Принцип деформации и проблема параллелизма в геометрии и физике

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Москва, 119526, Пр. Вернадского 101-1,
e-mail: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http* : *//rsfq1.physics.sunysb.edu/˜rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site: *http* : *//195.208.200.111/˜rylov/yrylov.htm*

Аннотация

Принцип деформации позволяет получить очень широкий класс неоднородных геометрий как результат деформации собственно евклидовой геометрии. Риманова геометрия также получается в результате деформации евклидовой геометрии. Однако, применение принципа деформации оказывается непоследовательным, и риманова геометрия оказывается не полностью последовательной. Исследуются и сравниваются два различных определения параллельности двух векторов. Первое определение основано на принципе деформации, когда любая физическая геометрия получается как результат некоторой деформации собственно евклидовой геометрии. Второе определение есть традиционное определение параллельности, используемое в римановой геометрии. Показывается, что второе определение является непоследовательным. Это приводит к отсутствию абсолютного параллелизма в римановой геометрии и к дискриминации выхода за пределы римановой геометрии при описании геометрии пространства-времени. Обсуждается причина появления непоследовательности. Рассматриваются проблемы, связанные с устранением непоследовательности, и возможные последствия этого устранения для развития физики микромира.

Ключевые слова: принцип деформации, абсолютный параллелизм,

1 Введение

Существуют два подхода к геометрии: математический и физический. При математическом подходе геометрия есть построение, основанное на системе аксиом о свойствах точек и прямых. Практически любая система аксиом,

содержащая понятия точки и прямой, может быть названа геометрией. Известный математик Феликс Клейн [2] считал, что только такое построение на множестве точек может считаться геометрией, где все точки имеют одинаковые свойства (однородная геометрия). Например, Феликс Клейн настаивал на том, что евклидова геометрия и геометрия Лобачевского являются геометриями, тогда как римановы геометрии геометриями не являются. Как правило римановы геометрии неоднородны, и их точки имеют разные свойства. В соответствии с точкой зрения Феликса Клейна их следует назыывать "римановыми географиями" или "римановыми топографиями". Таким образом, при математическом подходе к геометрии главное свойство геометрии – это существование некоторой аксиоматики. Можно сказать, что математическая геометрия (математический подход к геометрии) – это система аксиом. Практически можно построить аксиоматику только для однородных геометрий, и всякая математическая геометрия есть однородная геометрия.

Римановы геометрии, вообще говоря, не являются однородными геометриями. Практически нельзя построить аксиоматику для каждой геометрии из непрерывного множества римановых геометрий, и всякая риманова геометрия получается как результат некоторой деформации собственно евклидовой геометрии, когда бесконечно малый евклидов интервал $ds^2_{\rm E}$ заменяется бесконечно малым римановым интервалом $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$. Такая замена есть деформация евклидова пространства.

Такой подход к геометрии, когда геометрия получается как результат деформации собственно евклидовой геометрии мы будем называть физическим подходом к геометрии. а полученную геометрию будем называть физической геометрией. Физическая геометрия не имеет собственной аксиоматики. Она использует "деформированную" евклидову аксиоматику. Мы используем термин "физическая геометрия", потому что такая геометрия удобна для приложений к физике и может быть использована в качестве пространственно-временно́й геометрии. Феликс Клейн ссылался на физическую геометрию как на топографию, но мы полагаем что другое имя важно не само по себе, а только потому, что оно отражает другой метод построения геометрии.

Физическая геометрия описывает взаимное расположение геометрических объектов в пространстве, или событий в пространстве событий (пространстве-времени). Взаимное расположение описывается расстоянием между любыми двумя точками. При этом не имеет значения, имеет геометрия какую-нибудь аксиоматику, или нет. Можно сказать, что физическая геометрия (физический подход к геометрии) есть построение, описывающее взаимное расположение геометрических объектов и точек. Физическая геометрия может быть неоднородной, и она неоднородна во многих случаях. Метрика ρ (расстояние между двумя точками) есть единственная характеристика физической геометрии. Мировая функция $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$ [3] более удобна для описания физической геометрии, потому что она вещественна даже для пространства-времени, где $\rho = \sqrt{2\sigma}$ может быть мнимым. Кроме того, обычно термин метрика ассоциируется с некоторыми ограничениями на метрику (аксиома треугольника,

положительность ρ). Термин мировая функция не ассоциируется с этими ограничениями напрямую.

Построение любой физической геометрии определяется *принципом деформации*. Он работает следующим образом. Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ описывается в терминах и только в терминах мировой функции σ_{E}, при условии, что σ_{E} удовлетворяет некоторым ограничениям, фрмулируемым в терминах σ_{E} [1]. Это означает, что все геометрические объекты $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ могут быть описаны σ-имманентно (т.е. в терминах σ_{E} и только в терминах σ_{E}) $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Соотношения между геометричскими объектами описываются некоторыми соотношениями $\mathcal{R}_{\mathrm{E}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Любая физическая геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{A}}$ может быть получена из собственно евклидовой геометрии с помощью деформации, когда евклидова мировая функция σ_{E} заменяется некоторой другой мировой функцией σ_{A} во всех определениях евклидовых геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и во всех евклидовых соотношениях $\mathcal{R}_{\mathrm{E}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ между ними. В результате мы получим следующую замену

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}) \to \mathcal{O}_{\mathrm{A}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{A}}), \qquad \mathcal{R}_{\mathrm{E}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}) \to \mathcal{R}_{\mathrm{A}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{A}})$$

Множество всех геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{A}}$ и всех соотношений $\mathcal{R}_{\mathrm{A}}$ между ними образует физическую геометрию, описываемую мировой функцией σ_{A}. Индекс E в соотношениях физической геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{A}}$ означает, что аксиоматика собственно евклидовой геометрии используется для построения геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и соотношений между ними $\mathcal{R}_{\mathrm{E}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Одна и та же аксиоматика используется для всех геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{A}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{A}})$ и соотношений между ними $\mathcal{R}_{\mathrm{A}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{A}})$ в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{A}}$. Однако, теперь эта аксиоматика имеет другой вид из-за деформации $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma_{\mathrm{A}}$. Это означает, что собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является базовой геометрией для всех физических геометрий $\mathcal{G}$ получаемых с помощью деформации собственно евклидовой геометрии. Если базовая геометрия фиксирована (именно этот случай будет рассматриваться дальше), то геометрия на произвольном множестве Ω точек называется T-геометрией (трубчатой геометрией). T-геометрия определяется [1] заданием мировой функции σ:

$$\sigma: \quad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(P,P) = 0, \qquad \forall P \in \Omega \tag{1.1}$$

Вообще говоря, никаких других ограничений не накладывается, хотя можно наложить любые дополнительные ограничения, чтобы получить специальный класс T-геометрий. T-геометрия симметрична, если дополнительно

$$\sigma(P,Q) = \sigma(Q,P), \qquad \forall P,Q \in \Omega \tag{1.2}$$

Деформация $\mathbb{R}^n \to \Omega$ n-мерного собственно евклидова пространства в произвольное множество Ω точек есть деформация в широком смысле этого слова. Эта деформация может изменить размерность геометрического объекта и размерность всего пространства в целом. Например, T-геометрия не зависит от размерности n деформируемого собственно евклидова пространства. Только

конечная мировая функция σ важна для свойств T-геометрии. Это позволяет рассматривать T-геометрию как нечто самодостаточное и игнорировать деформацию, которая производит T-геометрию из евклидовой геометрии.

Риманова геометрия является физической геометрией. Она строится на основе *принципа деформации*, т.е. тем же путем, что и T-геометрия. Но класс возможных римановых деформаций не является столь же общим как класс всех возможных деформаций. Он ограничен условием

$$\sigma_{\mathrm{R}}(x,x') = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_{[xx']}} \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}\right)^2 \tag{1.3}$$

где σ_{R} есть мировая функция риманова пространства, и $\mathcal{L}_{[xx']}$ означает сегмент геодезической между точками x и x'. Риманова геометрия определяется размерностью n и $n(n+1)/2$ функциями g_{ik} одной точки x, тогда как класс возможных T-геометрий определяется одной функцией σ двух точек x и x'.

Использование принципа деформации геометрии достаточно для построения любой физической геометрии. Оно не предполагаает использования каких-либо логических умозаключений и приводит к построению последовательной физической геометрии. Более того использование дополнительных средств построения геометрии нежелательно, поскольку эти средства могут быть не согласованы с принципом деформации геометрии. В случае такой несогласованности полученная геометрия оказывается непоследовательной.

Хотя риманова геометрия есть разновидность физической геометрии, при ее построении используются дополнительные средства описания (размерность, понятие кривой, система координат, непрерывное многообразие). Некоторые из них оказываются несовместимыми с принципом деформации геометрии, и в результате риманова геометрия оказывается непоследовательной. Ограничение (1.3), наложенное на мировую функцию риманового пространства, ограничивает класс возможных физических геометрий и уменьшает их непоследовательность. Однако, устранить эту непоследовательность полностью не удается. σ-риманова геометрия, т.е. физическая геометрия, построенная при помощи только принципа деформации геометрии на n-мерном многообразии и ограниченная условием [3]

$$\sigma_i(x,x')\,g^{ik}(x)\,\sigma_k(x,x') = 2\sigma(x,x'), \qquad \sigma_i(x,x') \equiv \frac{\partial\sigma(x,x')}{\partial x^i} \tag{1.4}$$

которое эквивалентно (1.3), довольно близка к римановой геометрии. Тем не менее абсолютный параллелизм отсутствует в римановой геометрии, но присутствует в σ-римановой геометрии. Это различие означает, что риманова геометрия непоследовательна, потому что σ-риманова геометрии непоследовательной быть не может.

С точки зрения принципа деформации геометрии эта непоследовательность обусловлена использованием особых свойств мировой функции σ_{E} n-мерного

собственно евклидова пространства. Это означает следующее. Перед такой деформацией геометрические объекты $\mathcal{O}_{\rm E}$ и соотношения $\mathcal{R}_{\rm E}$ собственно евклидовой геометрии представляются в σ-имманентном виде. Представляя $\mathcal{O}_{\rm E}$ и $\mathcal{R}_{\rm E}$ в терминах $\sigma_{\rm E}$, мы не должны использовать специальные свойства евклидовой мировой функции $\sigma_{\rm E}$. Эти специальные свойства функции $\sigma_{\rm E}$ формулируются для n-мерного евклидова пространства и содержат ссылку размерность n пространства. Если эти свойства используются при описании $\mathcal{O}_{\rm E}$, или $\mathcal{R}_{\rm E}$, то описание содержит ссылку на размерность n пространства. В этом случае после деформации мы приписываем построенной физической геометрии некоторые свойства *n-мерной* собственно евклидовой геометрии. Формальным критерием использования специальных свойств $\sigma_{\rm E}$ является ссылка на размерность n. Будучи преобразованным к σ-имманентному виду, такое представление описания $\mathcal{O}_{\rm E}$, или соотношения $\mathcal{R}_{\rm E}$ содержит дополнительные точки, которые не являются характерными для $\mathcal{O}_{\rm E}$, или $\mathcal{R}_{\rm E}$. На практике эти дополнительные точки описывают систему координат, и число точек зависит от размерности пространства n.

Непоследовательность римановой геометрии проявляется в проблеме параллелизма. Определение параллельности двух векторов в римановой геометрии имеет два недостатка:

1. Определение параллельности в римановой геометрии является координатно зависимым, потому что оно содержит ссылку на число координат (размерность пространства).

2. Параллельность определяется только для двух бесконечно близких векторов. Параллельность двух удаленных векторов в точках P_1 и P_2 определяется с помощью параллельного переноса вдоль некоторой кривой, соединяющей точки P_1 и P_2. В искривленном пространстве результат параллельного переноса зависит от пути переноса, и абсолютный параллелизм, вообще говоря, отсутствует.

Проблема определения параллельности двух векторов очень важна, потому что определение параллельности лежит в основании динамики частиц. Например, в кривом пространстве-времени движение свободной частицы описывается уравнением геодезической

$$d\dot{x}^i = -\Gamma^i_{kl}\dot{x}^k dx^l, \qquad dx^l = \dot{x}^i d\tau \tag{1.5}$$

где Γ^i_{kl} есть символ Кристоффеля. Уравнение (1.5) описывает параллельный перенос вектора скорости $\dot{x}^i$ частицы вдоль направления $dx^i = \dot{x}^i d\tau$, определяемого вектором скорости $\dot{x}^i$. Если параллельный перенос (1.5) оказывается неточным и требует модификации, то уравнение движения свободной частицы тоже требует модификации. Например, если в точке x множество векторов u^i, параллельных вектору скорости $\dot{x}^i$, оказывается состоящим из многих взаимно неколлинеарных векторов, параллельный перенос вектора скорости $\dot{x}^i$ перестает быть однозначным, и мировая линия свободной частицы становится случайной.

Определение скалярного произведения двух векторов в римановой геометрии использует специальные свойства евклидовой мировой функции и присваивает римановой геометрии некоторые свойства евклидовой геометрии, главным образом, свойство одномерности прямых линий (геодезических). Вообще говоря, такое определение скалярного произведения несовместимо с принципом деформации геометрии. Ограничение (1.3), наложенное на мировую функцию σ_{R}, устраняет геометрии, допускающие неодномерные прямые, и удаляет некоторые противоречия, порожденные этой несовместимостью, но не все. Создатели римановой геометрии пытались сохранить свойство одномерности прямых (геодезических) в римановой геометрии. Они достигли этой цели, но не полностью, потому что только прямая (геодезическая) $\mathcal{L}\left(P_0, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right)$, проведенная через точку P_0 параллельно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, одномерна, тогда как прямая $\mathcal{L}\left(Q_0, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right)$, проведенная через точку Q_0, $(Q_0 \neq P_0)$ параллельно вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, вообще говоря, неодномерна. Заметим, что риманова геометрия отрицает возможность построения прямой $\mathcal{L}\left(Q_0, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right)$, ссылаясь на отсутствие абсолютного параллелизма. Отсутствие одномерности для $\mathcal{L}\left(Q_0, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right)$ можно увидеть только в σ-римановой геометрии, которая определяется как последовательная T-геометрия, чья мировая функция ограничена условием (1.3). В настоящей работе мы рассматриваем и сравниваем определения параллелизма в римановой геометрии и в последовательной T-геометрии (σ-римановой геометрии). Обсуждаются следствия непоследовательности римановой геометрии.

2 Определение параллельности

Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \equiv \overrightarrow{P_0P_1}$ в T-геометрии есть упорядоченное множество из двух точек $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{P_0, P_1\}, \quad P_0, P_1 \in \Omega$. (Точки P_0, P_1 могут быть одинаковыми). Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma\left(P_0, Q_1\right) + \sigma\left(P_1, Q_0\right) - \sigma\left(P_0, Q_0\right) - \sigma\left(P_1, Q_1\right), \tag{2.1}$$

для всех $P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \Omega$. Как следует из соотношений (1.1), (2.1), в симметричной T-геометрии

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1), \qquad P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \Omega \tag{2.2}$$

Далее мы будем рассматривать только симметричную T-геометрию, не оговаривая это. Несимметричная T-геометрия рассмотрена в [4].

Когда мировая функция σ такова [1], что σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть n-мерное собственно евклидово пространство E_n, скалярное произведение (2.1) превращается в скалярное произведение двух векторов в E_n. Кроме того из (1.1), (2.1) следует, что в любой T-геометрии

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = -(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1), \qquad \forall P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \Omega \tag{2.3}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) + (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)\,, \tag{2.4}$$

для всех $P_0, P_1, P_2, Q_0, Q_1 \in \Omega$. Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ параллельны $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$, если угол между векторами равен 0, т.е.

$$\frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|} = 1, \qquad |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \equiv \sqrt{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)}, \qquad |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \equiv \sqrt{(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)} \tag{2.5}$$

Определение параллельности (2.5) не содержит ссылки на координатную систему, на способ параллельного переноса, или какие-нибудь другие средства описания. Соотношение (2.5) определяет параллельность двух удаленных векторов, используя только мировую функцию σ. Параллельность двух векторов абсолютна в том смысле, что любые два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ или параллельны или нет.

Вектор $\mathbf{u}$ в n-мерном римановом пространстве определяется как множество из n величин $\mathbf{u} = \{u_i\}$, $i = 1, 2, ...n$, заданных в некоторой системе координат K_n с координатами $x = \{x^i\}$, $i = 1, 2, ...n$. При преобразовании координат $K_n \to \tilde{K}_n$

$$x^i \to \tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x)\,, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.6}$$

ковариантные составляющие u_i вектора $\mathbf{u}$ преобразуются следующим образом

$$u_i \to \tilde{u}_i = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} u_k, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.7}$$

По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n.

Пусть x координаты точки P, и x' – координаты точки P'. Тогда вектор $\mathbf{PP}'$ в точке P вводится с помощью соотношения

$$\mathbf{PP}' = \{-\sigma_i(x, x')\}\,, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.8}$$

$$\sigma_i \equiv \partial_i \sigma(x, x') \equiv \frac{\partial \sigma(x, x')}{\partial x^i}, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.9}$$

где мировая функция σ определяется соотношением (1.3). Здесь $\sigma(x, x') = \sigma(P, P')$ есть мировая функция между точками P и P'.

В n-мерном собственно евклидовом пространстве E_n и прямолинейной системе координат K_n мировая функция имеет вид

$$\sigma(x, x') = \frac{1}{2} g_{(\mathrm{E})ik} \left(x^i - x'^i\right)\left(x^k - x'^k\right), \qquad g_{(\mathrm{E})ik} = \mathrm{const} \tag{2.10}$$

и в соответствии с (2.8) величины $\left\{g_{(\mathrm{E})ik}\left(x^k - x'^k\right)\right\}$, $i = 1, 2, ...n$ суть ковариантные координаты вектора $\mathbf{PP}'$. Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{PP}'$ and $\mathbf{PP}''$, имеющих общее начало в точке P имеет вид

$$(\mathbf{PP}'.\mathbf{PP}'')_{\mathrm{R_n}} = g^{ik}(x)\,\sigma_i(x, x')\,\sigma_k(x, x'') \tag{2.11}$$

где индекс "$\mathrm{R_n}$" означает, что скалярное произведение определено в римановом пространстве R_n в соответствии с правилами традиционной римановой геометрии.

В соответствии с (2.11) и в силу свойств (1.4) мировой функции риманова пространства получаем

$$\left|\mathbf{PP}'\right|^2 \equiv \left(\mathbf{PP}'.\mathbf{PP}'\right) = 2\sigma\left(P, P'\right) \tag{2.12}$$

Определение (2.11) совпадает с общим определением (2.1) в следующих случаях: (1) если риманово пространство R_n совпадает с римановым пространством E_n, (2) если векторы $\mathbf{PP}'$ и $\mathbf{PP}''$ бесконечно малы, (3) Если $\sigma_i\left(x, x'\right) = a\sigma_i\left(x, x''\right)$, $i = 1, 2, ...n$, a =const (как это следует из (1.4), (2.12)). В остальных случаях скалярные произведения (2.11) и (2.1), вообще говоря, не совпадают. Кроме того скалярное произведение (2.11) определяется только для векторов, имеющих общее начало. В случае векторов $\mathbf{PP}'$ и $\mathbf{QQ}'$, имеющих разное начало, скалярное произведение $\left(\mathbf{PP}'.\mathbf{QQ}'\right)$ должно быть определено дополнительно. Но это скалярное произведение не может быть определено в римановой геометрии, потому что для определения $\left(\mathbf{PP}'.\mathbf{QQ}'\right)$ при $Q \neq P$, вектор $\mathbf{PP}'$ должен быть параллельно перенесен в точку Q. После этого следует использовать определение (2.11). Результат параллельного переноса зависит от пути переноса, и скалярное произведение $\left(\mathbf{PP}'.\mathbf{QQ}'\right)$ для $Q \neq P$ не может быть определено однозначно. Если использовать определение (2.1) и соотношение (1.3) для определения $\left(\mathbf{PP}'.\mathbf{QQ}'\right)$, то в случае $Q \neq P$ результат однозначен, но определение параллельности на основе этого скалярного произведения приводит к множеству, состоящему из многих векторов $\mathbf{QQ}'$, которые параллельны $\mathbf{PP}'$, тогда как традиционная концепция римановой геометрии требует, чтобы этот вектор был единственным. Другими словами, в этом месте риманова геометрия непоследовательна.

Определение (2.1) не содержит каких-нибудь ссылок на средства описания, тогда как определение (2.11) содержит их. Определение (2.11) инвариантно относительно преобразований координат (2.6), но оно ссылается на размерность n пространства R_n и существование n-мерного многообразия. Это означает, что определение (2.1) является более общим и более совершенным, потому что оно не использует специальные свойства евклидовой мировой функции σ_{E}.

Эти специальные свойства n-мерного собственно евклидова пространства определяются следующим образом [1].

I:

$$\exists \mathcal{P}^n = \left\{P_0, P_1, ...P_n\right\}, \qquad F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{2.13}$$

где

$$F_n\left(\mathcal{P}^n\right) = \det\left|\left|\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right)\right|\right| = \det\left|\left|g_{ik}\left(\mathcal{P}^n\right)\right|\right| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{2.14}$$

Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$ суть базисные векторы прямолинейной системы координат K_n с началом координат в точке P_0, а метрические тензоры $g_{ik}\left(\mathcal{P}^n\right)$,

$g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i,k=1,2,...n$ в K_n определяются соотношениями

$$g^{ik}(\mathcal{P}^n)\,g_{lk}(\mathcal{P}^n)=\delta^i_l,\qquad g_{il}(\mathcal{P}^n)=(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l),\qquad i,l=1,2,...n \tag{2.15}$$

II:

$$\sigma_{\mathrm{E}}(P,Q)=\frac{1}{2}g^{ik}(\mathcal{P}^n)\,(x_i(P)-x_i(Q))\,(x_k(P)-x_k(Q)),\qquad \forall P,Q\in\mathbb{R}^n \tag{2.16}$$

где координаты $x_i(P)$ точки P определяются соотношениями

$$x_i(P)=(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}),\qquad i=1,2,...n \tag{2.17}$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения

$$g_k>0,\qquad k=1,2,...,n \tag{2.18}$$

IV. Условие непрерывности: система из n уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P})=y_i\in\mathbb{R},\qquad i=1,2,...n \tag{2.19}$$

рассматриваемых как уравнения для определения точки P как функции координат $y=\{y_i\}$, $i=1,2,...n$ всегда имеет одно и только одно решение.

Условия I – IV суть необходимые и достаточные условия того, что σ-пространство $V=\{\sigma,\Omega\}$ есть n-мерное собственно евклидово пространство [1]. Эти специальные свойства пространства E_n различны для разной размерности n и содержат ссылку на размерность n.

Используем в римановой геометрии два различных определения параллельности, основанных на использовании соотношений (2.5), (2.1) и (2.5), (2.11) соответственно. Хотя определения (2.1) и (2.11) для скалярного произведения различны, они дают один и тот же результат для параллельности векторов, имеющих общее начало.

Соотношения (2.5), (2.11) определяют параллельность только для векторов, имеющих общее начало. Чтобы в римановой геометрии определить параллельность двух удаленных векторов $\mathbf{u}(x)$ и $\mathbf{u}(x')$, нужно определить параллельность двух бесконечно близких векторов $\mathbf{u}(x)$ $\mathbf{u}(x+dx)$ с помощью соотношения

$$u_i(x+dx)=u_i(x)-\Gamma^k_{il}(x)\,u_k(x)\,dx^l,\qquad i=1,2,...n \tag{2.20}$$

$$\Gamma^k_{il}=\frac{1}{2}g^{kj}(g_{ij,l}+g_{lj,i}-g_{il,j}),\qquad g_{ij,l}\equiv\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \tag{2.21}$$

Вектор $\mathbf{u}(x')$ в точке x', параллельный вектору $\mathbf{u}(x)$ получается при последовательном применении бесконечно малого переноса (2.20) вдоль некоторого пути $\mathcal{L}$, соединяющего точки x и x'. Заметим, что векторы $\mathbf{u}(x)$ и $\mathbf{u}(x+dx)$ параллельны и кроме того имеют одну и ту же длину. Вообще говоря, результат параллельного переноса вдоль $\mathcal{L}$ зависит от $\mathcal{L}$. Эта ситуация известна как отсутствие абсолютного параллелизма. Для плоских римановых пространств

абсолютный параллелизм имеет место, но для кривых римановых пространств абсолютный параллелизм, вообще говоря, отсутствует.

Применение определения параллельности в римановой геометрии, основанного на соотношениях (2.5), (2.1) к векторам $\mathbf{PP}'$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}''$ с бесконечно близкими точками P и P_1 дает результат, совпадающий с (2.20), только если вектор перемещения $\mathbf{PP}_1||\mathbf{PP}'$ (и следовательно $\mathbf{PP}_1||\mathbf{PP}''$). Это свойство обеспечивает одномерность прямых, получаемых как результат деформации евклидовых прямых. В остальных случаях результаты двух определений параллельности оказываются различными, потому что соотношение (2.20) дает только один вектор $\mathbf{u}(x+dx)$, параллельный вектору $\mathbf{u}(x)$, тогда как соотношения (2.5), (2.1) порождают, вообще говоря, множество из многих векторов $\mathbf{P}_1\mathbf{P}''$, которые параллельны вектору $\mathbf{PP}'$, но, вообще говоря, не параллельны между собой [1]. Различие обусловлено тем, что условие параллельности (2.5) содержит только одно соотношение, тогда как условие параллельности (2.20) содержит n соотношений.

Чтобы понять причину этого различия, перепишем соотношения (2.5), (2.11) в виде скалярного произведения двух единичных векторов $\sigma_i(x,x')\left(2\sigma(x,x')\right)^{-1/2}$ и $\sigma_i(x,x'')\left(2\sigma(x,x'')\right)^{-1/2}$

$$g^{ik}(x)\frac{\sigma_i(x,x')}{\sqrt{2\sigma(x,x')}}\frac{\sigma_k(x,x'')}{\sqrt{2\sigma(x,x'')}}=1, \tag{2.22}$$

Пусть матрица метрического тензора $g^{ik}(x)$ имеет собственные значения одного знака. Тогда оба вектора $\sigma_i(x,x')\left(2\sigma(x,x')\right)^{-1/2}$ и $\sigma_i(x,x'')\left(2\sigma(x,x'')\right)^{-1/2}$ равны, и одно соотношение (2.22) эквивалентно n соотношениям

$$\sigma_i(x,x')=a\sigma_i(x,x''), \qquad i=1,2,...n, \qquad a>0 \tag{2.23}$$

где a есть некоторая постоянная. Условия (2.23) с произвольным $a\neq 0$ означают, что векторы, имеющие общее начало, коллинеарны (параллельны или антипараллельны), при условии, что их составляющие пропорциональны.

В n-мерном собственно евклидовом пространстве E_n это соотношение может быть записано σ-имманентно. Пусть вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарен вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Выберем $n-1$ точек $\{P_2,P_3,...P_n\}$ таким образом, чтобы n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i=1,2,...n$ образовали базис. Тогда условие коллинеарности (2.23) векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ принимает вид системы из n соотношений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R})=a(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1), \qquad i=1,2,...n \tag{2.24}$$

Исключая a из n соотношений (2.24), получаем $n-1$ соотношений, которые записываются в виде

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad \begin{vmatrix} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) \\ (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) \end{vmatrix}=0, \qquad i=2,3,...n \tag{2.25}$$

Итак, мы имеем две различные формулировки условия коллинеарности векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$: (2.25) и соотношение

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad \begin{vmatrix} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) \\ (\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.26}$$

которое следует из (2.5). В E_n условия (2.25) и (2.26) эквивалентны, потому что выбор $n-1$ точек $\{P_2, P_3, ...P_n\}$ произволен, и они фиктивны в (2.25). Условия коллинеарности (2.25) и (2.26) эквивалентны в силу специальных свойств (2.16) евклидова пространства E_n. В собственно римановой геометрии условия (2.25) и (2.26) также эквивалентны, и точки $\{P_2, P_3, ...P_n\}$ также фиктивны в (2.25). Это связано со специальным выбором мировой функции (1.3) n-мерного риманова пространства. При другом выборе мировой функции точки $\{P_2, P_3, ...P_n\}$ перестают быть фиктивными.

Чтобы продемонстрировать различие между условиями (2.25) и (2.26), построим прямую $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, проходящую через точки P_0, P_1, определив ее как множество таких точек R, что $\mathbf{P}_0\mathbf{R}||\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Используя два варианта (2.25) и (2.26) условия коллинеарности, мы получим два различных геометрических объекта

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \{R|\ \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{P}_0\mathbf{R}\} = \left\{R|\ (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R})^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2\,|\mathbf{P}_0\mathbf{R}|^2\right\} \tag{2.27}$$

и

$$\mathcal{L} = \left\{ R \left| \bigwedge_{k=2}^{k=n} f(P_0, P_1, P_k, R) = 0 \right. \right\} = \bigcap_{k=2}^{k=n} \{R\,|f(P_0, P_1, P_k, R) = 0\} \tag{2.28}$$

где

$$f(P_0, P_1, P_i, R) = \begin{vmatrix} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) \\ (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) \end{vmatrix} = 0, \qquad i = 2, 3, ...n \tag{2.29}$$

В n-мерном собственно евклидовом пространстве и в n-мерном собственно римановом пространстве геометрические объекты $\mathcal{L}$ и $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ совпадают, но при более общем виде мировой функции геометрические объекты $\mathcal{L}$ и $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, вообще говоря, различны.

Соотношение (2.28) определяет прямую $\mathcal{L}$ в n -мерном собственно евклидовом пространстве как пересечение $n-1$ $(n-1)$-мерных поверхностей

$$\mathcal{S}(P_0, P_1, P_k,) = \{R\,|f(P_0, P_1, P_k, R,) = 0\}, \qquad k = 2, 3, ...n \tag{2.30}$$

Вообще говоря, такое пересечение есть одномерная линия, но эта линия определяется $n+1$ точками $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\}$, тогда как прямая $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, определяемая соотношением (2.27), зависит только от двух точек P_0, P_1.

В общем случае, когда исчезают специальные свойства собственно евклидова пространства, соотношение (2.28) описывает одномерный геометрический объект, зависящий от k точек ($k > 2$). Таким образом, можно устранить зависимость определения коллинеарности (2.23) от системы координат, но вместо

этой зависимости появляется зависимость от дополнительных точек. Эти дополнительные точки $P_2, P_3, ...$ представляют зависимость от системы координат в σ-имманентной форме. Число дополнительных точек, необходимых для определения прямой (2.23) как одномерной линии зависит от размерности евклидова пространства. С формальной точки зрения геометрический объект $\mathcal{L}$, определенный σ-имманентно соотношением (2.28), является не прямой, а некоторым другим геометрическим объектом, совпадающим с прямой в n-мерном собственно евклидовом пространстве.

Прямая в n-мерном собственно евклидовом пространстве обладает двумя свойствами: (1) прямая определяется двумя точками P_0, P_1 независимо от размерности евклидова пространства, (2) прямая есть одномерная линия.

Вообще говоря, оба свойства не сохраняются при деформации евклидова пространства. Если мы выбираем определение (2.27), мы сохраняем первое свойство, но нарушаем, вообще говоря, второе. Если мы используем определение (2.28), зависящее от размерности евклидова пространства и от способа описания (в виде системы координат или в виде произвольных дополнительных точек), мы оставляем второе свойство и, вообще говоря, нарушаем первое. Так какое же из двух определений прямой линии нужно использовать?

Ответ очевиден. Во-первых, определение (2.27) не ссылается на какое-либо средство описания, тогда как определение (2.28) ссылается. Во-вторых, свойство прямой определяться двумя точками есть более естественное свойство геометрии, чем свойство быть одномерной линией. Использование определения (2.27) есть логическая необходимость, а не гипотеза, которая может быть подтверждена или отвергнута экспериментом. Рассмотрение прямой как одномерного геометрического объекта *в любой геометрии* есть просто предрассудок, основанный на том факте, что в собственно евклидовой геометрии прямая есть одномерный геометрический объект. Утверждение, что имеется только один вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ фиксированной длины, который параллелен вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, есть другая формулировка упомянутого предрассудка.

3 Следствия непоследовательности определения параллельности.

Отвлекаясь от истории и мотивов создания римановой геометрии, оценим риманову геометрию как разновидность физической геометрии. Традиционная риманова геометрия есть частный случай физической геометрии, построенной на основе принципа деформации геометрии. Риманова геометрия использует определение скалярного произведения (2.11), которое является полностью последовательным только для нескольких геометрий. Чтобы компенсировать противоречия, порождаемые неточностью определения (2.11), риманова геометрия использует ограничение (1.3), стремясь устранить геометрии, для которых определение (2.11) является противоречивым. Ограничение (1.3) устраняет большинство возможных противоречий, но не все, и риманова геометрия

оказывается непоследовательной геометрией.

В современной геометрии и физике используется определение (2.23) или (2.28), и это обстоятельство является причиной многих проблем, потому что это определение лежит в основаниях геометрии, а геометрия в свою очередь лежит в основаниях физики.

Перечислим некоторые последствия утверждения, что прямая есть одномерный геометрический объект в любой пространственно-временно́й геометрии.

1. Отсутствие абсолютного параллелизма в пространственно-временно́й геометрии (т.е. в римановой геометрии, используемой для описания пространства-времени).

2. Дискриминация любой пространственно-временно́й геометрии, где времениподобная прямая не является одномерным геометрическим объектом).

3. Рассмотрение пространственно-подобных прямых, описывающих сверхсветовые частицы (тахионы) в пространственно-временно́й геометрии Минковского, как одномерных геометрических объектов.

Обсудим первый пункт. Мировая функция римановой геометрии выбирается таким образом, чтобы трубка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ (мы используем этот термин вместо термина "прямая"), проходящая через точки P_0, P_1 и определяемая соотношением (2.27), была одномерным геометрическим объектом в римановой пространственно-временно́й геометрии, при условии, что интервал между точками P_0, P_1 времениподобный ($\sigma(P_0,P_1)>0$). Но времениподобная трубка

$$\mathcal{T}(P_0,P_1;Q_0)=\{R|\ \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{Q}_0\mathbf{R}\}=\left\{R|\,(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{R})^2=|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2\,|\mathbf{Q}_0\mathbf{R}|^2\right\}, \quad (3.1)$$

проходящая через точку Q_0 параллельно удаленному времениподобному $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, вообще говоря, не является одномерным объектом даже в римановой геометрии. Нельзя достичь того, чтобы любая времениподобная трубка (2.27) была одномерным геометрическим объектом. Другими словами, нельзя глобально подавить невырожденность всех конусов коллинеарности времениподобных векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$, параллельных времениподобному вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, хотя локально конус коллинеарности времениподобных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$, параллллельных времениподобному вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, может быть подавлен, если ограничить мировую функцию условием (1.3). Фактически в римановой геометрии в каждой точке Q_0 имеется много времениподобных векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ фиксированной длины, которые параллельны удаленному времениподобному вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Согласно римановой концепции геометрии должен быть только один времениподобный вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ фиксированной длины, который параллелен удаленному времениподобному вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, поэтому нельзя выбрать один вектор среди множества равноправных векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$. В результате приходится отвергать абсолютный параллелизм.

Пункт второй. Пространственно-временна́я геометрия Минковского T_{M} с σ-пространством $\{\sigma_{\mathrm{M}},\mathbb{R}^4\}$ есть единственная однородная, изотропная и плоская геометрия из класса римановых геометрий. Класс однородных изотропных

T-геометрий на множестве $\mathbb{R}^4$ точек описывается мировой функцией $\sigma = \sigma_{\rm M} + D(\sigma_{\rm M})$, где произвольная функция дисторсии D описывает характер невырожденности времениподобных трубок $\mathcal{T}_{P_0P_1}$. В пространственно-временно́й геометрии Минковского $D = 0$, и движение свободных частиц детерминировано. Если $D > 0$, мировая линия свободной частицы оказывается стохастической, потому что точка, описывающая мировую линию, движется в пространстве-времени в направлении вектора, касательного к мировой линии. Имеется много векторов, касательных к мировой линии. Частица может двигаться вдоль любого из них, и ее движение становится случайным, (см. детали в [5]). Фактически движение микрочастиц (электронов, протонов и т.д.) случайно. Это означает, что геометрия Минковского не является правильной пространственно-временно́й геометрией. Следует выбрать такую пространственно-временну́ю геометрию, которая объясняла бы стохастическое движение микрочастиц. Такая геометрия возможна. В этой пространственно-временно́й геометрии функция дисторсии $D(\sigma_{\rm M}) = \hbar/(2bc)$ для $\sigma_{\rm M} > \sigma_0 \approx \hbar/(2bc)$, где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света и b есть новая универсальная постоянная. В такой пространственно-временно́й геометрии мировая функция содержит квантовую постоянную $\hbar$, и нерелятивистские квантовые эффекты объясняются просто как геометрические эффекты [5]. Настаивая на определении параллелизма (2.23), мы дискриминируем пространственно-временны́е геометрии с $D \neq 0$. В результате мы вынуждены будем использовать неправильную пространственно-временну́ю геометрию и объяснять квантовые эффекты с помощью дополнительных гипотез (квантовых принципов).

Рассмотрим пространственно-подобные прямые в геометрии Минковского. Определим прямую соотношением (2.27). Пусть $\mathbf{e} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{x} = \mathbf{P}_0\mathbf{R}$ есть бегущий вектор. Тогда уравнение, определяющее прямую $\mathcal{T}_{\rm e}$ имеет вид

$$\mathcal{T}_{\rm e}: \qquad \begin{vmatrix} (\mathbf{e}.\mathbf{e}) & (\mathbf{e}.\mathbf{x}) \\ (\mathbf{x}.\mathbf{e}) & (\mathbf{x}.\mathbf{x}) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Будем искать решение в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}\tau + \mathbf{y} \tag{3.3}$$

Подставляя это выражение в (3.2), получаем уравнение того же вида.

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{e}.\mathbf{e}) & (\mathbf{e}.\mathbf{y}) \\ (\mathbf{y}.\mathbf{e}) & (\mathbf{y}.\mathbf{y}) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.4}$$

Очевидное решение $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{e}$ интереса не представляет, поскольку оно уже учтено в (3.3). Налагая ограничение $(\mathbf{e}.\mathbf{y}) = 0$, получаем из (3.4)

$$(\mathbf{e}.\mathbf{y}) = 0, \qquad \mathbf{y}^2 = 0$$

Если вектор $\mathbf{e}$ – времениподобный, например, $\mathbf{e} = \{1,0,0,0\}$, то $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Если вектор $\mathbf{e}$ – пространственно-подобный, например, $\mathbf{e} = \{0,1,0,0\}$, то решение имеет вид $\mathbf{y} = \{a, 0, a\cos\psi, a\sin\psi\}$, где a и ψ суть произвольные параметры. Таким

образом, в геометрии Минковского времениподобная прямая линия есть одномерный геометрический объект, тогда как пространственно-подобная "прямая" есть трехмерная поверхность, содержащая одномерную пространственно-подобную прямую $\mathbf{x} = \mathbf{e}\tau$. Другим словами, времениподобные направления вырождены, и свободные частицы, движущиеся со скоростью $v < c$, описываются одномерными времени-подобными прямыми. Пространственно-подобные направления невырождены, и свободные частицы, движущиеся со скоростью $v > c$, (тахионы) описываются трехмерными поверхностями. Трудно сказать, что это означает практически. Но может быть, тахионы не были открыты именно потому, что их искали в виде одномерных пространственно-подобных линий.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. J. Math. Math. Sci.*, **30**, 733-760, (2002).

[2] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung die Mathematik im 19. Jahrhundert* teil 1, Berlin, Springer 1926.

[3] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[4] Yu.A. Rylov, The Euclidean geometry deformations and capacities of their application to microcosm space-time geometry. e-print *physics/0206017.*

[5] Yu.A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time, responsible for quantum effects. *J.Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).