Динамические методы исследования в применении к дираковской частице

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
119526, Москва, Проспект Вернадского, 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Дираковская частица $\mathcal{S}_{\rm D}$ исследуется с помощью динамических методов, т.е. без использования принципов квантовой механики. Показано, что частица Паули $\mathcal{S}_{\rm P}$ и нерелятивистское приближение $\mathcal{S}_{\rm nD}$ дираковской частицы $\mathcal{S}_{\rm D}$ являются различными динамическими системами. $\mathcal{S}_{\rm nD}$ содержит высокочастотные степени свободы, которых не в динамической системе $\mathcal{S}_{\rm P}$. Это означает, что нерелятивистская дираковская частица $\mathcal{S}_{\rm nD}$ является составной (т.е. имеет внутренние степени свободы), в то время как частица Паули $\mathcal{S}_{\rm P}$ является точечной частицей со спином. В отсутствие электромагнитного поля мировая линия классической частицы $\mathcal{S}_{\rm Pcl}$ является времениподобной прямой, тогда как мировая линия классической нерелятивистской дираковской частицы $\mathcal{S}_{\rm nDcl}$ является спиралью. Характерная частота $\Omega = 2mc^2/\hbar$ этой спирали есть пороговая частота рождения пар. Используя динамические методы, непринужденно показывается, что копенгагенская интерпретация, где волновая функция является специфической квантовой величиной, описывающей состояние индивидуальной частицы, не совместима с формализмом квантовой механики. Кроме того показано, что распределение по импульсам в квантовой механике на самом деле является распределением по средним импульсам.

1 Введение

Принято считать, что частица Паули, т.е. динамическая система $\mathcal{S}_{\rm P}$, описываемая уравнением Паули является нерелятивистским приближением дираковской частицы, т.е. динамической системы $\mathcal{S}_{\rm D}$, описываемой уравнением Дирака [1].

На самом деле оказывается, что нерелятивистское приближение $\mathcal{S}_{\mathrm{nD}}$ дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ является составной частицей более сложной, чем частица Паули $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$, потому что она имеет дополнительные степени свободы, которых нет у частицы Паули. Это можно объяснить следующим образом.

Уравнение Дирака представляет собой систему из четырех комплексных уравнений первого порядка для четырех комплексных зависимых переменных, тогда как уравнение Паули является системой из двух уравнений первого порядка для двух комплексных зависимых переменных (порядок дифференциального уравнения определяется порядком старшей временно́й производной). Если уравнение Паули является нерелятивистским приближением уравнения Дирака, то почему его порядок ниже? Понижение порядка дифференциальных уравнений обычно объясняется тем фактом, что коэффициенты перед высшими временны́ми производными малы в нерелятивистском приближении. Этими членами пренебрегают и порядок дифференциального уравнения понижается. С другой стороны, хорошо известно, что пренебрегая высшими производными, мы теряем высокочастотные решения. В самом деле, если временна́я частота достаточно велика, член с высшей производной может стать очень большим, если даже коэффициент перед производной мал. Это означает, что нельзя пренебрегать высшими производными, не произведя надлежащего анализа.

В настоящей работе мы производим такой анализ, который показывает, что нельзя пренебрегать членами, связанными с внутренней структурой дираковской частицы. Недавно [2] было показано, что классическая дираковская частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ имеет внутреннюю структуру (дополнительные степени свободы). В настоящей работе показывается, что в нерелятивистском приближении внутренняя структура дираковской частицы также существует.

С формально математической точки зрения пренебрежение высокочастотными решениями является математической ошибкой при исследовании дираковской динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, и возникает очень интересный вопрос. Почему ошибка при переходе к нерелятивистскому приближению оставалась незамеченной в течение восьмидесяти лет после появления уравнения Дирака? Ответ очень прост. Никто не искал этой ошибки. Квантовая теория развивалась экспериментально-подгоночным методом, когда логическая структура теории рассматривалась как второстепенное обстоятельство. Нужно было объяснить таинственный микромир любым способом. В результате квантовая теория оказалась основанной на таинственных квантовых принципах, которые были нерелятивистскими. Нет ничего плохого в применении экспериментально-подгоночного метода для объяснения конкретных экспериментов и экспериментальных данных, потому что этот метод позволяет вводить новые понятия, характерные для рассматриваемых физических явлений. Однако, применение экспериментально-подгоночного метода для построения физической теории приводит к нежелательным последствиям. В этом случае метод превращается в теоретико-подгоночный метод. Применение теоретико-подгоночного метода к построению теории неэффективно, потому что оно позволяет вводить новые гипотезы и новые понятия, но не позволяет устанавливать логические связи между различными понятиями и объяснять одни понятия через другие более эффективные понятия. Основной целью физической теории является установление связей между физическими понятиями и сведение всех понятий к некоторым фундаментальным понятиям. Всякий прогресс в уменьшении числа фундаментальных понятий и объяснение других понятий в терминах фундаментальных понятий является реальным прогрессом физической теории. Вводя новые гипотезы, экспериментально-подгоночный метод позволяет вводить новые понятия, но он не позволяет устанавливать логические связи между физическими понятиями и уменьшать число фундаментальных понятий. Не следует использовать теоретико-подгоночный метод для установления логических связей между физическими понятиями и построения удовлетворительной теории. Следует использовать дедуктивный метод Ньютона с его лозунгом "Hypotheses non fingo".

Что нужно делать, если у нас серьезные проблемы с объяснением новых физических явлений? В соответствии с лозунгом Ньютона следует искать ошибки в существующей физической теории, найти их и исправить. Нахождение ошибок в основании существующей физической теории – очень трудная задача, потому что эти ошибки оказываются в других областях науки (геометрии, теории динамических систем и теории стохастических систем. В начале XX века, когда возникла квантовая теория, эти ошибки не были обнаружены. Исследователи XX века были вынуждены изобретать дополнительные гипотезы (квантовые принципы), которые могли бы компенсировать неизвестные ошибки в основании теории физических явлений микромира. Точно так же Птолемей построил свою доктрину небесной механики, где ошибка касающаяся движения Земли, компенсировалась дополнительными предположениями. Доктрина Птолемея правильно описывала движение планет, но она не могла быть использована для открытия закона всемирного тяготения или для расчета траектории ракеты при ее полете к другим планетам. Точно так же современная квантовая теория правильно описывает атомные спектры и другие нерелятивистские квантовые явления, но она не справляется с описанием релятивистских квантовых явлений.

Доктрина Птолемея (так же как современная квантовая теория) была списком предписаний, которые приводили к правильным экспериментально проверяемым предсказаниям. Однако, не все эти предписания были связаны между собой логически. Некоторые из них были совместимы только в некоторых областях изменения параметров теории, и доктрина не могла быть применена вне этой области. Список птолемеевских предписаний не образовывал логической структуры. Доктрина была применима только к движению планет и не могла быть распространена на движение других небесных тел (комет, ракет). Доктрина Коперника была логической структурой, потому что она не содержала ошибки, касающейся движения Земли. Она могла быть распространена на движение других небесных тел.

Аналогичная ситуация имеет место в современной квантовой теории, которая тоже представляет собой список предписаний, а не логическую структуру.

Эти предписания отлично работают применительно к нерелятивистским явлениям микромира, но их не удается распространить на релятивистские явления микромира. Причина неудачи обусловлена неправильными положениями (ошибками) в основаниях современной квантовой теории.

Перечислим неправильные положения (ошибки), которые должны быть исправлены для построения удовлетворительной теории явлений микромира.

1. Прямая является одномерной линией в любой геометрии пространства-времени. Это положение запрещает такие геометрии пространства-времени, где движение свободных частиц является изначально стохастическим.

2. Всякое статистическое описание осуществляется в терминах теории вероятностей. Это положение запрещает динамическую концепцию статистического описания, которое не использует понятия плотности вероятности как основное понятие статистического описания.

3. Функция Гамильтона H свободной частицы и ее энергия E, взятая с обратным знаком, всегда совпадают ($E = -H$).

Четвертая проблема, которую следовало преодолеть, не является ошибкой. Это чисто математическая проблема. Без решения этой проблемы нельзя получить правильной интерпретации волновой функции как метода описания идеальной жидкости. Мы рассмотрим эту проблему во втором разделе.

Два первых пункта списка ошибок относятся к квантовой теории как целому, тогда как третий пункт касается только релятивистской квантовой теории. Он касается проблемы рождения пар и обесценивает многие работы по квантовой релятивистской теории поля. Мы покажем это на примере вторичного квантования нелинейного уравнения Клейна-Гордона

$$\partial_0^2\psi - \boldsymbol{\nabla}^2\psi + m^2\psi =: \lambda\psi^+\psi\psi : \qquad (1.1)$$

где скорость света $c = 1$, квантовая постоянная $\hbar = 1$, и λ есть постоянная самодействия.

При вторичном квантовании уравнения (1.1) нелинейный член в правой части равенства генерирует рождение пар, если наложить дополнительное условие [3, 4, 5, 6]

$$\psi P_k - P_k\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x^k}, \qquad P^k = \int T^{0k}d\mathbf{x}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \qquad (1.2)$$

где T^{ik} есть тензор энергии-импульса. Традиционно соотношение (1.2) рассматривается как условие, необходимое для вторичного квантования. Никому не приходит в голову рассмотреть соотношение (1.2) как некоторое дополнительное условие, которое не является необходимым для вторичного квантования, и никто не проверяет совместность ограничений (1.2) с динамическим уравнением (1.1). Однако вторичное квантование уравнения (1.1) возможно без наложения ограничений (1.2) [7]. Это означает, что условия (1.2) являются дополнительными условиями, и следует проверить совместность условий (1.2) с динамическим уравнением (1.1). Проверка была произведена в работе [7]. Было показано, что соотношения (1.2) и (1.1) совместны только в случае, когда постоянная самодействия $\lambda = 0$, и динамическое уравнение (1.1) линейно.

Таким образом, хотя постановка проблемы рождения пар в виде двух соотношений (1.1) и (1.2) приводит к эффекту рождения пар [3, 4, 5, 6]. Однако, этот результат ненадежен, потому что постановка задачи противоречива. Кроме того математический формализм несовершенен, потому что он использует теорию возмущений и ренормировку. Комбинация противоречивой постановки задачи и несовершенного математического формализма позволяет получать любой желаемый результат (в данном случае эффект рождения пар).

С другой стороны, вторичное квантование уравнения(1.1) без наложения условия (1.2) осуществляет непротиворечивую постановку задачи с совершенным непертурбативным математическим формализмом (без перенормировки). Однако, при такой непротиворечивой постановке задачи [7] эффект рождения пар отсутствует.

Что является физической основой ограничения (1.2), приводящего к эффекту рождения пар? Если $k = 0$ соотношение (1.2) описывает хорошо известный факт, что для свободной частицы $H = -E$, где H есть функция Гамильтона, определяемая как величина канонически сопряженная времени t, а E является энергией частицы, определенной как интеграл от составляющей T^{00} тензора энергии-импульса. Однако, это соотношение верно только в том случае, когда отсутствует рождение пар [8]. В общем случае, когда имеется рождение пар, наложение условия (1.2) означает, что описание производится в терминах частиц и античастиц, рассматриваемых как разные динамические системы [8]. Число объектов является неопределенным, что вынуждает использовать пертурбативные методы. Наоборот, отсутствие ограничения (1.2) означает, что описание производится в терминах мировых линий, которые рассматриваются как фундаментальные объекты динамики. Число этих протяженных объектов фиксировано, и можно использовать непертурбативные методы исследования (смотри детали в [7]).

Динамика, где динамическая система (частица) существует только некоторое время и исчезает в момент столкновения с анти-системой (античастицей) непоследовательна. Формализм классической динамики не позволяет использовать такое динамическое описание. Однако, тот же формализм позволяет описать это столкновение, если частица и античастица суть различные состояния одного и того же физического объекта (мировой линии), и эволюция динамической системы описывается параметром монотонно изменяющимся вдоль мировой линии. В этом случае столкновение приводит только к переходу из одного состояния в другое. Математический формализм квантового описания также не может преодолеть эту трудность, связанную с тем, что частица и античастица являются различными динамическими системами. Вера в то, что можно преодолеть эту трудность, введя операторы рождения и уничтожения, иллюзорна. Это является физической причиной того, что соотношения (1.1) и (1.2) оказываются несовместными, и это есть третий пункт в списке ошибок.

Это означает, что простое добавление нелинейного члена к линейному уравнению Клейна-Гордона не производит эффекта рождения пар. Причины, порождающие рождение пар имеют более сложную структуру, чем простое произведение операторов рождения и уничтожения. Кроме того эти причины имеют классический аналог в виде особых силовых полей. (Смотри детали в [9]).

Мы видим на рассмотренном примере, что квантовые принципы не работают применительно к релятивистским квантовым системам, или, по крайней мере, они не эффективны в применении к ним. Есть надежда, что релятивистские квантовые системы могут быть исследованы динамическими методами, не использующими квантовые принципы.

Упомянутые выше ошибки выглядят очень просто, и очень трудно поверить, что исправление этих неправильных положений может привести к созданию удовлетворительной теории явлений микромира. Однако, это ошибки в основаниях современной квантовой теории, и их исправление очень важно для дальнейшего развития теории явлений микромира. В частности, исправление первой ошибки приводит к построению новой концепции геометрии [10] и пересмотру наших представлений о пространстве-времени в микромире. Масштаб пересмотра сравним с масштабом пересмотра, связанного с появлением специальной теории относительности [11].

Исправление второй ошибки приводит к построению динамической концепции статистического описания. Динамические методы этой концепции используются в настоящей работе. Однако, мы используем эти методы без ссылки на их физическое обоснование. Тот факт, что динамические методы появились в соответствии с исследовательской стратегией Исаака Ньютона как результат исправления ошибки, очень важен с логической точки зрения.

К сожалению, это обстоятельство не имеет значения для современных прагматиков-теоретиков, воспитанных на экспериментально-подгоночном методе исследования. Они не верят ни в какое обоснование и доверяют только эффективности применяемых методов исследования. В данном случае я предпочел играть по их правилам для того, чтобы работа была более понятна для большинства читателей, воспитанных на экспериментально-подгоночных методах исследования.

Что касается третьей ошибки, то она еще не исправлена надлежащим образом в том смысле, что эффективная теория эффекта рождения пар еще не построена. Ясно только, что применение квантовых принципов при решении этой проблемы ведет в тупик.

В настоящей работе мы покажем, что динамические методы исследования (без использования квантовых принципов) обоснованы логически. Кроме того при исследовании дираковской частицы они более эффективны, чем традиционные методы, основанные на применении квантовых принципов.

2 Динамические методы исследования

Мы используем более развитый математический формализм для описания квантовых систем. Этот формализм предполагает, что вся существенная информация о квантовой динамической системе содержится в самой динамической системе. Такие специфически квантовые понятия как волновая функция и квантовые принципы оказываются только способами описания. Волновая функция как способ описания может быть применена с равным правом как к квантовым, так и к классическим динамическим системам. Однако, квантовые принципы могут быть применены только к квантовым динамическим системам, потому что они содержат некоторые ограничения, которые не выполнены для для классических систем. Квантовые и классические системы различаются динамически (дополнительными членами в действии), а не только способом описания. Этот факт становится очевидным, когда обе системы описываются в одних и тех же терминах. Например, квантовая и соответствующая классическая системы могут описываться в терминах волновой функции, или обе системы могут описываться терминах координаты и импульса частицы. Различие между разными методами описания заключается только в удобстве их применения. Использование волновой функции более эффективно в описании квантовых систем, потому что в этом случае динамические уравнения линейны. Напротив, описание в терминах координаты частицы более удобно при описании классических систем, где динамические уравнения являются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Прогресс в развитии математического формализма имеет *математическую основу: интегрирование динамических уравнений.* Это чисто математическое достижение имеет физические следствия. Оказывается, что квантовая механика может рассматриваться как статистическое описание случайно движущихся частиц. Мы подчеркиваем, что исследуются хорошо известные квантовые системы, и все новые результаты являются *следствиями более развитых методов исследования.* Бессмысленно возражать против новых результатов ссылаясь на экспериментальные данные, потому что такие аргументы являются аргументами против рассматриваемых динамических систем, а не против методов исследования. Экспериментальные данные в принципе не могут служить аргументами против математических методов исследования. Что касается исследуемых динамических систем, мы допускаем, что они могут быть несовершенными и нуждаться в усовершенствовании. Однако, эта проблема лежит вне рамок данной работы.

Мы продемонстрируем новые математические методы исследования на простом примере шредингеровской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$, т.е. динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$, описываемой уравнением Шредингера.

Действие для свободной нерелятивистской квантовой частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ имеет следующий вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{S}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{S}}[\psi,\psi^*] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi \right\} dt d\mathbf{x} \qquad (2.1)$$

где $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$ есть комплексная одно-компонентная волновая функция, $\psi^* = \psi^*(t, \mathbf{x})$ есть величина комплексно сопряженная к ψ, и m есть масса частицы. Действие (2.1) порождает динамическое уравнение

$$i\hbar\partial_0\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi, \qquad -i\hbar\partial_0\psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi^* \tag{2.2}$$

4-вектор j^k и тензор энергии-импульса T_l^k являются каноническими величинами ассоциирующимися с действием $\mathcal{A}_\mathrm{S}[\psi, \psi^*]$. Они определяются соотношениями

$$j^k = \{\rho, \mathbf{j}\} = \frac{i}{\hbar}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi^*)}\psi^* - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\psi\right) = \left\{\psi^*\psi, -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)\right\} \tag{2.3}$$

$$T_l^k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi^*)}\partial_l\psi^* + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k\psi)}\partial_l\psi - \delta_l^k\mathcal{L}, \qquad k, l = 0, 1, 2, 3 \tag{2.4}$$

где $\mathcal{L}$ есть плотность функции Лагранжа для действия (2.1)

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi \tag{2.5}$$

Динамическая система $\mathcal{S}_\mathrm{S}$ полностью определяется динамическими уравнениями (2.2) и выражениями (2.3), (2.4) для 4-тока и тензора энергии-импульса. Эти соотношения не описывают только связь между частицей и волновой функцией. Эта связь описывается соотношениями

$$\langle F(\mathbf{x}, \mathbf{p})\rangle = B\int \mathrm{Re}\{\psi^* F(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}})\psi\} d\mathbf{x}, \qquad \hat{\mathbf{p}} = -\mathbf{i}\hbar\boldsymbol{\nabla}, \qquad B = \left(\int \psi^*\psi d\mathbf{x}\right)^{-1} \tag{2.6}$$

которые определяют среднее значение $\langle F(\mathbf{x}, \mathbf{p})\rangle$ любой функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ координат частицы $\mathbf{x}$ и ее импульса $\mathbf{p}$. Применение правил (2.6) ограничено некоторыми условиями. Они требуют, чтобы динамические уравнения были линейными и волновые функции были бы векторами в гильбертовом пространстве состояний. Мы будем ссылаться на соотношения (2.6) вместе с ограничениями на их применение как на квантовые принципы, потому что фон Нейманн показал [12], что квантовая механика может быть выведена из соотношений типа (2.6), при условии, что они справедливы для всех наблюдаемых величин. Таким образом, интерпретация волновой функции осуществляется на основе квантовых принципов, которые представляют собой нечто внешнее по отношению к динамической системе $\mathcal{S}_\mathrm{S}$.

На самом деле, квантовые принципы не являются необходимыми для интерпретации динамической системы $\mathcal{S}_\mathrm{S}$. Достаточно сделать надлежащее замену динамических переменных и описать динамическую систему $\mathcal{S}_\mathrm{S}$ в терминах координат частицы $\mathbf{x}$. Такое описание не содержит таинственной волновой функции, смысл которой неясен, квантовые принципы (2.6) оказываются ненужными для интерпретации динамической системы. Шредингеровская частица $\mathcal{S}_\mathrm{S}$ является частным случаем обобщенной шредингеровской частицы $\mathcal{S}_\mathrm{gS}$, которая является динамической системой $\mathcal{S}_{\rm gS}$, описываемой действием

$$\mathcal{A}_{\rm gS}[\psi,\psi^*]=\int\left\{\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi+\frac{\hbar^2}{8m}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2\rho\right\}\mathrm{d}^4x, \tag{2.7}$$

$$\rho\equiv\psi^*\psi,\qquad \mathbf{s}\equiv\frac{\psi^*\boldsymbol{\sigma}\psi}{\rho},\qquad \boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_\alpha\},\qquad \alpha=1,2,3, \tag{2.8}$$

Здесь $\psi=\binom{\psi_1}{\psi_2}$, $\psi^*=(\psi_1^*,\psi_2^*)$ есть двухкомпонентная волновая функция, и σ_α суть матрицы Паули. 4-ток определяется соотношением (2.3) с двухкомпонентной волновой функцией ψ. В случае, когда составляющие ψ_1 и ψ_2 линейно зависимы (например, $\psi=\binom{\psi_1}{0}$), вектор среднего спина $\mathbf{s}=$const, и последний член в действии (2.7) обращается в нуль. В этом случае динамическая система $\mathcal{S}_{\rm gS}$ превращается в динамическую систему (2.1).

Можно показать, что динамическая система $\mathcal{S}_{\rm gS}$ является другим представлением динамической системы $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$, т.е. действие для $\mathcal{S}_{\rm gS}$ может быть получено из действия для динамической системы $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ с помощью надлежащей замены переменных [13].

Динамическая система $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ представляет собой статистический ансамбль стохастических частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$. Он описывается действием

$$\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]:\qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}_{\rm st}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}_{\rm st}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\rm st}\right\}dtd\boldsymbol{\xi} \tag{2.9}$$

где $\mathbf{u}_{\rm st}=\mathbf{u}_{\rm st}\left(t,\mathbf{x}\right)$ есть векторная функция аргументов $t,\mathbf{x}$ (а не $t,\boldsymbol{\xi}$), и $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ есть 3-векторная функция независимых переменных $t,\boldsymbol{\xi}=\{\xi_{1,}\xi_2,\xi_3\}$. Динамические уравнения для динамической системы $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ получаются в результате вариации действия (2.9) по зависимым переменным $\mathbf{x},\mathbf{u}_{\rm st}$. В действии (2.9) переменные $\boldsymbol{\xi}$ маркируют стохастические системы $\mathcal{S}_{\rm st}$, образующие статистический ансамбль. Оператор $\boldsymbol{\nabla}$ определен в пространстве координат $\mathbf{x}$ соотношением

$$\boldsymbol{\nabla}=\{\partial_1,\partial_2,\partial_3\}\equiv\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right\} \tag{2.10}$$

3-вектор $\mathbf{u}_{\rm st}$ описывает среднее значение стохастической составляющей движения частицы. Он рассматривается как функция переменных $t,\mathbf{x}$. Первый член $\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2$ описывет энергию регулярной составляющей скорости стохастической частицы. Второй член $m\mathbf{u}_{\rm st}^2/2$ описывает энергию случайной составляющей скорости. Составляющие $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и $\mathbf{u}_{\rm st}$ полной скорости связаны с различными степенями свободы, и их энергии должны складываться в выражении для плотности функции Лагранжа. Последний член $-\hbar\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\rm st}/2$ описывает взаимодействие между регулярной составляющей $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ скорости и случайной составляющей $\mathbf{u}_{\rm st}$ скорости.

Действие (2.9) есть сумма (интеграл) действий для независимых стохастических систем $\mathcal{S}_{\rm st}$, маркируемых параметрами $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$. Всякая стохастическая система $\mathcal{S}_{\rm st}$ представляет собой стохастическую частицу, чье состояние описывается ее координатами $\mathbf{x}(t)$. Действие для стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ получается из действия (2.9) для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Оно имеет вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{st}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{st}}}[\mathbf{x},\mathbf{u}_{\mathrm{st}}] = \int \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}} \right\} dt \tag{2.11}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. На самом деле, действие (2.11) не является хорошо определенным математически, если $\hbar \neq 0$. Оно является символическим, потому что оператор (2.10) определен в окрестности точки $\mathbf{x}$, а не в самой точке $\mathbf{x}$. В результате не существует динамических уравнений для стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, если $\hbar \neq 0$. Это согласуется со стохастичностью динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. По определению, система $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является стохастической, если для нее не существует динамических уравнений. Если отключить взаимодействие со стохастическим агентом, положив $\hbar = 0$ в действии (2.11) (или удалить два последних члена) получим хорошо определенное действие для свободной детерминированной нерелятивистской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{d}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{d}}}[\mathbf{x},\mathbf{u}_{\mathrm{st}}] = \int \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2 \right\} dt, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \tag{2.12}$$

Шредингеровская частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ (2.1) является частным случаем динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ (2.9), тогда как обобщенная шредингеровская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{gS}}$ (2.7) совпадает с динамической системой $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ (2.9). Действие (2.7) может быть получено из действия (2.9) математически с помощью надлежащей замены переменных (смотри Приложение A).

Интерпретация динамической системы (2.9) очень проста, но динамические уравнения для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ довольно сложны. Они имеют вид

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta\mathbf{x}} = -m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{m}{2}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\right) = 0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta\mathbf{u}_{\mathrm{st}}} = m\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\rho + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho = 0, \tag{2.14}$$

где ρ есть функция производных от $\mathbf{x}$ по $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, определяемая соотношением

$$\rho = \left[\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}\right]^{-1} = \frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)} \tag{2.15}$$

Разрешая соотношение (2.14) относительно $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ в виде

$$\mathbf{u}_{\mathrm{st}} = -\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho, \tag{2.16}$$

и исключая $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ из (2.13), получаем

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}U(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho), \qquad U(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho) = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} - 2\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\rho}{\rho}\right) \tag{2.17}$$

Таким образом, динамические уравнения, порожденные действием (2.9), описывают регулярную составляющую скорости частицы $\mathcal{S}_{\rm st}$, как движение в очень сложном потенциальном силовом поле U, зависящем от распределения всех частиц в статистическом ансамбле $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$. Разумеется, траектории $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ не описывают движение индивидуальных стохастических частиц. Они описывают только среднестатистическое движение стохастических частиц. Положение напоминает ситуацию в газовой динамике. Динамические уравнения газовой динамики описывают движение "частиц газа", каждая из которых содержит много молекул. Движение газовых молекул случайно и хаотично. Оно не может быть описано уравнениями газовой динамики, которые описывают только регулярную составляющую движения молекул.

Заметим, что член $\frac{m}{2}\mathbf{u}_{\rm st}^{2}$ в (2.11) выглядит как кинетическая энергия, но согласно (2.16) он не зависит от временно́й производной $\dot{\mathbf{x}}$, и в динамических уравнениях он действует как потенциальная энергия.

Статистический ансамбль (2.9) может рассматриваться как некая жидкость. Мы можем говорить о течении статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$, имея в виду, что динамическое уравнение (2.17) для динамической системы $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ может быть интерпретировано как гидродинамическое уравнение для некоторой "квантовой" жидкости.

Наоборот, динамические уравнения, порожденные действием (2.1), линейны и довольно просты, тогда как интерпретация их довольно сложна, потому что используются принципы квантовой механики (2.6). Таким образом, описание с помощью действия (2.9) допускает простую интерпретацию, но динамические уравнения сложны для решения.

Если действия (2.1) и (2.9) описывают одну и ту же динамическую систему (далее для краткости мы будем говорить об эквивалентности динамических систем (2.1) и (2.9), хотя на самом деле действие (2.1) является только частным случаем действия (2.9)), то представляется разумным использовать динамическую систему $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ в качестве исходного пункта для постановки задачи и интерпретации полученных результатов, тогда как динамическая система $\mathcal{S}_{\rm S}$ будет использоваться только для решения динамических уравнений, которые имеют простой вид в терминах волновой функции.

Почему это очевидное обстоятельство не использовалось раньше? Почему проблема стохастического движения микрочастиц формулировалась в терминах таинственной волновой функции? Ответ прост. Связь между двумя различными формами (2.1) и (2.9) действия для шредингеровской частицы *была неизвестна в течение долгого времени.*

Было известно, что уравнение Шредингера может быть записано в гидродинамической форме [14]. Д. Бом [15] использовал это обстоятельство для гидродинамической интерпретации квантовой механики. Однако, это была только интерпретация квантовых принципов в гидродинамической форме. Ему не удалось исключить квантовые принципы и волновую функцию из обоснования квантовой механики, и волновая функция оставалась таинственным объектом – вектором гильбертова пространства. Ему не удалось связать волновую функцию с гидродинамическими переменными: плотностью ρ и скоростью $\mathbf{v}$. Более точно, связь между волновой функцией и гидродинамическими переменными ρ, $\mathbf{v}$ была установлена, но она была односторонней. В случае потенциального течения можно было выразить волновую функцию ψ через гидродинамические переменные ρ, $\mathbf{v}$ и гидродинамические переменные через волновую функцию, однако, в случае произвольного течения это сделать было нельзя. Следовательно, можно было перейти от описания в терминах волновой функции к описанию в терминах ρ, $\mathbf{v}$, но нельзя было перейти от гидродинамического описания в терминах ρ, $\mathbf{v}$ к описанию в терминах ψ, потому что течение жидкости является, вообще говоря, завихренным, и динамическая система (2.9) не может быть описана в терминах одно-компонентной волновой функции.

Представим волновую функцию в виде

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\varphi}, \tag{2.18}$$

подставим ее в уравнение Шредингера (2.2) и разделим вещественную и мнимую части уравнения. Мы получим два вещественных уравнения

$$\partial_0 \ln \rho = -\frac{\hbar}{m}\left(\nabla^2\varphi + \nabla \ln \rho \nabla\varphi\right) \tag{2.19}$$

$$\partial_0\varphi + \frac{\hbar}{2m}\left(\nabla\varphi\right)^2 = \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{1}{2}\nabla^2 \ln \rho + \left(\frac{1}{2}\nabla \ln \rho\right)^2\right) \tag{2.20}$$

Чтобы получить гидродинамические уравнения, нужно взять градиент от уравнения (2.20) и ввести скорость $\mathbf{v} = \{v^1, v^2, v^3\}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\varphi \tag{2.21}$$

Получаем

$$\partial_0\rho + \partial_\alpha\left(\rho v^\alpha\right) = 0, \qquad \partial_0 v^\alpha + v^\beta\partial_\beta v^\alpha = -\frac{1}{\rho}\partial_\beta P^{\alpha\beta}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{2.22}$$

где $P^{\alpha\beta}$ есть тензор натяжений

$$P^{\alpha\beta} = \frac{\hbar^2}{4m^2}\left(\frac{\left(\partial_\alpha\rho\right)\partial_\beta\rho}{\rho} - \partial_\alpha\partial_\beta\rho\right) \tag{2.23}$$

Гидродинамические уравнения (2.22) получились в результате дифференцирования уравнения (2.2), записанного в терминах волновой функции. Это означает, что для перехода от гидродинамических уравнений (2.22) к уравнению, записанному в терминах волновой функции, нужно интегрировать гидродинамические уравнения (2.22). Кроме того, в случае потенциального течения волновая функция представляется в терминах ρ и гидродинамического потенциала φ. То же самое верно и в общем случае, но число гидродинамических потенциалов будет больше одного, и нужно ввести дополнительные гидродинамические потенциалы (потенциалы Клебша).

Проблема интегрирования гидродинамических уравнений довольно сложна. Она было решена только в конце восьмидесятых годов XX века [16]. Чтобы решить эту проблему нужно было развить специальный якобианный формализм [13], который использовался уже Клебшем [17, 18].

Как только гидродинамические уравнения для идеальной жидкости были проинтегрированы, стало ясно, что волновая функция есть просто метод описания идеальной жидкости. Волновая функция ψ перестала быть таинственным вектором гильбертова пространства, чей смысл может быть получен только с помощью квантовых принципов. Теперь можно определить цепь преобразований динамических переменных, которые превращают действие (2.9) в действие (2.7) (детальное рассмотрение в Приложении A). В результате действие (2.9) может быть использовано как исходная точка для описания квантовой шредингеровской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$. При таком описании квантовые принципы (2.6) не нужны, потому что они являются только инструментом для интерпретации волновой функции.

Статистический ансамбль (2.9) как исходная точка квантового описания имеет ряд преимуществ перед действием (2.1):

1. Статистический ансамбль (2.9) является очень прозрачной конструкцией, основанной на физической идее, что квантовая частица является случайно движущейся частицей.

2. Не используются квантовые принципы, которые являются нерелятивистскими и не могут быть распространены на релятивистский случай.

3. Статистический ансамбль (2.9) является более общим построением, потому что действие (2.1) является частным случаем действия (2.9).

4. В статистическом описании, основанном на действии (2.9), имеются три различных аспекта: динамический фактор, статистический фактор и фактор случайности. Каждый из этих факторов может быть выделен как соответствующий член в действии и исследован отдельно.

5. Описание в терминах динамической системы (2.9) является статистическим описанием. Как всякое статистическое описание оно содержит два разных объекта: индивидуальную стохастическую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и среднестатистическую частицу $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Соответственно имеются два разных вида измерения: индивидуальное измерение (S-измерение), производимое над отдельной частицей $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и массовое измерение (M-измерение), производимое над среднестатистической частицей $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Эти измерения обладают различными свойствами, и их отождествление недопустимо.

Сложность динамических уравнений (2.17) является единственным недостатком статистического описания (2.9).

Подчеркнем, что в настоящей работе переход от действия (2.9) как исходной точки к действию (2.1) мотивирован математически. Никакие дополнительные физические аргументы не используются для обоснования статистического ансамбля (2.9) как исходной точки квантового описания.

Если мы рассматриваем стационарные состояния статистического ансамбля, нас интересует только величина магнитного момента (который предполагается связанным с величиной полного спина). В этом случае причина спина не имеет значения. Однако, если мы исследуем структуру отдельной частицы, для нас существенно, порожден ли спин свойствами индивидуальной частицы, или он порожден завихренностью течения жидкости. Бессмысленно классифицировать частицы по их спину, если спин имеет коллективную природу, и индивидуальная частица не имеет собственного углового момента. Если мы используем традиционный подход к квантовой механике, т.е. если мы исходим из действия (2.1), мы не можем разделить динамические и коллективные свойства прямо. Только исходя из действия (2.9), мы можем попробовать решить эту проблему для конкретных динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$. Если исследователь стоит на точке зрения копенгагенской интерпретации, где волновая функция описывает состояние индивидуальной частицы, такая постановка вопроса кажется ему некорректной.

Коллективная основа спина может быть воспринята только при использовании статистического подхода, представленного действием (2.9). Статистическое описание, основанное на действии (2.9) приводит к утверждению, что волновая функция описывает состояние статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, а не состояние отдельной квантовой частицы. Обсуждение вопроса, какой объект описывает волновая функция, имеет долгую историю. Некоторые исследователи [19] полагают, что волновая функция описывает состояние отдельной квантовой частицы, тогда как другие [20, 21] полагают, что волновая функция описывает состояние статистического ансамбля. Имеется длинный список мнений по этому вопросу, но мы не приводим его, потому что эта проблема не является вопросом веры. Вопрос должен быть решен на основе математического формализма.

Проблема ставится следующим образом. Какая динамическая система описывается действием (2.1)? Отдельная квантовая частица или статистический ансамбль отдельных частиц? Перейдем к пределу $\hbar \to 0$. Тогда действие (2.1) будет описывать классическую динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}}$. Если эта динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}}$ является отдельной классической системой, то волновая функция описывает состояние отдельной классической частицы. Если динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$ является статистическим ансамблем классических частиц, то волновая функция описывает состояние статистического ансамбля отдельных частиц. Однако, прямо перейти к пределу $\hbar \to 0$ в действии (2.1) нельзя, потому что описание динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ вырождается.

Сделаем замену переменных

$$\psi \to \Psi_b = |\psi| \exp\left(\frac{\hbar}{b} \log \frac{\psi}{|\psi|}\right), \qquad \psi = |\Psi_b| \exp\left(\frac{b}{\hbar} \log \frac{\Psi_b}{|\Psi_b|}\right) \tag{2.24}$$

где $b \neq 0$ есть некоторая вещественная постоянная. После этой замены переменных действие (2.1) превращается в

$$\mathcal{S}_{\mathrm{S}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{S}}\left[\Psi_b, \Psi_b^*\right] = \int \left\{ \frac{ib}{2}\left(\Psi_b^* \partial_0 \Psi_b - \partial_0 \Psi_b^* \cdot \Psi_b\right) - \frac{b^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \Psi_b^* \boldsymbol{\nabla} \Psi_b \right.$$

$$\left. - \frac{\hbar^2 - b^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}\left|\Psi_b\right|\right)^2 \right\} dt d\mathbf{x} \tag{2.25}$$

Динамическое уравнение имеет вид

$$ib\partial_0 \Psi_b = -\frac{b^2}{2m} \boldsymbol{\nabla}^2 \Psi_b - \frac{\hbar^2 - b^2}{8m}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} + 2\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\right)\Psi_b, \qquad \rho \equiv \Psi_b^* \Psi_b \tag{2.26}$$

Вместо (2.3), получаем

$$\rho = \Psi_b^* \Psi_b, \qquad \mathbf{j} = -\frac{ib}{2m}\left(\Psi_b^* \boldsymbol{\nabla} \Psi_b - \boldsymbol{\nabla} \Psi_b^* \cdot \Psi_b\right) \tag{2.27}$$

Полагая $\hbar = 0$ в (2.25), (2.26), получаем

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{Scl}}\left[\Psi_b, \Psi_b^*\right] = \int \left\{ \frac{ib}{2}\left(\Psi_b^* \partial_0 \Psi_b - \partial_0 \Psi_b^* \cdot \Psi_b\right) - \frac{b^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \Psi_b^* \boldsymbol{\nabla} \Psi_b \right.$$

$$\left. + \frac{b^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}\left|\Psi_b\right|\right)^2 \right\} dt d\mathbf{x} \tag{2.28}$$

$$ib\partial_0 \Psi_b = -\frac{b^2}{2m} \boldsymbol{\nabla}^2 \Psi_b + \frac{b^2}{8m}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} + 2\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\right)\Psi_b, \qquad \rho \equiv \Psi_b^* \Psi_b \tag{2.29}$$

Действие (2.28) описывает статистический ансамбль свободных классических частиц и, следовательно, волновая функция описывает статистический ансамбль, а не отдельную частицу. Действие (2.28) не может описывать отдельную классическую частицу, потому что динамическая система (2.28) имеет бесконечное число степеней свободы. Поскольку описание (2.28) в терминах волновой функции Ψ_b является пределом $\hbar \to 0$ описания в терминах волновой функции ψ, волновая функция ψ в (2.1) не может описывать отдельную квантовую частицу. Таким образом, *предположение, что волновая функция описывает состояние отдельной частицы, несовместимо с формализмом квантовой механики.*

В соответствии с копенгагенской интерпретацией квантовой механики волновая функция ψ описывает состояние отдельной квантовой частицы, тогда как состояние классической частицы описывается ее положением $\mathbf{x}$ и ее импульсом $\mathbf{p}$. Это предполагает, что волновая функция является специфической квантовой величиной, которая не имеет классического аналога. В соответствии с этим подходом нельзя переходить к пределу $\hbar \to 0$ в действии (2.1), потому что действие обращается в нуль и описание вырождается.

Преобразование (2.24) изменяет масштаб фазы $\ln(\psi/|\psi|)$ волновой функции, и это изменение может быть очень малым. Волновая функция Ψ_b является правильной волновой функцией, которая может быть использована, в частности, для расчета средних значений с помощью соотношения (2.6). Этот расчет может быть произведен для любого значения постоянной b. Волновая функция Ψ_b описывает одно и то же состояние системы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ при различных значениях параметра b, потому что состояние динамической системы не определяется волновой функцией однозначно. Одно и то же состояние системы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ может быть описано различными волновыми функциями. С точки зрения статистического описания (2.9) волновая функция не является однозначно определенной, потому что она построена из гидродинамических потенциалов, т.е. она является результатом интегрирования однозначно определенной скорости $\mathbf{v}$. Параметр b в преобразовании (2.6) представляет собой постоянную интегрирования.

Мы можем положить $b=\hbar$ в соотношениях (2.28), (2.29) и получить описание "классической частицы" в виде содержащем квантовую постоянную $\hbar$.

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{Scl}}[\psi,\psi^*]=\int\left\{\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi\right.$$
$$\left.+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}|\psi|\right)^2\right\}dt d\mathbf{x} \tag{2.30}$$

$$i\hbar\partial_0\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi+\frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2}+2\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\right)\psi, \qquad \rho\equiv\psi^*\psi \tag{2.31}$$

Тот же самый результат может быть получен из (2.28), (2.29) с помощью преобразования, обратного к преобразованию (2.24). Формально действие (2.30) отличается от действия (2.1) последним членом, который описывает отсутствие квантовых эффектов. Квантовая постоянная в первых двух членах не имеет отношения к квантовым эффектам. Зависимость от $\hbar$ обусловлена специальным выбором произвольной постоянной b.

Действие (2.30) описывает динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}}=\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ на "квантовом языке", т.е. в терминах волновой функции. Действие

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}}=\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]}[\mathbf{x}]=\int\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 dt d\boldsymbol{\xi} \tag{2.32}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$, описывает ту же самую динамическую ситему на "классическом языке", т.е. в терминах классических переменных $\mathbf{x},\mathbf{p}$. Аналогично действие (2.1) описывает динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}=\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ на квантовом языке, тогда как действие (2.9) описывает ту же самую динамическую систему на классическом языке. Совершенно естественно, что квантовая система $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ проще описывается на квантовом языке, тогда как классическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}}=\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ проще описывается на классическом языке. Однако, нет причины для утверждения, что квантовая система должна описываться на квантовом языке (в терминах волновой функции).

Два различных описания классической системы $\mathcal{S}_{\rm cl}$ могут быть использованы для интерпретации правила (2.6) и для интерпретации принципа соответствия. Полученные результаты могут быть приложены к квантовой системе $\mathcal{S}_{\rm S}$, потому что различие между динамическими системами $\mathcal{S}_{\rm S}=\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ и $\mathcal{S}_{\rm Scl}=\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$, описываемыми соответственно действиями (2.1) и (2.30), проявляется только в добавочном нелинейном члене в динамическом уравнении. Возможность описания $\mathcal{S}_{\rm S}=\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ и $\mathcal{S}_{\rm Scl}=\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ на обоих языках (классическом и квантовом) закрывает дверь перед копенгагенской интерпретацией, где предполагается, что волновая функция описывает отдельную частицу. Таким образом, *для использования копенгагенской интерпретации нет ни повода, ни извинения.*

Правила (2.6) представляют собой статистические соотношения, которые могут быть применены как к классическим так и к квантовым статистическим ансамблям. Некоторые результаты их применения оказываются довольно любопытными. Например, распределение по импульсам

$$w\left(\mathbf{p}\right)=\psi_{\mathbf{p}}^{*}\psi_{\mathbf{p}},\qquad \psi_{\mathbf{p}}=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{3}}\int e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{px}}\psi\left(\mathbf{x}\right)d\mathbf{x} \tag{2.33}$$

в состоянии, описываемом волновой функцией ψ, оказывается скорее распределением по средним импульсам, чем распределением по импульсам [22]. Продемонстрируем разницу между распределениями по импульсам и по средним импульсам на примере идеального газа.

Рассмотрим газ, движущийся с постоянной скоростью $\mathbf{u}\left(\mathbf{x}\right)=\mathbf{u}$ =const. Как всякая идеальная жидкость такой газ может быть описан волновой функцией. Она имеет вид

$$\psi\left(t,\mathbf{x}\right)=A\exp\left(-\frac{im\mathbf{ux}}{\hbar}-\frac{im\mathbf{u}^{2}}{2\hbar}t\right),\qquad A=\text{const} \tag{2.34}$$

где m есть масса молекулы газа. Плотность ρ и скорость $\mathbf{u}$, описываемые формулами (2.3), (2.34)

$$\rho=\psi^{*}\psi,\qquad \mathbf{u}=\frac{\mathbf{j}}{\rho}=-\frac{i\hbar}{2m\psi^{*}\psi}\left(\psi^{*}\boldsymbol{\nabla}\psi-\boldsymbol{\nabla}\psi^{*}\cdot\psi\right) \tag{2.35}$$

постоянны и удовлетворяют гидродинамическим уравнениям для любого вида внутренней энергии.

Расчет с помощью формулы (2.33) дает

$$w\left(\mathbf{p}\right)d\mathbf{p}=\psi_{\mathbf{p}}^{*}\psi_{\mathbf{p}}d\mathbf{p}=B\delta\left(\mathbf{p}-m\mathbf{u}\right)d\mathbf{p} \tag{2.36}$$

где B есть постоянная и δ есть δ-функция Дирака. Хаотическое движение молекул описывается распределением Максвелла

$$F\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right)d\mathbf{p}=\frac{1}{\left(2\pi mkT\right)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{\left(\mathbf{p}-m\mathbf{u}\left(\mathbf{x}\right)\right)^{2}}{2mkT}\right\}d\mathbf{p} \tag{2.37}$$

Оно зависит от температуры T газа и не имеет ничего общего с распределением (2.36). Движение газа описывается уравнениями газовой динамики, которые не принимают в расчет хаотическое движение молекул и не содержат ссылки на распределение Максвелла. Чем является распределение (2.36)?

Разделим объем V течения газа на одинаковые кубические ячейки $V_1, V_2, ...V_N$, $N \gg 1$. Пусть выполнены следующие условия

$$l_{\mathrm{c}} \ll L, \qquad |v_{\mathrm{t}}\tau_c| \ll L, \qquad |\mathbf{u}(\mathbf{x})| \ll v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \tag{2.38}$$

где L есть линейный размер ячейки, l_{c} есть средний путь между столкновениями молекул, τ_{c} есть среднее время между столкновениями и v_{t} есть средняя тепловая скорость молекул.

Вычислим средний импульс $\langle \mathbf{p}_i \rangle$ молекулы газа в ячейке V_i. Получим $\langle \mathbf{p}_i \rangle = m\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V_i$, $i = 1, 2, ...N$. Множество всех $\langle \mathbf{p}_i \rangle$, $i = 1, 2, ...N$ образует распределение по средним импульсам. Это распределение полностью определяется течением газа и не имеет ничего общего с распределением Максвелла (2.37), которое описывает импульсное распределение как регулярной так и случайной составляющих импульса. При условиях (2.38) распределение по средним импульсам много уже, чем распределение Максвелла, потому что распределение Максвелла учитывает случайную составляющую скорости молекул, а в данном случае случайная составляющая много больше, чем регулярная. Соотношение (2.36) может быть переписано в виде

$$w(\langle \mathbf{p} \rangle)\, d\langle \mathbf{p} \rangle = \psi_{\mathbf{p}}^{*}\psi_{\mathbf{p}} d\langle \mathbf{p} \rangle = B\delta(\langle \mathbf{p} \rangle - m\mathbf{u})\, d\langle \mathbf{p} \rangle \tag{2.39}$$

где $\langle \mathbf{p} \rangle$ есть средний импульс частицы.

Кроме того, каждый импульс $\langle \mathbf{p}_i \rangle$ маркируется индексом i, или координатой $\mathbf{x}_i$ ячейки V_i. Это означает, что переменные $\mathbf{x}$ и $\langle \mathbf{p}_i \rangle$ не являются независимыми, и совместное координатно-импульсное распределение не существует. В копенгагенской интерпретации отсутствие совместного координатно-импульсного распределения объясняется некоммутативностью операторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, и распределение (2.33) рассматривается как распределение по случайной составляющей импульса (некоторый аналог распределения Максвелла). Имеются и другие неожиданные характеристики правила (2.6).

Правило (2.6) является только методом получения информации, содержащейся в исследуемой динамической системе. Эта информация может быть извлечена из динамической системы другими методами. Применение правила (2.6) не добавляет никакой реальной информации сверх той, которая содержится в исследуемой динамической системе.

3 Динамическая расквантизация

Квантовый язык, т.е. описание, содержащее квантовую постоянную $\hbar$, может быть использован для описания классических динамических систем, потому что квантовая постоянная $\hbar$ может быть использована вместо произвольной постоянной b. Замена динамической постоянной b квантовой постоянной производится для того, чтобы сделать динамические уравнения линейными. Например, в действии (2.25) квантовая постоянная $\hbar$ используется естественным образом, т.е. в том смысле, что полагая $\hbar = 0$, мы подавляем квантовые эффекты. В действии (2.1) для той же самой динамической системы квантовая постоянная $\hbar$ используется искусственным образом, в том смысле, что полагая $\hbar = 0$, мы не подавляем квантовых эффектов. Более того, полагая $\hbar = 0$, мы разрушаем описание. Однако, действие (2.1) порождает линейное динамическое уравнение, и это обстоятельство является причиной искусственного отождествления $b = \hbar$, когда динамическая постоянная b отождествляется с квантовой постоянной $\hbar$.

Такое искусственное отождествление может производиться в других квантовых системах (например, в $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$), и мы не можем быть уверены, что полагая $\hbar = 0$, мы подавляем квантовые эффекты. Кроме того, используя преобразование типа (2.24), мы не можем быть уверены, что при этом мы отделяем квантовые члены от динамических и статистических членов.

Требуется более эффективная формальная динамическая процедура, позволяющая подавить стохастические члены в динамических уравнениях. Сравним динамические уравнения (2.17) для $\mathcal{S}_{\mathrm{S}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, записанные в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho\right), \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \qquad U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho\right) = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho^2} - 2\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\rho}{\rho}\right) \tag{3.1}$$

с динамическими уравнениями для $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$, которые имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} \tag{3.2}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right)$. Динамические уравнения (3.1), суть дифференциальные уравнения в частных производных, потому что ρ определяется соотношением (2.15), содержащим производные по ξ_α, $\alpha = 1, 2, 3$, тогда как динамические уравнения (3.2) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Уравнения (3.2) содержат производные только в одном направлении в пространстве независимых переменных $\{t, \boldsymbol{\xi}\}$, тогда как уравнение (3.1) содержит производные в разных направлениях пространства независимых переменных $\{t, \boldsymbol{\xi}\}$. Это свойство сохраняется при любой замене независимых динамических переменных и, в частности, при замене $\{t, \boldsymbol{\xi}\} \rightarrow \{t, \mathbf{x}\}$. Если система дифференциальных уравнений содержит производные только в одном направлении пространства независимых переменных, то эта система приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью надлежащей замены переменных.

Если мы хотим подавить квантовые эффекты, следует привести систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы сделать это, достаточно спроектировать производные в пространстве независимых переменных на некоторое направление. Тогда система дифференциальных уравнений будет содержать производные только в одном направлении, и следовательно, она может быть приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. На какое направление следует проектировать производные в системе (3.1), чтобы получить систему (3.2)?

Такое направление описывается 4-вектором тока $j^k = \{\rho, \mathbf{j}\} = \left\{j^k\right\}$, $k = 0,1,2,3$ в пространстве-времени. Проектирование следует производить в пространстве независимых переменных $\{t, \mathbf{x}\}$, т.е. в пространстве-времени. Удобно выбрать зависимые переменные таким образом, чтобы 4-ток j^k был бы среди зависимых переменных. Возьмем действие (A.22) для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\varphi, \boldsymbol{\xi}, j\right] = \int \left\{\frac{m}{2}\frac{j^\alpha j^\alpha}{\rho} - bj^k\left(\partial_k\varphi + g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial_k\xi_\alpha\right) - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho}\right\} d^4x, \qquad (3.3)$$

где в соответствии с (A.15) и (A.19)

$$j^k = \{\rho, \mathbf{j}\} = \left\{\rho, \frac{b\rho}{m}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha\right)\right\} \qquad (3.4)$$

и $g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)$, $\alpha = 1,2,3$ суть некоторые функции аргумента $\boldsymbol{\xi}$.

Второй член в действии (3.3) содержит производные только в направлении 4-вектора j^k. В последнем члене действия (3.3) производные должны проектироваться на вектор j^k. Мы должны сделать замену

$$\partial_l \rightarrow \partial_{||l} = \frac{j_l j^k}{j_s j^s}\partial_k, \qquad l = 0,1,2,3 \qquad (3.5)$$

в действии (3.3). Получаем

$$\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho} = \frac{\left(\partial_\alpha\rho\right)\left(\partial_\alpha\rho\right)}{\rho} \rightarrow \frac{j_\alpha j_\alpha\left(j^i\partial_i\rho\right)^2}{\rho\left(j^s j_s\right)^2} \qquad (3.6)$$

$$j_\alpha j_\alpha = \mathbf{j}^2 = \rho^2\mathbf{v}^2, \qquad j^s j_s = c^2\rho^2 - \rho^2\mathbf{v}^2$$

В нерелятивистском приближении, когда скорость $|\mathbf{v}| \ll c$, получаем следующую оценку

$$\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho} \approx \frac{\mathbf{v}^2\left(j^i\partial_i\rho\right)^2}{c^4\rho^3} \qquad (3.7)$$

В нерелятивистском приближении $c \rightarrow \infty$ последним членом в действии (3.3) нужно пренебречь после замены (3.5). Таким образом, в случае шредингеровской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ замена (3.5) приводит к подавлению квантовых эффектов.

Мы будем называть процедуру (3.5) динамической расквантизацией, потому что она преобразует шредингеровскую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{S}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ в классическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$. Динамическая расквантизация является релятивистской динамической процедурой. Она не содержит ссылки на квантовую постоянную и подавляет любую стохастичность независимо от ее природы. С этого момента мы будем использовать динамическую расквантизацию для подавления стохастичности в квантовых системах.

Строго говоря, динамическую расквантизацию следует применять к динамическим уравнениям. Однако, во многих случаях применение динамической расквантизации к действию приводит к тем же результатам, что и применение ее к динамическим уравнениям.

4 Нерелятивистская дираковская частица

Дираковская частица представляет собой динамическую систему $\mathcal{S}_{\rm D}$, описываемую уравнением Дирака. Действие $\mathcal{A}_{\rm D}$ для динамической системы $\mathcal{S}_{\rm D}$ имеет вид

$$\mathcal{S}_{\rm D}: \qquad \mathcal{A}_{\rm D}[\bar{\psi},\psi]=c^2\int(-mc\bar{\psi}\psi+\frac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l\partial_l\psi-\frac{i}{2}\hbar\partial_l\bar{\psi}\gamma^l\psi-\frac{e}{c}A_l\bar{\psi}\gamma^l\psi)d^4x \quad (4.1)$$

где m и e суть соответственно масса и заряд дираковской частицы, а c есть скорость света. Здесь ψ есть четырехкомпонентная комплексная волновая функция, ψ^* есть эрмитово-сопряженная волновая функция и $\bar{\psi}=\psi^*\gamma^0$ есть сопряженная волновая функция. γ^i, $i=0,1,2,3$ суть 4×4 постоянные комплексные матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^l\gamma^k+\gamma^k\gamma^l=2g^{kl}I, \qquad k,l=0,1,2,3. \quad (4.2)$$

где I есть 4×4 единичная матрица, и $g^{kl}=\text{diag}(c^{-2},-1,-1,-1)$ есть метрический тензор. Величина A_k, $k=0,1,2,3$ представляет собой электромагнитный потенциал. Действие (4.1) порождает динамическое уравнение для динамической системы $\mathcal{S}_{\rm D}$, известное как уравнение Дирака

$$\gamma^l\left(-i\hbar\partial_l+\frac{e}{c}A_l\right)\psi+mc\psi=0 \quad (4.3)$$

и выражения для физических величин: 4-тока частиц j^k и тензора энергии-импульса T_l^k

$$j^k=c^2\bar{\psi}\gamma^k\psi, \qquad T_l^k=\frac{ic^2}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^k\partial_l\psi-\partial_l\bar{\psi}\cdot\gamma^k\psi\right) \quad (4.4)$$

Здесь мы получаем нерелятивистское приближение для дираковской частицы. Наше исследование отличается от традиционного получения этого приближения (см. например, [1]) принятием во внимание высокочастотных решений. Чтобы получить нерелятивистское приближение $\mathcal{S}_{\rm nD}$ дираковской частицы $\mathcal{S}_{\rm D}$, используется следующее представление 4×4 γ-матриц Дирака

$$\gamma^0=\frac{1}{c}\left(\begin{array}{cc} 0 & I \\ I & 0 \end{array}\right), \qquad \gamma^\mu=\left(\begin{array}{cc} 0 & -\sigma_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{array}\right), \qquad \gamma^0\gamma^\mu=\frac{1}{c}\left(\begin{array}{cc} \sigma_\mu & 0 \\ 0 & -\sigma_\mu \end{array}\right) \quad (4.5)$$

где σ_μ, $\mu=1,2,3$ суть 2×2 матрицы Паули, и I есть 2×2 единичная матрица. Используются следующие обозначения

$$\pi_l \equiv i\hbar\partial_l - \frac{e}{c}A_l, \qquad \pi_l^* \equiv -i\hbar\partial_l - \frac{e}{c}A_l, \qquad l=0,1,2,3 \tag{4.6}$$

и представление 4-компонентной волновой функции ψ в виде

$$\psi = \frac{\exp\left(-\frac{i}{2}\Omega t\right)}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c}\psi_1+\psi_2\\ \psi_1-\psi_2\end{array}\right), \qquad \psi^* = \frac{\exp\left(\frac{i}{2}\Omega t\right)}{\sqrt{2}}\left(\psi_1^*+\psi_2^*, \psi_1^*-\psi_2^*\right), \tag{4.7}$$

$$\Omega = \frac{2mc^2}{\hbar}. \tag{4.8}$$

где ψ_1 и ψ_2 суть двухкомпонентные волновые функции, а звездочка $(^*)$ означает эрмитово сопряжение. Действие (4.1) для дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ может быть записано в виде

$$\mathcal{A}_{\mathrm{D}}\left[\psi_1,\psi_1^*,\psi_2,\psi_2^*\right] = \frac{1}{2}\int\left\{\psi_1^*\pi_0\psi_1 + \psi_2^*\pi_0\psi_2 + c\psi_1^*\sigma_\mu\pi_\mu\psi_2\right.$$

$$\left. + c\psi_2^*\sigma_\mu\pi_\mu\psi_1 + 2mc^2\psi_2^*\psi_2\right\} d^4x + \text{c.c.} \tag{4.9}$$

Динамические уравнения имеют вид

$$\delta\psi_1^* \quad : \qquad \pi_0\psi_1 = -c\sigma_\mu\pi_\mu\psi_2 \tag{4.10}$$

$$\delta\psi_2^* \quad : \qquad \left(\pi_0 + 2mc^2\right)\psi_2 = -c\sigma_\mu\pi_\mu\psi_1 \tag{4.11}$$

Выражения (4.4) для 4-тока j^k и тензора энергии-импульса T_k^0 превращаются в

$$j^0 = \left(\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2\right), \qquad j^\mu = c\left(\psi_1^*\sigma_\mu\psi_2 + \psi_2^*\sigma_\mu\psi_1\right), \qquad \mu=1,2,3 \tag{4.12}$$

$$T_0^0 = 2mc^2\left(\psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2\right) + \frac{i\hbar}{2}\left(\psi_1^*\partial_0\psi_1 + \psi_2^*\partial_0\psi_2\right) + \text{c.c.} \tag{4.13}$$

$$T_\mu^0 = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi_1^*\partial_\mu\psi_1 + \psi_2^*\partial_\mu\psi_2\right) + \text{c.c.}, \qquad \mu=1,2,3 \tag{4.14}$$

$$T_0^\nu = 2mc^2\left(\psi_1^*\sigma_\nu\psi_2 + \psi_2^*\sigma_\nu\psi_1\right) + \frac{i\hbar}{2}\left(\psi_1^*\sigma_\nu\partial_0\psi_2 + \psi_2^*\sigma_\nu\partial_0\psi_1\right) + \text{c.c.}, \qquad \nu=1,2,3 \tag{4.15}$$

В нерелятивистском случае, когда скорость света $c\to\infty$, получаем $|\pi_\mu\psi_1| \ll mc|\psi_1|$, и в соответствии с (4.11) волновая функция ψ_2 является малой величиной, если временна́я частота волновой функции ψ_2 не слишком велика. Для простоты рассмотрим случай, когда $A_0=0$ и $\pi_0 = i\hbar\partial_0$. В этом случае, разрешая уравнения (4.10) и (4.11) относительно ψ_1, получаем

$$\left(i\hbar\partial_0 + 2mc^2\right) i\hbar\partial_0\psi_1 = c^2\pi_\nu\sigma_\nu\sigma_\mu\pi_\mu\psi_1 \tag{4.16}$$

Используя тождество

$$\sigma_\mu \sigma_\nu \equiv \delta_{\mu\nu} I + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\sigma_\alpha, \qquad \mu,\nu = 1,2,3 \tag{4.17}$$

где I есть 2×2 единичная матрица и $\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$ есть псевдотензор Леви-Чивита, мы можем преобразовать динамическое уравнение (4.16) к виду

$$\left(\frac{i}{\Omega}\partial_0 + 1\right) i\hbar\partial_0\psi_1 = \hat{H}_{\mathrm{P}}(m)\,\psi_1, \qquad \Omega = \frac{2mc^2}{\hbar} \tag{4.18}$$

Здесь Ω есть пороговая частота (4.8) рождения пар, а $\hat{H}_{\mathrm{P}}(m)$ есть гамильтониан для уравнения Паули. Он имеет вид

$$\hat{H}_{\mathrm{P}}(m) = \frac{\pi_\mu \pi_\mu}{2m} + \frac{ie\hbar}{2mc}\varepsilon_{\nu\mu\alpha}\partial_\nu A_\mu \sigma_\alpha = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{ie\hbar}{2mc}\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \tag{4.19}$$

где $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_1,\pi_2,\pi_3\}$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ и $\mathbf{H} = \{H_1,H_2,H_3\}$ есть магнитное поле

$$H_\alpha = \varepsilon_{\nu\mu\alpha}\partial_\nu A_\mu, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{4.20}$$

Пусть $u_\pm$ суть низкочастотные ($|\partial_0 u| \ll \Omega\,|u|$) решения уравнения Паули

$$i\hbar\partial_0 u_+ = \hat{H}_{\mathrm{P}}(m)\,u_+, \qquad i\hbar\partial_0 u_- = \hat{H}_{\mathrm{P}}(-m)\,u_- \tag{4.21}$$

В нерелятивистском случае, когда $|\boldsymbol{\pi}u_\pm| \ll |mcu_\pm|$, решения $u_\pm$ уравнений (4.21) являются низкочастотными решениями, т.е. $|\partial_0 u_\pm| \ll \Omega\,|u_\pm|$, как это следует из (4.21). Низкочастотное решение $u_+(t,\mathbf{x})$ является решением уравнения (4.18), потому что первый член в левой части уравнения (4.18) мал по сравнению со вторым.

Рассмотрим случай, когда $\psi_1 = u_+(t,\mathbf{x})$ является низкочастотным решением первого уравнения (4.21). В этом случае первое уравнение (4.21) совпадает с (4.16). Из (4.11) следует, что

$$\psi_2 = -\frac{\sigma_\mu \pi_\mu}{2mc}\psi_1 \tag{4.22}$$

и $|\psi_2| \ll |\psi_1|$, потому что в нерелятивистском приближении $|\pi_\mu\psi_1| \ll mc\,|\psi_1|$. Из (4.12) следует

$$j^0 = \psi_1^*\psi_1 \tag{4.23}$$

$$j^\mu = -\frac{1}{2m}\left(\psi_1^*\pi_\mu\psi_1 + \left(\pi_\mu^*\psi_1^*\right)\psi_1 + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\psi_1^*\sigma_\alpha\pi_\nu\psi_1 - i\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\left(\pi_\nu^*\psi_1^*\right)\sigma_\alpha\psi_1\right) \tag{4.24}$$

или

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi_1^*\boldsymbol{\nabla}\psi_1 - \boldsymbol{\nabla}\psi_1^*\cdot\psi_1\right) + \frac{e}{c}\mathbf{A}\psi_1^*\psi_1 + \frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\times(\rho\mathbf{s}), \qquad \mathbf{s} = \frac{\psi_1^*\boldsymbol{\sigma}\psi_1}{\psi_1^*\psi_1} \tag{4.25}$$

Высокочастотное выражение $\exp(i\Omega t)\,u_-(t,\mathbf{x})$ также является решением уравнения (4.18). В самом деле, подставляя его в (4.18), получаем после преобразований левой части равенства

$$e^{i\Omega t}\left(\frac{i}{\Omega}\partial_0 - 1\right) i\hbar\partial_0 u_-(t,\mathbf{x}) = -e^{i\Omega t}\hat{H}_{\mathrm{P}}(-m)\,u_-(t,\mathbf{x}) \tag{4.26}$$

Поскольку $u_-(t,\mathbf{x})$ является низкочастотной величиной($|\partial_0 u_-| \ll \Omega |u_-|$), первый член в левой части равенства (4.26) мал по сравнению со вторым, и функция $u_-(t,\mathbf{x})$ является решением второго уравнения (4.21). Таким образом, общее решение уравнения (4.18) имеет вид

$$\psi_1 = u_+(t,\mathbf{x}) + e^{i\Omega t} u_-(t,\mathbf{x}) \tag{4.27}$$

где $u_+(t,\mathbf{x})$ и $u_-(t,\mathbf{x})$ являются двумя независимыми низкочастотными решениями уравнений (4.21). Уравнения для $u_+(t,\mathbf{x})$ и $u_-(t,\mathbf{x})$ суть уравнения Паули с различными знаками массы m.

Величина ψ_2 определяется уравнением (4.11), общее решение которого имеет вид

$$\psi_2 = \exp(i\Omega t)\left(w_0 - \int \frac{c\pi_\mu\sigma_\mu}{i\hbar}\psi_1(t,\mathbf{x})\exp(-i\Omega t)\,dt\right) \tag{4.28}$$

где Ω определяется соотношением (4.8), и w_0 есть неопределенная постоянная, которая может быть включена в неопределенный интеграл в (4.28). (Величина w_0 является постоянной, а не функцией переменных $\mathbf{x}$, потому что величина ψ_2 удовлетворяет уравнению (4.10), а это возможно только если $w_0 =$const). В общем случае, когда ψ_1 имеет вид (4.27), получаем для ψ_2

$$\psi_2 = w_0 e^{i\Omega t} - e^{i\Omega t}\frac{c\pi_\mu\sigma_\mu}{i\hbar}\int \left(u_+(t,\mathbf{x})\, e^{-i\Omega t} + u_-(t,\mathbf{x})\right) dt \tag{4.29}$$

В пределе $\Omega \to \infty$, первый член в интеграле в (4.29) мал по сравнению со вторым членом (если $u_-(t,\mathbf{x}) \neq 0$). Интегрируя первый член в интеграле выражения (4.29), мы рассматриваем $u_+(t,\mathbf{x})$ как величину не зависящую от t. Получаем

$$\psi_2(t,\mathbf{x}) = -\frac{c\sigma_\mu\pi_\mu}{i\hbar}u(t,\mathbf{x})\, e^{i\Omega t} - \frac{c\pi_\mu\sigma_\mu}{\hbar\Omega}u_+(t,\mathbf{x}) \tag{4.30}$$

где

$$u(t,\mathbf{x}) = \int u_-(t,\mathbf{x})\, dt \tag{4.31}$$

и произвольная постоянная w_0 включена в неопределенный интеграл.

Подставляя выражения (4.27), (4.30) в (4.12), выражаем 4-ток через решения u_+ и u_- уравнения Паули (4.21). 4-ток j^k имеет регулярную составляющую j^k_{reg} и осциллирующую составляющую j^k_{os}, которая колеблется с высокой частотой Ω. Получаем для j^k

$$j^k = j^k_{\mathrm{reg}} + j^k_{\mathrm{os}}, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{4.32}$$

$$j^0_{\mathrm{reg}} = u_+^* u_+ + u_-^* u_- + \frac{c^2}{\hbar^2}\left(\pi_\mu^* u^*\right)\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u + \frac{1}{4m^2c^2}\left(\pi_\mu^* u_+^*\right)\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u_+ \tag{4.33}$$

$$j^\mu_{\mathrm{reg}} = -\frac{1}{2m}\left(u_+^*\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u_+ - 2i\frac{mc^2}{\hbar}u_-^*\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u\right) + \mathrm{c.c.}, \qquad \mu = 1,2,3 \tag{4.34}$$

$$j^0_{\mathrm{os}} = \left(u_+^* u_- + u_-^* u_+\right)\cos(\Omega t) + i\left(u_-^* u_+ - u_+^* u_-\right)\sin(\Omega t)$$
$$+\frac{1}{2m\hbar}\left(i\pi_\mu^* u^*\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u_+ - i\pi_\mu^* u_+^*\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u\right)\cos(\Omega t)$$

$$+\frac{1}{2m\hbar}\left(\pi_\mu^* u^* \sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u_+ + \pi_\mu^* u_+^* \sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u\right)\sin(\Omega t) \tag{4.35}$$

$$j_{\mathrm{os}}^\mu = -\frac{1}{2m}\left(u_-^*\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u_+ - 2i\frac{mc^2}{\hbar}u_+^*\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u\right)\cos(\Omega t) + \text{c.c}$$

$$-\frac{1}{2m}\left(-iu_-^*\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u_+ + 2\frac{mc^2}{\hbar}u_+^*\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u\right)\sin(\Omega t) + \text{c.c.} \tag{4.36}$$

где (c.c.) означает выражение комплексно сопряженное к предыдущему члену.

Заметим, что дираковская частица является заряженной. Это означает, что состояния дираковской частицы, содержащие осциллирующую плотность заряда ej^0, или осциллирующую плотность тока $e\mathbf{j}$, нестабильны по отношению к электромагнитному излучению. В результате этого излучения дираковская частица переходит в такое состояние, где j^k не зависит от времени. Подобная ситуация имеет место для электронов в атоме. Устойчивыми являются только такие состояния, где j^k не зависит от времени. Частота $\Omega = 2mc^2/\hbar$ очень высока, и нестабильность очень сильна в том смысле, что время перехода в стабильное состояние очень коротко.

Из выражений (4.35) и (4.36) следует, что если состояние дираковской частицы содержит только низкие частоты ($u_+ \neq 0, \quad u = 0$), или только высокие частоты ($u_+ = 0, \quad u \neq 0$), осциллирующая составляющая 4-тока обращается в нуль ($j_{\mathrm{os}}^k = 0$, $k = 0, 1, 2, 3$). Возможно ли такое положение, что осциллирующая составляющая 4-тока j_{os}^k обращается в нуль в состоянии, где имеются одновременно низкочастотная составляющая и высокочастотная составляющая?

Чтобы исследовать этот вопрос, используем соотношение (4.31) и перепишем выражение (4.35) для j_{os}^0 в виде

$$j_{\mathrm{os}}^0 = \left(u_+^*\partial_0 u - \frac{i}{2m\hbar}\left(\pi_\mu^* u_+^*\right)\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u\right)\cos(\Omega t) + \text{c.c.}$$

$$+\left(i\left(\partial_0 u^*\right)u_+ + \frac{1}{2m\hbar}\left(\pi_\nu^* u^*\right)\sigma_\nu\sigma_\mu\pi_\mu u_+\right)\sin(\Omega t) + \text{c.c.} \tag{4.37}$$

Условие обращения в нуль j_{os}^0 имеет вид

$$u_+^*\partial_0 u - \frac{i}{2m\hbar}\left(\pi_\mu^* u_+^*\right)\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u = 0 \tag{4.38}$$

Рассмотрим случай, когда электромагнитное поле не зависит от t, и следовательно, оператор ∂_0 коммутирует с операторами π_μ, определенными с помощью (4.6). Тогда в соответствии с (4.31) и (4.21) функция u удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\partial_0 u = \hat{H}_{\mathrm{P}}(-m)\,u + w_0 = -\frac{1}{2m}\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\mu\pi_\nu u + w_0 \tag{4.39}$$

где w_0 есть произвольная двухкомпонентная комплексная постоянная. Получаем

$$-\frac{1}{2m}u_+^*\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\mu\pi_\nu u + \frac{1}{2m}\left(\pi_\mu^* u_+^*\right)\sigma_\mu\sigma_\nu\pi_\nu u + u_+^* w_0 = 0 \tag{4.40}$$

Условие обращения в нуль $\mathbf{j}_{\rm os}$ имеет вид

$$\pi_\nu^* u_+^* \sigma_\mu \sigma_\nu u_- - 2i\frac{mc^2}{\hbar} u_+^* \sigma_\mu \sigma_\nu \pi_\nu u = 0, \qquad \mu = 1,2,3 \tag{4.41}$$

5 Плоские волны нерелятивистской дираковской частицы

Будем описывать плоские волны дираковской частицы в терминах четырехкомпонентной волновой функции Ψ, определенной соотношением

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{\exp\left(-\frac{i}{2}\Omega t\right)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \psi \tag{5.1}$$

где ψ есть динамическая переменная в действии (4.1), ψ_1, ψ_2 суть динамические переменные в действии (4.9), и I есть 2×2 единичная матрица. Имеются два типа волновых функций, описывающих плоские волны: низкочастотная волновая функция $\Psi_{\rm lf}$ и высокочастотная волновая функция $\Psi_{\rm hf}$

$$\Psi_{\rm lf} = \begin{pmatrix} \psi_{\rm lf1} \\ \psi_{\rm lf2} \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{\mathbf{k}^2}{2m\hbar}t + \frac{i\mathbf{kx}}{\hbar}\right) \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\sigma_\mu k_\mu}{2mc}\chi \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

$$\Psi_{\rm hf} = \begin{pmatrix} \psi_{\rm hf1} \\ \psi_{\rm hf2} \end{pmatrix} = \exp\left(2i\frac{mc^2 t}{\hbar} + i\frac{\mathbf{k}^2}{2m\hbar}t + \frac{i\mathbf{kx}}{\hbar}\right) \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_\mu k_\mu}{2mc}\eta \\ \eta \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

где χ и η суть двухкомпонентные постоянные величины, и $\mathbf{k} = \{k_1, k_2, k_3\} = $const ($\mathbf{k}^2 \ll m^2c^2$) есть канонический импульс плоской волны. Плоские волны (5.2) и (5.3) ассоциируются с нерелятивистскими частицей и античастицей. Волновые функции $\Psi_{\rm lf}$, $\Psi_{\rm hf}$ удовлетворяют нерелятивистскому приближению уравнения Дирака (4.10), (4.11).

Величины (4.12), (4.13), (4.14) имеют вид

$$j_{\rm lf}^0 = \left(1 + \frac{\mathbf{k}^2}{4m^2c^2}\right)\chi^*\chi, \qquad j_{\rm hf}^0 = \left(1 + \frac{\mathbf{k}^2}{4m^2c^2}\right)\eta^*\eta \tag{5.4}$$

$$j_{\rm lf}^\mu = \frac{k_\mu}{m} j_{\rm lf}^0 \qquad j_{\rm hf}^\mu = -\frac{k_\mu}{m} j_{\rm hf}^0, \tag{5.5}$$

$$T_{\rm lf0}^0 = \left(mc^2 + \frac{\mathbf{k}^2}{2m}\right) j_{\rm lf}^0, \qquad T_{\rm hf0}^0 = -\left(mc^2 + \frac{\mathbf{k}^2}{2m}\right) j_{\rm hf}^0, \tag{5.6}$$

$$T_{\rm lf0}^\mu = k_\mu j_{\rm lf}^0, \qquad T_{\rm hf0}^\mu = -k_\mu j_{\rm hf}^0 \tag{5.7}$$

Выражения (5.4) – (5.7) могут быть получены также традиционным методом, т.е. как нерелятивистское приближение точных решений уравнения Дирака в виде плоских волн. Величины с индексом 'lf' получаются из решений для положительного значения временнóй составляющей $k_0 = \left|\sqrt{m^2c^2 + \mathbf{k}^2}\right|$ канонического импульса, тогда как величины с индексом 'hf' получаются из решений для отрицательного значения временно́й составляющей $k_0 = -\left|\sqrt{m^2c^2+\mathbf{k}^2}\right|$ канонического импульса.

Вернемся к исследованию условий стабильности (4.38), (4.41). Рассмотрим только случай, когда $A_k = 0, \quad \pi_\mu = i\hbar\partial_\mu$. Низкочастотные плоские волны ассоциируются с ненулевой величиной u_+, а высокочастотные плоские волны ассоциируются с ненулевой величиной u_- или с величиной (4.31). Для плоских волн величины u_+, u имеют вид

$$u_+ = \exp\left(i\frac{p_\alpha x^\alpha}{\hbar} - i\frac{\mathbf{p}^2}{2m\hbar}t\right)\chi_+, \qquad u = -i\frac{2m\hbar}{\mathbf{k}^2}\exp\left(i\frac{k_\alpha x^\alpha}{\hbar} + i\frac{\mathbf{k}^2}{2m\hbar}t\right)\chi_- \quad (5.8)$$

$$\mathbf{k}^2, \mathbf{p}^2 \ll m^2c^2, \qquad \chi_+, \chi_- = \text{const} \quad (5.9)$$

гдеχ_+, χ_- суть двухкомпонентные постоянные величины. Подставляя (5.8) в условия (4.40), (4.41), получаем

$$\chi_+^*\chi_- - \frac{1}{\mathbf{k}^2}p_\mu k_\nu \chi_+^*\sigma_\mu\sigma_\nu\chi_- = 0 \quad (5.10)$$

$$\chi_+^*\sigma_\mu\sigma_\nu\chi_-\left(-p_\nu + \frac{4m^2c^2}{\mathbf{k}^2}k_\nu\right) = 0, \qquad \mu = 1,2,3 \quad (5.11)$$

Исключая $\chi_+^*\sigma_\mu\sigma_\nu\chi_-$ из уравнений (5.10) и (5.11), получаем

$$\left(-p_\mu p_\mu + 4m^2c^2\right)\chi_+^*\chi_- = 0 \quad (5.12)$$

Поскольку $|\mathbf{p}| \ll 2mc$, и скобка в (5.12) не может обратиться в нуль, получаем

$$\chi_+^*\chi_- = 0 \quad (5.13)$$

Применяя тождество (4.17) к соотношению (5.11) и принимая во внимание (5.13), получаем

$$-i\varepsilon_{\mu\nu\alpha}\chi_+^*\sigma_\alpha\chi_-\left(-p_\nu + \frac{4m^2c^2}{\mathbf{k}^2}k_\nu\right) = 0, \qquad \mu = 1,2,3 \quad (5.14)$$

Поскольку скобка в (5.14) не может обращаться в нуль, получаем из (5.14)

$$\chi_+^*\sigma_\mu\chi_- = q_\mu, \qquad q_\mu = A\left(-p_\mu + \frac{4m^2c^2}{\mathbf{k}^2}k_\mu\right), \qquad \mu = 1,2,3 \quad (5.15)$$

где A есть некоторое комплексное число.

Представим величины χ_+, χ_- в виде

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \chi_- = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Тогда соотношения (5.13) и (5.14) принимают вид

$$
\begin{aligned}
a_1^* b_1 + a_2^* b_2 &= 0, \qquad a_1^* b_2 + a_2^* b_1 = q_1, \\
-i a_1^* b_2 + i a_2^* b_1 &= q_2, \qquad a_1^* b_1 - a_2^* b_2 = q_3
\end{aligned}
$$

Эти соотношения преобразуются к виду

$$
a_1^* b_1 = \frac{q_3}{2}, \qquad a_2^* b_1 = \frac{q_1 - i q_2}{2}, \qquad a_1^* b_2 = \frac{q_1 + i q_2}{2}, \qquad a_2^* b_2 = -\frac{q_3}{2} \tag{5.17}
$$

Из первых двух соотношений (5.17) и двух последних соотношений (5.17) следует

$$
\frac{a_1^*}{a_2^*} = \frac{q_3}{(q_1 - i q_2)}, \qquad \frac{a_1^*}{a_2^*} = -\frac{q_1 + i q_2}{q_3} \tag{5.18}
$$

Эти два соотношения (5.18) совместны только тогда, когда

$$
q_3^2 + q_1^2 + q_2^2 = A^2 \left(-p_\mu + \frac{4m^2 c^2}{\mathbf{k}^2} k_\mu \right) \left(-p_\mu + \frac{4m^2 c^2}{\mathbf{k}^2} k_\mu \right) = 0 \tag{5.19}
$$

Поскольку скобки в (5.19) не могут обращаться в нуль, то соотношение (5.19) удовлетворяется, только если $A = 0$ и $q_\mu = 0$, $\mu = 1, 2, 3$. Тогда из (5.17) следует

$$
a_1^* b_1 = 0, \qquad a_2^* b_2 = 0, \qquad a_1^* b_2 = 0, \qquad a_2^* b_1 = 0 \tag{5.20}
$$

Если $a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0$, уравнения (5.20) удовлетворяются только, если $b_1 = 0 \wedge b_2 = 0$. Если $b_1 \neq 0 \vee b_2 \neq 0$, то уравнения (5.20) удовлетворяются только, если $a_1 = 0 \wedge a_2 = 0$. Это означает, что любая линейная комбинация низкочастотных решений и высокочастотных решений нестабильна по отношению к электромагнитному излучению.

Стабильная суперпозиция плоских волн Ψ_{lf} и Ψ_{hf} невозможна. В стабильных состояниях Ψ_{lf} и Ψ_{hf} могут рассматриваться как состояния различных динамических систем. Другими словами, в стабильных состояниях дираковской частицы имеет место правило суперселекции.

6 Классическое приближение нерелятивистской дираковской частицы

Чтобы осуществить динамическую расквантизацию, нужно ввести гидродинамические переменные, где 4-ток j^k был бы зависимой переменной вместо ψ. При преобразовании действия (4.1), мы используем математический формализм [23, 24], где волновая функция ψ рассматривается как функция гиперкомплексных чисел γ и координат x. В этом случае физические величины получаются с помощью свертывания выражений $\psi^* O \psi$ с делителем нуля. Этот формализм позволяет работать не фиксируя представление γ-матриц.

Используя обозначения

$$\gamma_5 = c\gamma^{0123} \equiv c\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,\} = \{-i\gamma^2\gamma^3, -i\gamma^3\gamma^1, -i\gamma^1\gamma^2\} \tag{6.2}$$

производим замену переменных

$$\psi = Ae^{i\varphi+\frac{1}{2}\gamma_5\kappa}\exp\left(-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}\right)\exp\left(\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)\Pi \tag{6.3}$$

$$\psi^* = A\Pi\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}\right)e^{-i\varphi-\frac{1}{2}\gamma_5\kappa} \tag{6.4}$$

где (*) означает эрмитово сопряжение, а величина

$$\Pi = \frac{1}{4}(1+c\gamma^0)(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}), \qquad \mathbf{z} = \{z^\alpha\} = \text{const}, \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \mathbf{z}^2 = 1 \tag{6.5}$$

является делителем нуля (проектором). Величины A, κ, φ, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n} = \{n^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ представляют собой восемь параметров, определяющих волновую функцию ψ. Эти параметры можно рассматривать как новые зависимые переменные, описывающие состояние динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$. Величина φ является скаляром, а κ – псевдоскаляром. Шесть остальных параметров A, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n} = \{n^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ могут быть выражены через 4-вектор тока $j^l = \bar{\psi}\gamma^l\psi$ и 4-вектор спина

$$S^l = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^l\psi, \qquad l = 0,1,2,3 \tag{6.6}$$

Из-за двух тождеств

$$S^lS_l \equiv -j^lj_l, \qquad j^lS_l \equiv 0. \tag{6.7}$$

имеется только шесть независимых компонентов среди восьми составляющих величин j^l, и S^l.

Математические подробности замены переменных можно найти в [2], где действие рассчитано для случая $c = 1$ и нулевого электромагритного поля $A_l = 0$. В результате получаем следующее действие, записанное в гидродинамическом виде

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}}: \qquad \mathcal{A}_D[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}] = \int \mathcal{L}d^4x, \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{cl}} + \mathcal{L}_{\mathrm{q1}} + \mathcal{L}_{\mathrm{q2}} \tag{6.8}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cl}} = -mc\rho - \hbar j^l\partial_l\varphi - \frac{e}{c}A_lj^l - \frac{\hbar j^l}{2\left(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\partial_l\xi^\beta z^\gamma, \qquad \rho \equiv \sqrt{j^lj_l} \tag{6.9}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q1}} = 2mc\rho\sin^2(\frac{\kappa}{2}) - \frac{\hbar}{2}S^l\partial_l\kappa, \tag{6.10}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q2}} = \frac{\hbar(\rho+cj^0)}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial^\alpha\frac{j^\beta}{(\rho+cj^0)}\xi^\gamma - \frac{\hbar}{2(\rho+cj^0)}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\partial^0 j^\beta\right)j^\alpha\xi^\gamma \tag{6.11}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть псевдотензор Леви-Чивита. Плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ является функцией 4-вектора j^l, скаляра φ, псевдоскаляра κ, и единичного 3-псевдовектора $\boldsymbol{\xi}$, который связан 4-псевдовектором спина S^l с помощью соотношений

$$\xi^\alpha = \rho^{-1}\left[S^\alpha - \frac{j^\alpha S^0}{(\rho + cj^0)}\right], \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{6.12}$$

$$S^0 = \mathbf{j}\boldsymbol{\xi}, \qquad S^\alpha = \rho\xi^\alpha + \frac{(\mathbf{j}\boldsymbol{\xi})j^\alpha}{\rho + cj^0}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{6.13}$$

Производя динамическую расквантизацию (3.5) в (6.8) - (6.11), получаем

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[j,\varphi,\boldsymbol{\xi}] = \int\left\{-\kappa_0 m\rho - \frac{e}{c}A_l j^l - \hbar j^i\left(\partial_i\varphi + \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi_\alpha\partial_i\xi_\beta z_\gamma}{2\,(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}\right)\right. \tag{6.14}$$

$$\left. + \frac{\hbar j^k}{2(\rho + j_0)\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_k j^\beta\right)j^\alpha\xi_\gamma\right\}d^4x \tag{6.15}$$

где $\kappa_0 = \pm 1$ есть решение динамического уравнения $\delta\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}/\delta\kappa = 0$, которое не содержит производных, потому что последний член выражения (6.10) обращается в нуль при динамической расквантизации (3.5) в силу второго тождества (6.7).

Введем лагранжевы координаты $\tau = \{\tau_0, \boldsymbol{\tau}\} = \{\tau_i(x)\}$, $i = 0,1,2,3$ как функции координат x таким образом, чтобы только координата τ_0 изменялась вдоль направления j^l, т.е.

$$j^k\partial_k\tau_\mu = 0, \qquad \mu = 1,2,3 \tag{6.16}$$

Рассматривая переменные $\tau = \{\tau_0, \boldsymbol{\tau}\}$ как независимые переменные в (6.15), получаем после расчета (математические детали смотри в [2])

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int\left\{-\kappa_0 mc\sqrt{\dot{x}^l\dot{x}_l} - \frac{e}{c}A_l\dot{x}^l + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s} + c\dot{x}^0)}\right\}d^4\tau \tag{6.17}$$

где точка означает полную производную $\dot{x}^s \equiv dx^s/d\tau_0$. Величины $x = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{x^i\}$, $i = 0,1,2,3$, и $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ рассматриваются как функции лагранжевых координат τ_0, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$. Здесь и далее символ $\times$ означает векторное произведение двух 3-векторов. Величина $\mathbf{z}$ есть постоянный 3-вектор (6.5). Фактически переменные x зависят от $\boldsymbol{\tau}$ как от параметров, потому что действие (6.17) не содержит производных по τ_α, $\alpha = 1,2,3$. Плотность лагранжиана действия (6.17) не зависит явно от независимых переменных τ. Следовательно, действие может быть представлено в виде

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int\mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\boldsymbol{\xi}]d\boldsymbol{\tau}, \qquad d\boldsymbol{\tau} = d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{6.18}$$

где

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int\left\{-\kappa_0 mc\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} - \frac{e}{c}A_l\dot{x}^l + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s} + c\dot{x}^0)}\right\}d\tau_0 \tag{6.19}$$

Легко видеть, что действие (6.19) инвариантно относительно преобразования $\tau_0 \to \tilde{\tau}_0 = F(\tau_0)$, где F есть произвольная монотонная функция. Эта инвариантность позволяет выбрать переменную $t = x^0$ как параметр τ_0. В этом случае получаем вместо (6.19)

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}] = \int \left\{ -\kappa_0 mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}} - \frac{e}{c}A_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} \right. \tag{6.20}$$

$$\left. +\frac{\hbar}{2c^2}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}\left(1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}+\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}\right)^{-1}\right\} dt \tag{6.21}$$

В нерелятивистском приближении, когда $c \to \infty$, коэффициент $\frac{\hbar}{2c^2}$ перед последним членом стремится к нулю. Однако, мы не можем отбросить последний член в действии (6.21), потому что он содержит старшую производную. В динамических уравнениях этот член порождает член с малым параметром перед старшей производной. Такой член нельзя отбрасывать, потому что он того же порядка, что и другие члены. Этот член порождает осцилляции с частотой порядка $\Omega = 2mc^2/\hbar$, и $\Omega\hbar/mc^2 \approx 1$.

В нерелятивистском приближении действие (6.21)превращается в

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}] = \int \left\{\frac{1}{2}\kappa_0 m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{\hbar}{4c^2}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi} - \frac{e}{c}\left(A_0+\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}\right) + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}\right\} dt \tag{6.22}$$

где первый член $-\kappa_0 mc^2$ опущен, потому что он не дает вклада в динамические уравнения. Два первых члена в (6.22) описывают структуру классической дираковской частицы. Третий член описывает взаимодействие с электромагнитным полем.

7 Решение динамических уравнений для классической нерелятивистской дираковской частицы

Динамические уравнения для классической нерелятивистской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{nDcl}}$ порожденные действием (6.22) имеют вид

$$-\kappa_0 m\ddot{\mathbf{x}} - e\mathbf{E} - \frac{e}{c}\left(\dot{\mathbf{x}}\times\mathbf{H}\right) + \hbar\frac{d}{dt}\frac{(\boldsymbol{\xi}\times\ddot{\mathbf{x}})}{2c^2} - \hbar\frac{d}{dt}\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\dot{\boldsymbol{\xi}})}{4c^2} = 0 \tag{7.1}$$

где

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}A_0, \qquad \mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}, \qquad A_k = \{A_0, \mathbf{A}\} \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{\xi}\times\left(-\hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\mathbf{z})}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} + \hbar\frac{d}{dt}\frac{(\mathbf{z}\times\boldsymbol{\xi})}{2(1+\boldsymbol{\xi}_\mu\mathbf{z})} - \hbar\frac{\left((\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}\right)}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})^2}\mathbf{z} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})}{4c^2}\right) = 0 \tag{7.3}$$

Векторное произведение в (7.3) является следствием ограничения $\boldsymbol{\xi}^2 = 1$.

После упрощения динамическое уравнение (7.3) приводится к виду (см. Приложение B работы [2])

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\boldsymbol{\xi} \times (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})}{2c^2} \tag{7.4}$$

Это уравнение описывает вращение единичного вектора $\boldsymbol{\xi}$ с угловой частотой $\omega = c^{-2} (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) /2$. Вообще говоря, можно пренебречь правой частью равенства (7.4) в нерелятивистском приближении, если $\dot{\mathbf{x}}$ осциллирует с частотой порядка $mc^2/\hbar$. Решая динамические уравнения (7.1), (7.3) видим, что такие частоты возможны.

Если электромагнитное поле отсутствует ($\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{H} = 0$), уравнение (7.1) приводится к виду

$$-\kappa_0 m\ddot{\mathbf{x}}+\hbar\frac{d}{dt}\frac{(\boldsymbol{\xi} \times \ddot{\mathbf{x}})}{2c^2} - \hbar\frac{d}{dt}\frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\boldsymbol{\xi}})}{4c^2} = 0 \tag{7.5}$$

$$-\kappa_0 m\dot{\mathbf{x}}+\hbar\frac{(\boldsymbol{\xi} \times \ddot{\mathbf{x}})}{2c^2} - \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\boldsymbol{\xi}})}{4c^2} = -\mathbf{p} = \mathrm{const} \tag{7.6}$$

Уравнение (7.6) может быть решено точно, если $\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} = a\boldsymbol{\xi}$, где a есть произвольная величина. Тогда в соответствии с (7.4)

$$\boldsymbol{\xi} = \mathrm{const} \tag{7.7}$$

Уравнение (7.6) превращается в

$$-\kappa_0 m\dot{\mathbf{x}}+\hbar\frac{(\boldsymbol{\xi} \times \ddot{\mathbf{x}})}{2c^2} = -\mathbf{p} \tag{7.8}$$

Общее решение уравнения (7.8) имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{\kappa_0 m} + \mathbf{V}\cos(\omega t + \phi) + \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{V}\sin(\omega t + \phi), \qquad |\mathbf{V}| \ll c \tag{7.9}$$

где ϕ есть произвольная постоянная. Величины $\mathbf{V}$ и $\mathbf{p}$ являются постоянными векторами, удовлетворяющими ограничениям

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\xi} = 0, \qquad \boldsymbol{\xi}^2 = 1 \tag{7.10}$$

и частота ω определяется соотношением

$$\omega = -\kappa_0\frac{2mc^2}{\hbar}, \qquad \kappa_0 = \pm 1 \tag{7.11}$$

После интегрирования уравнения (7.9) получаем

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}+\frac{\mathbf{p}t}{\kappa_0 m} - \mathbf{V}\frac{\kappa_0\hbar}{2mc^2}\sin(\omega t + \phi) + \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{V}\frac{\kappa_0\hbar}{2mc^2}\cos(\omega t + \phi), \qquad \mathbf{X} = \mathrm{const} \tag{7.12}$$

Итак, мировая линия свободной нерелятивистской классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{nDcl}}$ является спиралью. В соответствии с условием $|\mathbf{V}| \ll c$ радиус r спирали много меньше комптоновской длины волны $\lambda_{\mathrm{C}} = \hbar/mc$. Этот результат согласуется с результатом исследования релятивистской классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ [2], где мировая линия тоже спираль, но без ограничения $|\mathbf{V}| \ll c$. В пределе $c \to \infty$ осциллирующие члены исчезают в выражении (7.12) для $\mathbf{x}$. Однако, они не исчезают в выражении (7.9) для $\dot{\mathbf{x}}$. В пределе $c \to \infty$ спираль превращается в прямую линию, но скорость вращательного движения не исчезает.

Угловой момент, порожденный решением (7.12), (7.9) имеет вид

$$\mathbf{M} = m\left(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}\right) = \frac{\boldsymbol{\xi}\mathbf{V}^2 m}{\omega} + \mathbf{M}_{\mathrm{os}} \tag{7.13}$$

где $\mathbf{M}_{\mathrm{os}}$ есть осциллирующая часть углового момента. При усреднении по времени осциллирующая часть углового момента $\langle\mathbf{M}_{\mathrm{os}}\rangle$ of $\mathbf{M}_{\mathrm{os}}$ исчезает.

$$\langle\mathbf{M}\rangle = m\left(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}\right) = -\kappa_0 \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\xi}\frac{\mathbf{V}^2}{c^2}, \qquad \kappa_0 = \pm 1 \tag{7.14}$$

Этот результат применим только в нерелятивистском случае, когда $V^2 \ll c^2$. Средний угловой момент $\langle\mathbf{M}\rangle$ направлен вдоль единичного вектора $\boldsymbol{\xi}$. Его модуль равен $\hbar/2$, provided $V = c$.

В общем релятивистском случае амплитуда скорости $|\mathbf{V}|$ и частота ω связаны между собой и решение (7.12) превращается [2] в соотношение

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \frac{\mathbf{V}}{\Omega_{\mathrm{Dcl}}}\sin\left(\Omega_{\mathrm{Dcl}} t + \phi\right) - \frac{\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{V}}{\Omega_{\mathrm{Dcl}}}\cos\left(\Omega_{\mathrm{Dcl}} t + \phi\right), \qquad \mathbf{X} = \mathrm{const} \tag{7.15}$$

где

$$\mathbf{V} = c\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}\mathbf{n}, \qquad \Omega_{\mathrm{Dcl}} = -\kappa_0 \frac{2mc^2}{\hbar\gamma^2}, \qquad \mathbf{n}^2 = 1, \qquad \mathbf{n}\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{7.16}$$

и $\gamma \geq 1$ есть произвольная постоянная (Лоренц-фактор вращения). Регулярный импульс $\mathbf{p} = 0$. При $\gamma \to 1$ соотношение (7.15) превращается в (7.12) с $\mathbf{p} = 0$.

В релятивистском случае магнитный момент имеет вид

$$\langle\mathbf{M}_{\mathrm{Dcl}}\rangle = m\left(\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}\right) = -\kappa_0 V^2 \frac{\hbar}{2c^2}\gamma^2\boldsymbol{\xi} = -\kappa_0\left(\gamma^2 - 1\right)\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\xi} \tag{7.17}$$

В дираковской системе $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ внутренние степени свободы описываются нерелятивистски [25]. Этот дефект может быть исправлен [25]. После такого исправления классическая дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ превращается в модифицированную классическую дираковскую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{mDcl}}$. В этом случае получаем вместо (7.15) - (7.17)

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \frac{\mathbf{V}}{\Omega_{\mathrm{mDcl}}}\sin\left(\Omega_{\mathrm{mDcl}} t + \phi\right) - \frac{\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{V}}{\Omega_{\mathrm{mDcl}}}\cos\left(\Omega_{\mathrm{mDcl}} t + \phi\right), \qquad \mathbf{X} = \mathrm{const} \tag{7.18}$$

$$\mathbf{V}=c\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\mathbf{n},\qquad \Omega_{\mathrm{mDcl}}=-\kappa_0\frac{2mc^2}{\hbar\left(2\gamma^2-1\right)^2},\qquad \mathbf{n}^2=1,\qquad \mathbf{n}\boldsymbol{\xi}=0 \tag{7.19}$$

$$\left\langle\mathbf{M}_{\mathrm{mDcl}}\right\rangle=m\left(\mathbf{x}\times\dot{\mathbf{x}}\right)=-\kappa_0\frac{\left(\gamma^2-1\right)}{\gamma^2}\left(2\gamma^2-1\right)^2\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\xi} \tag{7.20}$$

В нерелятивистском случае, когда $\gamma-1\ll 1$, результаты (7.20), (7.17) совпадают с (7.14) и между собой.

Традиционно нерелятивистское приближение получается другим методом (см. например, [1], sec. 70). Получают динамические уравнения для нерелятивистской дираковской частицы и после этого переходят к классическому приближению (динамической расквантизации). В результате получают соотношение (7.12) без двух последних членов, т.е. $\mathbf{V}\equiv 0$, и получают прямую линию вместо спирали. Потеря двух последних членов в (7.12) происходит на стадии перехода от уравнения Дирака к уравнению Паули. Формально потеря двух последних членов в (7.12) оправдывается тем обстоятельством, что эти члены пропорциональны c^{-2} и малы в пределе $c\to\infty$.

Здесь нужно заметить, что нерелятивистское приближение описывается неравенством $|\dot{\mathbf{x}}|\ll c$. Оно касается только скоростей и не накладывает ограничений на положение $\mathbf{x}$. Что касается скорости, то все члены в соотношении (7.9) для скорости одного и того же порядка, и нельзя пренебрегать двумя последними членами в (7.9). Дополнительные члены дают очень малый вклад в положение частицы, но они вводят дополнительные довольно жесткие степени свободы. Эти степени свободы не возбуждаются при низких энергиях, характерных для атомных спектров. Характерные энергии, связанные с этими степенями свободы имеют порядок $\hbar\omega=2mc^2$. Другими словами, это характерная пороговая энергия рождения пар.

8 Релятивистские поправки к классической нерелятивистской дираковской частице

Заметим, что действие (6.22) для классической нерелятивистской дираковской частицы, так же как и динамическое уравнение (7.1) не содержит члена, описывающего взаимодействие магнитного момента с магнитным полем, что характерно для нерелятивистского уравнения Паули. Это взаимодействие может быть получено, если мы используем высокочастотные решения (7.9) и усредним действие (6.22) по частоте ω, определяемой соотношением (7.11). На самом деле, достаточно усреднить только член $-\frac{e}{c}\mathbf{A}\left(t,\mathbf{x}\right)\dot{\mathbf{x}}$. Получаем

$$\left\langle-\frac{e}{c}\mathbf{A}\left(t,\mathbf{x}\right)\dot{\mathbf{x}}\right\rangle=-\frac{e}{c}\left\langle\mathbf{A}\left(t,\mathbf{x}\right)\delta\dot{\mathbf{x}}+\delta x^\mu\partial_\mu\mathbf{A}\left(t,\mathbf{x}\right)\delta\dot{\mathbf{x}}\right\rangle \tag{8.1}$$

где $\delta\mathbf{x}$ и $\delta\dot{\mathbf{x}}$ определяются соотношениями (7.12) и (7.9)

$$\delta\mathbf{x}=-\frac{\mathbf{V}}{\omega}\sin\left(\omega t\right)+\boldsymbol{\xi}\times\frac{\mathbf{V}}{\omega}\cos\left(\omega t\right),\qquad \omega=-\kappa_0\frac{2mc^2}{\hbar},\qquad \kappa_0=\pm 1 \tag{8.2}$$

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{\kappa_0 m} + \mathbf{V}\cos(\omega t) + \boldsymbol{\xi}\times\mathbf{V}\sin(\omega t), \qquad \mathbf{V}\boldsymbol{\xi} = 0, \qquad \boldsymbol{\xi}^2 = 1 \tag{8.3}$$

Угловые скобки означают усреднение по аргументу ωt. Подставляя соотношения (8.2) и (8.3) в соотношение (8.1) и принимая во внимание, что

$$\left\langle \cos^2(\omega t)\right\rangle = \left\langle \sin^2(\omega t)\right\rangle = \frac{1}{2}, \qquad \langle \sin(\omega t)\cos(\omega t)\rangle = 0 \tag{8.4}$$

лучаем

$$\left\langle -\frac{e}{c}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}\right\rangle + \frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{\mathbf{p}}{\kappa_0 m} = +\frac{e}{2c\omega}V_\alpha A_{\alpha,\mu}\varepsilon_{\mu\nu\sigma}\xi_\nu V_\sigma - \frac{e}{2c\omega}A_{\alpha,\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}V_\mu\xi_\beta V_\gamma \tag{8.5}$$

В векторной форме выражение (8.5) принимает вид

$$\left\langle -\frac{e}{c}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}\right\rangle + \frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{\mathbf{p}}{\kappa_0 m} = -\frac{\kappa_0 e\hbar}{4mc^3}\mathbf{V}\left(\left(\left(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{V}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{A} - \nabla\left(\mathbf{A}\cdot\left(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{V}\right)\right)\right) \tag{8.6}$$

Преобразуем последний член в правой части равенства (8.6) с помощью векторной формулы

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{F} + \mathbf{F}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})$$

Подставляя $\mathbf{F} = \mathbf{A}$, $\mathbf{G} = \boldsymbol{\xi}\times\mathbf{V}$ и принимая во внимание, что $\boldsymbol{\xi} =$const, $\mathbf{V} =$const, $(\boldsymbol{\xi}\mathbf{V}) = 0$ получаем вместо (8.6)

$$\begin{aligned}
\left\langle -\frac{e}{c}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}\right\rangle &= -\frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{\mathbf{p}}{\kappa_0 m} + \frac{\kappa_0 e\hbar}{4mc^3}\mathbf{V}\left(\left(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{V}\right)\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right)\right) \\
&= -\frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{\mathbf{p}}{\kappa_0 m} + \frac{\kappa_0 e\hbar}{4mc^3}\mathbf{V}\left(\left(\boldsymbol{\xi}\times\mathbf{V}\right)\times\mathbf{H}\right) \\
&= -\frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{\mathbf{p}}{\kappa_0 m} - \frac{\kappa_0 e\hbar}{4mc}\left(\frac{\mathbf{V}}{c}\right)^2(\boldsymbol{\xi}\mathbf{H})
\end{aligned} \tag{8.7}$$

где

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$$

есть магнитное поле.

После усреднения высокочастотный релятивистский член превращается в

$$\left\langle \frac{\hbar}{4c^2}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}\right\rangle \to \kappa_0\frac{m\mathbf{V}^2}{2} = \text{const} \tag{8.8}$$

Этот член постоянен и не дает вклада в динамические уравнения.

Подставим (8.7) в действие (6.22). Принимая во внимание, что средняя низкочастотная скорость $\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{\kappa_0 m}$, получаем вместо (6.22)

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}] = \int\left\{\frac{1}{2}\kappa_0 m\dot{\mathbf{x}}^2 - \frac{e}{c}A_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} - \frac{\kappa_0 e\hbar}{4mc}\left(\frac{\mathbf{V}}{c}\right)^2(\boldsymbol{\xi}\mathbf{H}) + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}\right\}dt \tag{8.9}$$

Действие (8.9) отличается от действия для классической частицы Паули в том отношении, что оно зависит от свободного параметра V. Этот параметр описывает интенсивность высокочастотного вращения. Для получения действия для классической частицы Паули, следует отождествить переменную $\boldsymbol{\xi}$ со спином частицы и положить $V = c\sqrt{2}$. Хотя это значение скорости является релятивистским и нереалистичным, вклад высокочастотного члена в действие (8.9) имеет тот же самый вид как и в действии для классической частицы Паули.

Заметим, что взяв для усреднения релятивистские выражения (7.16), или (7.19) для V и ω, получаем вместо $V = c\sqrt{2}$ другие выражения, где $|V| < c$.

9 Заключительные замечания

Настоящая работа посвящена сравнению ньютоновской исследовательской стратегии с экспериментально-подгоночной стратегией в их применении к исследованию микромира. В этом сравнении мы подчеркиваем роль ошибок в основаниях физической теории. Эти ошибки существенны только в теории явлений микромира. Именно ошибки привели к замене доминирующей в XIX веке ньютоновской стратегии на птолемеевский экспериментально-подгоночный подход, доминирующий в исследованиях микромира в XX веке. Птолемеевский подход и экспериментально-подгоночный стиль мышления являются главными препятствиями на пути развития удовлетворительной фундаментальной теории явлений микромира. Птолемеевский подход отлично работает при исследовании конкретных физических явлений, потому что он не чувствителен к ошибкам в основаниях теории. Однако, он не пригоден для построения фундаментальной физической теории, потому что он создает только список предписаний, а не логическую структуру. Расширение фундаментальной теории на новую область релятивистских явлений микромира производится проще и легче, если теория представляет собой логическую структуру, а не список предписаний. Обнаружение и исправление ошибок представляет собой единственный способ построения логической структуры вместо птолемеевского перечня предписаний. В такой ситуации очень важно различать между ошибкой и простым недостатком наших знаний, так же как между ошибкой и неправильной гипотезой. Ошибка есть неправильная информация, тогда как отсутствие знаний есть просто отсутствие информации. Гипотеза может быть правильной в одной ситуации и неправильной – в другой. Гипотеза может быть в дальнейшем оправдана или отброшена, потому что она лежит вне логической структуры удовлетворительной теории. Напротив, ошибка должна быть обнаружена и исправлена. Она включена в логическую структуру удовлетворительной теории и ее нельзя просто игнорировать. К сожалению, экспериментально-подгоночный подход не различает между ошибкой и неправильной гипотезой, потому что при таком подходе теория есть просто список предписаний, имеющих равные права, а не логическая структура.

Большинство современных исследователей микромира воспитывались на птолемеевском экспериментально-подгоночном подходе. Ньютоновский подход им незнаком, хотя это не новый подход. Они полагают, что всякая теория, которая может объяснить экспериментальные данные является хорошей теорией. Разумеется, экспериментально-подгоночный подход имеет свои исторические причины. Однако, когда главные ошибки обнаружены и исправлены, список предписаний может и должен быть заменен логической структурой. Теперь уже нет причин для использования птолемеевского подхода к построению теории явлений микромира.

Отвергнув квантовые принципы и используя динамические методы исследования, мы получили результаты, которые не могут быть получены с помощью традиционного формализма, основанного на аксиоматическом представлении квантовой механики. В частности, динамические методы приводят к следующим результатам: (1) формализация перехода к классическому приближению, (2) составная структура дираковской частицы и (3) нерелятивистский характер описания внутренних степеней свободы дираковской частицы. Эти результаты не могут быть получены традиционными методами исследования.

Ошибки в основаниях теории довольно специфичны. Это не логические или математические ошибки. Эти ошибки являются ассоциативными заблуждениями, где фигурируют неправильные ассоциации между нашими представлениями о свойствах явлений реального мира. Ассоциативные заблуждения довольно трудны для обнаружения. Мы проиллюстрируем это на примере обнаружения нерелятивистского характера уравнения Дирака.

Уравнение Дирака может быть записано в релятивистски ковариантном виде. Принято считать, что это обусловлено релятивистской инвариантностью, которая означает, что уравнение Дирака описывает релятивистские процессы и имеет симметрию группы Лоренца, т.е. множество всех решений уравнения Дирака преобразуется в то же самое множество при любом преобразовании Лоренца. Это мнение существует в течение многих лет, и мы попытаемся понять причину этой точки зрения.

Релятивистский характер динамических уравнений ассоциируется с представлением этих уравнений в релятивистски ковариантном виде. Однако, эта ассоциация верна только при выполнении некоторых добавочных условий, которые практически всегда выполнены. В результате эти добавочные условия обычно не упоминаются в традиционной формулировке релятивистской инвариантности (совместности динамических уравнений с принципами теории относительности). К сожалению, в случае уравнения Дирака эти добавочные условия не выполнены, и уравнение Дирака оказывается формально нерелятивистским. На самом деле, только внутренние степени свободы являются нерелятивистскими. Если эти внутренние степени свободы игнорировать, дираковская частица становится релятивистской.

Добавочное условие в формулировке релятивистской инвариантности изменяет формулировку. Корректная формулировка выглядит следующим образом. *Симметрия динамических уравнений, записанных в релятивистски ковариант-*

ном виде совпадает с симметрией их абсолютных объектов [26]. Абсолютными объектами являются величины, остающиеся одними и теми же для всех решений. Обычно таким абсолютным объектом является метрический тензор, имеющий вид $g_{ik}=\mathrm{diag}\{c^2,-1,-1,-1\}$. Группа Лоренца является группой симметрии метрического тензора g_{ik}, и группа симметрии динамических уравнений совпадает с группой Лоренца. Уравнения Максвелла, уравнение Клейна-Гордона и многие другие динамические уравнения для реальных динамических систем содержат только метрический тензор в качестве абсолютного объекта. В результате формулировка релятивистской инвариантности упрощается. Она выглядит следующим образом. *Группа Лоренца является группой симметрии динамических уравнений, записанных в релятивистски ковариантном виде.* В таком виде она используется большинством исследователей.

Уравнение Дирака не содержит метрического тензора. Вместо этого оно содержит γ-матрицы γ^i, $i=0,1,2,3$. γ-матрицы образуют матричный 4-вектор, группа симметрии которого ниже, чем группа Лоренца. В результате оказывается, что уравнение Дирака не имеет симметрии группы Лоренца. Другими словами, уравнение Дирака оказывается нерелятивистским уравнением.

Какая физическая ситуация стоит за этим результатом? Почему динамическое уравнение, записанное в релятивистски ковариантном виде, становится нерелятивистским, если оно содержит абсолютный вектор? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим пример заряженной частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле F^{ik}.

Динамическое уравнение для релятивистской частицы может быть записано в нековариантном виде

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}}=\frac{e}{c}F^{\mu 0}+\frac{e}{c}F^{\mu\nu}g_{\nu\beta}\dot{x}^\beta, \qquad \mu=1,2,3, \qquad \dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{9.1}$$

и в релятивистски ковариантном виде

$$m\frac{d^2x^k}{d\tau^2}=\frac{e}{c}F^{kl}g_{ls}\frac{dx^s}{d\tau}, \qquad k=0,1,2,3 \tag{9.2}$$

где τ есть собственное время, e, m суть соответственно заряд и масса частицы.

Если частица нерелятивистская, динамическое уравнение записывается в нековариантном виде

$$m\frac{d^2x^\mu}{dt^2}=\frac{e}{c}F^{\mu 0}+\frac{e}{c}F^{\mu\nu}g_{\nu\beta}\frac{dx^\beta}{dt}, \qquad \mu=1,2,3 \tag{9.3}$$

Можно ли динамические уравнения (9.3) для нерелятивистской частицы записать в релятивистски ковариантном виде? Ответ – да, хотя большинство исследователей полагают, что это невозможно. В релятивистски ковариантном виде динамические уравнения (9.3) имеют вид

$$m\frac{d}{d\tau}\left[\left(l_k\dot{x}^k\right)^{-1}\dot{x}^i-\frac{1}{2}g^{ik}l_k\left(l_j\dot{x}^j\right)^{-2}\dot{x}^s g_{sl}\dot{x}^l\right]=\frac{e}{c}F^{il}g_{lk}\dot{x}^k; \qquad i=0,1,2,3 \tag{9.4}$$

где $\dot{x}^k \equiv dx^k/d\tau$. Величина l_k, $k = 0,1,2,3$ представляет собой постоянный времениподобный единичный 4-вектор

$$g^{ik} l_i l_k = 1; \tag{9.5}$$

Используя специальный выбор вектора $l_k = \{c, 0, 0, 0\}$ и подставляя его в (9.4), легко проверить, что для $i = 1,2,3$ получаются динамические уравнения (9.3). Для $i = 0$ получаем динамическое уравнение, которое является следствием уравнений (9.3).

Поскольку динамические уравнения для релятивистской и нерелятивистской частиц могут быть записаны в нековариантном и релятивистски ковариантном виде, то становится ясно, что различие между релятивистским и нерелятивистским описаниями не связано с видом динамических уравнений. Имеется что-то еще, что отличает релятивистскую концепцию от нерелятивистской. Хорошо известно, что это различие заключается в различных концепциях пространства-времени. В ньютоновой концепции имеется абсолютная одновременность и имеются две инвариантные величины: абсолютное время t и абсолютное расстояние r, тогда как в релятивистской концепции пространства-времени существует только одна абсолютная величина: пространственно-временной интервал $s = \sqrt{c^2t^2 - r^2}$. Ньютоново пространство-время $\mathcal{S}_{\mathrm{N}}$ имеет 7-параметрическую непрерывную группу движений, тогда как пространство-время Минковского $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$ имеет 10-параметрическую непрерывную группу движений. Кроме того ньютоново пространство-время $\mathcal{S}_{\mathrm{N}}$ может рассматриваться как пространство-время Минковского $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$ с дополнительной геометрической структурой $\mathcal{L}$, заданной в нем. Другими словами, $\mathcal{S}_{\mathrm{N}} = \mathcal{S}_{\mathrm{M}} \wedge \mathcal{L}$. Дополнительная структура $\mathcal{L}$ представляет собой выделенное времениподобное направление в $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$, описываемое постоянным времениподобным вектором l_k. Введение структуры $\mathcal{L}$ позволяет построить два инварианта в $\mathcal{S}_{\mathrm{M}} \wedge \mathcal{L}$

$$t = l_k x^k, \qquad r = \sqrt{x^k x_k + (l_k x^k)^2} \tag{9.6}$$

для вектора x^k, тогда как в $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$ имеется только один инвариант $s = \sqrt{x^k x_k}$. Он не содержит ссылки на $\mathcal{L}$.

Ньютоново пространство-время $\mathcal{S}_{\mathrm{N}}$, рассматриваемое как $\mathcal{S}_{\mathrm{M}} \wedge \mathcal{L}$ позволяет только такие движения пространства-времени $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$, которые преобразуют вектор l_k в тот же самый вектор l_k и не нарушают структуру $\mathcal{L}$. Условие сохранения структуры $\mathcal{L}$ при движениях пространства-времени сводит 10-параметрическую группу движений пространства-времени $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$ к 7-параметрической группе движений пространства-времени $\mathcal{S}_{\mathrm{M}} \wedge \mathcal{L}$. Вообще, при релятивистски ковариантном описании абсолютные объекты, введенные Андерсоном [26] могут рассматриваться как величины, описывающие дополнительные структуры в $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$. Это означает, что любая система динамических уравнений может быть записана в релятивистски ковариантном виде, если только введены надлежащие абсолютные объекты (дополнительные структуры). Таким образом, для определения являются ли динамические уравнения совместимыми с принципами теории относительности, мы можем записать их в релятивистски ковариантном виде и определить, содержат ли они абсолютные объекты и каковы свойства этих абсолютных объектов. Если динамические уравнения содержат постоянный времениподобный вектор l_k, то перед нами нерелятивистская динамическая система, потому что l_k описывает дополнительную пространственно-временну́ю структуру, характерную для ньютонова пространства-времени $\mathcal{S}_{\mathrm{N}}$, представленного как $\mathcal{S}_{\mathrm{M}} \wedge \mathcal{L}$.

Такой подход удобен в том отношении, что он не содержит ссылки на систему координат, которая является просто методом описания. Релятивистский характер динамического уравнения связан напрямую с отсутствием дополнительных пространственно-временны́х структур в $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$, а не с релятивистски ковариантным видом динамических уравнений, потому что динамические уравнения всегда могут быть записаны в релятивистски ковариантном виде, если только в $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$ введена надлежащая геометрическая структура. Релятивистски ковариантное динамическое уравнение является релятивистским, если оно не содержит ссылки на некоторую дополнительную структуру. Однако, такая формулировка ненадежна, потому что упоминание о ссылке на дополнительную структуру, может быть опущено по ошибке. В этом случае релятивистский характер динамических уравнений оказывается связанным с релятивистской ковариантностью этих уравнений, а не с дополнительной структурой $\mathcal{L}$ в $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$. Именно это произошло с уравнением Дирака. В результате мы получили ассоциативную ошибку, когда релятивистская инвариантность ассоциируется с релятивистской ковариантностью, хотя, на самом деле, релятивистская инвариантность ассоциируется с отсутствием дополнительной геометрической структуры в $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}$.

Отвергнув квантовые принципы и используя динамические методы исследования, мы получили результаты, которые нельзя получить с помощью традиционного формализма, основанного на аксиоматическом представлении квантовой механики. Экспериментально-подгоночный стиль исследования, применяемый повсеместно, является главным недостатком современной исследовательской стратегии. Этот стиль применяется не только в исследовании конкретных физических явлений, где его применение допустимо. Он применяется также при построении фундаментальной физической теории, что недопустимо, потому что фундаментальная физическая теория есть систематизация наших знаний и установление логических связей между фундаментальными понятиями. Фундаментальная физическая теория есть логическая структура, а не список предписаний, которые нужно использовать для объяснения экспериментальных данных. Список правил может содержать правила, противоречащие друг другу, а логическая струкутура не терпит противоречий.

К сожалению, ньютоновская исследовательская стратегия не может быть использована на практике, если фундаментальные понятия содержат ошибки. Некоторые из них перечислены во введении. Эти ошибки не были актуальны в XIX веке, когда не исследовался микромир, и ньютоновская стратегия была господствующей. Существование этих ошибок было причиной, по которой в исследованиях микромира ньютоновская стратегия была заменена экспериментально-подгоночной исследовательской стратегией. Последняя имеет то преимущество, что она не чувствительна к ошибкам в основаниях физической теории. Следуя экспериментально-подгоночной стратегии, исследователи микромира не пытались найти ошибки своих предшественников. Более того сомнения в результатах, полученных великими предшественниками, почитались дурным тоном, порожденным излишним самомнением. Вместо поиска ошибок, что предписывалось ньютоновской стратегией, исследователи изобретали новые гипотезы. *Три поколения* исследователей микромира воспитывались на идеях экспериментально-подгоночной стратегии. Исследовав уравнение Дирака и получив первый результат, что частица Паули является нерелятивистским приближением дираковской частицы, они не пытались провести полное исследование, потому что экспериментально-подгоночная стратегия этого не требовала. Зачем это нужно, если полученный результат совпадает с экспериментальными данными? Тот факт, что исследование не полно, и дираковская частица является составной частицей не исследовался, хотя такое неполное исследование неправильно математически, и ошибку следовало найти с помощью более корректного математического исследования.

Предрассудки, связанные с экспериментально-подгоночным стилем мышления очень сильны. Даже автор этой работы не свободен от них, хотя он является сторонником ньютоновкой стратегии и пытается использовать эту стратегию в своих исследованиях. Например, он не мог найти ошибку в нерелятивистском приближении уравнения Дирака. Он обратил внимание на понижение порядка системы дифференциальных уравнений и на малый параметр перед старшей производной только после того как обнаружил, что дираковская частица является составной. Последний результат был получен из других соображений [2, 25].

Математическое приложение

A Преобразование действия для статистического ансамбля

Преобразуем действие

$$\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}_{\rm st}\right]=\int\left\{\frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2}-\frac{e}{c}A_0-\frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{dt}+\frac{m\mathbf{u}_{\rm st}^2}{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\rm st}\right\}dtd\boldsymbol{\xi} \tag{A.1}$$

для статистического ансамбля стохастических частиц, движущихся в заданном электромагнитном поле $A=\{A_0,\mathbf{A}\}=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$. Здесь $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$, $\mathbf{u}_{\rm st}=\mathbf{u}_{\rm st}\left(t,\mathbf{x}\right)$ суть динамические переменные, а $\boldsymbol{\nabla}=\{\partial_1,\partial_2,\partial_3\}=\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$. Переменная $\mathbf{x}$ описывает регулярную составляющую стохастического движения частицы. Динамическая переменная $\mathbf{u}_{\rm st}$ является функцией от $t,\mathbf{x}$ и зависит от $\boldsymbol{\xi}$ через $\mathbf{x}$. Величина $\mathbf{u}_{\rm st}$ может быть истолкована как средняя скорость стохастической составляющей движения, тогда как $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ описывает регулярную составляющую движения частицы. Последний член в (A.1) описывает влияние стохастичности на регулярную составляющую эволюции.

Для исключения переменной $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$, следует решить динамические уравнения $\delta\mathcal{A}/\delta\mathbf{u}_{\mathrm{st}}=0$ относительно $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$. Поскольку $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ является функцией от $t,\mathbf{x}$, то следует перейти к независимым переменным $t,\mathbf{x}$ в действии (A.1). Получаем вместо (A.1)

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\boldsymbol{\xi},\mathbf{u}_{\mathrm{st}}]=\int\left\{\frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2}-\frac{e}{c}A_0-\frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{dt}+\frac{m\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2}{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\right\}\rho(t,\mathbf{x})\,dtd\mathbf{x} \qquad (A.2)$$

где $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ суть зависимые переменные, тогда как $t,\mathbf{x}$ являются независимыми переменными. Здесь ρ и $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{u}$ суть функции от $\boldsymbol{\xi}$, определенные соотношениями

$$\rho=\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)},\qquad \dot{\mathbf{x}}\equiv\mathbf{u}\equiv\frac{\partial(\mathbf{x},\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3)}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\mathbf{x},\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(t,x^1,x^2,x^3)}, \qquad (A.3)$$

Вариация действия (A.2) по $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ дает

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta\mathbf{u}_{\mathrm{st}}}=m\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\rho+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho=0 \qquad (A.4)$$

Разрешая уравнение (A.4) относительно $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ в виде

$$\mathbf{u}_{\mathrm{st}}=-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho, \qquad (A.5)$$

получаем вместо (A.2)

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\boldsymbol{\xi}]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2-\frac{e}{c}A_0-\frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{dt}-\frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2}\right\}\rho dtd\mathbf{x} \qquad (A.6)$$

где ρ и $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ являются функциями пространственно-временны́х производных от $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, определенных соотношениями (A.3). Действие (A.6) описывает некоторую идеальную заряженную жидкость с внутренней энергией на единицу массы

$$U(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho)=\frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} \qquad (A.7)$$

Введем новые зависимые переменные $j=\{\rho,\rho\mathbf{u}\}=\left\{j^k\right\}$, $k=0,1,2,3$ с помощью соотношений (A.3). С формальной точки зрения удобно представить гидродинамические переменные $j=\{\rho,\rho\mathbf{u}\}=\left\{j^k\right\}$, $k=0,1,2,3$ в виде

$$j^k=\frac{\partial\left(x^k,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}=\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}},\qquad k=0,1,2,3 \qquad (A.8)$$

где якобиан

$$J=\frac{\partial\left(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)}=\det\left|\left|\xi_{i,k}\right|\right|,\qquad \xi_{l,k}\equiv\partial_k\xi_l,\qquad l,k=0,1,2,3 \tag{A.9}$$

рассматривается как функция переменных $\xi_{l,k}\equiv\partial_k\xi_l$, $l,k=0,1,2,3$. Переменная ξ_0 является новой зависимой переменной (временна́я лагранжева координата), которая является фиктивной.

Введем новые динамические переменные с помощью множителей Лагранжа $p=\{p_k\}$, $k=0,1,2,3$, и получим вместо (A.6)

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\xi,j,p\right]=\int\left\{\frac{m}{2\rho}j^\alpha j^\alpha-\frac{e}{c}A_0\rho-\frac{e}{c}A_\alpha j^\alpha-p_k\left(j^k-\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\right)-\frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho}\right\}d^4x \tag{A.10}$$

где $\xi=\{\xi_k\}$, $k=0,1,2,3$.

Варьирование действия (A.10) по ξ_l приводит к динамическим уравнениям

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta\xi_l}=\partial_s\left(p_k\frac{\partial^2J}{\partial\xi_{0,k}\partial\xi_{l,s}}\right)=0,\qquad l=0,1,2,3 \tag{A.11}$$

Поскольку переменная ξ_0 фиктивна, имеется только три независимых уравнения среди четырех уравнений (A.11).

Используя тождества

$$\frac{\partial^2J}{\partial\xi_{0,k}\partial\xi_{l,s}}\equiv J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{l,s}}-\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,s}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{l,k}}\right) \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial J}{\partial\xi_{i,l}}\xi_{k,l}\equiv J\delta_k^i,\qquad \partial_l\frac{\partial^2J}{\partial\xi_{0,k}\partial\xi_{i,l}}\equiv0 \tag{A.13}$$

и обозначения (A.8), мы можем исключить переменные $\boldsymbol{\xi}$ из уравнений (A.11). Получаем

$$j^k\partial_lp_k-j^k\partial_kp_l=0,\qquad l=0,1,2,3 \tag{A.14}$$

Варьирование (A.10) по j^β и $j^0=\rho$ дает соответственно

$$p_\beta=m\frac{j^\beta}{\rho}-\frac{e}{c}A_\beta,\qquad \beta=1,2,3 \tag{A.15}$$

$$p_0=-\frac{m}{2\rho^2}j^\alpha j^\alpha-\frac{e}{c}A_0+\frac{\hbar^2}{8m}\left(2\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\rho}{\rho}-\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho^2}\right) \tag{A.16}$$

Исключая p_k из уравнений (A.14) с помощью соотношений (A.15), (A.16), получаем гидродинамические уравнения для идеальной заряженной жидкости в традиционном виде

$$\left(\partial_0+v^\alpha\partial_\alpha\right)v^\mu=\frac{e}{mc}F_{\mu0}+\frac{e}{mc}F_{\mu\alpha}v^\alpha-\frac{1}{m\rho}\partial_\mu p,\qquad \mu=1,2,3 \tag{A.17}$$

где давление p и тензор электромагнитного поля F_{ik} определяются соотношениями

$$p=\frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho^2}-2\frac{\nabla^2\rho}{\rho}\right),\qquad F_{ik}=\partial_k A_i-\partial_i A_k,\qquad i,k=0,1,2,3 \tag{A.18}$$

Волновая функция строится из потенциалов. Уравнения (A.17) не содержат потенциалов $\boldsymbol{\xi}$ и A_k, и они не могут быть использованы для описания жидкости в терминах волновой функции. Чтобы построить описание в терминах волновой функции, не следует исключать потенциалы $\boldsymbol{\xi}$ из уравнений (A.11). Вместо этого следует проинтегрировать их. Динамические уравнения (A.11) можно рассматривать как линейные дифференциальные уравнения относительно переменных p_k. Они могут быть решены в виде

$$p_k=b\left(\partial_k\varphi+g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\partial_k\xi_\alpha\right),\qquad k=0,1,2,3 \tag{A.19}$$

где $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha=1,2,3$ суть произвольные функции аргумента $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, b есть произвольная вещественная постоянная, а φ есть переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной.

Можно проверить прямой подстановкой, что соотношение (A.19) является общим решением линейных уравнений (A.11). В самом деле, используя (A.12) и второе тождество (A.13), можно переписать уравнения (A.11) в виде

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\xi_{0,k}\partial\xi_{l,s}}\partial_s p_k=J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{l,s}}-\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,s}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{l,k}}\right)\partial_s p_k=0 \tag{A.20}$$

Подставляя (A.19) в (A.20) и принимая во внимание антисимметрию скобок в (A.20) относительно перестановки индексов k и s, получаем

$$J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{l,s}}-\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,s}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{l,k}}\right)\frac{\partial g^\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_\mu}\xi_{\mu,s}\xi_{\alpha,k}=0 \tag{A.21}$$

Соотношение (A.21) есть верное равенство, как это следует из первого тождества (A.13).

Подставим (A.19) в действие (A.10). Принимая во внимание первое тождество (A.13) и опуская член

$$\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\partial_k\varphi=\frac{\partial(\varphi,\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}$$

который не дает вклада в динамическое уравнение, получаем

$$\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]:\qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[\varphi,\boldsymbol{\xi},j]=\int\left\{\frac{m}{2}\frac{j^\alpha j^\alpha}{j^0}-\frac{e}{c}A_k j^k-j^k p_k-\frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho}\right\}d^4x, \tag{A.22}$$

Здесь величины p_k определяются соотношениями (A.19).

Действие в виде (A.22) замечательно в том отношении, что оно содержит информацию о начальных значениях скорости жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$. Динамические уравнения, порожденные действием (A.22), являются дифференциальными уравнениями в частных производных, и нужно задать начальные значения для переменных $\varphi, \boldsymbol{\xi}$. Однако начальные значения для переменных $\varphi, \boldsymbol{\xi}$ определяют только маркировку частиц жидкости. они могут быть выбраны универсальными. Например, можно выбрать для всех течений жидкости

$$\varphi\left(0, \mathbf{x}\right) = \varphi_{\text{in}}\left(\mathbf{x}\right) = 0, \qquad \boldsymbol{\xi}\left(0, \mathbf{x}\right) = \boldsymbol{\xi}_{\text{in}}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{x} \tag{A.23}$$

Тогда функции $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\xi}\right)$ определяются начальными значениями скорости $\mathbf{v}\left(0, \mathbf{x}\right) = \mathbf{v}_{\text{in}}\left(\mathbf{x}\right)$ в виде [13]

$$\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \mathbf{v}_{\text{in}}\left(\boldsymbol{\xi}\right) \tag{A.24}$$

Начальное значение $\rho\left(0, \mathbf{x}\right) = \rho_{\text{in}}\left(\mathbf{x}\right)$ плотности ρ также может быть включено в действие (A.22). Нужно только переопределить связь между величинами j^k и $\boldsymbol{\xi}$, заменив соотношения (A.8) соотношениями [13]

$$j^k = \rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial\left(x^k, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{A.25}$$

где $\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)$ есть произвольная функция переменных $\boldsymbol{\xi}$. При начальных условиях (A.24) функция выбирается в виде

$$\rho_0\left(\mathbf{x}\right) = \rho_{\text{in}}\left(\mathbf{x}\right) = \rho\left(0, \mathbf{x}\right)$$

Исключим теперь переменные $\mathbf{j} = \{j^1, j^2, j^3\}$ из действия (A.22), используя соотношение (A.15). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]}\left[\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}\right] = \int \left\{-p_0 - \frac{e}{c}A_0 - \frac{\left(p_\beta + \frac{e}{c}A_\beta\right)\left(p_\beta + \frac{e}{c}A_\beta\right)}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho^2}\right\}\rho d^4x, \tag{A.26}$$

где величины p_k, $k = 0, 1, 2, 3$ определяются соотношением (A.19).

Вместо зависимых переменных $\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}$ введем n-компонентную комплексную функцию $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, которая определена соотношениями [13]

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \psi_\alpha^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u_\alpha^*(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{A.27}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha^*\psi_\alpha, \tag{A.28}$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Величины $u_\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ суть функции только переменных $\boldsymbol{\xi}$, и удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_\alpha^*\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \xi_\beta}u_\alpha\right) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}), \qquad \beta = 1, 2, 3, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha^* u_\alpha = 1. \tag{A.29}$$

Число n есть такое натуральное число, что уравнения (A.29) допускают решение. Вообще говоря, n зависит от вида произвольных функций $\mathbf{g} = \{g^\beta(\boldsymbol{\xi})\}$, $\beta = 1, 2, 3$. Функции $\mathbf{g}$ определяют завихренность течения жидкости. Если $\mathbf{g} = 0$, уравнения (A.29) имеют решение $u_1 = 1$, $u_\alpha = 0$, $\alpha = 2, 3, ...n$. В этом случае функция ψ имеет один компонент, и течение жидкости будет потенциальным.

В общем случае легко проверить, что

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad \rho p_0\left(\varphi, \boldsymbol{\xi}\right) = -\frac{ib}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^* \cdot \psi) \tag{A.30}$$

$$\rho p_\alpha\left(\varphi, \boldsymbol{\xi}\right) = -\frac{ib}{2}(\psi^*\partial_\alpha\psi - \partial_\alpha\psi^* \cdot \psi), \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{A.31}$$

Вариационная проблема с действием (A.22) оказывается эквивалентной вариационной проблеме с функционалом действия

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\psi, \psi^*] \tag{A.32}$$

$$= \int \left\{ \frac{ib}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^* \cdot \psi) - \frac{e}{c}A_0\rho \right.$$

$$\left. -\frac{\rho}{2m}\left(-\frac{ib}{2\rho}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \psi) + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho} \right\} \mathrm{d}^4x \tag{A.33}$$

или

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\psi, \psi^*]$$

$$= \int \left\{ \frac{ib}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^* \cdot \psi) - \frac{e}{c}A_0 + \frac{b^2}{8m\rho}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \psi)^2 \right.$$

$$\left. +\frac{ibe}{2mc}\mathbf{A}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \psi) - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho} - \frac{\rho}{2m}\left(\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \right\} \mathrm{d}^4x \tag{A.34}$$

Для двухкомпонентной функции ψ $(n = 2)$ выполняется следующее тождество

$$(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2 - (\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \psi)^2 \equiv 4\rho\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \rho^2\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}\left(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\right)^2, \tag{A.35}$$

$$\rho \equiv \psi^*\psi, \qquad \mathbf{s} \equiv \frac{\psi^*\boldsymbol{\sigma}\psi}{\rho}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_\alpha\}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{A.36}$$

где σ_α суть матрицы Паули. В силу тождества (A.35) действие (A.33) приводится к виду

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\psi, \psi^*]$$

$$= \int \left\{ \frac{ib}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^* \cdot \psi\right) - \frac{e}{c}A_0 - \frac{1}{2m}\left(-ib\boldsymbol{\nabla}\psi^* - \frac{e}{c}\mathbf{A}\psi^*\right)\left(ib\boldsymbol{\nabla}\psi - \frac{e}{c}\mathbf{A}\psi\right) \right.$$

$$\left. +\frac{b^2 - \hbar^2}{8\rho m}(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2 + \frac{b^2}{8m}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2\rho \right\} \mathrm{d}^4x, \tag{A.37}$$

где $\mathbf{s}$ и ρ определяются соотношениями (A.36). Следует ожидать, что двухкомпонентная волновая функция описывает общий случай, потому, что число вещественных составляющих двухкомпонентной волновой функции совпадает с числом гидродинамических переменных $\{\rho, \mathbf{j}\}$. Однако, это утверждение пока не доказано.

В случае потенциального течения, когда двухкомпонентная функция имеет линейно зависимые составляющие, например $\psi = \{\psi_1, 0\}$, 3-вектор $\mathbf{s}$ =const, и член, содержащий 3-вектор $\mathbf{s}$ обращается в нуль. В специальном случае, когда электромагнитные потенциалы $A_k = 0$, действие (A.37) для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ совпадает с действием (2.25) для $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$.

Наконец, если произвольная постоянная b на выбрана в виде $b = \hbar$ и положено $A_k = 0$, получаем действие (2.1) для шредингеровской частицы.

Список литературы

[1] P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics,* 4th ed. Oxford, 1958.

[2] Yu. A. Rylov, "Is the Dirac particle composite?" (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0410045).

[3] J. Glimm and A. Jaffe, *Phys. Rev.* **176**, 1945, (1968).

[4] J. Glimm and A. Jaffe, *Ann. Math.* **91**, 362, (1970).

[5] J. Glimm and A. Jaffe, *Acta Math.* **125**, 203, (1970).

[6] J. Glimm and A. Jaffe, *J. Math. Phys.* **13**, 1568, (1972).

[7] Yu.A. Rylov, "Pair production problem and canonical quantization of nonlinear scalar field in terms of world lines." (Available at http://arXiv.org/abs/hep-th/0106169).

[8] Yu.A. Rylov, "О связи между вектором энергии-импульса с каноническим импульсом в релятивистской механике". *ТМФ.* **2**, 333-337, (1970).

[9] Yu. A. Rylov, "Classical description of pair production." (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0301020).

[10] Yu. A. Rylov, " Tubular geometry construction as a reason for new revision of the space-time conception." (Available at http://arXiv.org/abs/physics /0504031)

[11] Yu. A. Rylov, " Model conception of quantum phenomena: logical structure and investigation methods ". (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0310050 , v2).

[12] J.V. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlin, Springer, 1932. chp. 4.

[13] Yu.A. Rylov, "Spin and wave function as attributes of ideal fluid". *J. Math. Phys.* **40**, No.1, 256-278, (1999).

[14] E. Madelung, Quanten Theorie in hydrodynamischer Form. *Z. Phys.* **40,** 322-326, (1926).

[15] D. Bohm, A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. *Phys. Rev.,* **85**, 166, (1952); **85**, 180, (1952).

[16] Yu.A. Rylov, "The equation for isentropic motion of inviscid fluid in terms of wave function" *J. Math. Phys.* **30**, 2516-2520, (1989).

[17] A. Clebsch, Über eine allgemaine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).

[18] A. Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).

[19] W. Heisenberg, "Development of the Quantum Mechanics Interpretation". in *Niels Bohr and the Development of Physics.* ed. W.Pauli , London. Pergamon Press Ltd., 1955.

[20] Д.И. Блохинцев, *Основы квантовой механики.* Наука, 1976.

[21] L.E. Ballentine, The statistical interpretation of quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.,* **72**, 358. (1970).

[22] Yu. A. Rylov, "Hydrodynamical interpretation of quantum mechanics: the momentum distribution". (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0402068).

[23] F. Sauter, *Zs. Phys.* **63,** 803, (1930), **64**, 295, (1930).

[24] A. Sommerfeld, *Atombau and Spektrallinien.* bd.2, Braunschweig, 1951.

[25] Yu.A. Rylov, " Is the Dirac particle completely relativistic?." (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0412032).

[26] J. L. Anderson, *Principles of relativity physics.* Academic Press, New-York, 1967, pp 75-88.