Динамические уравнения для тахионного газа

Yuri A. Rylov

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Рассматривается динамика тахионного газа. Она интересна в том отношении, что феномен темной материи непринужденно объясняется существованием тахионного газа. Тахионы имеют два неожиданных свойства: (1) отдельный тахион не может быть обнаружен из-за сильного вихляния его мировой линии, (2) тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационному полю. Хотя молекулы (тахионы) тахионного газа движутся со сверхсветовой скоростью, среднее движение этих молекул оказывается меньше скорости света. Свойства тахионного газа отличаются от свойств обычного газа. Давление в тахионном газе очень велико. Оно не является изотропным и зависит от гравитационного потенциала. В результате тахионный газ может образовывать огромные гало вокруг галактик. Эти гало могут иметь очень большую и почти постоянную плотность. Это обстоятельство может объяснить постоянство скоростей звезд на периферии галактики. Свойства тахионного газа позволяют рассматривать его как темную материю.

Ключевые слова: многовариантная геометрия, тахион, тахионный газ, динамика тахионов, темная материя

1 Введение

Тахионами называют частицы, движущиеся со скоростью, большей скорости света [1]-[5]. Мы будем называть тахионами частицы, у которых мировая линия пространственноподобна. Оба определения означают одно и то же, если мировая линия является гладкой и можно определить производную вдоль мировой линии, называемую скоростью. Мы покажем, что мировая линия тахионов не является гладкой и это отличает их от тардионов, т.е. частиц, движущихся со скоростью меньшей скорости света.

Для тахионов существенно свойство геометрии пространства-времени, называемое многовариантностью. Оно означает, что вектору $\mathbf{AB}$ в точке A соответствует много векторов $\mathbf{CD}$, $\mathbf{CD}'$, $\mathbf{CD}''$... в точке C, эквивалентных (равных) вектору $\mathbf{AB}$, но не эквивалентных между собой. Современные теоретики не признают свойство многовариантности в геометрии и всячески пытаются его устранить, когда оно нечаянно появляется в геометрии. Например, когда оно появляется в римановой геометрии, от него избавляются, связывая каждый из многочисленных векторов $\mathbf{CD}$, $\mathbf{CD}'$, $\mathbf{CD}''$,... в точке C с путем их параллельного переноса из точки и провозглашая отсутствие абсолютного параллелизма в римановой геометрии.

Такое отношение связано с тем, что начиная с Евклида изучают исключительно собственно евклидову геометрию, полагая что геометрия пространства-времени не может иметь никаких дополнительных свойств, отсутствующих в собственно евклидовой геометрии. Так многовариантность отрицается в римановой геометрии, поскольку считается, что отсутствие абсолютного параллелизма есть меньшее зло, чем многовариантность равенства векторов. Отсутствие гладкости (вихляние) мировой линии тахионов есть следствие многовариантности равенства пространственноподобных векторов в геометрии Минковского. Представим мировую линию тахиона в виде мировой цепи, т.е. ломаной линии, состоящей из малых прямолинейных отрезков одинаковой длины. Каждый такой отрезок можно представить малым пространственноподобным вектором. Для свободного тахиона смежные векторы равны (или параллельны, что для векторов одинаковой длины одно и то же). При наличии многовариантности это приводит к вихлянию мировой цепи.

Свойство многовариантности крайне нежелательно не только в геометрии, но и в динамике. Здесь уместно вспомнить об отношении к работам Больцмана, который объяснил динамику газа через стохастическое (многовариантное) движение его молекул. В этом случае многовариантное движение отдельных молекул объяснялось столкновениями с другими молекулами. Было крайне трудно поверить, что детерминированное движение объемов газа, содержащих много молекул, может быть объяснено как статистическое описание многовариантного движения отдельных молекул. Однако через некоторое время с динамической многовариантностью смирились после того как экспериментально обнаружили броуновское движение, которое можно интерпретировать как движение газа, состоящего из больших молекул, которые можно было видеть в обычный микроскоп.

Однако предубеждение против геометрической многовариантности осталось. Геометрическую многовариантность очень трудно принять, если учесть, что из нее следует интранзитивность отношения эквивалентности и неаксиоматизируемость геометрии, обладающей свойством многовариантности равенства векторов. Предубежденность против геометрической многовариантности напоминает предубеждение против понятия инерции, существовавшее во время господства механики Аристотеля, в которой отсутствовало понятие инерции. Сейчас нам, воспитанным на механике Ньютона, трудно догадаться, что именно имели сторонники механики Аристотеля против понятия инерции. Однако такое предубеждение несомненно было.

Вряд ли является случайностью то обстоятельство, что первый закон механики (закон инерции) был сформулирован Ньютоном в виде отдельного закона механики, хотя он является частным случаем второго закона механики (когда сила равна нулю). Вряд ли Ньютон не понимал этого. Скорее всего закон инерции был сформулирован в виде отдельного закона потому, что в то время понятие инерции не было общепринятым и нуждалось в подчеркивании значения этого понятия.

Логическое обоснование понятия многовариантности как фундаментального свойства геометрии можно найти в [6, 7]. Однако современные теоретики предпочитают экспериментальную проверку вместо логического обоснования, и мы рассмотрим такую проверку.

Рассмотрим пространство-время с геометрией Минковского. Равенство векторов в такой геометрии можно определить двояко:

(1) Обычное определение: Два вектора $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{CD}$ равны, если их компоненты $(\mathbf{AB})_k$, и $(\mathbf{CD})_k$ равны

$$\mathbf{AB}\mathrm{eqv}\mathbf{CD}: \quad (\mathbf{AB})_k = (\mathbf{CD})_k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

(2) Бескоординатное определение: Два вектора $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{CD}$ равны, если они параллельны ($\mathbf{AB} \upuparrows \mathbf{CD}$) и их длины $|\mathbf{AB}|$ и $|\mathbf{CD}|$ равны

$$(\mathbf{AB} \upuparrows \mathbf{CD}): \quad (\mathbf{AB}.\mathbf{CD}) = |\mathbf{AB}| \cdot |\mathbf{CD}| \tag{1.2}$$

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{CD}|: \quad \sigma(A, B) = \sigma(C, D) \tag{1.3}$$

Здесь $\sigma(A, B)$ есть мировая функция геометрии пространства-времени между точками A и B. Геометрия пространсства-времени полностью описывается мировой функцией σ

$$\sigma: \quad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \quad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \quad \sigma(P, P) = 0, \quad \forall P, Q \in \Omega \tag{1.4}$$

где Ω есть множество точек, на котором задана геометрия. В евклидовом пространстве скалярное произведение $(\mathbf{AB}.\mathbf{CD})$ двух векторов выражается формулой

$$(\mathbf{AB}.\mathbf{CD}) = \sigma(A, D) + \sigma(B, C) - \sigma(A, C) - \sigma(B, D) \tag{1.5}$$

Та же самая формула (1.5) имеет место в других геометриях пространства-времени, в частности в геометрии Минковского.

В собственно евклидовой геометрии любого числа измерений оба определения совпадают из-за специальных свойств мировой функции собственно евклидовой геометрии. В геометрии Минковского традиционное определение содержит четыре уравнения и вектор $\mathbf{CD}$ определяется однозначно, если задан вектор **AB**. Многовариантность отсутствует в традиционном определении эквивалентности двух векторов.

Бескоординатное определение содержит только два уравнения, тогда как любой вектор описывается четырьмя координатами. Вообще говоря, уравнения (1.2), (1.3) допускают многовариантное решение. Тем не менее, для времениподобных векторов четыре соотношения (1.1) эквивалентны двум уравнениям (1.2), (1.3). Это обусловлено специальными свойствами мировой функции в геометрии Минковского. Но для пространственноподобных векторов эти два определения не эквивалентны, и равенство пространственноподобных векторов **AB** и **CD** многовариантно.

Какое из этих двух определений правильно? Бескоординатное определение (1.2), (1.3) верно, потому что оно не использует математического формализма линейного векторного пространства. Бескоординатное определение (1.2), (1.3) является фундаментальным чисто геометрическим определением, тогда как традиционное определение (1.1) использует свойства линейного векторного пространства, которое не может быть введено в произвольной геометрии пространства-времени. В частности, линейное векторное пространство не может быть введено в многовариантной геометрии.

В настоящей работе выводятся динамические уравнения для тахионного газа. Оказывается, что тахионный газ представляет собой субстанцию, которая может рассматриваться как темная материя, которая обнаружена в астрофизических наблюдениях [8]. В результате эти наблюдения можно интерпретировать в пользу бескоординатного определения (1.2), (1.3). Из этого обстоятельства следует, что существование тахионного газа можно рассматривать, как подтвержденное экспериментально.

2 Динамические уравнения для отдельного тахиона

Динамические уравнения для тахионов выводятся в рамках метрического подхода к геометрии, когда геометрия полностью описывается с помощью только мировой функции. Мы будем рассматривать геометрию пространства-времени как геометрию Минковского со слабым гравитационным полем в пространстве-времени. В этом случае мировая функция имеет вид

$$\sigma\left(x,x'\right)=\frac{1}{2}\left(\left(c^{2}-2V\left(\mathbf{y}\right)\right)\left(x_{0}-x_{0}'\right)^{2}-\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)^{2}\right),\quad \mathbf{y}=\frac{\mathbf{x}+\mathbf{x}'}{2}\qquad(2.1)$$

где $\{x^0,\mathbf{x}\}=\{x^0,x^1,x^2,x^1\}$ суть координаты в некоторой инерциальной системе координат, $V=V\left(x\right)$ есть гравитационный потенциал ($V\ll c^2$). Геометрия, полностью описываемая мировой функцией, называется физической геометрией.

В физической геометрии динамика частиц описывается каркасной концепцией [7], где вместо непрерывной мировой линии используется мировая цепь $\mathcal{C}$

(ломаная линия), чьими звеньями являются векторы $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ одинаковой длины μ

$$\mathcal{C} = \bigcup_s \mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}, \quad |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| = \mu = \text{const}, \quad s = ...0, 1, 2, ... \tag{2.2}$$

Для свободной частицы смежные векторы $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ и $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$ эквивалентны ($\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}\text{eqv}\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$). Тогда условия эквивалентности (1.2) - (1.5) могут быть записаны в виде

$$\sigma(P_s, P_{s+2}) = 4\sigma(P_s, P_{s+1}), \quad \sigma(P_s, P_{s+1}) = \sigma(P_{s+1}, P_{s+2}), \quad s = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{2.3}$$

Если существует предел $\mu \to 0$, мировая цепь (2.2) превращается в гладкую мировую линию. Имея в виду, что мировая линия $\sigma(P_s, P_{s+1}) = \frac{1}{2}d^2(P_s, P_{s+1})$, где d есть расстояние между точками P_s и P_{s+1}, можно усмотреть, что в собственно евклидовой геометрии соотношения (2.3) описывают правила построения прямой с помощью одного циркуля.

В случае тахиона $\sigma(P_s, P_{s+1}) < 0$, а μ является мнимой $\mu^2 = -|\mu^2|$. Рассмотрим случай трех смежных точек P_0, P_1, P_2 мировой цепи

$$P_0 = \{x_0, \mathbf{x}\}, \quad P_1 = \{x_0 + p_0, \mathbf{x} + \mathbf{p}\}, \quad P_2 = \{x_0 + 2p_0 + \alpha_0, \mathbf{x} + 2\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}\} \tag{2.4}$$

4-вектор $\alpha = \{\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}\}$ является дискретным аналогом вектора ускорения. Мы запишем уравнения (2.3) для точек (2.4). Величины $x = \{x_0, \mathbf{x}\}$ и $\{x_0 + p_0, \mathbf{x} + \mathbf{p}\}$ предполагаются заданными, а четыре составляющих 4-вектора $\alpha = \{\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}\}$ должны быть определены из двух уравнений (2.3)

Получаем для тахиона

$$\left(c^2 - 2V\right)(p_0 + \alpha_0)^2 - (\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha})^2 = \left(c^2 - 2V\right)p_0^2 - \mathbf{p}^2 = \mu^2, \tag{2.5}$$

$$\left(c^2 - 2V\right)(2p_0 + \alpha_0)^2 - (2\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha})^2 = 4\left(\left(c^2 - 2V\right)p_0^2 - \mathbf{p}^2\right), \tag{2.6}$$

Из (2.5) следует, что

$$p_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 - |\mu|^2}{c^2 - 2V}} = \frac{p}{c}\sqrt{\frac{1 - \frac{|\mu|^2}{p^2}}{1 - 2\frac{V}{c^2}}} \tag{2.7}$$

Мы рассмотрим отдельно два разных случая: (1) $p_0 \neq 0$ и (2) $p_0 = 0$

2.1 Случай $p_0 \neq 0$

После преобразования уравнений (2.5), (2.6) получаем два соотношения

$$\alpha_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{p_0(c^2 - 2V)}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{p_0} \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{c^2 - 2V - v^2}{c^2 - 2V}\right)\alpha_\parallel^2 + \boldsymbol{\alpha}_\perp^2 = 0, \quad v = \frac{p}{p_0} \tag{2.9}$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}_{\|}=\mathbf{p}\frac{(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p})}{\mathbf{p}^{2}},\quad \boldsymbol{\alpha}_{\perp}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_{\|},\quad \alpha_{\|}^{2}=\frac{(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p})^{2}}{\mathbf{p}^{2}},\quad \alpha_{\|}=\frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{p},\quad p=|\mathbf{p}| \tag{2.10}$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}_{\|}$ есть составляющая 3-вектора $\boldsymbol{\alpha}$, которая параллельна 3-вектору $\mathbf{p}$, тогда как $\boldsymbol{\alpha}_{\perp}$ есть составляющая 3-вектора $\boldsymbol{\alpha}$, которая перпендикулярна вектору $\mathbf{p}$.

Решение уравнения (2.9) не единственно

$$\alpha_{\|}=\frac{r\sqrt{c^{2}-2V}}{\sqrt{(v^{2}-c^{2}+2V)}},\quad v=\frac{p}{p_{0}} \tag{2.11}$$

$$\alpha_{\perp 1}=r\cos\phi,\quad \alpha_{\perp 2}=r\sin\phi\quad v=\frac{p}{p_{0}}=\frac{p\sqrt{(c^{2}-2V)}}{\sqrt{\mathbf{p}^{2}-|\mu|^{2}}} \tag{2.12}$$

$$\alpha_{0}=\frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{p_{0}\left(c^{2}-2V\right)}=\frac{p}{p_{0}}\left(\frac{r}{\sqrt{(v^{2}-c^{2}+2V)\left(c^{2}-2V\right)}}\right) \tag{2.13}$$

Здесь r,ϕ суть произвольные вещественные числа $r\geq 0$. Величина r является безразмерной величиной, пропорциональной $\mathbf{u}$. Длина $|\boldsymbol{\alpha}|$ многовариантного 3-вектора порядка r

$$|\boldsymbol{\alpha}|^{2}=r^{2}\frac{v^{2}}{(v^{2}-c^{2}+2V)} \tag{2.14}$$

Составляющие многовариантной скорости частицы $\mathbf{u}$ определяются соотношениями

$$\mathbf{u}=\frac{\mathbf{p}+\boldsymbol{\alpha}}{p_{0}+\alpha_{0}},\quad u^{0}=1 \tag{2.15}$$

3-вектор $\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} u_{\|} &= \frac{p+\alpha_{\|}}{p_{0}+\alpha_{0}}=\left(p+\frac{r\sqrt{c^{2}-2V}}{\sqrt{(v^{2}-c^{2}+2V)}}\right)\left(p_{0}+\frac{pr}{p_{0}\sqrt{(v^{2}-c^{2}+2V)\left(c^{2}-2V\right)}}\right)^{-1} \\ &= \frac{p_{0}\left(c^{2}-2V\right)}{p}+\mathcal{O}\left(r^{-1}\right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$u_{\perp 1}=\frac{\alpha_{\perp 1}}{p_{0}+\alpha_{0}}=\frac{p_{0}\sqrt{(v^{2}-c^{2}+2V)\left(c^{2}-2V\right)}\cos\phi}{p}+\mathcal{O}\left(r^{-1}\right) \tag{2.17}$$

$$u_{\perp 2}=\frac{\alpha_{\perp 2}}{p_{0}+\alpha_{0}}=\frac{p_{0}\sqrt{(v^{2}-c^{2}+2V)\left(c^{2}-2V\right)}\sin\phi}{p}+\mathcal{O}\left(r^{-1}\right) \tag{2.18}$$

Составляющие 3-вектора $\mathbf{u}$ не зависят от параметра r при $r\to\infty$. Поскольку составляющие вектора $\mathbf{u}$ практически не зависят от r, мы можем усреднять составляющие вектора $\mathbf{u}$ с любой весовой функцией. Мы выберем весовую функцию таким образом, как если бы интегрирование производилось по бесконечному объему в сферической системе координат (r,θ,ϕ). Составляющие 3-вектора

$\mathbf{u}$ не зависят от r, θ. Средние значения $\langle \mathbf{u} \rangle$ и $\langle \mathbf{u}^2 \rangle$ переменных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}^2$ получаются в результате усреднения

$$\langle u \rangle = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} u\left(r,\phi\right) d\phi, \quad N = \frac{4\pi R^3}{3} \tag{2.19}$$

Переменные $\mathbf{u}$ представляются формулами (2.16) - (2.18) в виде

$$\mathbf{u}\left(r,\phi\right) = \mathbf{u}\left(\phi\right) + \mathcal{O}\left(r^{-1}\right) \tag{2.20}$$

Представление (2.20) не означает, что член $\mathcal{O}\left(r^{-1}\right)$ имеет особенность при $r = 0$. В соответствии с (2.16) - (2.18), (2.13) все компоненты скорости $\mathbf{u}$ регулярны при $r = 0$. Интегрирование члена $\mathcal{O}\left(r^{-1}\right)$ дает величину порядка R^2/N, которая исчезает при $R \to \infty$ из-за нормирующего множителя $1/N$, который пропорционален R^{-3}. Это верно для всех положительных степеней величины $\mathbf{u}$. При таком усреднении получаем

$$\left\langle u_\parallel \right\rangle = \frac{\sqrt{c^2 - 2V}}{p}\sqrt{\mathbf{p}^2 - |\mu^2|} = c\sqrt{1 - 2\frac{V}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{|\mu^2|}{\mathbf{p}^2}} \tag{2.21}$$

$$\left\langle \mathbf{u}_\perp \right\rangle = 0 \tag{2.22}$$

$$\left\langle u_\parallel^2 \right\rangle = \left\langle u_\parallel \right\rangle^2 = \left\langle \mathbf{u} \right\rangle^2 = c^2\left(1 - 2\frac{V}{c^2}\right)\left(1 - \frac{|\mu^2|}{\mathbf{p}^2}\right) < c^2 \tag{2.23}$$

Используя выражения (2.12), (2.13), (2.7) получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{u}_\perp^2 \right\rangle &= \frac{p_0^2\left(v^2 - c^2 + 2V\right)\left(c^2 - 2V\right)}{p^2} = \left(c^2 - 2V\right)\left(1 - \frac{p_0^2\left(c^2 - 2V\right)}{p^2}\right) \\ &= \frac{|\mu|^2}{p^2}\left(c^2 - 2V\right) = c^2 - 2V - \left\langle u_\parallel^2 \right\rangle \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\left\langle \mathbf{u}^2 \right\rangle = \left\langle u_\parallel^2 \right\rangle + \left\langle \mathbf{u}_\perp^2 \right\rangle = c^2 - 2V \tag{2.25}$$

2.2 Случай $p_0 = 0$

Этот случай соответствует частному случаю. $\mathbf{p}^2 = |\mu^2|$. Тогда в соответствии с (2.7) $p_0 = 0$, и уравнения (2.5), (2.6) принимают вид

$$\left(c^2 - 2V\right)\alpha_0^2 - \left(\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}\right)^2 = -\mathbf{p}^2 = -\left|\mu\right|^2, \tag{2.26}$$

$$\left(c^2 - 2V\right)\alpha_0^2 - \left(2\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}\right)^2 = -4\mathbf{p}^2, \tag{2.27}$$

$$p^2 = \left|\mu^2\right|$$

Эти уравнения приводятся к виду

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} = \alpha_\parallel p = 0, \quad \left(c^2 - 2V\right)\alpha_0^2 - \boldsymbol{\alpha}_\perp^2 - \alpha_\parallel^2 = 0 \tag{2.28}$$

Решения уравнений (2.28) имеют вид

$$\alpha_0 = \frac{r}{\sqrt{c^2 - 2V}}, \quad \alpha_\parallel = 0, \quad \alpha_{\perp 1} = r\cos\phi, \quad \alpha_{\perp 2} = r\sin\phi, \tag{2.29}$$

Усредняя с помощью формулы (2.19), получаем

$$\langle u_\parallel \rangle = \left\langle \frac{p\sqrt{c^2 - 2V}}{r} \right\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{u}_\perp \rangle = 0 \tag{2.30}$$

$$\langle \mathbf{u}_\perp^2 \rangle = \left\langle \left| \frac{\boldsymbol{\alpha}_\perp}{\alpha_0} \right|^2 \right\rangle = \left\langle \frac{r^2}{r^2} \left(c^2 - 2V \right) \right\rangle = c^2 - 2V \tag{2.31}$$

$$\langle u_\parallel^2 \rangle = \langle u_\parallel \rangle^2 = 0, \quad \langle \mathbf{u}^2 \rangle = \langle u_\parallel^2 \rangle + \langle \mathbf{u}_\perp^2 \rangle = c^2 - 2V \tag{2.32}$$

Можно видеть из (2.30) - (2.32), что результаты для $\langle u_\parallel \rangle$, $\langle \mathbf{u}_\perp \rangle$, $\left\langle u_\parallel^2 \right\rangle$, $\langle \mathbf{u}_\perp^2 \rangle$ совпадают с результатами (2.21) - (2.24), взятыми для $p^2 = |\mu^2|$, что соответствует случаю $p_0 = 0$. Это означает,что случай $p_0 = 0$ является частным случаем $p_0 \neq 0$. Случай $p_0 = 0$ может быть получен из общего случая $p_0 \neq 0$, если положить $p^2 = |\mu^2|$. Мы будем рассматривать далее только общий случай $p_0 \neq 0$.

3 Динамические уравнения для тахионного газа

Движение отдельного тахиона многовариантно (стохастично). Эта многовариантность является геометрической. Рассмотрим статистический ансамбль из многих тахионов. Такой статистический ансамбль образует тахионный газ, где тензор давления $P^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$P^{\alpha\beta} = \rho \frac{1}{2} \left(l_{(1)}^\alpha l_{(1)}^\beta + l_{(2)}^\alpha l_{(2)}^\beta \right) \left(\langle \mathbf{u}^2 \rangle - \langle \mathbf{u} \rangle^2 \right) = \rho \frac{1}{2} \left(l_{(1)}^\alpha l_{(1)}^\beta + l_{(2)}^\alpha l_{(2)}^\beta \right) \langle \mathbf{u}_\perp^2 \rangle \tag{3.1}$$

где ρ есть массовая плотность газа и 3-векторы $l_{(1)}^\alpha$, $l_{(2)}^\alpha$ являются единичными 3-векторами, ортогональными 3-вектору $\mathbf{p}$ и между собой. Анизотропия давления связана с тем обстоятельством, что вектор

$$\mathbf{u}_\perp = \frac{\boldsymbol{\alpha}_\perp}{p_0 + \alpha_0},$$

ответственный за давление, ортогонален вектору $\mathbf{p}$. Используя соотношения (2.23) - (2.25), получаем из (3.1)

$$P^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \rho \left(l_{(1)}^\alpha l_{(1)}^\beta + l_{(2)}^\alpha l_{(2)}^\beta \right) \left(c^2 - 2V - \langle \mathbf{u} \rangle^2 \right) \tag{3.2}$$

Анизотропия давления объясняется тем фактом, что состояние тахионного газа описывается его плотностью ρ, скоростью $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle$ и 3-вектором поляризации

$\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. В соответствии с (2.21), (2.22) скорость тахионного газа $\langle\mathbf{u}\rangle$ параллельна 3-вектору поляризации $\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$.

$$\langle\mathbf{u}\rangle = \frac{\mathbf{p}}{p}c\sqrt{1-2\frac{V}{c^2}}\sqrt{1-\frac{|\mu^2|}{\mathbf{p}^2}}, \quad \langle\mathbf{u}_\perp\rangle = 0 \tag{3.3}$$

В случае, когда $\mathbf{p}^2 = |\mu^2|$ и $\langle\mathbf{u}\rangle = 0$, единичный 3-вектор поляризации $\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ не обращается в нуль. Общековариантное описание поляризации осуществляется с помощью бивектора $l_{(1)}^i l_{(2)}^k - l_{(1)}^k l_{(2)}^i$, где 4-векторы $l_{(1)}^i$, $l_{(2)}^k$, $k = 0,1,2,3$ являются единичными 4-векторами, которые ортогональны 4-векторам $(p_0, \mathbf{0})$ и $(0, \mathbf{p})$ и между собой

$$l_{(a)}^0 p_0 = 0, \quad l_{(a)}^\alpha p_\alpha = 0, \quad a = 1,2; \quad g_{ik} l_{(1)}^i l_{(2)}^k = 0 \tag{3.4}$$

В случае, когда $\langle\mathbf{u}\rangle \neq 0$

$$\left(l_{(1)}^\alpha l_{(1)}^\beta + l_{(2)}^\alpha l_{(2)}^\beta\right) = \delta^{\alpha\beta} - \frac{\langle u^\alpha\rangle \langle u^\beta\rangle}{\langle\mathbf{u}\rangle^2} \tag{3.5}$$

и тензор давления может быть записан в виде

$$P^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\rho\left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{\langle u^\alpha\rangle \langle u^\beta\rangle}{\langle\mathbf{u}\rangle^2}\right)\left(c^2 - 2V - \langle\mathbf{u}\rangle^2\right) \tag{3.6}$$

Замечание . Тахионный газ может быть смесью тахионных газов с различными векторами поляризации. Компоненты этой смеси имеют разные средние скорости. Эти компоненты не взаимодействуют между собой и свободно проходят сквозь друг друга.

Динамические уравнения для тахионного газа имеют вид

$$\nabla_k T^{ik} = 0 \tag{3.7}$$

где T^{ik} есть тензор энергии-импульса тахионного газа, и ∇ есть ковариантная производная в пространстве-времени с метрическим тензором

$$g_{ik} = \mathrm{diag}\left(c^2 - 2V, -1, -1, -1\right) \tag{3.8}$$

Символы Кристоффеля γ_{kl}^i определяются соотношениями

$$\gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}g^{is}\left(g_{is,k} + g_{sk,i} - g_{ik,s}\right)$$

Здесь и далее запятая означает дифференцирование.

$$g_{is,k} \equiv \partial_k g_{is} \equiv \frac{\partial g_{is}}{\partial x^k}$$

Только следующие символы Кристоффеля отличны от нуля в геометрии пространства-времени (3.8)

$$\begin{aligned}
\gamma_{00}^{0} &= \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\log\left(c^2 - 2V\right) \approx -c^{-2}\partial_0 V, \\
\gamma_{00}^{\alpha} &= -\frac{1}{2}g^{\alpha\alpha}g_{00,\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(c^2 - 2V\right) = -\partial_\alpha V \\
\gamma_{\alpha 0}^{0} &= \frac{1}{2}g^{00}g_{00,\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\log\left(c^2 - 2V\right) \approx -c^{-2}\partial_\alpha V
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Тогда динамические уравнения (3.7) принимают вид

$$\nabla_k T^{0k} = \partial_k T^{0k} + \partial_0 \log\left(c^2 - 2V\right) T^{00} + \frac{3}{2}\partial_\alpha \log\left(c^2 - 2V\right) T^{0\alpha} = 0 \tag{3.10}$$

$$\nabla_k T^{\beta k} = \partial_k T^{\beta k} + \frac{1}{2}\partial_\beta\left(c^2 - 2V\right) T^{00} + \frac{1}{2}\partial_0 \log\left(c^2 - 2V\right) T^{\beta 0} + \frac{1}{2}\partial_\beta \log\left(c^2 - 2V\right) T^{0\beta} = 0 \tag{3.11}$$

В нерелятивистском приближении они записываются в виде

$$\partial_k T^{0k} = 0, \quad \partial_k T^{\beta k} = T^{00}\partial_\beta V \tag{3.12}$$

Тензор энергии-импульса T^{ik} является тензором энергии-импульса идеального газа. Он имеет вид

$$T^{ik} = \rho\left\langle u^i u^k\right\rangle \tag{3.13}$$

где 4-скорость u^k определяется соотношением (2.15). Усреднение осуществляется с помощью формулы (2.19). Получаем

$$T^{00} = \rho, \quad T^{\alpha 0} = T^{0\alpha} = \rho\left\langle u^\alpha\right\rangle \tag{3.14}$$

$$T^{\alpha\beta} = \rho\left\langle u^\alpha\right\rangle\left\langle u^\beta\right\rangle + P^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \tag{3.15}$$

где тензор давления $P^{\alpha\beta}$ определяется соотношениями (3.1), (3.2). Опуская для краткости символ усреднения и заменяя $\left\langle u^\alpha\right\rangle$ величиной u^α, получаем из (3.12)

$$\partial_0\rho + \partial_\alpha\left(\rho u^\alpha\right) = 0 \tag{3.16}$$

$$\partial_0\left(\rho u^\beta\right) + \partial_\alpha\left(\rho u^\beta u^\alpha\right) + \partial_\alpha P^{\alpha\beta} = \rho\partial_\beta V \tag{3.17}$$

Используя уравнение (3.16), приведем уравнение (3.17) к виду

$$\partial_0 u^\beta + u^\alpha\partial_\alpha u^\beta + \frac{1}{\rho}\partial_\alpha P^{\alpha\beta} = \partial_\beta V \tag{3.18}$$

Если $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, то для тензора энергии-импульса $P^{\alpha\beta}$ можно использовать выражение (3.6). Получаем

$$\partial_0 u^\beta + u^\alpha\partial_\alpha u^\beta + \frac{1}{\rho}\partial_\beta\left(\frac{1}{2}\rho\left(c^2 - 2V - \mathbf{u}^2\right)\right) - \frac{1}{\rho}\partial_\alpha\left(\frac{1}{2}\rho\frac{u^\alpha u^\beta}{\mathbf{u}^2}\left(c^2 - 2V - \mathbf{u}^2\right)\right) = \partial_\beta V \tag{3.19}$$

или

$$\partial_0 u^\beta + u^\alpha \partial_\alpha u^\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial_\beta \rho}{\rho}\left(c^2 - 2V - \mathbf{u}^2\right) - \partial_\beta\left(2V - \frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{\rho}\partial_\alpha\left(\frac{1}{2}\rho\frac{u^\alpha u^\beta}{\mathbf{u}^2}\left(c^2 - 2V - \mathbf{u}^2\right)\right) = 0 \qquad (3.20)$$

Если $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, то последний член в (3.20) становится неопределенным. Чтобы сделать его определенным, следует использовать параметризацию тахионного газа и заменить $u^\alpha u^\beta/\mathbf{u}^2$ выражением $p^\alpha p^\beta/\mathbf{p}^2$.

4 Равновесное состояние тахионного газа

Рассмотрим равновесное состояние тахионного газа в гравитационном поле галактики. Запишем уравнения (3.20) в сферической системе координат (r, θ, ϕ). Для простоты рассмотрим случай сферически симметричного поля $V = V(r)$. Предположим, что тахионный газ находится практически в покое. Его скорость имеет составляющие вида $u_r = 0$, $u_\theta = 0$. Азимутальная составляющая u_ϕ очень мала, и можно положить $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ везде а (3.20) кроме множителя $u^\alpha u^\beta/\mathbf{u}^2$. Нас интересует плотность $\rho = \rho(r)$ тахионного газа в стационарном гравитационном поле. Более точно, нас интересует, может ли плотность тахионного газа достаточно большой, чтобы она могла объяснить темную материю.

Два из уравнений (3.20), соответствующие $\beta = \theta$ и $\beta = \phi$ представляют собой тождества вида $0 = 0$. Уравнение для $\beta = r$ принимает вид

$$\frac{1}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\left(c^2 - 2V\right) - 2\frac{\partial}{\partial r}V - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{r\partial\phi}\left(\frac{1}{2}\rho\frac{u^\phi u^\phi}{\mathbf{u}^2}\left(c^2 - 2V\right)\right) = 0 \qquad (4.1)$$

или, поскольку $\partial/\partial\phi = 0$, получаем

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}\left(c^2 - 2V(r)\right) = 4\frac{\partial}{\partial r}V(r) \qquad (4.2)$$

Интегрирование (4.2) дает

$$\rho = \frac{\rho_0 c^4}{\left(c^2 - 2V(r)\right)^2} \qquad (4.3)$$

где ρ_0 есть постоянная интегрирования. В случае, когда $V(r) \ll c^2$, получаем

$$\rho = \rho_0\left(1 + 4\frac{V(r)}{c^2}\right) \qquad (4.4)$$

Плотность тахионного газа изменяется довольно медленно, и гравитационного поля тахионного газа достаточно для имитации гравитационного поля темной материи. Такая способность тахионного газа обусловлена очень высоким давлением в тахионном газе.

Замечание. Некоторые возражают, что масса гало

$$m_{\mathrm{h}} = 4\pi \int_0^R \rho\left(r\right) r^2 dr \approx \frac{4\pi}{3}\rho_0 R^3 \tag{4.5}$$

стремится к ∞ при $R \to \infty$ и заключают, что гало из тахионного газа невозможно. На самом деле, подобная расходимость является проблемой всех стационарных звездных атмосфер. Например, плотность стационарной изотермической атмосферы определяется соотношением

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{GMm_{\mathrm{m}}}{kTr}\right) \tag{4.6}$$

где ρ_0 есть плотность атмосферы на поверхности звезды, M масса звезды и m_{m} есть масса молекулы газа. Получаем следующую оценку для массы атмосферы

$$m_{\mathrm{a}} = 4\pi \int_{r_0}^R \rho_0 \exp\left(-\frac{GM}{kTr}\right) r^2 dr = 4\pi \int_{1/R}^{1/r_0} \rho_0 \exp\left(-\frac{GM}{kT}\xi\right) \frac{d\xi}{\xi^4} \approx 4\pi\rho_0 \frac{R^5}{5} \tag{4.7}$$

которая расходится при $R \to \infty$. На самом деле, звездные атмосферы существуют, но они не стационарны. То же самое верно для тахионного газа. Кроме того, возможна ситуация, когда вся вселенная равномерно заполнена тахионами. Плотность тахионов больше внутри областей в окрестности галактик. Эти области образуют гало, заполненные темной материей. Вообще расчет таких областей является важной проблемой, но это сложная газодинамическая проблема, которая не рассматривается в этой работе.

5 Обсуждение

Итак, из условия равенства векторов (1.1) следует, что тахионы не существуют. Из бескоординатных условий (1.2), (1.3) следует, что отдельный тахион не может быть обнаружен, тогда как тахионный газ является наилучшим кандидатом на роль темной материи, потому что он имеет максимально возможное давление. Это означает, что метрический подход к геометрии пространства-времени и бескоординатные условия (1.2), (1.3) верны, тогда как условия равенства векторов (1.1) ошибочны для пространственноподобных векторов. (Для времениподобных векторов условия (1.1) дают тот же результат, что и бескоординатные условия (1.2), (1.3)).

С общей точки зрения бескоординатные условия лучше, чем условия, которые используют средства описания (систему координат). Но почему условия (1.1) ошибочны для пространственноподобных векторов? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим собственно евклидову геометрию, где условия (1.1) и условия (1.2), (1.3) эквивалентны и где нет пространственноподобных векторов.

Геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ является результатом обобщения собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Однако обобщение собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ зависит от способа представления собственно евклидовой геометрии [9]. Традиционное представление собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ основано на использовании формализма линейного векторного пространства. Тогда любая обобщенная геометрия также основывается на формализме линейного векторного пространства, и все свойства линейного векторного пространства сохраняются при обобщении, потому что все аксиомы линейного векторного пространства выполняются в обобщенной геометрии. Мы будем ссылаться на традиционное представление евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ как аксиоматический подход к собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.

Однако существует метрический подход к собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, когда она описывается в терминах мировой функции и только в терминах мировой функции. При обобщении собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ евклидова мировая функция σ_{E} заменяется мировой функцией σ, интересующей нас геометрии, во всех определениях геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Кроме того, мировая функция σ_{E} имеет некоторые специфические свойства геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Эти специальные свойства могут описываться в терминах мировой функции σ_{E}. Они описываются соотношениями [6].

Если σ_{E} есть мировая функция n-мерного евклидова пространства, она удовлетворяет следующим условиям.

I. Определение метрической размерности и введение прямолинейной системы координат:

$$\exists\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{5.1}$$

где $F_n\left(\mathcal{P}^n\right)$ есть определитель Грама

$$F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \equiv \det||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)|| \quad i,k = 1,2,...n \tag{5.2}$$

Здесь $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)$ есть скалярное произведение двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, определенное соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) = \sigma_{\mathrm{E}}\left(P_0, P_i\right) + \sigma_{\mathrm{E}}\left(P_0, P_k\right) - \sigma_{\mathrm{E}}\left(P_i, P_k\right)$$

Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i,\ \ i = 1,2,...n$ являются базисными векторами прямолинейной системы координат K_n с началом в точке P_0. Ковариантный метрический тензор $g_{ik}\left(\mathcal{P}^n\right),\ i,k = 1,2,...n$ и контравариантный метрический тензор $g^{ik}\left(\mathcal{P}^n\right),\ i,k = 1,2,...n$ in K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}\left(\mathcal{P}^n\right) g_{lk}\left(\mathcal{P}^n\right) = \delta_l^i, \qquad g_{il}\left(\mathcal{P}^n\right) = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l\right), \qquad i,l = 1,2,...n \tag{5.3}$$

$$F_n\left(\mathcal{P}^n\right) = \det||g_{ik}\left(\mathcal{P}^n\right)|| \neq 0, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{5.4}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma_{\mathrm{E}}(P,Q)=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{i,k=n}g^{ik}(\mathcal{P}^n)(x_i(P)-x_i(Q))(x_k(P)-x_k(Q)), \qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{5.5}$$

где координаты $x_i(P)$, $i=1,2,...n$ точки P есть ковариантные координаты вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, определенные соотношением

$$x_i(P)=(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i=1,2,...n \tag{5.6}$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные (или только отрицательные) собственные значения

$$g_k>0, \qquad k=1,2,...,n \tag{5.7}$$

IV. Условия непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P})=y_i\in\mathbb{R}, \qquad i=1,2,...n \tag{5.8}$$

рассматриваемая как уравнения для определения точки P как функции координат $y=\{y_i\}$, $i=1,2,...n$, всегда имеет одно и только одно решение.

Условия I -IV описывают возможность использования формализма линейного векторного пространства. Эти условия выполняются в случае собственно евклидовой геометрии. Этот формализм включает в себя использование системы координат. Геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ довольно близка к собственно евклидовой геометрии. Тем не менее условие (5.7) не выполняется в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, и мы имеем сюрприз с тахионами. Чтобы ввести метрическую размерность и использовать систему координат, должны быть выполнены условия (5.1), (5.2).

Пусть геометрия пространства-времени дискретна. Пусть, например, мировая функция имеет вид

$$\sigma=\sigma_{\mathrm{M}}+\frac{\lambda_0^2}{2}\mathrm{sgn}(\sigma_{\mathrm{M}})$$

где σ_{M} есть мировая функция геометрии Минковского, а λ_0 есть элементарная длина. В этом случае условия (5.1), (5.2) не выполняются, и нельзя использовать систему координат с определенной метрической размерностью. Нельзя использовать формализм линейного векторного пространства. Мы вынуждены использовать бескоординатное описание [7]. Формально это обстоятельство обусловлено многовариантностью дискретной геометрии. К сожалению, большинство исследователей полагают, что система координат может использоваться в любой геометрии пространства-времени и не верят в существование многовариантной геометрии пространства-времени. Эта работа важна в том отношении, что она непринужденно объясняет феномен темной материи с помощью многовариантных свойств геометрии пространства-времени даже в случае геометрии Минковского. Многовариантные свойства геометрии пространства-времени важны не только применительно к тахионам.

Список литературы

[1] A. Sommerfeld, Simplified deduction of the field and the forces of an electron moving in any given way". *Knkl. Acad. Wetensch* **7**, *345–367, (1904).*

[2] O.-M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande, E. C. G. Sudarshan, "Meta' Relativity". *American Journal of Physics* **30***(10), 718, (1962).*

[3] Ya.P. Terletsky, Positive, negative and imaginary rest masses. *J. de Physique at le Radium* **23,** *iss 11, 910-920 (1963).*

[4] G. Feinberg, "Possibility of Faster-Than-Light Particles". *Physical Review* **159 (5)**: *1089–1105. (1967)*

[5] G. Feinberg, *Phys. Rev. D* **17**, *1651 (1978)*

[6] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, *iss. 12, 733-760, (2002)*, (see also *e-print math.MG/0103002*).

[7] Yu.A. Rylov, Discrete space-time geometry and skeleton conception of particle dynamics. *Int. J. Theor Phys.* **51**, Issue 6, pp. 1847-1865 (2012), see also *e-print 1110.3399v1*

[8] D.Merritt, et al. , Empirical Models for Dark Matter Halos. I. Nonparametric Construction of Density Profiles and Comparison with Parametric Models *The Astronomical Journal,* **132**, *Issue 6, pp. 2685-2700, (2006)*

[9] Yu. A. Rylov, Different conceptions of Euclidean geometry and their application to the space-time geometry *e-print 0709.2755v4*