Пусть $\tilde{G}_{(x')ik}$ есть метрический тензор в евклидовом пространстве $\tilde{E}_{x'}$ в точке x. Тогда символ Кристоффеля $\tilde{\Gamma}_{kl}^i = \Sigma^{is'} \Sigma_{,kls'}$ в пространстве $\tilde{E}_{x'}$ может быть записан в виде

$$\tilde{\Gamma}_{kl}^i = \Sigma^{is'} \Sigma_{,kls'} = \frac{1}{2} \tilde{G}_{(x')}^{im} \left(\tilde{G}_{(x')km,l} + \tilde{G}_{(x')lm,k} - \tilde{G}_{(x')kl,m} \right) \tag{7.16}$$

где $\tilde{G}_{(x')}^{im}$ суть контравариантные компоненты метрического тензора $\tilde{G}_{(x')ik}$.

Рассмотрим множество уравнений (7.16) как систему линейных дифференциальных уравнений для определения компонентов метрического тензора $\tilde{G}_{(x')ik}$, который предполагается симметричным. Решение этой системы имеет вид

$$\tilde{G}_{(x')ik} = \Sigma_{ip'} \tilde{g}_{(x')}^{p'q'} \Sigma_{kq'} \tag{7.17}$$

где $\tilde{g}_{(x')}^{p'q'} = \tilde{g}_{(x')}^{p'q'}(x')$ есть некоторый симметричный тензор в точке x'. Этот факт может быть проверен прямой подстановкой (7.17) в (7.16). Взяв соотношение (7.17) в совпадающих точках $x = x'$ и обозначая совпадение точек x и x' с помощью квадратных скобок, получаем из соотношения (7.17)

$$\tilde{g}_{(x')}^{p'q'}(x') = \left[\Sigma^{lp'}\right]_{x'} \left[\tilde{G}_{(x')lm}\right]_{x'} \left[\Sigma^{mq'}\right]_{x'} \tag{7.18}$$

или

$$\tilde{G}_{(x')ik} = \Sigma_{ip'} \left[\Sigma^{lp'}\right]_{x'} \left[\tilde{G}_{(x')lm}\right]_{x'} \left[\Sigma^{mq'}\right]_{x'} \Sigma_{kq'} \tag{7.19}$$

Уравнение (7.19) может быть записано в виде

$$\tilde{G}_{(x')ik}(x, x') = \tilde{P}_{(x')i.}^{\;.l'} \tilde{G}_{(x')lm}(x', x') \tilde{P}_{(x')k.}^{\;.m'}, \tag{7.20}$$

$$\tilde{P}_{(x')k.}^{\;.m'} \equiv \tilde{P}_{(x')k.}^{\;.m'}(x, x') \equiv \Sigma_{kq'}(x, x') \Sigma^{mq'}(x', x') \equiv \Sigma_{kq'} \left[\Sigma^{mq'}\right]_{x'} \tag{7.21}$$

Соотношение (7.20) означает, что метрический тензор $\tilde{G}_{(x')ik}$ евклидового пространства $\tilde{E}_{x'}$ в точке x может быть получен как результат параллельного переноса тензора из точки x' в $\tilde{E}_{x'}$ при помощи тензора параллельного переноса $\tilde{P}_{(x')k.}^{\;.m'}$. Параллельный перенос вектора $b_{k'}$ из точки x' в точку x определяется соотношением

$$b_k = \tilde{P}_{(x')k.}^{\;.m'} b_{m'}.$$

Тензор параллельного переноса имеет очевидные свойства

$$\tilde{\nabla}_i^{x'} \tilde{P}_{(x')k.}^{\;.m'} \equiv \tilde{P}_{(x')k.\,||i}^{\;.m'} = 0, \tag{7.22}$$

$$\left[\tilde{P}_{(x')k.}^{\;.m'}\right]_{x'} \equiv \tilde{P}_{(x')k.}^{\;.m'}(x', x') = \delta_{k'}^{m'}. \tag{7.23}$$

Тем же путем можно получить тензор параллельного переноса $\tilde{P}_{(x)k'.}^{\;.m}$ в евклидовом пространстве $\tilde{E}_x$

$$\tilde{P}_{(x)k'.}^{\;.m} \equiv \Sigma_{k'} \left[\Sigma^{mq'}\right]_x \equiv \Sigma_{qk'q}(x, x') \Sigma^{mq'}(x, x) \tag{7.24}$$

описывающий параллельный перенос из точки x в точку x' в $\tilde{E}_x$.

Тем же самым способом можно получить тензор параллельного переноса $P_{(x')k.}^{\;.m'}$ и $P_{(x)k'.}^{\;.m}$ соответственно в евклидовых пространствах $E_{x'}$ и E_x

$$P_{(x')k.}^{\;.m'} \equiv G_{kq'} \left[G^{mq'}\right]_{x'}, \qquad P_{(x)k'.}^{\;.m} \equiv G_{k'q} \left[G^{mq'}\right]_x \tag{7.25}$$

Таким образом, мировая функция Σ-пространства $V = \{\Sigma, \mathcal{M}_{n+1}\}$ и ее симметричная составляющая G определяют евклидовы пространства $\tilde{E}_{x'}$, $\tilde{E}_x$, $E_{x'}$, E_x, отображения V на них и параллельный перенос векторов и тензоров в этих евклидовых пространствах независимо от того, вырождается ли Σ-пространство $V = \{\Sigma, \mathcal{M}_{n+1}\}$ в смысле определений 4.5 – 4.7.

8 Производные мировой функции в точках совпадения x и x'.

Представим мировую функцию в виде (2.7), (2.8). Разложим функции G и A по степеням $\xi^i = x^i - x'^i$. Принимая во внимание соотношения симметрии (2.7), (2.8), получаем

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{2} g_{ik}(x') \xi^i \xi^k + \frac{1}{6} g_{ikl}(x') \xi^i \xi^k \xi^l + \frac{1}{24} g_{iklm}(x') \xi^i \xi^k \xi^l \xi^m + ... && (8.1) \\ &= \frac{1}{2} g_{ik}(x) \xi^i \xi^k - \frac{1}{6} g_{ikl}(x) \xi^i \xi^k \xi^l + \frac{1}{24} g_{iklm}(x) \xi^i \xi^k \xi^l \xi^m + ... && (8.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x, x') &= a_i(x') \xi^i + \frac{1}{2} a_{ik}(x') \xi^i \xi^k + \frac{1}{6} a_{ikl}(x') \xi^i \xi^k \xi^l + ... && (8.3) \\ &= a_i(x) \xi^i - \frac{1}{2} a_{ik}(x) \xi^i \xi^k + \frac{1}{6} a_{ikl}(x) \xi^i \xi^k \xi^l - ... && (8.4) \end{aligned}$$

В соотношениях (8.1) и (8.3) функции $G(x, x')$ и $A(x, x')$ разлагаются в точке x'. В соотношениях (8.2) и (8.4) получаются те же разложения после перестановки $x \leftrightarrow x'$.

Дифференцируя соотношения (8.1) - (8.4) по x и по x' и полагая после этого $x = x'$, получаем соотношения между коэффициентами разложения и выражениями для производных от функций Σ, G, A в пределе совпадения $x = x'$.

После расчетов получаем

$$\begin{aligned} g_{ikl} &= \frac{1}{2}(g_{ik,l} + g_{li,k} + g_{kl,i}), \qquad g_{ik,l} \equiv g_{ik,l}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ik}(x) && (8.5) \\ a_{ik} &= \frac{1}{2}(a_{i,k} + a_{k,i}), \qquad a_{i,k} \equiv a_{i,k}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} a_i(x) && (8.6) \end{aligned}$$

$$a_{iklm} = \frac{1}{2}(a_{ikl,m} + a_{klm,i} + a_{lmi,k} + a_{mik,l} - a_{ik,lm} - a_{lm,ik})$$

Коэффициенты g_{ik}, a_i, a_{ikl} произвольны и симметричны по отношению к перестановке индексов. Используя квадратные скобки для обозначения совпадения $x = x'$ и соотношения (8.5), (8.6), получаем

$$\begin{aligned} [G_{,i}(x, x')] &\equiv [G_{,i}] = [G_{,i'}] = 0, \\ [G_{,ik}(x, x')] &\equiv [G_{,ik}] = [G_{,i'k'}] = g_{ik}, \\ [G_{,i'k}(x, x')] &\equiv [G_{,i'k}] = -g_{ik} \end{aligned} \qquad (8.7)$$

$$\begin{aligned} [G_{,ikl}(x, x')] &\equiv [G_{,ikl}] = [G_{,i'k'l'}] = \frac{1}{2}(g_{ik,l} + g_{li,k} + g_{kl,i}) \\ [G_{,ikl'}(x, x')] &\equiv [G_{,ikl'}] = \frac{1}{2}(g_{ik,l} - g_{li,k} - g_{kl,i}) \\ [G_{,ik'l'}(x, x')] &\equiv [G_{,ik'l'}] = \frac{1}{2}(g_{kl,i} - g_{li,k} - g_{ik,l}) \end{aligned} \qquad (8.8)$$

$$\begin{aligned}
[G_{,iklm}(x,x')] &\equiv [G_{,iklm}] = [G_{,i'k'l'm'}] = g_{iklm} \\
[G_{,iklm'}(x,x')] &\equiv [G_{,iklm'}] = [G_{,i'k'l'm}] = -g_{iklm} + g_{ikl,m} \\
[G_{,ikl'm'}(x,x')] &\equiv [G_{,ikl'm'}] = g_{iklm} - g_{ikl,m} - g_{ikm,l} + g_{ik,ml}
\end{aligned} \tag{8.9}$$

$$[A_{,i}(x,x')] \equiv [A_{,i}] = a_i, \qquad [A_{,i'}(x,x')] \equiv [A_{,i'}] = -a_i \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned}
[A_{,ik}(x,x')] &\equiv [A_{,ik}] = a_{ik} = \frac{1}{2}(a_{i,k} + a_{k,i}) \\
[A_{,ik'}(x,x')] &\equiv [A_{,ik'}] = \frac{1}{2}(a_{i,k} - a_{k,i}) \\
[A_{,i'k'}(x,x')] &\equiv [A_{,i'k'}] = -a_{ik} = -\frac{1}{2}(a_{i,k} + a_{k,i})
\end{aligned} \tag{8.11}$$

$$\begin{aligned}
[A_{,ikl}(x,x')] &\equiv [A_{,ikl}] = a_{ikl} \\
[A_{,ikl'}(x,x')] &\equiv [A_{,ikl'}] = \frac{1}{2}a_{i,kl} + \frac{1}{2}a_{k,il} - a_{ikl} \\
[A_{,ik'l'}(x,x')] &\equiv [A_{,ik'l'}] = -\frac{1}{2}a_{l,ik} - \frac{1}{2}a_{k,il} + a_{ikl}
\end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned}
[A_{,iklm}(x,x')] &\equiv [A_{,iklm}] = a_{iklm} \\
[A_{,iklm'}(x,x')] &\equiv [A_{,iklm'}] = -a_{iklm} + a_{ikl,m} \\
[A_{,ikl'm'}(x,x')] &\equiv [A_{,ikl'm'}] = a_{iklm} - a_{ikl,m} - a_{ikm,l} + a_{ik,lm} \\
[A_{,ik'l'm'}(x,x')] &\equiv [A_{,ik'l'm'}] = -a_{iklm} - a_{klm,i} \\
[A_{,i'k'l'm'}(x,x')] &\equiv [A_{,i'k'l'm'}] = -a_{iklm}
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Коэффициент первого порядка $a_k(x)$ есть ковариантный вектор в точке x. Коэффициент второго порядка $g_{ik}(x)$ есть ковариантный тензор второго ранга в точке x. Коэффициент второго порядка $a_{ik}(x)$ и коэффициент третьего порядка $g_{ikl}(x)$ и $a_{ikl}(x)$ не являются тензорами, вообще говоря. Закон их преобразования при преобразовании координат более сложен.

В соответствии с (2.7), (8.7) и (8.10)

$$[\Sigma_{,i}] = a_i(x), \qquad [\Sigma_{,i'}] = -a_i(x) \tag{8.14}$$

В соответствии с (2.7), (8.7) и (8.11)

$$\begin{aligned}
[\Sigma_{,ik}] &= \sigma_{ik} = g_{ik} + \frac{1}{2}(a_{i,k} + a_{k,i}) \\
[\Sigma_{,i'k'}] &= \sigma_{i'k'} = g_{ik} - \frac{1}{2}(a_{i,k} + a_{k,i}) \\
[\Sigma_{ik'}] &\equiv [\Sigma_{,ik'}] = -\tilde{g}_{ik} = -g_{ik} + \frac{1}{2}(a_{i,k} - a_{k,i})
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Для значения $\left[\Sigma^{ik'}\right]$ величины $\Sigma^{ik'}$ получаем

$$\left[\Sigma^{ik'}\right] = -\tilde{g}^{ik}, \tag{8.16}$$

где $\tilde{g}^{ik}$ определяется соотношением

$$\tilde{g}^{il}\tilde{g}_{ik} = \tilde{g}^{il}\left(g_{ik} - \frac{1}{2}\left(a_{i,k} - a_{k,i}\right)\right) = \delta_k^l \tag{8.17}$$

Для величин $[\Gamma_{kl}^i]$, $[\Gamma_{k'l'}^{i'}]$ и $\left[\tilde{\Gamma}_{kl}^i\right]$, $\left[\tilde{\Gamma}_{k'l'}^{i'}\right]$ получаем

$$\left[\Gamma_{kl}^i\right] = \left[\Gamma_{k'l'}^{i'}\right] = \gamma_{kl}^i(x) = \frac{1}{2}g^{si}\left(g_{ks,l} + g_{sl,k} - g_{lk,s}\right), \qquad g^{ik}g_{lk} = \delta_l^i \tag{8.18}$$

$$\left[\tilde{\Gamma}_{kl}^i\right] = \tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}_{kl}^i = \tilde{g}^{is}g_{ps}\left(\gamma_{kl}^p + \beta_{kl}^p\right), \tag{8.19}$$

$$\left[\tilde{\Gamma}_{k'l'}^{i'}\right] = \tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}_{kl}^i = \tilde{g}^{si}g_{ps}\left(\gamma_{kl}^p - \beta_{kl}^p\right) \tag{8.20}$$

где

$$\gamma_{kl}^i(x) = \frac{1}{2}g^{si}\left(g_{ks,l} + g_{sl,k} - g_{lk,s}\right), \qquad g^{ik}g_{lk} = \delta_l^i \tag{8.21}$$

$$\beta_{kl}^i(x) = g^{si}\left(-\frac{1}{2}\left(a_{k,ls} + a_{l,ks}\right) + a_{kls}\right) \tag{8.22}$$

Здесь $\gamma_{kl}^i(x)$ есть символ Кристоффеля для симметричного случая, когда $A(x,x') \equiv 0$.

Заметим, что тензоры $\tilde{g}^{ik}$, $\tilde{g}_{ik}$ не симметричны относительно перестановки индексов, тогда как $\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}_{kl}^i = \left[\tilde{\Gamma}_{kl}^i\right]$, $\tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}_{kl}^i = \left[\tilde{\Gamma}_{k'l'}^{i'}\right]$, γ_{kl}^i и β_{kl}^i симметричны относительно перестановки индексов k и l. Кроме того из (8.19), (8.20) следует, что

$$\beta_{kl}^i(x) = g^{si}\left(-\frac{1}{2}\left(a_{k,ls} + a_{l,ks}\right) + a_{kls}\right) = \frac{1}{2}g^{ip}\left(\tilde{g}_{sp}\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}_{kl}^s - \tilde{g}_{ps}\tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}_{kl}^s\right) \tag{8.23}$$

В случае, когда $a_i \equiv 0$ и тензор $\tilde{g}_{ik}$ симметричен, величина β_{kl}^i является одноточечным тензором, потому что разность двух символов Кристоффеля $\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}_{kl}^s - \tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}_{kl}^s$ ест тензор.

9 Тензоры кривизны

В римановой геометрии тензор кривизны Римана-Кристоффеля $\tilde{r}_{(\mathrm{q})}{}_{s.ik}^{.l}$ определяется как коммутатор ковариантных производных $\tilde{D}_{(\mathrm{q})i}$ с символом Кристоффеля $\tilde{\gamma}_{(\mathrm{q})}{}_{kl}^i$

$$\left(\tilde{D}_{(\mathrm{q})i}\tilde{D}_{(\mathrm{q})k} - \tilde{D}_{(\mathrm{q})k}\tilde{D}_{(\mathrm{q})i}\right)t_s = \tilde{r}_{(\mathrm{q})}{}_{s.ik}^{.l}t_l \tag{9.1}$$

где $\tilde{D}_{(\mathrm{q})i}$ есть обычная ковариантная производная в римановом пространстве с символом Кристоффеля $\tilde{\gamma}_{(\mathrm{q})}{}_{si}^l$,

$$\tilde{r}_{(\mathrm{q})}{}_{s.ik}^{.l} = \tilde{\gamma}_{(\mathrm{q})}{}_{si,k}^l - \tilde{\gamma}_{(\mathrm{q})}{}_{sk,i}^l + \tilde{\gamma}_{(\mathrm{q})}{}_{si}^p\tilde{\gamma}_{(\mathrm{q})}{}_{pk}^l - \tilde{\gamma}_{(\mathrm{q})}{}_{sk}^p\tilde{\gamma}_{(\mathrm{q})}{}_{pi}^l \tag{9.2}$$

и t_l есть произвольный вектор в точке x. Индекс q пробегает значения p и f.

В Σ-пространстве можно рассматривать коммутатор ковариантных производных $\tilde{\nabla}_i^{x'}$ and $\tilde{\nabla}_{k'}^{x}$ по x^i и x'^k соответственно. Расчет дает

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\nabla}_i^{x'}\tilde{\nabla}_{s'}^{x} - \tilde{\nabla}_{s'}^{x}\tilde{\nabla}_i^{x'}\right) T_{k\ldots l'\ldots}^{j\ldots m'\ldots} \\ = \; & \tilde{F}_{ika's'}\Sigma^{ba'}T_{b\ldots l'\ldots}^{j\ldots m'\ldots} + \ldots - \Sigma^{ja'}\tilde{F}_{iba's'}T_{k\ldots l'\ldots}^{b\ldots m'\ldots} \\ & - \ldots + \Sigma^{am'}\tilde{F}_{iab's'}T_{k\ldots l'\ldots}^{j\ldots b'\ldots} + \ldots - \tilde{F}_{ial's'}\Sigma^{ab'}T_{k\ldots b'\ldots}^{j\ldots m'\ldots} - \ldots \end{aligned} \tag{9.3}$$

где $T_{k\ldots l'\ldots}^{j\ldots m'\ldots}$ есть произвольный двухточечный тензор. $\tilde{F}$-тензор, определенный соотношением

$$\tilde{F}_{ilk'j'} \equiv \Sigma_{iq'}\tilde{\Gamma}_{k'j'||l}^{q'} = \Sigma_{pj'}\tilde{\Gamma}_{il||k'}^{p} = \Sigma_{,ilj'||k'} = \Sigma_{,ilj'k'} - \Sigma_{,sj'k'}\Sigma^{sm'}\Sigma_{,ilm'} \tag{9.4}$$

есть двухточечный аналог одноточечного тензора кривизны $r_{slik} = g_{lp}r_{s.ik}^{.p}$. Чтобы проверить, что величина (9.4) есть тензор, представим его в одной из двух форм

$$\tilde{F}_{ilk'j'} \equiv \Sigma_{pj'}\tilde{\Gamma}_{il||k'}^{p} = \Sigma_{pj'}\left(\tilde{\Gamma}_{il}^{p} - \tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}_{il}^{p}\right)_{||k'} \tag{9.5}$$

$$\tilde{F}_{ilk'j'} \equiv \Sigma_{iq'}\tilde{\Gamma}_{k'j'||l}^{q'} = \Sigma_{iq'}\left(\tilde{\Gamma}_{k'j'}^{q'} - \tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}_{k'j'}^{q'}\right)_{||l} \tag{9.6}$$

Поскольку разность

$$\tilde{Q}_{(\mathrm{p})}{}_{il}^{p} = \tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}_{il}^{p} - \tilde{\Gamma}_{il}^{p} \qquad \tilde{Q}_{(\mathrm{f})}{}_{k'j'}^{q'} = \tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}_{k'j'}^{q'} - \tilde{\Gamma}_{k'j'}^{q'} \tag{9.7}$$

двух символов Кристоффеля есть тензор, из (9.5) и (9.7) следует, что $\tilde{F}_{ilk'j'}$ есть тензор. $\tilde{F}$-тензор может быть представлен как результат ковариантного дифференцирования Σ-функции. В самом деле

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{(\mathrm{p})}{}_{il}^{s} &= -\Sigma^{sj'}(\Sigma_{,ilj'} - \tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}_{il}^{m}\Sigma_{mj'}) = -\Sigma^{sj'}\tilde{D}_{(\mathrm{p})l}\Sigma_{ij'} = -\Sigma^{sj'}\tilde{D}_{(\mathrm{p})l}\tilde{D}_{(\mathrm{f})j'}\Sigma_i \\ &= -\Sigma^{sj'}\tilde{D}_{(\mathrm{f})j'}\tilde{D}_{(\mathrm{p})l}\Sigma_i = -\Sigma^{sj'}\left(\tilde{D}_{(\mathrm{p})l}\Sigma_i\right)_{||j'} = -\left(\Sigma^{sj'}\tilde{D}_{(\mathrm{p})l}\Sigma_i\right)_{||j'} \end{aligned} \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{(\mathrm{f})}{}_{k'j'}^{q'} &= -\Sigma^{sq'}\left(\Sigma_{,sk'j'} - \tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}_{k'j'}^{m'}\Sigma_{sm'}\right) = -\Sigma^{sq'}\tilde{D}_{(\mathrm{f})j'}\Sigma_{sk'} \\ &= -\Sigma^{sq'}\tilde{D}_{(\mathrm{f})j'}\tilde{D}_{(\mathrm{p})s}\Sigma_{k'} = -\Sigma^{sq'}\tilde{D}_{(\mathrm{p})s}\tilde{D}_{(\mathrm{f})j'}\Sigma_{k'} = -\Sigma^{sq'}\left(\tilde{D}_{(\mathrm{f})j'}\Sigma_{k'}\right)_{||s} \end{aligned} \tag{9.9}$$

Тогда в соответствии с (9.5) – (9.9), получаем

$$\tilde{F}_{ilk'j'} = \left(\tilde{D}_{(\mathrm{p})l}\Sigma_i\right)_{||j'||k'} = \left(\tilde{D}_{(\mathrm{f})j'}\Sigma_{k'}\right)_{||i||l} \tag{9.10}$$

Коммутатор ковариантных производных $\nabla_i^{x'}$ and $\nabla_{k'}^{x}$, связанных с симметричной составляющей G мировой функции, обладает свойством

$$T_{k\ldots l'\ldots|s'|i}^{j\ldots m'\ldots} - T_{k\ldots l'\ldots|i|s'}^{j\ldots m'\ldots} = F_{ika's'}G^{ba'}T_{b\ldots l'\ldots}^{j\ldots m'\ldots} + \ldots - G^{ja'}F_{iba's'}T_{k\ldots l'\ldots}^{b\ldots m'\ldots}$$

$$-\ldots+G^{am'}F_{iab's'}T^{j\ldots b'\ldots}_{k\ldots l'\ldots}+\ldots-F_{ial's'}G^{ab'}T^{j\ldots m'\ldots}_{k\ldots b'\ldots}-\ldots \tag{9.11}$$

где F-тензор кривизны имеет вид

$$F_{ilk'j'}\equiv G_{pj'}\Gamma^{p}_{il|k'}=G_{pj'}\left(\Gamma^{p}_{il}-\gamma^{p}_{il}\right)_{|k'}=G_{i;l|k'|j'} \tag{9.12}$$

Здесь (;) означает обычную ковариантную производную с символом Кристоффеля γ^{i}_{kl}, и Q-тензор записывается следующим образом

$$Q^{i}_{kl}=\gamma^{i}_{kl}-\Gamma^{i}_{kl}=-G^{sj'}G_{i;l|j'} \tag{9.13}$$

Установим связь между F-тензором в пределе совпадения точек x и x' $[F_{ilk'j'}]$ и тензором кривизны $r^{\cdot l}_{s.ik}$, построенном из символов Кристоффеля γ^{l}_{si} при помощи соотношения (9.2)

$$r^{\cdot l}_{s.ik}=\gamma^{l}_{si,k}-\gamma^{l}_{sr,i}+\gamma^{p}_{si}\gamma^{l}_{pk}-\gamma^{p}_{sk}\gamma^{l}_{pi}. \tag{9.14}$$

Примем во внимание, что

$$\left[\left(\nabla^{x'}_{i}+\nabla^{x}_{i'}\right)T_{sp'}\left(x,x'\right)\right]_{x}=D_{i}t_{sp}=t_{sp;i},\qquad t_{sp}\equiv\left[T_{sp'}\left(x,x'\right)\right]_{x} \tag{9.15}$$

Тогда, используя (9.11), (9.12), получаем

$$\begin{aligned}&\left[\left(\nabla^{x'}_{i}+\nabla^{x}_{i'}\right)\left(\nabla^{x'}_{k}+\nabla^{x}_{k'}\right)T_{s}\left(x,x'\right)-\left(\nabla^{x'}_{k}+\nabla^{x}_{k'}\right)\left(\nabla^{x'}_{i}+\nabla^{x}_{i'}\right)T_{s}\left(x,x'\right)\right]_{x}\\ =\ &\left(D_{i}D_{k}-D_{k}D_{i}\right)t_{s}=\left[\Gamma^{a}_{is|k'}-\Gamma^{a}_{ks|i'}\right]_{x}t_{a}\end{aligned} \tag{9.16}$$

где D_i есть обычная ковариантная производная в римановом пространстве с символом Кристоффеля $\gamma^{i}_{kl}=[\Gamma^{i}_{kl}]_{x}$.

С другой стороны выполнено соотношение

$$\left(D_{i}D_{k}-D_{k}D_{i}\right)t_{s}=r^{\cdot l}_{s.ik}t_{l} \tag{9.17}$$

Сравнение соотношений (9.16) и (9.17) дает

$$r^{\cdot l}_{s.ik}=\left[\Gamma^{l}_{is|k'}-\Gamma^{l}_{ks|i'}\right]_{x}=\left[\Gamma^{l}_{is,k'}-\Gamma^{l}_{ks,i'}\right]_{x}=-g^{lp}f_{ispk}+g^{lp}f_{kspi} \tag{9.18}$$

где

$$f_{ispk}\equiv\left[F_{isp'k'}\right]_{x}=\left[G_{lp'}\Gamma^{l}_{is|k'}\right]_{x}=-g_{lp}\left[\Gamma^{l}_{is|k'}\right]_{x} \tag{9.19}$$

В соответствии с (9.12) одноточечный тензор f_{ispk} симметричен относительно перестановки индексов $i\leftrightarrow s$ и $p\leftrightarrow k$ по отдельности.

$$f_{ispk}=f_{sipk},\qquad f_{ispk}=f_{iskp} \tag{9.20}$$

Уравнение (9.18) может быть записано в виде

$$g_{lp}r^{\cdot l}_{s.ik}=-f_{ispk}+f_{kspi} \tag{9.21}$$

Метрический терзор g_{ik} симметричен, и f_{ispk} имеет следующие свойства симметрии

$$f_{ispk}=f_{sipk},\qquad f_{ispk}=f_{iskp},\qquad f_{ispk}=f_{pkis} \tag{9.22}$$

Можно получить связь типа (9.18), (9.19) между $\tilde{F}$-тензором и тензором кривизны Римана-Кристоффеля в случае несимметричной Т-геометрии. Принимая во внимание (9.5), очевидное тождество

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left[\tilde{\Gamma}^p_{il}\right]_x\equiv\left[\tilde{\Gamma}^p_{il,k}\right]_x+\left[\tilde{\Gamma}^p_{il,k'}\right]_x \tag{9.23}$$

и используя соотношения (8.15), (8.19), получаем

$$\left[\tilde{F}_{ilk'j'}\right]_x=-\tilde{g}_{pj}\left[\tilde{\Gamma}^p_{il,k'}\right]_x=-\tilde{g}_{pj}\left(\tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}^p_{il,k}-\left[\tilde{\Gamma}^p_{il,k}\right]_x\right) \tag{9.24}$$

Примем во внимание тождество

$$\Sigma^{pr'}\Sigma_{,sr'k}+\left(\Sigma^{pr'}\right)_{,k}\Sigma_{sr'}=0 \tag{9.25}$$

полученное дифференцированием (7.2). Тогда, используя соотношения (8.15), (8.19), получаем из (9.24)

$$\begin{aligned}\left[\tilde{F}_{ilk'j'}\right]_x&=-\tilde{g}_{pj}\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^p_{il,k}+\tilde{g}_{pj}\left[\Sigma^{pq'}\Sigma_{,ilkq'}-\Sigma^{pr'}\Sigma_{,sr'k}\Sigma^{sq'}\Sigma_{,ilq'}\right]_x\\&=-\tilde{g}_{pj}\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^p_{il,k}+\tilde{g}_{pj}\left[-\tilde{g}^{pq}\Sigma_{,ilkq'}-\tilde{\Gamma}^p_{sk}\tilde{\Gamma}^s_{il}\right]_x\end{aligned}$$

$$\tilde{f}_{ilkj}\equiv\left[\tilde{F}_{ilk'j'}\right]_x=-\left[\Sigma_{,ilkj'}\right]_x-\tilde{g}_{pj}\left(\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^p_{il,k}+\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^s_{il}\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^p_{sk}\right) \tag{9.26}$$

Альтернируя по индексам k,l, получаем

$$\tilde{f}_{ilkj}-\tilde{f}_{iklj}=\tilde{g}_{pj}\tilde{r}_{(\mathrm{f})}{}^{\cdot p}_{i.kl} \tag{9.27}$$

где $\tilde{r}_{(\mathrm{f})}{}^{\cdot s}_{i.kl}$ есть тензор кривизны Римана-Кристоффеля, построенный на основе символов Кристоффеля $\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^s_{ik}$

$$\tilde{r}_{(\mathrm{f})}{}^{\cdot p}_{i.kl}=\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^p_{ik,l}-\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^p_{il,k}+\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^s_{ik}\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^p_{sl}-\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^p_{il}\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}^k_{sk} \tag{9.28}$$

Тем же путем можно выразить $\tilde{f}_{ilkj}-\tilde{f}_{iklj}$ через тензор кривизны Римана-Кристоффеля $\tilde{r}_{(\mathrm{p})}{}^{\cdot s}_{i.kl}$, построенный на основе символов Кристоффеля $\tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}^s_{ik}$

$$\tilde{f}_{ilkj}-\tilde{f}_{iklj}=\tilde{g}_{lp}\tilde{r}_{(\mathrm{p})}{}^{\cdot p}_{k.ij} \tag{9.29}$$

где

$$\tilde{r}_{(\mathrm{p})}{}^{\cdot p}_{i.kl}=\tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}^p_{ik,l}-\tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}^p_{il,k}+\tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}^s_{ik}\tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}^p_{sl}-\tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}^p_{il}\tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}^k_{sk} \tag{9.30}$$

Чтобы получить представление (9.29), используем другое представление (9.6)

$$\tilde{F}_{ilk'j'} = \Sigma_{iq'}\tilde{\Gamma}^{q'}_{k'j',l}$$

$\tilde{F}$-тензора, которое отличается от представления (9.5) заменой $x \leftrightarrow x'$. Производя те же самые операции (9.24) – (9.26), получаем (9.29) вместо (9.27).

Заметим, что соотношения (9.27) и (9.29) различны, потому что тензор $\tilde{g}_{ik}$ несимметричен. В (9.27) суммирование производится по первому индексу, тогда как в (9.29) оно производится по второму индексу. В симметричной Т-геометрии, когда $\tilde{g}_{ik}$ симметричен, три выражения (9.2) (9.27) и (9.29) совпадают.

Имеется два существенно различных случая асимметричной Т-геометрии.

1. Грубая антисимметрия, когда поле $a_i(x) \neq 0$. В этом случае на малых расстояниях $x - x'$ поле $a_i(x)$ доминирует, мировая функция определяется линейной формой

$$\Sigma(x, x') = a_i(x)\left(x^i - x'^i\right) + ...$$

и антисимметрия есть главное явление на малых расстояниях.

2. Тонкая антисимметрия, когда поле $a_i(x) \equiv 0$. В этом случае эффекты антисимметрии описываются полем a_{ikl}. На малых расстояниях $x - x'$ симметричная структура доминирует, и мировая функция описывается квадратичной формой

$$\Sigma(x, x') = \frac{1}{2}g_{ik}(x)\left(x^i - x'^i\right)\left(x^k - x'^k\right) + ...$$

как в симметричной геометрии. В этом случае эффекты антисимметрии могут рассматриваться как поправки к гравитационным эффектам. Эти поправки могут оказаться существенными на больших расстояниях $\xi^i = x^i - x'^i$, когда форма $\frac{1}{6}a_{ikl}\xi^i\xi^k\xi^l$ становится того же порядка, что форма $\frac{1}{2}g_{ik}\xi^i\xi^k$,

Несимметричная Т-геометрия с тонкой антисимметрией проще, потому что она ближе к симметричной Т-геометрии.

10 Градиентные линии на многообразии в случае тонкой антисимметрии $a_i \equiv 0$.

Рассмотрим одномерную линию $\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}$, проходящую через точки x' и x''. Эта линия (кривая) определяется соотношениями

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}: \quad \Sigma_{,i'}(x, x') = \tau\Sigma_{,i'}(x'', x') = \tau b_{i'}, \qquad i = 0, 1, ...n \tag{10.1}$$

Предположим, что $\det||\Sigma_{,i'k}(x, x')|| \neq 0$. Тогда $n+1$ уравнений (10.1) могут быть разрешены относительно x в виде

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}: \quad x^i = x^i(\tau), \qquad i = 0, 1, ...n \tag{10.2}$$

где τ есть параметр вдоль кривой $\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}$. Из (10.1) следует, что эта кривая проходит через точку x' при $\tau = 0$ и через точку x'' при $\tau = 1$. Такую линию мы будем называть градиентной линией (кривой) из будущего. Получим дифференциальное уравнение для градиентной кривой $\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}$. Дифференцируя (10.1) по τ, получаем

$$\Sigma_{,ki'}\left(x,x'\right)\frac{dx^k}{d\tau}=\Sigma_{,i'}\left(x'',x'\right)=b_{i'},\qquad i=0,1,...n \tag{10.3}$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\Sigma_{,ki'}\left(x,x'\right)\frac{d^2x^k}{d\tau^2}+\Sigma_{,kli'}\left(x,x'\right)\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}=0,\qquad i=0,1,...n \tag{10.4}$$

Используя соотношение (7.3), можно записать уравнения (10.4) в виде

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2}+\tilde{\Gamma}_{kl}^{i}\left(x,x'\right)\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}=0,\qquad i=0,1,...n \tag{10.5}$$

Уравнение (10.5) можно интерпретировать как уравнение геодезической в некотором $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве с символом Кристоффеля $\tilde{\Gamma}_{kl}^{i}\left(x,x'\right)$. Эта геодезическая проходит через точки x' и x''.

Пусть точки x' и x'' бесконечно близки. Тогда уравнение (10.5) может быть записано в виде

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}:\quad\frac{d^2x^i}{d\tau^2}+\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}_{kl}^{i}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}=0,\qquad i=0,1,...n \tag{10.6}$$

где $\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}_{kl}^{i}=\tilde{\gamma}_{(\mathrm{f})}{}_{kl}^{i}\left(x\right)=\left[\tilde{\Gamma}_{kl}^{i}\right]_x$. Разделив градиентную линию $\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}$ на бесконечно малые сегменты и записывая урвнения (10.5) на каждом из сегментов в виде (10.6), получаем, что градиентная линия $\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}$ везде описывается уравнениями (10.6).

Уравнение (10.6) не содержит ссылки на точку x', и любая градиентная линия (10.1), (10.2) должна удовлетворять этому уравнению.

В случае тонкой антисимметрии, когда $a_i\equiv 0$, уравнение (10.6) может быть записано в другом виде. Используя соотношения (8.19), и принимая во внимание, что $a_i\equiv 0$, получаем вместо (10.6)

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}:\qquad\frac{d^2x^i}{d\tau^2}+\left(\gamma_{kl}^{i}+\beta_{kl}^{i}\right)\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau}=0 \tag{10.7}$$

где

$$\gamma_{kl}^{i}=\gamma_{kl}^{i}\left(x\right)=\frac{1}{2}g^{si}\left(g_{ks,l}+g_{sl,k}-g_{lk,s}\right), \tag{10.8}$$

$$\beta_{kl}^{i}=\beta_{kl}^{i}\left(x\right)=g^{si}a_{kls} \tag{10.9}$$

Если $a_{ikl}=0$, уравнения (10.7) могут рассматриваться как уравнения для геодезических в римановом пространстве с метрическим тензором g_{ik}.

В случае грубой антисимметрии, когда $a_i \neq 0$, уравнения (10.1), (10.5) также описывают градиентную линию, но теперь уравнение (10.6) уже не эквивалентно уравнению (10.5), потому что точка x' теперь, вообще говоря, не принадлежит к $\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}$. В этом случае, вообще говоря, нельзя выбрать точки x' и x'' бесконечно близкими и осуществить переход от уравнения (10.5) к (10.6). Таким образом, в случае грубой антисимметрии уравнение (10.6), вообще говоря, не описывает градиентную линию.

Теперь рассмотрим другой тип градиентных линий $\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}$, проходящих через точки x и x''. Пусть градиентная линия $\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}$ описывается уравнениями (снова предполагается, что $a_i \equiv 0$))

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}: \quad \Sigma_{,i}(x, x') = \tau \Sigma_{,i}(x, x'') = \tau b_i, \qquad i = 0, 1, ...n \tag{10.10}$$

которые определяют

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}: \quad x'^i = x'^i(\tau), \qquad i = 0, 1, ...n \tag{10.11}$$

Уравнение (10.10) отличается от уравнения (10.1) только перестановкой первого и второго аргументов мировой функции $\Sigma(x, x')$. Градиентную линию $\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}$, определяемую соотношением (10.10), можно назвать градиентной линией из прошлого. Манипулируя с уравнением (10.10) точно так же как с (10.1), получаем вместо (10.6)

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}: \quad \frac{d^2 x'^i}{d\tau^2} + \tilde{\gamma}_{(\mathrm{p})}{}^{i}_{kl} \frac{dx'^k}{d\tau} \frac{dx'^l}{d\tau} = 0, \qquad i = 0, 1, ...n \tag{10.12}$$

В случае тонкой асимметрии, когда $a_i \equiv 0$, уравнение (10.12) может быть записано в другой форме. Используя соотношение (8.20), и принимая во внимание, что $a_i \equiv 0$, получаем вместо (10.12)

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}: \quad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \left(\gamma^i_{kl} - \beta^i_{kl}\right) \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0 \tag{10.13}$$

где γ^i_{kl} и β^i_{kl} определяются соотношениями (10.8).

В случае симметричной Т-геометрии, когда $a_{ikl} = 0$ и $\beta^i_{kl} = 0$, дифференциальные уравнения (10.7) и (10.13) соответственно для градиентной линии $\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}$ и для градиентной линии $\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}$ совпадают.

В случае несимметричной Т-геометрии величины $[\Gamma^i_{kl}]_x$ и $\left[\Gamma^{i'}_{k'l'}\right]_x$, вообще говоря, не совпадают. В этом случае уравнения (10.6) и (10.13) определяют, вообще говоря, разные градиентные линии, проходящие через точки x' и x''. Дифференциальные уравнения (10.6) и (10.13) для градиентных линий $\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}$ и $\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}$ различаются знаком "антисимметричной силы"

$$\beta^i_{kl} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = g^{si} \left(-\frac{1}{2} a_{k,ls} - \frac{1}{2} a_{l,ks} + a_{kls} \right) \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} \tag{10.14}$$

Наконец, можно ввести нейтральную градиентную линию $\mathcal{L}_{(\mathrm{n})}$, определив ее соотношениями

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{n})}: \quad G_{,i'}(x,x') = \tau G_{,i'}(x'',x') = \tau b_{i'}, \qquad i=0,1,...n \tag{10.15}$$

которые определяют

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{n})}: \quad x^i = x^i(\tau), \qquad i=0,1,...n \tag{10.16}$$

Уравнение (10.15) отличается от уравнения (10.1) только заменой мировой функции $\Sigma(x,x')$ на ее симметричную составляющую $G(x,x')$. Манипулируя с уравнением (10.15) так же, как и с (10.1), получаем вместо (10.7)

$$\mathcal{L}_{(\mathrm{n})}: \qquad \frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = 0 \tag{10.17}$$

где "антисимметричная сила" отсутствует.

Градиентные линии (10.1) и (10.10) нечувствительны к преобразованию мировой функции вида

$$\Sigma \to \tilde{\Sigma} = f(\Sigma), \qquad |f'(\Sigma)| > 0 \tag{10.18}$$

где f есть произвольная функция, потому что для определения градиентной линии важно только направление градиента Σ_i или $\Sigma_{i'}$, но не его величина. В самом деле, после подстановки $\tilde{\Sigma}$ из (10.18) в (10.1) получаем уравнение

$$\Sigma_{,i'}(x,x') = \tau'\Sigma_{,i'}(x'',x'), \qquad i=0,1,...n, \qquad \tau' = \tau\frac{f'(\Sigma(x'',x'))}{f'(\Sigma(x,x'))} \tag{10.19}$$

которое описывает ту же самую градиентную линию, но с другой ее параметризацией.

11 Условия вырождения трубки первого порядка

Вообще говоря, несимметричная Т-геометрия есть невырожденная геометрия, даже если она задана на n-мерном многообразии $\mathcal{M}_n$. В общем случае трубка первого порядка $\mathcal{T}_{(\mathrm{n})\mathbf{x'x''}}$, проходящая через точки x' и x'' не совпадает с градиентной линией $\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}$ или $\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}$, проходящей через точки x' и x'' и определенной соответственно соотношениями (10.1) и (10.10).

Исследуем при каких условиях нейтральная трубка первого порядка $\mathcal{T}_{(\mathrm{n})\mathbf{x'x''}}$ вырождается в градиентную линию $\mathcal{L}_{(\mathrm{f})}$ или $\mathcal{L}_{(\mathrm{p})}$. Трубка первого порядка $\mathcal{T}_{(\mathrm{n})\mathbf{P_0P_1}}$, проходящая через точки $P_0 = \{x\}, \quad P_1 = \{x'\}$, определяется соотношением

$$F_2(P_0,P_1,R) = \begin{vmatrix} \left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0P_1}\right) & \left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0R}\right) \\ \left(\overrightarrow{P_0R}.\overrightarrow{P_0P_1}\right) & \left(\overrightarrow{P_0R}.\overrightarrow{P_0R}\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{11.1}$$

где $R = \{x' + dx'\}$ есть бегущая точка на трубке $\mathcal{T}_{P_0 P_1}$.

Возникает следующее разложение скалярных Σ-произведений $\left(\overrightarrow{P_0 P_1}.\overrightarrow{P_0 R}\right)$ и $\left(\overrightarrow{P_0 R}.\overrightarrow{P_0 P_1}\right)$

$$
\begin{aligned}
&: \quad \left(\overrightarrow{P_0 P_1}.\overrightarrow{P_0 R}\right) = \Sigma\left(P_1, P_0\right) + \Sigma\left(P_0, R\right) - \Sigma\left(P_1, R\right) \\
&= \Sigma\left(x', x\right) + \Sigma\left(x, x' + dx'\right) - \Sigma\left(x', x' + dx'\right) \\
&= 2G + \left(\Sigma_{,i'} - \left[\Sigma_{,i'}\right]_{x'}\right) dx'^{i'} + \frac{1}{2}\left(\Sigma_{,i'k'} - \left[\Sigma_{,i'k'}\right]_{x'}\right) dx'^{i'} dx'^{k'} \qquad (11.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&: \quad \left(\overrightarrow{P_0 R}.\overrightarrow{P_0 P_1}\right) = \Sigma\left(P_0, P_1\right) + \Sigma\left(R, P_0\right) - \Sigma\left(R, P_1\right) \\
&= \Sigma\left(x, x'\right) + \Sigma\left(x' + dx', x\right) - \Sigma\left(x' + dx', x'\right) \\
&= 2G + \left(G_{,i'} - A_{,i'} - \left[\Sigma_{,i}\right]_{x'}\right) dx'^{i'} + \frac{1}{2}\left(G_{,i'k'} - A_{,i'k'} - \left[\Sigma_{,ik}\right]_{x'}\right) dx'^{i} dx'^{k} \qquad (11.3)
\end{aligned}
$$

где нештрихованные индексы ассоциируются с первым аргументом, а штрихованные – со вторым аргументом мировой функции $\Sigma(x, x')$.

$$\left(\overrightarrow{P_0 P_1}.\overrightarrow{P_0 P_1}\right) = 2G \qquad (11.4)$$

$$\left(\overrightarrow{P_0 R}.\overrightarrow{P_0 R}\right) = 2G\left(x, x' + dx'\right) = 2G + 2G_{,i'} dx'^{i'} + G_{,i'k'} dx'^{i'} dx'^{k'} \qquad (11.5)$$

Используя соотношения (11.2) – (11.5) и (8.14), (8.15), можно привести уравнение (11.1) к виду

$$\left(\left(G_{,i'} - A_{,i'} - a_i\left(x'\right)\right) dx'^{i'}\right)\left(\left(G_{,l'} + A_{,l'} + a_l\left(x'\right)\right) dx'^{l'}\right) = 2G g_{l'm'}\left(x'\right) dx'^{l'} dx'^{m'} \qquad (11.6)$$

Предположим, что мировая функция такова, что трубка $\mathcal{T}_{\mathbf{x'x}}$ вырождается в линию. Тогда решение уравнения (11.6) имеет либо вид

$$dx'^{k'} = d\tau g^{k'l'}\left(x'\right)\left(G_{,i'} - A_{,i'} - a_{i'}\left(x'\right)\right) \qquad (11.7)$$

либо вид

$$dx'^{k'} = g^{k'l'}\left(x'\right)\left(G_{,k'} + A_{,k'} + a_{k'}\left(x'\right)\right) d\tau \qquad (11.8)$$

где $d\tau$ есть бесконечно малый параметр. Соотношения (11.7), (11.8) описывают одномерные линии в окрестности точки x'. Оба выражения (11.7), (11.8) являются решениями уравнения (11.6), при условии, что выполняется соотношение

$$\left(G_{,i'} - A_{,i'} - a_{i'}\left(x'\right)\right) g^{i'k'}\left(x'\right)\left(G_{,k'} + A_{,k'} + a_{k'}\left(x'\right)\right) = 2G. \qquad (11.9)$$

Одно решение имеется только в том случае, если оба решения (11.7) и (11.8) совпадают. Это означает, что

$$A_{,k'} + a_{k'}\left(x'\right) = 0 \qquad (11.10)$$

и условие (11.9) преобразуется в уравнение

$$G_{,i'}g^{i'k'}(x')\,G_{,k'}=2G \tag{11.11}$$

Это хорошо известное уравнение для мировой функции риманова пространства [3]. Риманова геометрия локально вырождена в смысле определения 4.7, и уравнение (11.11) описывает это свойство римановой геометрии.

В соответствии с разложением (8.3) условие (11.10) может выполняться, если только

$$A(x,x')=a_i\left(x^i-x'^i\right),\qquad a_i=\mathrm{const} \tag{11.12}$$

В этом случае величины (4.9) обращаются в нуль, т.е.

$$\eta_{\mathrm{f}}=A(x,x')+A(x',y)+A(y,x)=0,\qquad \forall x,x',y\in\mathcal{M}_n \tag{11.13}$$

и трубка первого порядка оказывается одинаковой в симметричной и несимметричной геометриях.

Для случая трубки первого порядка из прошлого или из будущего условия вырождения тоже очень жестки. В этом случае вместо (11.6) получаем два условия

$$4G\left(A_{,i'}+a_{i'}\right)dx'^{i'}=0 \tag{11.14}$$

$$\left(2G\left(A_{,i'k'}-\left[\Sigma_{,i'k'}\right]_{x'}\right)-G_{,i'}G_{,k'}\right)dx'^{i'}dx'^{k'}=0 \tag{11.15}$$

В случае (11.12) условие (11.14) выполняется, и (11.15) приводится к (11.11).

Если трубка первого порядка является невырожденной в симметричной T-геометрии, она не может стать вырожденной после добавления антисимметричной составляющей, потому что условие локального вырождения (11.11) остается невыполненным.

Таким образом, практически любая антисимметричная составляющая мировой функции разрушает вырождение нейтральной трубки первого порядка. Если связать квантовые эффекты с вырождением трубки первого порядка [1], то приходим к заключению, что возможная несимметрия пространственно-временно́й геометрии связана с квантовыми эффектами.

12 Примеры трубок первого порядка в несимметричной T-геометрии

Чтобы представить себе возможные последствия несимметрии в T-геометрии, построим трубку первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ Σ-пространстве. Рассмотрим Σ-пространство на 4-мерном многообразии с мировой функцией

$$\begin{aligned}\Sigma(x,x') &= a_i\xi^i+\frac{1}{2}g_{ki}\xi^i\xi^k,\qquad a_i=b_i\left(1+\alpha f\left(\xi^2\right)\right), \\ \xi^i &= x^i-x'^i,\qquad \xi^2\equiv g_{ki}\xi^i\xi^k,\qquad \alpha,b_i,g_{ik}=\mathrm{const},\end{aligned} \tag{12.1}$$

где f есть некоторая функция от ξ^2 и суммирование производится по повторяющимся индексам от 0 до 3. Можно интерпретировать соотношение (12.1) как евклидово пространство с заданной на нем линейной структурой $a_i\xi^i$. Такое Σ-пространство однородно, но не изотропно, потому что имеется вектор a_i, описывающий некоторое выделенное направление в пространстве.

Построим нейтральную трубку первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$. Координаты точек $P_0 = \{0\}$, $P_1 = \{y\}$, $R = \{x\}$, где R есть бегущая точка. Характерная величина (4.9) имеет вид

$$\eta_{\rm f} = \eta_{\rm f}\left(P_0, P_1, R\right) = \alpha\left(-b_i x^i f\left(x^2\right) + b_i y^i f\left(y^2\right) + b_i\left(x^i - y^i\right) f\left((x-y)^2\right)\right), \tag{12.2}$$

Величина $\eta_{\rm f}$ не зависит от постоянной составляющей вектора a_i. Тогда в соответствии с (4.2) - (4.8) форма трубки не зависит от постоянной составляющей вектора a_i. Если $\alpha = 0$ и $a_i =$const, форма всех трубок первого порядка будет такой же как в случае симметричной Т-геометрии, когда $a_i = 0$. Другими словами, форма трубок первого порядка не чувствительна пространственно-временно́й анизотропии, описываемой векторным полем $a_i =$const. Мы опустим постоянную составляющую поля a_i и рассмотрим случаи, когда его переменная составляющая имеет вид

$$\begin{aligned} 1 \quad &: \qquad f\left(\xi^2\right) = \xi^2, \qquad 2: \quad f\left(\xi^2\right) = \frac{1}{1+\beta\xi^2}, \quad \beta = \text{const} \qquad (12.3) \\ \xi^2 \quad &\equiv \quad g_{ik}\xi^i\xi^k, \qquad \xi^i \equiv x^i - x'^i \end{aligned}$$

В первом случае антисимметричная структура существенна на больших расстояниях $\xi = x - x'$. во втором случае антисимметричная структура исчезает при больших ξ.

Уравнение (4.2), определяющее форму трубки $\mathcal{T}_{0y}$ имеет вид

$$\left|\begin{array}{cc} 2G\left(0,y\right) & \left(\mathbf{0y}.\mathbf{0x}\right) \\ \left(\mathbf{0x}.\mathbf{0y}\right) & 2G\left(0,x\right) \end{array}\right| = 4G\left(0,y\right)G\left(0,x\right) - \left(\mathbf{0y}.\mathbf{0x}\right)\left(\mathbf{0x}.\mathbf{0y}\right) = 0 \tag{12.4}$$

В первом случае, когда $f\left(\xi^2\right) = \xi^2$, расчет дает для (12.4)

$$\left(x_i y^i\right)^2 - x^2 y^2 = \eta_{\rm f}^2 \tag{12.5}$$

$$\eta_{\rm f} = \alpha\left[\left(x_i y^i\right)\left(-2\left(b_k y^k\right) + 2\left(b_k x^k\right)\right) - \left(b_i x^i\right) y^2 + \left(b_i y^i\right) x^2\right] \tag{12.6}$$

гед $x^2 = x^i x_i$, $y^2 = y_i y^i$. В случае, когда метрический тензор g_{ik} есть метрический тензор собственно евклидова пространства, $x^2y^2 \geq \left(x_i y^i\right)^2$, уравнение (12.5) имеет интересное решение, только если $\alpha = 0$. Тогда

$$x^2y^2 = \left(x_i y^i\right)^2, \quad \mathcal{T}_{0y} = \left\{x\left|\bigwedge_{i=0}^{i=3} x^i = y^i\tau\right.\right\}, \qquad \alpha = 0 \tag{12.7}$$

В случае $\alpha \neq 0$, трубка первого порядка $\mathcal{T}_{0y}$ вырождается в множество из двух базисныхточек $\{0, y\}$, потому что подстановка $x^i = y^i\tau$ в квадратную скобку в

(12.5) показывает, что скобка обращается в нуль, только если $\tau = 0$ или $\tau = 1$. Таким образом, в случае собственно евклидова метрического тензора g_{ik} форма трубки первого порядка не зависит от a_i, при условии, что $a_i =$const.

Рассмотрим более интересный случай, когда метрический тензор g_{ik} Σ-пространства есть метрический тензор геометрии Минковского. Тогда $x^2 y^2 \leq (x_i y^i)^2$, если только вектор $\mathbf{0y}$ времениподобный ($|\mathbf{0y}|^2 = 2G(0, y) > 0$). В этом случае уравнение (12.5) имеет решение (12.7), если $\alpha = 0$.

Если $\alpha \neq 0$, рассмотрим специальный случай, когда вектор b_i есть единичный времениподобный вектор, и базисный вектор $\mathbf{0y}$ выбран таким образом, что

$$b_i = \frac{y_i}{|y|}, \qquad y = \{|y|, \mathbf{0}\}, \qquad |y| = \sqrt{y^i y_i} \tag{12.8}$$

Вектор $\mathbf{0x}$ представляется в виде

$$x = \left\{x^0, \mathbf{x}\right\} = \{t\,|y|, \mathbf{r}\,|y|\}, \qquad r = \sqrt{\mathbf{r}^2} \tag{12.9}$$

Используя соотношения (12.8), (12.9), получаем из (12.6)

$$\eta_{\mathrm{f}} = \alpha\,|y|^3 \left(3t\,(t-1) - r^2\right) \tag{12.10}$$

и уравнение (12.5) приводится к виду

$$-r^2 + \alpha^2\,|y|^2 \left(3t\,(t-1) - r^2\right)^2 = 0, \tag{12.11}$$

Его решение имеет вид

$$r = \pm\frac{1}{2\alpha\,|y|}\left(-1 \pm \sqrt{\left(1 + 12\alpha^2\,|y|^2\,t\,(t-1)\right)}\right) \tag{12.12}$$

Любое сечение $t =$const трехмерной поверхности $\mathcal{T}_{0y}$ образует две (или 0) сферы, чьи радиусы $r = r(t)$ определяются соотношением (12.12). Уравнение (12.12) дает четыре значения величины r для каждого значения t, но только два из них существенны, потому что радиусы r и $-r$ описывают одну и ту же поверхность.

Из (12.12) следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r}{t} = \pm\sqrt{3},$$

Это означает, что трубка $\mathcal{T}_{0y}$ бесконечна только в пространственноподобных направлениях. Во времениподобных направлениях размер трубки ограничен.

В окрестности вектора $\mathbf{0y}$, порождающего трубку, форма трубки зависит от интенсивности антисимметрии, описываемой постоянной α, и от длины вектора $\mathbf{0y}$. Величина α появляется в уравнении (12.12) только в комбинации $g = \alpha\,|y|$. В любом случае, если $\alpha \neq 0$, трубка $\mathcal{T}_{0y}$ не вырождается в одномерную кривую.

Если антисимметричная структура достаточно сильна и $\alpha\,|y| > 1/\sqrt{3}$, трубка $\mathcal{T}_{0y}$ пуста в своем центре в том смысле, что пересечение $\mathcal{T}_{0y}$ с плоскостью $t = 0.5$

пусто. Если $\alpha|y| < 1/\sqrt{3}$, пересечение $\mathcal{T}_{0y}$ с плоскостью $t = 0.5$ образует две концентрические сферы радиусов

$$r_1 = \frac{3\alpha|y|}{2\left(\sqrt{\left(1-3\alpha^2|y|^2\right)}+1\right)}, \qquad r_2 = \frac{3\alpha|y|}{2\left(1-\sqrt{\left(1-3\alpha^2|y|^2\right)}\right)} \tag{12.13}$$

Если $\alpha|y| \ll 1$, один из радиусов мал $r_1 = 0.75\alpha|y|$, а другой велик $r_2 = 1/(\alpha|y|)$.

Форма трубки $\mathcal{T}_{0y}$ симметрична по отношению к отражению $t \to 1-t$. (См. рис. 1,2). В то же время разбиение трубки на внутренние и внешние сегменты несимметрично по отношению к отражению $t \to 1-t$. Это показано на рис 3,4, где внутренний сегмент нарисован толстой линией, а внешние сегменты – тонкой. Форма как внутреннего так и внешнего сегментов выглядит несколько неожиданно. Внутренний сегмент $\mathcal{T}_{[0y]}$ сильно деформировван по сравнению со случаем симметричной Т-геометрии. Часть внутреннего сегмента $\mathcal{T}_{[0y]}$ простирается до пространственной бесконечности. Оба внешних сегмента $\mathcal{T}_{0]y}$ и $\mathcal{T}_{0[y}$ ограничены во временно́м направлении. Внешний сегмент $\mathcal{T}_{0[y}$ расположен в конечной области. Сегмент $\mathcal{T}_{0]y}$ простирается до пространственной бесконечности, но ограничен во любом времениподобном направлении.

Мы видели, что в симметричной Т-геометрии толщина внутреннего сегмента ответственна за нерелятивистские квантовые эффекты [1]. При сильном антисимметричном поле a_i толщина внутреннего сегмента становится бесконечной. Это усиливает квантовые эффекты и может привести к неожиданным явлениям.

Теперь рассмотрим второй случай (12.3), когда антисимметричная структура существенна только на малых расстояниях. В этом случае получаем вместо уравнения (12.11).

$$r^2 = g^2\left(-\frac{(t-1)}{1+g_1\left((t-1)^2-r^2\right)} + \frac{t}{1+g_1\left(t^2-r^2\right)} - \frac{1}{1+g_1}\right)^2 \tag{12.14}$$

где использованы те же самые обозначения (12.8) - (12.9), и $g = \alpha|y|$, $\quad g_1 = \beta|y|^2$. При больших t уравнение (12.14) приводится к уравнению

$$r^2 = \frac{g^2}{\left(1+\beta|y|^2\right)^2}, \qquad t \to \infty \tag{12.15}$$

Это означает, что трубка неограничена во временно́м направлении **0y** и имеет конечный радиус при $t \to \infty$. Трубка ограничена в любом пространственном направлении. Форма трубки довольно прихотлива, и ее сечение $\mathcal{T}_{0y} \cap S_t$ образует несколько концентрических сфер (S_t есть поверхность $t =$const).

Итак, локальные антисимметричные структуры вызывают только локальные возмущения формы трубки. На временно́й бесконечности эти возмущения приводятся к ненулевому радиусу трубки. Как мы видели в пятом разделе, геометрическая стохастичность зависит от толщины внутреннего сегмента трубки. Любая несимметрия мировой функции увеличивает эту толщину и увеличивает стохастичность. Это порождает добавочное вырождение T-геометрии, которое связано с геометризацией массы частицы и с квантовыми эффектами [1].

13 Заключительные замечания

Главная цель развития несимметричной T-геометрии – это ее возможное применение к геометрии пространства-времени, особенно к пространственно-временно́й геометрии микромира. Подход и методы T-геометрии различаются от подхода и методов римановой (псевдоримановой) геометрии, которая используется в настоящее время в качестве геометрии пространства-времени. Риманова геометрия налагает на геометрию пространства-времени ряд необоснованных ограничений. Они порождаются методами, используемыми при описании римановой геометрии. Перечислим некоторые из них.

1. Непрерывность пространства-времени. Это очень тонкое свойство, которое нельзя проверить прямым экспериментом. T-геометрия нечувствительна к непрерывности и свободна от этого ограничения. Для приложений T-геометрии не имеет значения, является ли пространственно-временна́я геометрия непрерывной или только мелкозернистой.

2. Риманова геометрия есть геометрия с фиксированной размерностью. В рамках римановой геометрии очень трудно представить себе геометрию с переменной размерностью. Этой проблемы нет в T-геометрии.

3. Для описания римановой геометрии используется система координат и понятие кривой, которые по существу являются методами описания римановой геометрии. Рассматривая все возможные системы координат, можно по существу отстроиться от этого ограничения. Традиционно кривая рассматривается как геометрический объект (а не как метод описания геометрии), а отделение свойств геометрии от свойств, вносимых использованием описания в терминах кривой, обычно не рассматривается. В частности, в римановой геометрии, вообще, отсутствует абсолютный параллелизм. Параллельность двух векторов в удаленных точках устанавливается с помощью ссылки на кривую, вдоль которой осуществляется параллельный перенос вектора. Другими словами, параллельность двух векторов формулируется в терминах метода описания, и неизвестно, как устранить эту зависимость от метода описания. T-геометрия свободна от этого дефекта. Понятие кривой не используется при построении T-геометрии. В T-геометрии имеется абсолютный параллелизм.

4. T-геометрия использует специальный геометрический язык, который содержит понятия присущие только самой геометрии (Σ-функция и конечные подпространства). При этом не возникает необходимости в устранении средств описания геометрии.

5. Этот геометрический язык позволяет рассматривать и эффективно иссле-

довать ситуацию, когда прошлое и будущее не эквивалентны геометрически.

6. Средства описания римановой геометрии подавляют такое важное свойство геометрии как невырожденность. Как следствие геометризация массы частицы оказывается невозможной в рамках римановой геометрии. Геометризация массы частицы важна, когда масса частицы неизвестна и должна быть определена из некоторых геометрических или физических соотношений. Это может оказаться важным при определении спектра масс элементарных частиц. Т-геометрия допускает геометризацию массы.

7. Рассмотрение невырожденности и геометризация массы частицы уже позволили сделать важный шаг в понимании пространственно-временно́й геометрии микромира. Удалось объяснить нерелятивистские квантовые эффекты просто как геометрические эффекты, порожденные невырожденностью геометрии пространства-времени. Есть надежда, что несимметричность пространственно-временно́й геометрии позволит объяснить важные характеристики элементарных частиц.

Возможности Т-геометрии как геометрии пространства-времени намного превосходят возможности римановой геометрии.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[2] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung die Mathematik im 19. Jahrhundert* teil 1, Berlin, Springer 1926.

[3] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[4] Ю. А. Рылов, Метрическое пространство: классификация конечных подпространств вместо ограничений на метрику. *Труды по анализу и геометрии*, Новосибирск, Издательство математического института. 2000. стр. 481-504,

[5] Ю. А. Рылов, Описание метрического пространства как классификация его конечных подпостранств. *ФПМ*, **7**, 1147-1175, (2001).

[6] Yu. A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. J. Math. Math. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002).

[7] Yu. A. Rylov, Associative delusions and problem of their overcoming. *e-print physics/0201065.*

[8] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928).

[9] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[10] В. А. Топоногов, Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу. *УМН,* **14**, вып. 1(85), 87-130, (1959).

[11] А. Д. Александров, В. Н. Берестовский, И. Г. Николаев, Обобщенные римановы пространства. *УМН,* **41**, вып. 3(249), 1-42, (1986).

[12] Ю. Бураго, М. Громов, Г. Перельман, Пространства А.Д. Александрова с ограниченными снизу кривизнами. *УМН,* **47**, вып. 2(284), 3-51, (1992).

[13] Yu. A. Rylov, Distorted Riemannian space and technique of differential geometry. *J. Math. Phys.* **33**, 4220-4224, (1992).

[14] Rylov Yu.A., Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.* **40**, 256-278, (1999).

[15] Yu. A. Rylov, Hamilton variational principle for statistical ensemble of deterministic systems and its application for ensemble of stochastic systems. *Rus. J. Math. Phys.* **9**, iss. 3, 361-370, (2002).

[16] А. А. Власов, *Статистические функции распределения.* Наука, Москва, 1966.

[17] Ю. А. Рылов, Описание риманова пространства с помощью конечного интервала. *Известия высших учебных заведений*, сер. мат. 3(28), 131-142, (1962).

[18] Yu. A. Rylov, Relative gravitational field and conservation laws in general relativity. *Ann. Phys.* (Leipzig) **12**, 329-353, (1964).

Подписи к рисункам

.

Рис. 1. Времениподобная нейтральная трубка для $\alpha\,|y| = 0.4$

Рис. 2. Времениподобная нейтральная трубка для $\alpha\,|y| = 0.7$

Рис. 3. Схема разбиения времениподобной трубки первого порядка ($\alpha\,|y| = 0.4$) на внутренний и внешние сегменты. Внутренний сегмент нарисован толстой линией, а внешние –тонкой.

Рис. 4. Схема разбиения времениподобной трубки первого порядка ($\alpha\,|y| = 0.7$) на внутренний и внешние сегменты. Внутренний сегмент нарисован толстой линией, а внешние –тонкой.