Различные концепции евклидовой геометрии и их применение в геометрии пространства-времени

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm*

Аннотация

Рассматриваются три различные представления собственно евклидовой геометрии. Они различаются числом базисных элементов, из которых строятся геометрические объекты. В E-представлении имеется три базисных элемента (точка, отрезок, угол) и никаких дополнительных структур. V-представление содержит два базисных элемента (точка, вектор) и дополнительную структуру: линейное векторное пространство. В σ-представлении имеется только один базисный элемент (точка) и дополнительная структура: мировая функция $\sigma = \rho^2/2$, где ρ есть расстояние. Понятие расстояния появляется во всех представлениях. Но расстояние как структура, определяющая геометрию, появляется только в σ-представлении. σ-представление наиболее удобно для модификации собственно евклидовой геометрии. Практически любая модификация собственно евклидовой геометрии превращает ее в многвариантную геометрию, где имеется много векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1', ...$, которые равны вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, но, вообще говоря, не равны между собой. Понятие многовариантности (неаксиоматизмруемости) геометрии исключительно важно, потому что реальная геометрия пространства-времени является многовариантной, и многовариантность геометрии ответственна за квантовые эффекты.

1 Введение

Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ была построена при предположении, что геометрия непрерывна и безгранично делима. Это означает, что все геометрические объекты в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ могут быть построены из блоков. Такие геометрические объекты как отрезки прямой линии и углы могут быть использованы в качестве строительных блоков. Построение $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в виде логического построения связано с той возможностью, что любой геометрический объект может быть построен из блоков. Если геометрия пространства-времени окажется ограничено делимой, то она не может представлена в виде логического построения. Любая ограничено делимая геометрия должна быть построена как результат деформации собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Деформация безгранично делимой геометрии не сохраняет свойство безграничной делимости. Для реализации деформации $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, геометрия должна быть представлена в виде монистической концепции, где евклидова метрика ρ_{E} является единственной фундаментальной величиной, описывающей $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Все геометрические объекты и все геометрические соотношения описываются в терминах евклидовой метрики и только в терминах евклидовой метрики. Заменяя евклидову метрику ρ_{E} другой метрикой ρ, мы осуществляем деформацию $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. В результате получается обобщенная геометрия $\mathcal{G}$, описываемая метрикой ρ. Более удобно использовать мировую функцию $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$ вместо метрики ρ, потому что мировая функция всегда вещественна, тогда как метрика мнима для пространственноподобных интервалов.

Попытка метрического описания евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ была сделана в так называемой дистантной геометрии [1]. К сожалению, Блюменталю не удалось выразить прямую линию в терминах метрики. В результате концепция дистантной геометрии оказалась немонистической, и было невозможно деформировать дистантную геометрию.

Собственно евклидова геометрия изучает взаимное расположение геометрических объектов (фигур) в пространстве (на множестве Ω точек). Всякий геометрический объект $\mathcal{O}$ представляет собой подмножество $\mathcal{O} \subset \Omega$ точек. Отношения между геометрическими объектами представляют собой отношения эквивалентности, когда два разных геометрических объекта $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ считаются эквивалентными ($\mathcal{O}_1 \mathrm{eqv} \mathcal{O}_2$). Геометрический объект $\mathcal{O}_1$ считается эквивалентным геометрическому объекту $\mathcal{O}_2$, если после соответствующего перемещения геометрический объект $\mathcal{O}_1$ совпадает с геометрическим объектом $\mathcal{O}_2$.

Геометрический объект считается построенным из базисных элементов (строительных блоков). Имеются, по крайней мере, три представления евклидовой геометрии, которые различаются числом и выбором базисных элементов (первичных понятий). Следует иметь в виду, что эти представления не имеют ничего общего с проблемой построения евклидовой геометрии. Эти представления используются, когда $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ уже построена.

Первое представление (евклидово представление, или E-представление) было много лет назад получено Евклидом. В E-представлении базисными элементами являются точка, отрезок и угол. Отрезок – это отрезок прямой линии, однозначно определяемый его концевыми точками. Угол представляет собой фигуру, образованную двумя отрезками, причем концевая точка одного отрезка совпадает с концом другого отрезка. Свойства базисных элементов описываются системой аксиом. Всякий геометрический объект может рассматриваться как некоторая конструкция, состоящая из блоков (*точек, отрезков, углов*). Число составляющих геометрического объекта может быть бесконечным. Отрезки определяют длины. Углы определяют взаимную ориентацию отрезков. Сравнение разных геометрических объектов (фигур) $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ осуществляется их перемещением и наложением. Если две фигуры совпадают при наложении, они считаются эквивалентными (равными). В E-представлении сам по себе процесс перемещения не формализован. Однако, закон перемещения геометрических объектов используется при формулировке предложений евклидовой геометрии и их доказательстве.

Второе представление (векторное представление, или V-представление) евклидовой геометрии содержит два базисных элемента (*точка, вектор*). С точки зрения E-представления вектор представляет собой направленный отрезок прямой, определяемый двумя точками. Одна точка является началом вектора, вторая – его концом. Однако, такое определение вектора имеет место только в E-представлении, где вектор является вторичным (производным) понятием. В V-представлении вектор определяется аксиоматически как элемент линейного векторного пространства, где определены две операции над векторами. Эти операции (сложение двух векторов и умножение вектора на вещественное число) формализуют закон перемещения векторов. Строго говоря, эти операции представляют собой формальные операции в линейном векторном пространстве. Они начинают описывать закон перемещения только после введения скалярного произведения векторов в линейном векторном пространстве. После введения скалярного произведения линейное векторное пространство превращается евклидово пространство, и абстрактный вектор может рассматриваться как направленный отрезок прямой, определяемый двумя точками. Однако, это только интерпретация вектора в евклидовом пространстве. В V-представлении вектор является первичным объектом. Он является элементом линейного векторного пространства. Тем не менее интерпретация вектора как направленного отрезка прямой очень важна при построении геометрических объектов (фигур) из точек и векторов.

E-представление содержит три базисных элемента: *точка, отрезок* и *угол.* V-представление содержит только два базисных элемента: *точка* и *вектор.* Как элемент линейного векторного пространства вектор имеет некоторые свойства. Любая фигура может быть построена из точек и векторов. Это означает, что метод построения любой фигуры может быть описан в терминах точек и векторов. Свойства вектора как элемента линейного векторного пространства позволяют описывать свойства перемещения фигур и их композиций.

В V-представлении угол оказывается производным элементом. Он определяется двумя векторами (их длинами и скалярным произведением этих векторов). В V-представлении угол θ между двумя векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ определяется соотношением

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2| \cos\theta = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) \tag{1.1}$$

где $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)$ есть скалярное произведение векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$. Величины

$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ и $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|$ являются их длинами.

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1), \qquad |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) \tag{1.2}$$

Таким образом, переход от E-представления с тремя базисными элементами к V-представлению с двумя базисными элементами возможен при условии, что один из базисных элементов (вектор) определяется тем обстоятельством, что он является базисным элементом линейного векторного пространства с заданным на нем скалярным произведением.

Возможно ли дальнейшее уменьшение числа базисных элементов в представлении евклидовой геометрии? Да, это возможно. Представление (представление в терминах мировой функции, или σ-представление) евклидовой геометрии содержит только один базисный элемент (точку), при условии некоторых ограничений, накладываемых на любые две точки евклидова пространства.

Переход от E-представления к V-представлению уменьшает число базисных элементов. Одновременно этот переход порождает новую структуру (линейное векторное пространство), которая определяет новый базисный элемент (вектор) и позволяет определить утраченный базисный элемент (угол) как некоторый производный элемент.

Переход от V-представления к σ-представлению также уменьшает число базисных элементов. Остается только один базисный элемент (*точка*). Одновременно этот переход заменяет линейное векторное пространство новой двухточечной структурой (*мировой функцией*). Мировая функция σ определяется соотношением

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}, \qquad \sigma(P,Q)=\sigma(Q,P), \qquad \sigma(P,P)=0, \qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{1.3}$$

Мировая функция σ связана с расстоянием ρ соотношением

$$\sigma(P,Q)=\frac{1}{2}\rho^2(P,Q), \qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{1.4}$$

Мировая функция собственно евклидова пространства ограничена рядом условий (смотри ниже).

Есть различие между структурой V-представления и структурой σ-представления. Линейное векторное пространство как структура V-представления отражает свойства симметрии евклидовой геометрии. Эти симметрии евклидовой геометрии допускают группу движений евклидова пространства (переносы, вращения). Эти группы движений допускают перемещение блоков без деформаций и позволяют строить геометрические объекты из блоков. Эти группы движений позволяют также сравнивать различные геометрические объекты, перемещая их в пространстве.

Мировая функция σ_{E} как структура собственно евклидовой геометрии отражает все свойства собственно евклидова пространства, а не только его симметрии. Мировая функция σ_{E} полностью описывает свойства собственно евклидова пространства. Всякое изменение мировой функции σ_{E} представляет собой деформацию собственно евклидова пространства, которая изменяет его свойства.

В этой связи следует заметить, что имеются различные точки зрения на то, что представляет собой геометрия. Хорошо известный математик Феликс Клейн полагал, что симметрии геометрии является наиболее существенной чертой геометрии, и не существует геометрий без симметрий. Например, он писал, что риманова геометрия не является геометрией. Она представляет собой скорее географию или топологию. Такая точка зрения характерна для математиков. Большинство из них полагают, что геометрия представляет собой логическое построение, и что неаксиоматизируемых геометрий не существует.

Альтернативная точка зрения характерна для физиков, которые полагают, что геометрия – это наука о форме геометрических объектов и их взаимном расположении. При таком подходе не имеет значения, имеет ли геометрия какие-нибудь симметрии и является ли она аксиоматизируемой. Если геометрия является наукой о расположении геометрических объектов, то геометрия полностью описывается мировой функцией σ. Подход физиков представляется более реалистичным, потому что расположение материи влияет на геометрию пространства-времени, и нельзя быть уверенным, что геометрия пространства-времени однородна и имеет какие-то симметрии.

Существование σ-представления, содержащего один базисный элемент, означает, что все геометрические объекты и все соотношения между ними могут быть пересчитаны к σ-представлению, т.е. выражены в терминах мировой функции и только в терминах мировой функции.

Если мы хотим построить обобщенную геометрию, то мы должны видоизменить свойства собственно евклидовой геометрии. Это означает, что мы должны модифицировать свойства базисных элементов. В E-представлении мы имеем три базисных элемента (*точка, отрезок, угол*). Их свойства связаны, потому что в конце концов отрезок и угол являются просто множествами точек. Модификация трех базисных элементов не может быть независимой. Очень трудно сохранить связь между модифицированными базисными элементами обобщенной геометрии. Никто не модифицирует собственно евклидову геометрию в E-представлении.

В V-представлении имеется два базисных элемента (*точка, вектор*), и в некоторых случаях модификация собственно евклидовой геометрии возможна. Однако, V-представление содержит такую структуру как линейное векторное пространство. Это структуру удалить нельзя, потому что не известно, чем ее заменить. Модификация собственно евклидовой геометрии в рамках линейного векторного пространства довольно сильно ограничена. (Она приводит к псевдоевклидовым и римановым геометриям). Кроме того оказывается, что существуют такие модификации собственно евклидовой геометрии, которые несовместимы с утверждением, что любой геометрический объект может быть построен из точек и векторов.

σ-представление собственно евклидовой геометрии наиболее подходит для модификации, потому что оно содержит только один базисный элемент (*точ-*

$ку$). Любая модификация собственно евклидовой геометрии сопровождается модификацией структуры, связанной с σ-представлением. Этой структурой является расстояние (мировая функция), и всякая модификация собственно евклидовой геометрии сопровождается модификацией мировой функции (расстояния), и наоборот. Смысл расстояния совершенно ясен. Это понятие появляется во всех представлениях собственно евклидовой геометрии, но только в σ-представлении расстояние (мировая функция) играет роль структуры, определяющей геометрию. Модификация расстояния означает деформацию собственно евклидовой геометрии.

V-представление появилось в девятнадцатом веке, и большинство современных математиков и физиков используют это представление. σ-представление появилось недавно, в конце двадцатого века. Кроме того, оно появилось в неявном виде в работах, посвященных построению Т-геометрии [2, 3]. В этих работах термин "σ-представление" не упоминается, и σ-представление рассматривается как очевидная возможность описания геометрии в терминах мировой функции. По-видимому, такая возможность была очевидна только для автора, но не для читателей. Сейчас мы пытаемся исправить наше упущение и обсудить свойства σ-представления собственно евклидовой геометрии.

2 σ-представление собственно евклидовой геометрии

Пусть Ω является множеством точек собственно евклидова пространства. Расстояние $\rho = \rho(P_0, P_1)$ между двумя точками P_0 и P_1 евклидова пространства известно как евклидова метрика. В Е-представлении так же как и в V-представлении мы имеем

$$\rho^2(P_0, P_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1), \qquad \forall P_0, P_1 \in \Omega \tag{2.1}$$

Удобно использовать мировую функцию $\sigma(P_0, P_1) = \frac{1}{2}\rho^2(P_0, P_1)$ как главную характеристику евклидовой геометрии. Чтобы достичь это, нужно описать свойства любого вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, как элемента линейного векторного пространства, в терминах мировой функции $\sigma(P_0, P_1)$, которая ассоциируется с вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. В σ-представлении вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяется как упорядоченное множество из двух точек $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{P_0, P_1\}$.

Мы можем сложить два вектора, если конец одного вектора является началом другого вектора

$$\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \quad \text{или} \quad \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0, \tag{2.2}$$

Заменяя точку Q_0 точкой P_1, получаем

$$\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \tag{2.3}$$

Тогда в соответствии со свойствами скалярного произведения в евклидовом пространстве получаем из второго соотношения (2.2)

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1) - (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0) \tag{2.4}$$

Кроме того, в соответствии со свойствами скалярного произведения получаем

$$|\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1|^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1|^2 - 2\,(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1) + |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \tag{2.5}$$

Используя определение мировой функции

$$\sigma(P_0, P_1) = \sigma(P_1, P_0) = \frac{1}{2}|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2, \qquad \forall P_0, P_1 \in \Omega \tag{2.6}$$

получаем из (2.5) и (2.6)

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, P_1) + \sigma(P_0, Q_1) - \sigma(P_1, Q_1), \qquad \forall P_0, P_1, Q_1 \in \Omega \tag{2.7}$$

Из (2.4) и (2.7) следует, что для любых двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ скалярное произведение имеет вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1), \qquad \forall P_0, P_1, Q_0, Q_1 \in \Omega \tag{2.8}$$

Полагая $Q_0 = P_0$ в (2.8) и сравнивая с (2.7), получаем

$$\sigma(P_0, P_0) = \frac{1}{2}|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_0|^2 = 0, \qquad \forall P_0 \in \Omega \tag{2.9}$$

n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, \ldots\ \mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ линейно зависимы, если и только если определитель Грама $F_n(\mathcal{P}^n)$, $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \ldots P_n\}$ обращается в нуль

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)|| = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{2.10}$$

В σ-представлении условие (2.10) может быть записано в развернутой форме

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det ||\sigma(P_0, P_i) + \sigma(P_0, P_k) - \sigma(P_i, P_k)|| = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{2.11}$$

Если σ является мировой функцией n-мерного собственно евклидова пространства, то она удовлетворяет следующим соотношениям.

I. Определение размерности и введение прямолинейной системы координат:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \ldots P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{2.12}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама (2.11). Векторы P_0P_i, $i = 1, 2, \ldots n$ являются базисными векторами в прямолинейной системе координат K_n с началом в точке P_0. Ковариантный и контравариантный метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, \ldots n$ и $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, \ldots n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\, g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i, l = 1, 2, \ldots n \tag{2.13}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{2.14}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)(x_i(P) - x_i(Q))(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P,Q \in \Omega \tag{2.15}$$

где ковариантные координаты $x_i(P)$, $i = 1,2,...n$ точки P являются ковариантными координатами вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$. Они определяются соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1,2,...n \tag{2.16}$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения

$$g_k > 0, \qquad k = 1,2,...,n \tag{2.17}$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1,2,...n \tag{2.18}$$

рассматриваемая как система уравнений для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1,2,...n$ всегда имеет одно и только одно решение. Условия I $\div$ IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства.

Можно показать, что условия I $\div$ IV являются необходимыми и достаточными условиями того, что множество Ω вместе с мировой функцией σ, заданной на Ω, описывает n-мерное евклидово пространство [2].

Таким образом, в σ-представлении евклидова геометрия содержит только один первичный геометрический объект (базисный элемент): точку. Любые две точки описываются мировой функцией σ, которая удовлетворяет условиям I $\div$ IV. Любая фигура и любое соотношение могут быть описаны в терминах мировой функции и только в терминах мировой функции.

В σ-представлении вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ представляет собой упорядоченное множество $\{P_0, P_1\}$ из двух точек. Скалярное произведение двух векторов определяется соотношением (2.8).

Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ являются коллинеарными (линейно зависимыми), если

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 : \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2 \tag{2.19}$$

Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ эквивалентны (равны), если

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 : \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{2.20}$$

Вектор $\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1$ с началом в данной точке S_0 является суммой двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$,

$$\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_0\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{S}_1, \tag{2.21}$$

если точки S_1 и R удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{S}_0\mathbf{R} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \qquad \mathbf{R}\mathbf{S}_1 = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \tag{2.22}$$

В развернутом виде это означает, что точки S_1 и R удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) &= |\mathbf{S}_0\mathbf{R}|\cdot|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|, \qquad |\mathbf{S}_0\mathbf{R}|=|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \qquad (2.23)\\ (\mathbf{R}\mathbf{S}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) &= |\mathbf{R}\mathbf{S}_1|\cdot|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|, \qquad |\mathbf{R}\mathbf{S}_1|=|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \qquad (2.24)\end{aligned}$$

где скалярные произведения выражаются через соответствующие мировые функции с помощью соотношений (2.8). Точки P_0, P_1, Q_0, Q_1, S_0 заданы. Можно определить точку R из двух уравнений (2.23). Поскольку мировая функция удовлетворяет условиям I $\div$ IV, геометрия евклидова, и уравнения (2.23) имеют одно и только одно решение для точки R. Когда точка R определена, можно определить точку S_1, решая два уравнения (2.24). Они тоже имеют одно и только одно решение для точки S_1.

Результат суммирования не зависит от выбора начала вектора S_0 в следующем смысле. Пусть сумма векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определена с началом в точке S_0' с помощью соотношений

$$\mathbf{S}_0'\mathbf{S}_1' = \mathbf{S}_0'\mathbf{R}' + \mathbf{R}'\mathbf{S}_1' \qquad (2.25)$$

где точки S_1' и R' удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{S}_0'\mathbf{R}' = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \qquad \mathbf{R}'\mathbf{S}_1' = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \qquad (2.26)$$

В силу условий I $\div$ IV геометрия является евклидовой, и существует одно и только одно решение уравнений (2.26) и

$$\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_0'\mathbf{S}_1' \qquad (2.27)$$

в том смысле, что

$$\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_0'\mathbf{S}_1' : \qquad (\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1.\mathbf{S}_0'\mathbf{S}_1') = |\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1|\cdot|\mathbf{S}_0'\mathbf{S}_1'| \wedge |\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1| = |\mathbf{S}_0'\mathbf{S}_1'| \qquad (2.28)$$

Подчеркнем, что в σ-представлении сумма двух векторов не зависит от выбора начала результирующего вектора, потому что мировая функция удовлетворяет условиям евклидовости I $\div$ IV. Если мировая функция не удовлетворяет условиям I $\div$ IV, результат суммирования может зависеть от начала S_0, так же как и от порядка векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ при суммировании. Кроме того результат может быть многовариантным даже для фиксированной точки S_0, потому что решение уравнений (2.22) может не быть единственным.

Умножение вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ на вещественное число α дает вектор $\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1$ с началом в точке S_0

$$\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1 = \alpha\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \qquad (2.29)$$

Здесь точки P_0, P_1, S_0 заданы, а точка S_1 определяется соотношениями

$$(\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) = \operatorname{sgn}(\alpha)\,|\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1|\cdot|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|, \qquad |\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1| = |\alpha|\cdot|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \qquad (2.30)$$

Из-за условий I $\div$ IV имеется одно и только одно решение уравнений (2.30), и решение не зависит от точки S_0.

3 Единственность операций в собственно евклидовой геометрии

Для того, чтобы определить операции над векторами (равенство, сложение, умножение) в σ-представлении нужно решить алгебраические уравнения (2.20), (2.26), (2.29), которые в конце концов сводятся к уравнениям (2.20), определяющим операцию равенства (эквивалентности).

Равенство двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$) определяется двумя алгебраическими уравнениями

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \,, \qquad |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{3.1}$$

Число уравнений не зависит от размерности собственно евклидова пространства.

В V-представлении число уравнений, определяющих равенство векторов, равно размерности евклидова пространства. Чтобы определить равенство векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, вводится прямолинейная система координат K_n с базисными векторами $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{n-1}$ и началом в точке O. Ковариантные координаты $x_k = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)_k$ и $y_k = (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_k$ определяются соотношениями

$$x_k \equiv (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)_k = (\mathbf{e}_k.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) \,, \qquad y_k \equiv (\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_k = (\mathbf{e}_k.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) \qquad k = 0, 1, ...n-1 \tag{3.2}$$

Уравнения эквивалентности векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в V-представлении имеют вид

$$x_k = y_k, \qquad k = 0, 1, ..., n-1 \tag{3.3}$$

В соответствии с линейной структурой евклидова пространства (2.15) и согласно определению скалярного произведения (2.8) получаем

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = g^{ik} x_i x_k, \qquad |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| = g^{ik} y_i y_k, \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = g^{ik} x_i y_k \tag{3.4}$$

где

$$g^{ik} g_{lk} = \delta^i_l, \qquad g_{il} = (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_l) \,, \qquad i, k = 0, 1, ..., n-1 \tag{3.5}$$

По повторяющимся индексам производится суммирование $0 \div n-1$.

В силу соотношений (3.4) два соотношения равенства (3.1) принимают вид

$$g^{kl} x_k y_l = g^{kl} x_k x_l, \qquad g^{kl} x_k x_l = g^{kl} y_k y_l \tag{3.6}$$

С помощью второго уравнения (3.6) первое уравнение (3.6) может быть записано в виде

$$g^{kl} (x_k - y_k) (x_l - y_l) = 0 \tag{3.7}$$

В соответствии с условием III (2.17) матрица метрического тензора g^{kl} имеет только положительные собственные значения. В этом случае уравнение (3.7) имеет только тривиальное решение для $x_k - y_k$, $k = 0, 1, ...n-1$. Тогда уравнение (3.7) эквивалентно n уравнениям

$$x_l = y_l, \qquad l = 0, 1, ..., n-1 \tag{3.8}$$

Таким образом, в σ-представлении два уравнения (3.1) равенства векторов эквивалентны n уравнениям (3.3) равенства векторов в V-представлении. Эквивалентность обусловлена линейной структурой (2.15) евклидова пространства и положительностью собственных значений евклидовой метрики. В псевдоевклидовом пространстве матрица метрического тензора имеет собственные значения разных знаков. В этом случае соотношения (3.7) и (3.8) перестают быть эквивалентными.

4 Обобщение собственно евклидовой геометрии

Рассмотрим простой пример модификации собственно евклидовой геометрии. Матрица g^{ik} метрического тензора в прямолинейной системе координат K_n с базисными векторами $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, ...\mathbf{e}_{n-1}$ видоизменяется таким образом, что ее собственные значения имеют разные знаки. Получаем псевдоевклидову геометрию. Для простоты положим размерность $n = 4$ и собственные значения $g_0 = 1$, $g_1 = g_2 = g_3 = -1$. Это хорошо известное пространство Минковского (псевдоевклидово пространство индекса 1). В псевдоевклидовом пространстве определение (3.6) равенства двух векторов в σ-представлении не совпадает, вообще говоря, с равенством двух векторов (3.3) в V-представлении. Эти два определения эквивалентны для времениподобных векторов ($g^{kl}x_k x_l > 0$), и они не эквивалентны для пространственноподобных векторов ($g^{kl}x_k x_l < 0$).

В самом деле, используя определение (3.1), получаем соотношение (3.7) для любых векторов. Это означает, что вектор с координатами $x_k - y_k$ является изотропным вектором. Однако сумма так же, как и разность двух времениподобных векторов одинаковой длины в пространстве Минковского является или времениподобным, или нулевым вектором. Следовательно, выполнены соотношения (3.8). Таким образом, определения равенства (3.6) и (3.3) совпадают для времениподобных векторов одинаковой длины.

В случае пространственноподобных векторов одинаковой длины x_k и y_k их разность $x_k - y_k$ может быть изотропным вектором. Соотношение (3.7) не противоречит этому. Это означает, что разность двух пространственноподобных векторов одинаковой длины в σ-представлении пространства Минковского многовариантна, т.е. имеется много пространственноподобных векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1', ...$, которые эквивалентны пространственноподобному вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, но векторы $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1', ...$, вообще говоря, не эквивалентны между собой.

Результат несколько неожиданный. Во-первых, определение равенства оказывается различным в V-представлении и в σ-представлении. Во-вторых, определение равенства в σ-представлении оказывается многовариантным, что очень необычно.

В V-представлении равенство двух векторов одновариантно по определению вектора как элемента линейного векторного пространства. В σ-представлении равенство двух векторов определяется мировой функцией. Псевдоевклидово пространство является результатом деформации собственно евклидова пространства, когда собственно евклидова мировая функция заменяется псевдоевклидовой мировой функцией. Определение равенства векторов через мировую функцию остается определением равенства во всех евклидовых пространствах.

Для краткости мы будем использовать различные названия для геометрий с различным определением равенства векторов. Пусть геометрия с определение равенства векторов (3.3), (3.2) будет называться минковской геометрией, тогда как геометрия с определением равенства векторов (3.1) будет называться σ-минковской геометрией. Мировая функция одна и та же в обеих геометриях. Геометрии различаются в структуре линейного векторного пространства и, в частности, в определении равенства векторов. Строго говоря, в σ-минковской геометрии нет линейного векторного пространства. Линейное векторное пространство не является обязательным для формулировки евклидовой геометрии, так же как и для формулировки σ-минковской геометрии. Минковская и σ-минковская геометрии строятся в разных представлениях. Геометрия, построенная на основе мировой функции, является более общей геометрией, потому что мировая функция существует в обеих геометриях.

Важное замечание. В приложениях пространственно-временной геометрии Минковского к пространству-времени пространственноподобные мировые линии и пространственноподобные векторы не используются. С этой точки зрения различие между геометрией Минковского и σ-минковской геометрией оказывается несущественным. Различие между геометрией Минковского и σ-минковской геометрией оказывается несущественным с этой точки зрения. Однако, если рассматриваются тахионы, т.е. частицы, мировая линия которых пространственноподобна, то получается другой результат [4]

Какое из двух определений равенства (2.20), или (3.3) является правильным? Может быть оба? По-видимому, обе геометрии возможны как абстрактные построения. Однако, геометрия Минковского близка к геометрии реального пространства-времени. Минковская геометрия и σ-минковская геометрия различаются таким важным свойством как многовариантность равенства пространственноподобных векторов. В геометрии, построенной на основе линейного векторного пространства, многовариантность отсутствует в принципе (по определению). Наоборот, в σ-представлении эквивалентный вектор определяется как решение уравнений (2.20). Для произвольной мировой функции нельзя гарантировать ни существования, ни единственности решения. Они могут гарантироваться, если только мировая функция удовлетворяет условиям I $\div$ IV. Это означает, что многовариантность есть общее свойство обобщенной геометрии, тогда как одновариантность собственно евклидовой геометрии является специальным свойством собственно евклидовой геометрии. Специальные свойства собственно евклидовой геометрии описываются условиями I $\div$IV. Все эти условия содержат ссылку на размерность евклидова пространства. Одновариантность собственно евклидовой геометрии, которая определяется видом мировой функции, не содержит ссылки на размерность, потому что она верна для собственно евклидова пространства любой размерности.

С формальной точки зрения σ-минковская геометрия более последовательна, потому что определение (3.1) не зависит от выбора системы координат. В геометрии Минковского определение равенства двух векторов содержит ссылку на систему координат, которая может рассматриваться как дополнительная структура, введенная в геометрию Минковского. После этого геометрию Минковского следует квалифицировать как обогащенную геометрию. Это означает, что физическая геометрия оснащена дополнительной геометрической структурой. Эта структура подавляет многовариантность равенства пространственноподобных векторов.

Нам может не понравиться это обстоятельство, потому что мы привыкли к одновариантности отношения эквивалентности двух векторов. Однако, мы не можем игнорировать тот факт, что многовариантность является естественным свойством геометрии. Это означает, что мы должны использовать отношение эквивалентности двух векторов в виде (2.20).

Обсудим следствия нового определения равенства векторов для реального пространства-времени. В евклидовом пространстве прямая линия, проходящая через точки P_0, P_1, определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \{R|\mathbf{P}_0\mathbf{R} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\} \tag{4.1}$$

В σ-представлении параллельность $\mathbf{P}_0\mathbf{R} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяется соотношением (2.19) в σ-минковском пространстве-времени. В минковском пространстве-времени параллельность векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{R} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяется четырьмя уравнениями, описывающими пропорциональность составляющих вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ и вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. В σ-минковском пространстве-времени прямая (4.1) является одномерной линией для времениподобного вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, тогда как прямая (4.1) представляет собой трехмерную поверхность (две плоскости) для пространственно подобного вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. В минковском пространстве-времени все прямые (времениподобные и пространственноподобные) являются одномерными линиями. Таким образом, прямая, порожденная пространственноподобным вектором, описывается по-разному в минковской и σ-минковской геометриях.

Времениподобная прямая в геометрии Минковского описывает мировую линию свободной частицы, тогда как пространственноподобная прямая считается описывающей гипотетическую частицу – тахион. Тахион пока не обнаружен. В σ-минковском пространстве-времени этот факт объясняется следующим образом. Если тахион существует, то он описывается двумя изотропными трехмерными плоскостями, которые являются огибающими световых конусов, имеющих свои вершины на некоторой одномерной прямой линии. Такой тахион не был обнаружен, потому что его искали в виде одномерной прямой линии. В традиционном минковском пространстве-времени тахион не был обнаружен, потому что не существует частиц, движущихся со скоростью, большей скорости света. Таким образом, отсутствие тахиона объясняется на геометрическом уровне в σ-минковской геометрии пространства-времени, тогда как отсутствие тахиона в традиционной минковской геометрии пространства-времени объясняется на динамическом уровне.

Рассмотрим нериманову геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ пространства-времени, описываемую мировой функцией σ_{d}

$$\sigma_{\mathrm{d}} = \sigma_{\mathrm{M}} + \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathrm{M}})\, d, \qquad d = \frac{\hbar}{2bc} = \mathrm{const} \tag{4.2}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{если} \quad x > 0 \\ 0, & \text{если} \quad x = 0 \\ -1, & \text{если} \quad x < 0 \end{array} \right. , \tag{4.3}$$

где σ_{M} есть мировая функция геометрии Минковского, $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света и b является некоторой универсальной постоянной $[b]$ =г/см. Постоянная λ_0 представляет собой универсальную длину.

Геометрия (4.2) пространства-времени дискретна, потому что в ней нет векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, чья длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ была бы малой, т.е.

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^4 \notin \left(0, 4\lambda_0^4\right), \qquad \forall P_0, P_1 \in \Omega \tag{4.4}$$

Другими словами, геометрия пространства-времени (4.2) не имеет близких точек. Геометрию пространства-времени, в которой нет близких точек, следует квалифицировать как дискретную геометрию. Довольно неожиданно, что дискретная геометрия пространства-времени может быть однородной и изотропной как геометрия (4.2). Является неожиданным, что дискретная геометрия может быть задана на непрерывном многообразии. Но это недоумение связано с тем фактом, что обычно используется V-представление, где дискретная геометрия задается на решетчатом множестве. Другие неожиданные свойства дискретной геометрии пространства-времени можно найти в [7].

В геометрии пространства-времени (4.2) свободная частица описывается как цепь $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$ связанных отрезков $\mathcal{T}_{[P_k P_{k+1}]}$ прямой

$$\mathcal{T}_{\mathrm{br}} = \bigcup_k \mathcal{T}_{[P_k P_{k+1}]}, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{T}_{[P_k P_{k+1}]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}(P_k, R)} + \sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}(P_{k+1}, R)} = \sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}(P_k, P_{k+1})} \right\} \tag{4.6}$$

4-импульс частицы $\mathbf{p}$ описывается вектором $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$

$$\mathbf{p} = b\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}, \qquad m = b\,|\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}| = b\mu, \qquad k = 0, \pm 1, ... \tag{4.7}$$

Здесь m есть масса частицы, μ есть геометрическая масса частицы, т.е. масса частицы, выраженная в единицах длины. Описание геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ производится в σ-представлении, потому что описание неримановой геометрии в V-представлении невозможно. В геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ отрезки $\mathcal{T}_{[P_k P_{k+1}]}$ времениподобной прямой многовариантны в том смысле, что $\mathcal{T}_{[P_k P_{k+1}]}$ представляет собой трехмерную сигарообразную поверхность, а не одномерный отрезок прямой линии.

Для свободной частицы смежные звенья цепи (4-импульсы) $\mathcal{T}_{[P_kP_{k+1}]}$ и $\mathcal{T}_{[P_{k+1}P_{k+2}]}$ эквивалентны в смысле соотношений (2.20)

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}\mathrm{eqv}\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{P}_{k+2} &: \\ (\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}.\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{P}_{k+2}) &= |\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}|\cdot|\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{P}_{k+2}|, \qquad |\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}| = |\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{P}_{k+2}|\end{aligned} \tag{4.8}$$

Эта эквивалентность многовариантна в том смысле, что при фиксированном звене $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ смежное звено $\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{P}_{k+2}$ вихляет с характерным углом $\theta = \sqrt{d/\mu^2} = \sqrt{b\hbar^2/2m^2c}$. Форма цепи с вихляющими звеньями оказывается случайной. Статистическое описание случайной мировой цепи оказывается эквивалентным квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера [5]. Таким образом, квантовые эффекты являются следствием многовариантности. Здесь многовариантность учитывается на уровне пространственно-временной геометрии. В традиционной квантовой теории геометрия пространства-времени одновариантна, тогда как динамика многовариантна, потому что замена традиционных динамических переменных матрицами или операторами представляет собой введение многовариантности в динамику.

Таким образом, многовариантность является естественным свойством реального мира (особенно микромира). При традиционном подходе многовариантность искусственно устраняется из геометрии пространства-времени и искусственно вводится в динамику для того, чтобы объяснить квантовые эффекты. Было бы более разумно оставить многовариантность геометрии пространства-времени, где она появляется естественно. Кроме того многовариантность пространства-времени имеет другие следствия, отличные от квантовых эффектов. В частности, многовариантность геометрии пространства-времени является причиной ограниченной делимости реальных тел на части (атомизм) [6].

5 Многовариантность и возможность аксиоматизации геометрии

В E-представлении собственно евклидовой геометрии предполагается, что любой геометрический объект может быть построен из базисных элементов (точек, отрезков, углов). В V-представлении тоже предполагается, что любой геометрический объект может быть построен из базисных элементов (точек, векторов). Выведение предложений собственно евклидовой геометрии из системы аксиом воспроизводит процесс построения геометрического объекта из базисных элементов. Имеются различные способы использования базисных элементов для построения геометрического объекта, потому что отрезки и векторы являются просто множествами точек. Аналогично предложение собственно евклидовой геометрии может быть получено с помощью различных доказательств, основанных на системе аксиом.

Рассмотрим простой пример трехмерного собственно евклидового пространства. В декартовой системе координат $\mathbf{x}=\{x,y,z\}$ мировая функция имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{E}}\left(\mathbf{x},\mathbf{x}'\right)=\frac{1}{2}\left(\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2\right) \tag{5.1}$$

Рассмотрим шар $\mathcal{B}$ с границей

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{5.2}$$

где R есть радиус шара. Шар $\mathcal{B}$ можно рассматривать как построенный из множества $\mathcal{S}$ прямолинейных отрезков $\mathcal{T}\left(-x,y,z;x,y,z\right)$, $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\mathcal{B}=\bigcup_{x^2+y^2+z^2=R^2}\mathcal{T}\left(-x,y,z;x,y,z\right) \tag{5.3}$$

Каждый отрезок $\mathcal{T}\left(-x,y,z;x,y,z\right)$ является отрезком длины $\sqrt{R^2-y^2-z^2}$. Его центр находится в точке $\{0,y,z\}$. Отрезок $\mathcal{T}\left(x,y,z;-x,y,z\right)$ представляет собой множество точек P' с координатами (x',y,z)

$$\mathcal{T}\left(-x,y,z;x,y,z\right)=\left\{\left\{x'|x'^2\leq x^2\right\},y,z\right\} \tag{5.4}$$

Различные отрезки $\mathcal{T}\left(-x,y,z;x,y,z\right)$ не имеют общих точек, и каждая точка P шара $\mathcal{B}$ принадлежит одному и только одному из отрезков множества $\mathcal{S}$.

Рассмотрим шар $\mathcal{B}$ с границей

$$x^2+y^2+z^2=R^2-d/2 \tag{5.5}$$

Но теперь мы будем рассматривать не-риманову геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, описываемую мировой функцией σ_{d}

$$\sigma_{\mathrm{d}}=\left\{\begin{array}{ll}\sigma_{\mathrm{E}}-d, & \text{если}\quad \sigma_{\mathrm{E}}\geq 2d\\ \frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{E}}, & \text{если}\quad \sigma_{\mathrm{E}}<2d\end{array}\right.,\qquad d=\mathrm{const},\ d>0 \tag{5.6}$$

где σ_{E} есть мировая функция собственно евклидовой геометрии (5.1). Таким образом, если $\sigma_{\mathrm{d}}\gg d$ мировая функция σ_{d} слабо отличается от σ_{E}.

Отрезок прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ между точками P_0 и P_1 представляет собой множество точек

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]}=\left\{R|\sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}\left(P_0,R\right)}+\sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}\left(P_1,R\right)}=\sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}\left(P_0,P_1\right)}\right\} \tag{5.7}$$

Отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ представляет собой двумерную сигарообразную поверхность. Пусть длина отрезка $l\gg d$ и τ, $0<\tau<l$ есть параметр вдоль отрезка. Радиус ρ полой трубки сегмента как функция от τ имеет вид

$$\rho^2=\rho^2\left(\tau\right)=\frac{1}{4}\frac{d}{\left(l-d\right)^2}\left(2\tau-d\right)\left(2l-3d\right)\left(2l-2\tau-d\right),\qquad 2d<\tau<l-2d \tag{5.8}$$

Если $\tau\gg 2d$, то приближенно получаем

$$\rho^2=\rho^2\left(\tau\right)=\frac{2d}{l}\tau\left(l-\tau\right),\qquad 2d\ll\tau<l-2d \tag{5.9}$$

Максимальный радиус отрезка трубки $\rho_{\max} = \sqrt{ld/2}$ при $\tau = l/2$.

Ясно, что шар $\mathcal{B}$ не может быть построен только из таких отрезков трубки. Эти полые отрезки трубки не могут полностью заполнить шар. Чтобы заполнить шар полностью, нужно добавить точки внутри и вне отрезков. Проблема построения шара, состоящего из базовых элементов (точек и отрезков), оказывается сложной проблемой в модифицированной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Эта проблема построения шара ассоциируется с невозможностью выведения геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ из системы аксиом. Кажется, что геометрия, выведенная из системы аксиом, не может быть многовариантной, потому что любое предложение, полученное из аксиом с помощью формальной логики должно быть определенным. Оно не может иметь разных версий.

С другой стороны, многовариантность является существенным свойством реального микромира. Она является причиной квантовых эффектов и атомизма. Пространственно-временная геометрия является основой динамики в микромире.

В многовариантной геометрии геометрические объекты строятся с помощью принципа деформации. Геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ строится в некоторой области $\mathcal{S}_1$ собственно евклидова пространства. Это означает, что все блоки $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ так же как сам геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ выражаются в терминах мировой функции σ_{E} собственно евклидовой геометрии. Представим себе, что нам нужно передвинуть $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ в другую область $\mathcal{S}_2$ пространства. Мы можем передвинуть все блоки геометрического объекта $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ из $\mathcal{S}_1$ в $\mathcal{S}_2$ и построить из них геометрический объект $\mathcal{O}'_{\mathrm{E}}$ в $\mathcal{S}_2$, используя те же самые предписания, которые использовались при построении $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$. Эти предписания, записанные в терминах мировой функции, имеют один и тот же вид в любой геометрии, если только используются только точки как базовые элементы геометрии (блоки). Точки, рассматриваемые как блоки, не деформируются при перемещении из области $\mathcal{S}_1$ в область $\mathcal{S}_2$, если даже геометрия в области $\mathcal{S}_2$ отличается от геометрии в области $\mathcal{S}_1$ (разные мировые функции в областях $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$).

Это разъяснение объясняет применение принципа деформации, но не доказывает его. Принцип деформации является принципом, который позволяет использовать физические геометрии для описания неаксиоматизируемой геометрии пространства-времени.

6 Заключительные замечания

Итак, существуют три различные представления собственно евклидовой геометрии. В E-представлении имеется три базисных элемента (точка, отрезок, угол). Отрезок и угол являются некими вспомогательными структурами. Отрезок определяется двумя точками. Угол определяется тремя точками или двумя связанными отрезками. В V-представлении имеются два базисных элемента: точка и вектор (направленный отрезок). Угол заменяется двумя отрезками (векторами). Его величина определяется скалярным произведением двух векторов. Уменьшение числа базисных элементов сопровождается появлением новой структуры: линейным векторным пространством с заданным на нем скалярным произведением. Информация связанная с углом концентрируется теперь в скалярном произведении и линейном векторном пространстве. Такое понятие как расстояние оказывается свойством вектора (или свойством двух точек).

В σ-представлении имеется только один базисный элемент: точка. Взаимоотношение двух точек (отрезок) описывается мировой функцией (расстоянием). Взаимная направленность отрезков (или угла) рассматривается как взаимоотношение трех точек. Это описывается с помощью скалярного произведения, выраженного через расстояние (мировую функцию). В σ-представлении мировая функция (расстояние) превращается в структуру в том смысле, что мировая функция удовлетворяет ряду ограничений (условия I $\div$ IV). Понятие расстояния существует во всех представлениях. Но в E-представлении и в V-представлении расстояние не рассматривается как структура, потому что условия I $\div$ IV не рассматриваются как ограничения, накладываемые на расстояние (мировую функцию). Разумеется, эти условия выполняются во всех представлениях, но они рассматриваются как непосредственные свойства собственно евклидова пространства, а не как ограничения, налагаемые на расстояние собственно евклидова пространства.

σ-представление интересно в том отношении, что оно содержит только один базисный элемент (точку) и только одну структуру (мировую функцию). Все другие понятия евклидовой геометрии оказываются выраженными через мировую функцию. Предполагая, что эти выражения имеют один и тот же вид в других геометриях, можно легко построить эти геометрии, заменяя мировую функцию. Эта замена выглядит как деформация евклидова пространства.

Обычно изменение представления является формальной операцией, которая не сопровождается заменой базовых понятий. Например, представления в разных системах координат отличаются только видом соответствующих алгебраических выражений. Изменение представления собственно евклидовой геометрии сопровождается изменением базовых понятий, когда первичные понятия превращаются во вторичные и наоборот. Такая смена первичных понятий необычна и трудна для восприятия.

В частности, такие трудности восприятия появляются потому что линейное векторное пространство рассматривается как атрибут геометрии (а не атрибут описания геометрии). Линейное векторное пространство является атрибутом V-представления собственно евклидовой геометрии. Существуют геометрии (физические геометрии), где нельзя ввести линейное векторное пространство, вообще. Физические геометрии полностью описываются мировой функцией, и мировая функция является единственной характеристикой физической геометрии. Все другие атрибуты физической геометрии являются производными. Они могут быть введены исключительно через мировую функцию. Физическая геометрия, вообще говоря, не может быть аксиоматизирована. Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является единственным известным примером физической геометрии, которая может быть аксиоматизирована. Аксиоматизация собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ используется для построения $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Когда собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ построена (выведена из евклидовой аксиоматики), то используется тот факт, что $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является физической геометрией. Все определения собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ выражаются в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. Заменяя σ_{E} во всех определениях геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ другой мировой функцией σ, получаем все определения другой физической геометрии $\mathcal{G}$. Это означает, что получается другая физическая геометрия $\mathcal{G}$, которая не может быть аксиоматизирована (выведена из системы аксиом).

Невозможность аксиоматизации геометрии $\mathcal{G}$ обусловлена тем, что отношение эквивалентности в геометрии $\mathcal{G}$, вообще говоря, интранзитивно. Однако, во всех математических моделях, так же как и в любой аксиоматизируемой геометрии, отношение эквивалентности должно быть транзитивным. Почти все математики полагают, что любая геометрия может быть аксиоматизирована. Столкновение этой веры с применением физической геометрии приводит к недоразумениям и конфликтам [7]. Аксиоматизируемость является свойством евклидова метода **построения геометрии**, а не свойством **самой евклидовой геометрии**. Используя другой метод построения геометрии (метод деформации геометрии), можно построить неаксиоматизируемые геометрии.

Список литературы

[1] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953

[2] Yu.A.Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry . *J.Math. Phys.* **31**, 2876-2890 (1990).

[3] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (*e-print math.MG*/0103002).

[4] Yu. A.Rylov, Dynamic equations for tachyon gas, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, **133(10)**, *3683- 3695, (2013)*,

[5] Yu.A. Rylov:, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32**(8), 2092-2098, (1991).

[6] Yu.A. Rylov, Tubular geometry construction as a reason for new revision of the space-time conception. Printed in *What is Geometry?* polimetrica Publisher, Italy, 2006, pp.201-235.

[7] Yu. A. Rylov, Multivariance as a crucial property of microcosm. (*e-print http://arXiv.org/abs/0806.1716*)