Финслерова геометрия в терминах мировой функции

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Показано, что геометрию пространства-времени следует формулировать в терминах мировой функции, потому что только описание в терминах мировой функции позволяет распознать одинаковые геометрические объекты в областях пространства-времени с различной геометрией. Геометрия Бервальда-Моора, сформулированная в терминах мировой функции, оказывается многовариантной геометрией, которая едва ли может использоваться как геометрия пространства-времени, потому что в этой геометрии вихляния мировых линий свободных частиц отличны от реальных вихляний.

Ключевые слова: распознавание одинаковых геометрических объектов; принцип деформации; многовариантная геометрия; мировая функция; линейное векторное пространство; векторное расслоение; роль координат

1 Введение

Финслерова геометрия является некоторым обобщением римановой геометрии, использующей векторное расслоение [1, 2]. Это расслоение оборудовано метрической функцией. Эта метрическая функция порождает некоторую геометрию, которая может не быть локально евклидовой (или псевдоевклидовой). Это означает, что финслерова геометрия является обобщением римановой геометрии, потому что риманова геометрия является локально евклидовой. Но финслеровы геометрии, так же как и римановы геометрии являются локальными геометриями. Они описываются бесконечно малым расстоянием ds между точками x и

$x + dx$, которое в случае римановой геометрии определяется соотношением

$$2\sigma\left(x, x+dx\right) = ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \tag{1.1}$$

Здесь σ есть мировая функция римановой геометрии. Для построения геометрии в некоторой конечной области используется система координат, которая связывает описания в разных бесконечно малых областях. Кроме того геометрия $\mathcal{G}_1$ в области Ω_1 оказывается связанной с геометрией $\mathcal{G}_2$ в области Ω_2. Например, в области Ω_1 с пространственно-временной геометрией Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ имеется геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$. Этот геометрический объект движется в пространстве-времени без деформации. Он оказывается в другой области Ω_2 пространства-времени с геометрией $\mathcal{G}$. В геометрии $\mathcal{G}$ этот объект описывается как $\mathcal{O}$. Как описание геометрического объекта $\mathcal{O}$ в пространственно-временной геометрии $\mathcal{G}$ может быть выражено через описание того же объекта $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$ в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$? Ни риманова, ни финслерова геометрия не могут ответить на этот вопрос, потому что эти геометрии не рассматривают проблему деформации геометрии. Единственным исключением является отрезок $\mathcal{T}_{[AB]}$ прямой линии между точками A и B. Предполагается, что отрезок $\mathcal{T}_{[AB]}$ является одномерным отрезком кривой в римановой или в финслеровой геометрии.

Ответить на этот важный вопрос о связи между $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$ можно только в том случае, когда геометрия пространства-времени описывается в терминах мировой функции σ. Такая геометрия называется физической геометрией. Любая физическая геометрия получается в результате деформации собственно евклидовой геометрии, которая рассматривается как стандартная геометрия. В результате физическая геометрия может быть получена из другой физической геометрии с помощью некоторой деформации.

Это очень старая идея полностью описывать геометрию с помощью функции расстояния (или мировой функции). Вначале это было метрическое пространство, описываемое с помощью метрики (расстояния). Метрика была ограничена рядом условий таких как аксиома треугольника и условие неотрицательности метрики. Условие неотрицательности метрики не позволяло применить метрическое пространство для описания пространства-времени. Главным недостатком метрической геометрии и дистантной геометрии [3, 4] была невозможность построения геометрических объектов в терминах метрики ρ, или в терминах мировой функции $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$. Построение геометрических объектов в терминах мировой функции должно быть возможным, потому что предполагается, что геометрия полностью описывается в терминах мировой функции и только в терминах мировой функции. Более того, физическая геометрия допускает бескоординатное описание.

Такая ситуация возможна, если понятия геометрии и геометрические объекты описываются правильно [6].

Определение 1.1: Физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ есть множество точек Ω с заданной однозначной функцией σ на $\Omega \times \Omega$

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma\left(P,P\right) = 0, \qquad \sigma\left(P,Q\right) = \sigma\left(Q,P\right), \qquad P,Q \in \Omega \tag{1.2}$$

Определение 1.2: Физические геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ эквивалентны ($\mathcal{G}_1 \mathrm{eqv} \mathcal{G}_2$), если множество точек $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_2$, или $\Omega_2 \subseteq \Omega_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_1$.

Замечание: Совпадение точечных множеств Ω_1 и Ω_2 не является необходимым для эквивалентности геометрий $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. Если потребовать совпадения Ω_1 и Ω_2 в случае эквивалентности $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, то удаление одной точки P из точечного множества Ω_1 превращает геометрию $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ в геометрию $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_1, \Omega_1 \backslash P\}$, которая оказывается не эквивалентной геометрии $\mathcal{G}_1$. Такая ситуация представляется недопустимой, потому что геометрия на части $\omega \subset \Omega_1$ точечного множества Ω_1 оказывается неэквивалентной геометрии на всем точечном множестве Ω_1.

В соответствии с определением геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$ на частях множества Ω, $\omega_1 \subset \Omega$ и $\omega_2 \subset \Omega$ эквивалентны ($\mathcal{G}_1 \mathrm{eqv} \mathcal{G}$), ($\mathcal{G}_2 \mathrm{eqv} \mathcal{G}$) геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$, тогда как геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$ вообще говоря, не эквивалентны, если $\omega_1 \nsubseteq \omega_2$ и $\omega_2 \nsubseteq \omega_1$. Таким образом, отношение эквивалентности, вообще говоря, интранзитивно. Геометрия пространства-времени может варьироваться в разных областях пространства-времени. Это означает, что физическое тело, рассматриваемое как геометрический объект, может эволюционировать таким образом, что оно будет оказываться в областях с различной геометрией пространства-времени.

Определение 1.3: Геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n}$ геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ есть подмножество $g_{\mathcal{P}_n} \subset \Omega$ точек множества Ω. Этот геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n}$ есть множество корней $R \in \Omega$ функции $F_{\mathcal{P}_n}$, $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega$

$$F_{\mathcal{P}_n}: \qquad \Omega \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.3}$$

где

$$F_{\mathcal{P}_n} \quad : \qquad F_{\mathcal{P}_n}(R) = G_{\mathcal{P}_n}(u_1, u_2, ...u_s), \qquad s = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{1.4}$$

$$u_l \quad = \quad \sigma(w_i, w_k), \qquad i, k = 0, 1, ...n+1, \qquad l = 1, 2, ...\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{1.5}$$

$$w_k \quad = \quad P_k \in \Omega, \qquad k = 0, 1, ...n, \qquad w_{n+1} = R \in \Omega \tag{1.6}$$

Здесь $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \Omega$ суть $n+1$ точек, являющихся параметрами геометрического объекта $g_{\mathcal{P}_n}$

$$g_{\mathcal{P}_n} = \{R | F_{\mathcal{P}_n}(R) = 0\}, \qquad R \in \Omega, \qquad \mathcal{P}_n \in \Omega^{n+1} \tag{1.7}$$

$F_{\mathcal{P}_n}(R) = G_{\mathcal{P}_n}(u_1, u_2, ...u_s)$ есть некоторая функция от $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ аргументов u_s и of $n+1$ параметров $\mathcal{P}_n$. Множество $\mathcal{P}_n$ параметров геометрического объекта называется каркасом геометрического объекта. Подмножество $g_{\mathcal{P}_n}$ называется оболочкой каркаса. Всякий геометрический объект определяется в терминах и только в терминах мировой функции. Это определение не содержит ссылки на систему координат.

Когда частица рассматривается как геометрический объект, то ее движение в пространстве-времени описывается главным образом ее каркасом $\mathcal{P}_n$. Каркас является аналогом репера, прикрепленного к физическому телу. Следя за движением репера, можно следить за движением тела. Один каркас может иметь много оболочек и описывать разные геометрические объекты.

Если два геометрических объекта $g_{P_n,\sigma}$ и $g'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}$ одинаковы, то их каркасы $\mathcal{P}_{n,\sigma} = \{P_0, P_1, ...P_n\}$, и $\mathcal{P}'_{n.\sigma'} = \{P'_0, P'_1, ...P'_n\}$ должны быть одинаковы. Это означает, что

$$\sigma\left(P_i, P_k\right) = \sigma'\left(P'_i, P'_k\right), \quad i, k = 0, 1, ...n \tag{1.8}$$

Замечание: Произвольное подмножество точек точечного множества Ω не является, вообще говоря, геометрическим объектом. Предполагается, что физическое тело может иметь форму геометрического объекта только в случае, когда она определена соотношениями (1.3) - (1.7), потому что только в этом случае можно отождествить физические тела (геометрические объекты) в разных геометриях пространства-времени.

Пример: Отрезок прямой $\mathcal{T}_{[A,B]}$ В собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}} = \{\sigma_{\mathrm{E}}, \Omega\}$ определяется как множество точек $R \in \Omega$

$$\mathcal{T}_{[A,B]} = \left\{R | \sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}\left(A, R\right)} + \sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}\left(R, B\right)} = \sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}\left(A, B\right)}\right\} \tag{1.9}$$

Этот отрезок $\mathcal{T}_{[A,B]}$ одномерен в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Это по определению означает, что сечение $S\left(\mathcal{T}_{[A,B]}, P\right)$ отрезка $\mathcal{T}_{[A,B]}$ в любой точке $P \in \mathcal{T}_{[A,B]}$ состоит из одной точки P.

$$S\left(\mathcal{T}_{[A,B]}, P\right) = \left\{R | \bigwedge_{C=A,B} \sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}\left(R, C\right)} = \sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}\left(P, C\right)}\right\} = \{P\} \tag{1.10}$$

В другой физической геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ отрезок прямой $\mathcal{T}_{[A,B]}$ определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{[A,B]} = \left\{R | \sqrt{2\sigma\left(A, R\right)} + \sqrt{2\sigma\left(R, B\right)} = \sqrt{2\sigma\left(A, B\right)}\right\} \tag{1.11}$$

Его сечение имеет вид

$$S\left(\mathcal{T}_{[A,B]}, P\right) = \left\{R | \bigwedge_{C=A,B} \sqrt{2\sigma\left(R, C\right)} = \sqrt{2\sigma\left(P, C\right)}\right\} \tag{1.12}$$

Множество точек $S\left(\mathcal{T}_{[A,B]}, P\right)$ может содержать много точек, потому что одно уравнение (1.11) в n-мерном пространстве представляет собой, вообще говоря, $(n-1)$-мерную поверхность. Тот факт, что (1.9) в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ представляет собой одномерный отрезок является следствием специальных свойств мировой функции σ_{E}.

Подчеркнем, что определения (1.9), (1.11) отрезка прямой $\mathcal{T}_{[A,B]}$ в геометриях $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и $\mathcal{G}$ не содержат ссылок на систему координат. Это важно потому, что бескоординатное описание имеет дело с геометрией пространства-времени как таковой (без ссылок на систему координат, что может оказаться существенным). Мы покажем, что традиционная система координат может быть введена не всегда, потому что некоторые физические геометрии (например, дискретная геометрия пространства-времени) имеют неопределенную метрическую размерность (максимальное число линейно независимых векторов).

Отождествление геометрических объектов в разных областях с различной геометрией пространства-времени является очень важной операцией, которая может быть осуществлена только при описании в терминах мировой функции. Традиционное описание геометрии пространства-времени основано на формализме линейного пространства, который эффективен только в пространственно-временной геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$ и частично в римановой геометрии. Даже описание отрезка прямой $\mathcal{T}_{[AB]}$ приводит к разным результатам в физической геометрии и геометрии Минковского. В физической геометрии времениподобный отрезок $\mathcal{T}_{[AB]}$ (1.11) является, вообще говоря, 3-мерной трубкой, тогда как в $\mathcal{G}_{\rm M}$ это одномерная линия. В соответствии с традиционным аксиоматическим подходом к геометрии пространства-времени отрезок $\mathcal{T}_{[AB]}$ является одномерным в любой геометрии. Вообще, математический формализм традиционной геометрии пространства-времени не пригоден для одновременного рассмотрения нескольких различных геометрий в разных областях пространства-времени.

Мы воспринимаем геометрию пространства-времени только через движение физических тел в пространстве-времени, или через построение геометрических объектов, соответствующих этим телам. Как это следует из *определения 1.3* геометрического объекта, функция F как функция аргументов u_s (мировых функций от различных точек) одна и та же во всех физических геометриях. Это означает, что геометрический объект $\mathcal{O}_1$ в геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ получается из того же самого геометрического объекта $\mathcal{O}_2$ в геометрии $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ с помощью замены $\sigma_2 \to \sigma_1$ в определении геометрического объекта. Этот метод сравнения геометрических объектов в разных геометриях прост и эффективен. Он не использует традиционного (аксиоматического) похода к геометрии. Это является причиной, почему мы пытаемся представить финслерову геометрию в терминах мировой функции. Финслерова геометрия пространства-времени должна описываться в терминах мировой функции для того, чтобы можно было распознать одинаковые геометрические объекты в разных областях пространства-времени.

2 Мировая функция как генератор векторного расслоения

Способность мировой функции римановой геометрии порождать векторное расслоение была исследована в работе [7]. Эти свойства были использованы для построения относительного гравитационного поля [8]. Чтобы построить финслерову геометрию используется векторное расслоение TM римановой геометрии $\mathcal{G}_{\rm M}$ заданной на гладком многообразии M, где задана система координат K. Риманова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}$ может рассматриваться как частный случай физической геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ с мировой функцией $\sigma_{\mathrm{R}} = \sigma(x, x')$, где x и x' суть координаты точек $P, P' \in M$ в системе координат K. Метрический тензор римановой геометрии $\mathcal{G}$ имеет вид

$$g_{ik}(x) = \left[-\frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^i \partial x'^k}\right]_{x'=x}, \quad i, k = 0, 1, ...n-1 \tag{2.1}$$

Чтобы построить векторное расслоение $TM_{x'}$ в точке $x' \in M$, обычно используется множество одномерных линий $S_{\mathrm{L}x'}$, проходящих через точку x'. Векторное расслоение $TM_{x'}$ является касательным ко всем линиям $L \subset S_{\mathrm{L}x'}$. В физической геометрии векторное расслоение TM может быть построено без ссылки на множество $S_{\mathrm{L}x'}$. Это важно, потому что в физической геометрии одномерные кривые могут не существовать.

Дифференцируя мировую функцию, получаем следующую величину

$$\sigma_{ik'}(x, x') \equiv \sigma_{,i,k'}(x, x') \equiv \partial_i \partial_{k'} \sigma(x, x') \equiv \frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^i \partial x'^k}, \quad i, k = 0, 1, 2, 3 \tag{2.2}$$

Эта величина является ковариантным двух-точечным тензором (вектор в точке x и вектор в точке x'). Вообще, запятая перед индексом k означает дифференцирование по x^k, а запятая перед индексом k' означает дифференцирование по x'^k.

Для римановой геометрии имеют место следующие свойства

$$\det ||g_{ik}(x)|| \neq 0 \tag{2.3}$$

Тогда

$$\det ||\sigma_{ik'}(x, x')|| \neq 0 \tag{2.4}$$

в некоторой конечной области $\omega_{x'}$, где

$$|x - x'| \equiv \left|\sqrt{2\sigma(x, x')}\right| < R \tag{2.5}$$

В $\omega_{x'}$ можно определить контравариантный двутензор $\sigma^{ik'}$ с помощью соотношения

$$\sigma^{ik'} \sigma_{lk'} = \delta_l^i \tag{2.6}$$

Здесь, как и везде дальше, по повторяющимся верхним и нижним индексам производится суммирование.

Определим величину

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{kl}^i(x, x') = \sigma^{is'} \sigma_{kls'}, \quad \sigma_{kls'}(x.x') \equiv \frac{\partial^3 \sigma(x, x')}{\partial x^k \partial x^l \partial x'^s} \tag{2.7}$$

Величина $\Gamma_{kl}^i(x, x')$ преобразуется как символ Кристоффеля в точке x, и можно определить ковариантную производную $\tilde{\nabla}_i$ по x^i

$$\tilde{\nabla}_i T_l^k \equiv T_{l||i}^k = T_{l,i}^k - \Gamma_{is}^k T_l^s + \Gamma_{il}^s T_s^k \tag{2.8}$$

где $T_l^k = T_l^k(x, x')$ есть некоторый двухточечный тензор в точке x.

Связность $\Gamma_{kl}^i(x, x')$ в точке x оказывается связностью плоского пространства, потому что тензор кривизны

$$R_{k,sr}^i = \partial_r \Gamma_{ks}^i - \partial_s \Gamma_{kr}^i + \Gamma_{ks}^m \Gamma_{mr}^i - \Gamma_{kr}^m \Gamma_{ms}^i \equiv 0 \tag{2.9}$$

тождественно обращается в нуль. В самом деле, в соответствии с (2.7) и в соответствии с соотношением

$$\partial_s \sigma^{ik'} = -\sigma^{ir'} \partial_s \sigma_{lr'} \sigma^{lk'} = -\sigma^{ir'} \sigma_{slr'} \sigma^{lk'} \tag{2.10}$$

которое следует из (2.6), получаем

$$\begin{aligned} & \partial_r \Gamma_{ks}^i - \partial_s \Gamma_{kr}^i + \Gamma_{ks}^m \Gamma_{mr}^i - \Gamma_{kr}^m \Gamma_{ms}^i \\ = \ & \partial_r \left(\sigma^{im'} \sigma_{ksm'}\right) - \partial_s \left(\sigma^{im'} \sigma_{km'}\right) + \left(\sigma^{ml'} \sigma_{ksl'} \sigma^{ip'} \sigma_{mr,p'}\right) - \left(\sigma^{ml'} \sigma_{krl'} \sigma^{ip'} \sigma_{msp'}\right) \\ = \ & \sigma_{ksm'} \partial_r \sigma^{im'} - \sigma_{krm'} \partial_s \sigma^{im'} + \left(\sigma^{ml'} \sigma_{ksl'} \sigma^{ip'} \sigma_{mrp'}\right) - \left(\sigma^{ml'} \sigma_{krl'} \sigma^{ip'} \sigma_{msp'}\right) = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, символ Кристоффеля (2.7) представляет собой связность плоского риманова пространства $E_{x'}$. Множество всех пространств $E_{x'}$, $x' \in M$ образует векторное расслоение TM.

Имеем

$$\tilde{\nabla}_l \sigma_{ik'} = \sigma_{ik',l} - \Gamma_{li}^s \sigma_{sk'} = \sigma_{lik'} - \sigma^{sm'} \sigma_{lim'} \sigma_{sk'} \equiv 0 \tag{2.11}$$

$$\tilde{\nabla}_l \sigma^{ik'} = -\sigma^{ip'} \tilde{\nabla}_l \sigma_{qp'} \sigma^{qk'} = 0 \tag{2.12}$$

$$\tilde{\nabla}_l u^{\iota' k'}(x') = 0 \tag{2.13}$$

где $u^{\iota' k'}(x')$ есть произвольный одно-точечный тензор в точке x'. Ковариантный метрический тензор $G_{ik} = G_{ik}(x, x')$ плоского риманова пространства $E_{x'}$ может быть представлен в виде

$$G_{ik}(x, x') = \sigma_{il'} g_{(0)}^{l's'}(x') \sigma_{k,s'} \tag{2.14}$$

потому что в этом случае

$$\tilde{\nabla}_l G_{ik}(x, x') \equiv 0$$

Необходимо, чтобы

$$\det \left|\left| g_{(0)}^{l's'}(x') \right|\right| \neq 0 \tag{2.15}$$

для того, чтобы $\det ||G_{ik}|| \neq 0$. Из (2.11), (2.13) и (2.14) следует, что

$$\tilde{\nabla}_l G_{ik}(x, x') = \sigma_{ir'} \tilde{\nabla}_l g_{(0)}^{r's'}(x') \sigma_{ks'} = 0 \tag{2.16}$$

Определим символ Кристоффеля $\tilde{\Gamma}_{kl}^i$ в плоском римановом пространстве $E_{x'}$ с метрическим тензором (2.14)

$$\tilde{\Gamma}_{kl}^i = \frac{1}{2} G^{is} \left(G_{ks,l} + G_{ls,k} - G_{kl,s}\right) \tag{2.17}$$

где G^{ik} есть контравариантный метрический тензор

$$G^{ik} = \sigma^{ip'} g_{(0)p'q'}\left(x'\right) \sigma^{kp'}, \quad g_{(0)i'k'}\left(x'\right) g_{(0)}^{i'l'}\left(x'\right) = \delta_{k'}^{l'} \tag{2.18}$$

Подставляя (2.14) в (2.17) и используя (2.18), получаем

$$\tilde{\Gamma}_{kl}^{i} = \sigma^{is'} \sigma_{kls'} = \Gamma_{kl}^{i} \tag{2.19}$$

Таким образом, физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ на гладком многообразии M, чья мировая функция обладает свойством (2.4), порождает векторное расслоение TM. Мировая функция σ определяет отображение системы координат K на M в систему координат $K_{x'}$ на каждом пространстве $E_{x'}$ расслоения TM. Это отображение определяет связность Γ_{kl}^{i} на каждом $E_{x'}$ векторного расслоения TM. Однако метрический тензор $G_{ik}\left(x', x'\right)$ в $E_{x'}$, определяемый соотношением (2.14) может не совпадать с $g_{i'k'}\left(x'\right)$. Плоское риманово пространство $E_{x'}$ может иметь особенность в точке x'. В частности, $E_{x'}$ может быть коническим пространством с вершиной в точке x'.

В точке x' пространства $E_{x'}$

$$G^{i'k'}\left(x', x'\right) = g^{i'p'}\left(x'\right) g_{(0)p'q'}\left(x'\right) g^{k'q'} \tag{2.20}$$

Если $g_{(0)i'k'}\left(x'\right) = g_{i'k'}\left(x'\right)$, метрический тензор $\left[G_{ik}\left(x, x'\right)\right]_{x=x'}$ в $E_{x'}$ совпадает с метрическим тензором $g_{i'k'}\left(x'\right)$ в геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$, определяемой соотношением (2.1)

$$\left[G_{ik}\left(x, x'\right)\right]_{x=x'} = g_{i'k'}\left(x'\right), \quad \text{если} \quad g_{(0)i'k'}\left(x'\right) = g_{i'k'}\left(x'\right) \tag{2.21}$$

Это означает, что плоское риманово пространство $E_{x'}$ является евклидовым. В этом случае оно является касательным к многообразию M в точке x'.

Если физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ является римановой геометрией, мировая функция $\sigma = \sigma_{\mathrm{R}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [5]

$$\sigma_{\mathrm{R}i'} g^{i'k'}\left(x'\right) \sigma_{\mathrm{R}k'} = 2\sigma_{\mathrm{R}}, \quad \sigma_{\mathrm{R}i'} \equiv \frac{\partial \sigma_{\mathrm{R}}}{\partial x'^{i}} \tag{2.22}$$

Действуя на обе части уравнения (2.22) оператором $\tilde{\nabla}_l \tilde{\nabla}_s$ и принимая во внимание соотношения (2.11), (2.13), получаем

$$\sigma_{\mathrm{R}li'} g^{i'k'}\left(x'\right) \sigma_{\mathrm{R}sk'} = \tilde{\nabla}_l \sigma_{\mathrm{R}s} \tag{2.23}$$

Сравнивая (2.23) с (2.14) и (2.21), заключаем, что для римановой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{R}} = \{\sigma_{\mathrm{R}}, M\}$ метрический тензор в $E_{x'}$ в точке x принимает вид

$$G_{ik}\left(x, x'\right) = \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_k \sigma_{\mathrm{R}}\left(x, x'\right) \tag{2.24}$$

Итак, пусть физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ задана на гладком многообразии M с системой координат K на M и удовлетворяет условию (2.4). Тогда эта геометрия порождает расслоение TM на плоские римановы пространства $E_{x'}$ в каждой точке $x' \in M$. Она порождает отображение системы координат $K \rightarrow K_{x'}$ и определяет метрический тензор $G_{ik}\left(x, x'\right)$ в каждой точке x евклидова пространства $E_{x'}$ в системе координат $K_{x'}$. Метрический тензор $G_{ik}\left(x, x'\right)$ в точке x определяется некоторым тензором $g_{(0)i'k'}\left(x'\right)$ в точке x'

($\det \left|\left|g_{(0)i'k'}\left(x'\right)\right|\right| \neq 0$). Если геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma_{\mathrm{R}}, M\}$ является римановой геометрией, то метрический тензор $G_{ik}\left(x, x'\right)$ на $E_{x'}$ в точке x полностью определяется мировой функцией σ_{R} римановой геометрии.

Векторное расслоение TM является касательным векторным расслоением в случае, когда $\mathcal{G} = \{\sigma_{\mathrm{R}}, M\}$. Это означает, что если многообразие M изометрически вложено в евклидово многообразие M_{E} большей размерности и образует поверхность $\mathcal{S}$ в M_{E}, то расслоение TM представляет собой множество касательных плоскостей к поверхности $\mathcal{S}$. В случае, когда $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ не является римановой геометрией, векторное расслоение TM не является, вообще говоря, касательным векторным расслоением, потому что многообразие M не может быть вложено изометрически в евклидово многообразие M_{E}. В этом случае прямые линии многообразия M не являются одномерными линиями, и такие прямые линии вида (1.11) не могут быть вложены изометрически в евклидово многообразие M_{E}. Тем не менее, физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ порождает векторное расслоение TM плоских римановых пространств $E_{x'}$ и отображение системы координат K на каждое пространство $E_{x'}$ расслоения TM.

3 Роль системы координат в описании геометрии пространства-времени

Обычно предполагается, что система координат есть нечто внешнее по отношению к геометрии пространства-времени и, вообще, по отношению к любой геометрии. Но это не совсем так. Чтобы понять роль системы координат, рассмотрим собственно евклидову геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в σ-представлении. σ-представление появляется при метрическом подходе к геометрии, когда все геометрические величины и соотношения описываются в терминах мировой функции. Размерность геометрии и система координат тоже выражаются в терминах мировой функции.

В декартовой системе координат K мировая функция σ_{E} собственно евклидовой геометрии имеет специальный вид

$$\sigma_{\mathrm{E}}\left(P, P'\right) = \sigma_{\mathrm{E}}\left(x, x'\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(x^k - x'^k\right)^2 \tag{3.1}$$

где $P = \{x^1, x^2, ...x^n\}$, $P' = \{x'^1, x'^2, ...x'^n\}$ суть точки n-мерного евклидова пространства E^n, $P, P' \in E^n$ и $x = \{x^1, x^2, ...x^n\}$, $x' = \{x'^1, x'^2, ...x'^n\}$ суть координаты в некоторой декартовой системе координат K.

Способ обобщения геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ существенно зависит от метода представления геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Имеются два метода представления евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$: (1) V-представление и (2) σ-представление [9].

В V-представлении используется аксиоматический подход к $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, когда евклидова геометрия строится на основе линейного пространства $\mathcal{L}_n$. Линейное пространство $\mathcal{L}_n$ представляет собой множество Ω_n элементов $u \in \Omega_n$. Эти элементы u мы будем называть линейными векторами (линвекторами). Умножение линвектора $u \in \Omega_n$ на вещественное число a дает линвектор $au \in \Omega_n$. Сумма двух линвекторов $u \in \Omega_n$ и $v \in \Omega_n$ дает новый линвектор $(u+v) \in \Omega_n$. Эти операции имеют линейные свойства. Термин "линвектор" (вместо традиционного термина "вектор") используется потому, что каждый линвектор $u \in \Omega_n$ существует в одном экземпляре.

Напротив, вектор $\mathbf{AB}$ в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ определяется как упорядоченное множество $\mathbf{AB}= \{A, B\} \in \Omega \times \Omega$ из двух точек $A, B \in \Omega$. Здесь Ω есть множество точек на котором определена геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Среди векторов $\mathbf{PQ} \in \Omega \times \Omega$ евклидова пространства E^n имеются эквивалентные (равные) векторы $\mathbf{PQ} \in \Omega \times \Omega$. Мы используем различные термины ("линвектор" и "вектор") для элементов Ω_n и элементов $\Omega \times \Omega$, потому что некорректно использовать один и тот же термин для разных объектов с различными свойствами.

Множество $\Omega_{\mathbf{AB}}$ векторов $\mathbf{CD} \in \Omega \times \Omega$ которые эквивалентны вектору $\mathbf{AB} \in \Omega \times \Omega$ определяется как множество векторов $\mathbf{CD}$, которые параллельны вектору $\mathbf{AB}$ и их длины $|\mathbf{CD}|$, $|\mathbf{AB}|$ равны.

$$\Omega_{\mathbf{AB}} = \{\mathbf{CD} | (\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{AB})\} \tag{3.2}$$

$$(\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{AB}) : \quad (\mathbf{CD} \upuparrows \mathbf{AB}) \wedge |\mathbf{CD}| = |\mathbf{AB}| \tag{3.3}$$

$$(\mathbf{CD} \upuparrows \mathbf{AB}) : \quad (\mathbf{CD}.\mathbf{AB}) = |\mathbf{CD}| \cdot |\mathbf{AB}| \tag{3.4}$$

Здесь $(\mathbf{CD}.\mathbf{AB}) \in \mathbb{R}$ есть скалярное произведение двух векторов $\mathbf{CD}$ и $\mathbf{AB}$, которые определяются соотношением

$$(\mathbf{CD}.\mathbf{AB}) = \sigma_{\mathrm{E}}(C, B) + \sigma_{\mathrm{E}}(D, A) - \sigma_{\mathrm{E}}(C, A) - \sigma_{\mathrm{E}}(D, B) \tag{3.5}$$

$$|\mathbf{CD}|^2 = 2\sigma_{\mathrm{E}}(C, D) \tag{3.6}$$

Эквивалентность (3.3) двух векторов $\mathbf{CD} \in \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}$ и $\mathbf{AB} \in \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}$ определяется в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. В декартовой системе координат K, где мировая функция σ_{E} имеет вид (3.1) и точки A, B, C, D имеют соответственно координаты x_A, x_B, x_C, x_D скалярное произведение (3.5) и $|\mathbf{CD}|$ принимают соответственно вид

$$(\mathbf{CD}.\mathbf{AB}) = \sum_{k=1}^{k=n} \left(x_D^k - x_C^k\right)\left(x_B^k - x_A^k\right) \tag{3.7}$$

$$|\mathbf{CD}|^2 = \sum_{k=1}^{k=n} \left(x_D^k - x_C^k\right)^2 \tag{3.8}$$

Эти выражения совпадают соответственно со скалярным произведением двух линвекторов $(u_{\mathbf{CD}}.u_{AB})$ и с $|u_{\mathbf{CD}}|^2$, при условии, что $u_{\mathbf{CD}}$ и u_{AB} имеют соответственно координаты $\left(x_D^k - x_C^k\right)$ и $\left(x_B^k - x_A^k\right)$.

В $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ отношение эквивалентности (3.3) рефлексивно, симметрично и транзитивно. Тогда множество $\Omega_{\mathbf{AB}}$ является классом эквивалентности вектора $\mathbf{AB}$. Можно отождествить линвектор $u_{\mathbf{AB}} \in L_n$ с классом эквивалентности $\Omega_{\mathbf{AB}}$ вектора $\mathbf{AB} \in \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega}$. Аксиоматика линейного пространства L_n и операции в L_n могут быть использованы для построения геометрических соотношений в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. После обобщения $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, когда σ_{E} заменяется другой мировой функцией σ, отношение эквивалентности (3.3), вообще говоря, перестает быть транзитивным. В результате множество $\Omega_{\mathbf{AB}}$ перестает быть классом эквивалентности вектора $\mathbf{AB}$. Становится невозможным отождествлять линвектор $u_{\mathbf{AB}} \in L_n$ с множеством $\Omega_{\mathbf{AB}}$, потому что не все векторы $\mathbf{CD} \in \Omega_{\mathbf{AB}}$ эквивалентны между собой. Геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$, полученная как результат замены $\sigma_{\mathrm{E}} \rightarrow \sigma$, оказывается многовариантной.

Физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ является, вообще говоря, многовариантной геометрий. В многовариантной геометрии имеется, вообще говоря, много векторов $\mathbf{CD}, \mathbf{CD}', \mathbf{CD}'', ...$в точке C, которые эквивалентны вектору $\mathbf{AB}$ в точке A, но они не эквивалентны между собой. Эквивалентность векторов $\mathbf{CD}$ и $\mathbf{AB}$ определяется формулами (3.3) -(3.6). Отношение эквивалентности двух векторов (3.3) -(3.6) становится интранзитивным. Эта интранзитивность является причиной многовариантности физической геометрии. Только собственно евклидова геометрия не является многовариантной. Пространственно-временная геометрия Минковского многовариантна по отношению к пространственноподобным векторам, но она одновариантна по отношению к времениподобным векторам. Дискретная геометрия пространства-времени многовариантна по отношению к времениподобным векторам, и это обстоятельство является причиной квантовых эффектов [10]. Многовариантность геометрии пространства-времени является очень важным свойством [11]. Оно не может быть описано формализмом линейного пространства, который используется обычно для описания пространства-времени.

При обобщении собственно евклидовой геометрии мы получаем физическую геометрию $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$, заменяя мировую функцию σ_{E} мировой функцией σ геометрии $\mathcal{G}$ во всех геометрических соотношениях геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}} = \{\sigma_{\mathrm{E}}, \Omega\}$, которые могут быть выражены в терминах только евклидовой мировой функции σ_{E}. Эти соотношения мы будем называть общегеометрическими соотношениями. Выражения (3.5), (3.6) являются примерами общегеометрических соотношений.

Другим примером общегеометрического соотношения является определение линейной зависимости. n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2,...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2,...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ линейно зависимы, если выполнено соотношение

$$F_n(\mathcal{P}^n) = 0 \tag{3.9}$$

Здесь $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$, а $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||, \quad i,k = 1,2,...n \tag{3.10}$$

Скалярное произведение в (3.10) выражается через мировую функцию с помощью (3.5).

Рассмотрим обобщение $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}} = \{\sigma_{\mathrm{E}}, \Omega\}$. Мировая функция σ_{E} заменяется мировой функцией σ во всех общегеометрических соотношениях. Однако имеются еще специальные соотношения геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, которые зависят от специальных свойств мировой функции σ_{E}. Нельзя заменять мировую функцию в специальных соотношениях. Эти специальные свойства определяют размерность геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и свойства декартовых координат в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.

Если σ_{E} есть мировая функция n-мерного евклидова пространства E^n, то она удовлетворяет следующим соотношениям.

I. Определение размерности и введение прямолинейной системы координат:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \quad (3.11)$$

где $F_n\left(\mathcal{P}^n\right)$ есть определитель Грама (3.10). Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \ \ i = 1, 2, ...n$ суть базисные векторы в прямолинейной системе координат K_n с началом в точке P_0. Ковариантный метрический тензор $g_{ik}\left(\mathcal{P}^n\right), \ i, k = 1, 2, ...n$ и контравариантный метрический тензор $g^{ik}\left(\mathcal{P}^n\right), \ i, k = 1, 2, ...n$ в прямолинейной системе координат K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}\left(\mathcal{P}^n\right) g_{lk}\left(\mathcal{P}^n\right) = \delta_l^i, \qquad g_{il}\left(\mathcal{P}^n\right) = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l\right), \qquad i, l = 1, 2, ...n \quad (3.12)$$

$$F_n\left(\mathcal{P}^n\right) = \det\left|\left|g_{ik}\left(\mathcal{P}^n\right)\right|\right| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, ...n \qquad (3.13)$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma_{\mathrm{E}}\left(P, Q\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}\left(\mathcal{P}^n\right)\left(x_i\left(P\right) - x_i\left(Q\right)\right)\left(x_k\left(P\right) - x_k\left(Q\right)\right), \qquad \forall P, Q \in \Omega \qquad (3.14)$$

где координаты $x_i\left(P\right), \ i = 1, 2, ...n$ точки P являются ковариантными координатами вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, определенного соотношением

$$x_i\left(P\right) = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}\right), \qquad i = 1, 2, ...n \qquad (3.15)$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}\left(\mathcal{P}^n\right)$ имеет только собственные значения одного знака (положительные)

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \qquad (3.16)$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}\right) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \qquad (3.17)$$

рассматриваемая как уравнения для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}, \ \ i = 1, 2, ...n$ имеет всегда одно и только одно решение.

Не все условия I – IV являются независимыми, они определяют различные свойства геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Например, условие (3.11) определяет размерность n евклидова пространства E^n. Эта размерность n есть максимальное число линейно независимых векторов в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Это число определяется общегеометрическим соотношением (3.10) которое зависит от вида мировой функции. Если условия (3.11) не выполнены, то нельзя ввести систему координат в традиционном виде, потому что метрическая размерность $n_m = n$ геометрии $\mathcal{G}$ остается неопределенной.

Сумма двух векторов определяется следующим образом. Если складываются векторы **AB** и **BC,** когда конец одного вектора является началом другого, то получаем

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BC} = \mathbf{AC} \tag{3.18}$$

Если складываются произвольные векторы **AB** и **CD**, получаем

$$\mathbf{AB} + \mathbf{CD} = \mathbf{AB} + \mathbf{BR} = \mathbf{AR} \tag{3.19}$$

где точка R определяется из соотношения

$$(\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{BR}) \tag{3.20}$$

В соответствии с (3.3) - (3.5) соотношение (3.20) представляет собой два уравнения типа (3.3). Если эти уравнения имеют всегда одно и только одно решение для точки R (как в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$), то операция сложения определяется однозначно. Однако, если решение многовариантно, то нельзя определить сложение как однозначную операцию в том виде, как это делается в линейном пространстве для сложения линвекторов.

Умножение вектора **AB** на вещественное число a определяется следующим образом

$$a\mathbf{AB} = \mathbf{AR} \tag{3.21}$$

где точка R определяется из соотношений

$$(\mathbf{AB}.\mathbf{AR}) = a\,|\mathbf{AB}|^2\,, \quad |\mathbf{AR}| = a\,|\mathbf{AB}| \tag{3.22}$$

Если решение уравнений (3.22) многовариантно, то операция умножения тоже многовариантна.

Подводя итог, можно сказать, что собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть приведена к линейной алгебре. Но обобщения геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, вообще говоря, не могут быть приведены к линейной алгебре. Они, вообще говоря, многовариантны, и эта многовариантность является следствием направленности векторов, которая отсутствует в алгебре. Вообще говоря, *геометрия не может быть сведена к алгебре.*

Большинство ограничений на мировую функцию σ_{E} в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ возникает из ограничений (3.11), которые состоят из многих уравнений. Эти ограничения носят глобальный характер. Можно привести эти ограничения к локальному виду

$$\exists\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega_\varepsilon, \qquad F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega_\varepsilon^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{3.23}$$

где Ω_ε есть бесконечно малая окрестность точки P_0, определяемая соотношением

$$\left|\sqrt{2\sigma\left(P_0, P\right)}\right| < \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow +0 \tag{3.24}$$

Если условия (3.23) выполнены, то можно локально использовать формализм линейного пространства. Риманова геометрия является локально евклидовой. Риманова геометрия получается при использовании ограничений (3.11) в виде (3.23). Использование ограничений (3.23) позволяет подавить многовариантность эквивалентности векторов, имеющих общее начало. Но многовариантность эквивалентности векторов остается для векторов, имеющих разное начало. Рассмотрение эквивалентности векторов, имеющих различное начало, запрещено в римановой геометрии, или она связывается с путем переноса вектора. Это необходимо для использования формализма линейного пространства, который может использоваться, только если метрическая размерность существует, по крайней мере, локально, и можно локально ввести прямолинейную систему координат.

В соответствии со вторым разделом всякая физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ порождает векторное расслоение TM с плоской римановой геометрией на каждом пространстве $E_{x'}$ расслоения. В случае, когда геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ является римановой, в соответствии с (2.21) метрический тензор $\left[G_{ik}\left(x, x'\right)\right]_{x'=x}$ в $E_{x'}$ в точке x' в системе координат $K_{x'}$ совпадает с метрическим тензором $g_{i'k'}\left(x'\right)$ римановой геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ в точке x'. Метрический тензор $G_{ik}\left(x, x'\right)$ в точке x на $E_{x'}$ определяется формулами (2.23), (2.24) в виде

$$G_{ik}\left(x, x'\right) = \sigma_{il'} g^{l's'}\left(x'\right) \sigma_{ks'} \tag{3.25}$$

Это означает, что риманова геометрия может описываться как евклидова геометрия на расслоении TM из евклидовых пространств $E_{x'}$. Это естественно, поскольку риманова геометрия – это множество евклидовых геометрий на связанных бесконечно малых многообразиях dM. Переход от евклидовых геометрий на расслоении TdM бесконечно малых многообразий dM к римановой геометрии довольно прост. Он описывается формулой (3.25).

Если физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ не является римановой геометрией, то геометрия на каждом пространстве $E_{x'}$ векторного расслоения TM является плоской римановой геометрией, но соотношение (3.25), вообще говоря, не выполняется. Риманова геометрия на $E_{x'}$ может иметь особенность в точке x'. Вместо этого получаем соотношение (2.18)

$$G_{ik}\left(x, x'\right) = \sigma_{il'} g_{(0)}^{l's'}\left(x'\right) \sigma_{ks'} \tag{3.26}$$

где тензор $g_{(0)}^{l's'}\left(x'\right)$ определяется физической геометрией $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ неизвестным способом. Однако можно надеяться, что совокупность плоских римановых геометрий на многообразиях $T_{x'}M$ описывает физическую геометрию $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$. Мы можем надеяться, что мировая функция σ может быть получена из совокупности плоских римановых геометрий на многообразиях $T_{x'}M$ расслоения TM. Мы не можем доказать это утверждение, но мы можем надеяться, что физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ может быть описана как множество плоских римановых геометрий. Другими словами, отдельная физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, M\}$ приводится к множеству плоских римановых геометрий. Это множество плоских римановых геометрий ассоциируется с финслеровой геометрией, которая задается на расслоении TM. Заметим, что описание векторного расслоения TM недостаточно применительно к геометрии пространства-времени, потому что нужна еще мировая функция для отождествления геометрического объекта в разных областях многообразия M, как мы видели это во введении.

Традиционное представление финслеровой геометрии, основано на использовании формализма линейного пространства. Мы попытаемся заменить представление на основе линейного пространства представлением на основе мировой функции. Представление в терминах мировой функции интересно в том отношении, что мировая функция риманова (или метрического) многообразия описывает векторное расслоение этого многообразия.

4 Финслерова геометрия в терминах мировой функции

Финслерова геометрия является обобщением римановой геометрии, которое может быть локально неевклидовым [1]. Финслерова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{F}}$ задается на касательном расслоении TM гладкого риманова многообразия M. Нас будет интересовать приложение финслеровой геометрии для описания пространства-времени.

Финслерово многообразие есть дифференцируемое многообразие вместе со структурой внутреннего квазиметрического пространства, в котором длина спрямляемой кривой $\gamma : [a, b] \to M$ задается функционалом длины

$$L(\gamma) = \int_a^b F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, dt \tag{4.1}$$

где $F(x, \cdot\,)$ есть некоторая асимметричная норма на каждом касательном пространстве T_xM. Финслерово многообразие нетривиально обобщает риманово многообразие в том смысле, что оно не обязательно евклидово в бесконечно малом. Это означает, что (асимметричная) норма на каждом касательном пространстве не является с необходимостью генерируемой внутренним произведением (метрическим тензором).

Финслерово многообразие есть дифференцируемое многообразие M вместе с финслеровой функцией F, определенной на касательном расслоении M так, что для всех касательных векторов v,

1. $F(x, v) \geq 0$ с равенством, если и только если $v = 0$ (положительная определенность).

2. $F(x, \gamma v) = \lambda F(x, v)$ для всех $\lambda \geq 0$ (но не с необходимостью для $\lambda < 0$) (однородность).

3. $F(x, v+w) \leq F(x,v) + F(x,w)$ для всех w на том же самом касательном пространстве с v (подаддитивность).

Другими словами, F есть асимметричная норма на каждом касательном пространстве. Чаще всего подаддитивность заменяется следующим условием сильной выпуклости: Для каждого касательного вектора v, гессиан F^2 от v положительно определен. Здесь гессиан F^2 от v есть симметричная билинейная форма

$$g_v\left(X,Y\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2\left(x, v+sX+tY\right)\right]_{s=t=0}, \quad X, Y \in T_x M$$

известная также как фундаментальны тензор F от v.

Традиционное представление финслеровой геометрии основывается на использовании формализма линейного пространства. Мы попытаемся заменить представление на основе линейного пространства представлением на основе мировой функции. Представление в терминах мировой функции интересно в том отношении, что мировая функция риманова (или метрического) многообразия описывает векторное расслоение этого многообразия.

Существует идея, что финслерова геометрия может использоваться как геометрия пространства-времени [14, 15]. Считается, что геометрия Бервальда-Моора является финслеровой геометрией, пригодной для описания пространства-времени. Нас больше всего интересуют геометрии, которые могут использоваться как геометрии пространства-времени. Мы представим геометрию Бервальда -Моора в терминах мировой функции и попытаемся исследовать в какой мере она может использоваться как геометрия пространства-времени.

5 Геометрия Бервальда-Моора как возможная геометрия пространства-времени

Нас интересует приложение финслеровой геометрии к описанию пространства-времени. Рассмотрим пространственно-временную геометрию с метрикой Бервальда-Моора. В изотропных координатах ее линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = \sqrt[4]{dx^1 dx^2 dx^3 dx^4} \tag{5.1}$$

Соответствующая мировая функция имеет вид

$$\sigma\left(x, x'\right) = \frac{1}{2}\sqrt{(x^1 - x'^1)(x^2 - x'^2)(x^3 - x'^3)(x^4 - x'^4)} \tag{5.2}$$

Хотя линейный элемент (5.1) не определяет однозначно мировую функцию, но соотношение (5.1) вместе со свойствами 2 и 3 предыдущего раздела приводит к выражению (5.2) для мировой функции. Кроме того, допустимы только те значения координат x, для которых мировая функция вещественна.

Вместо изотропных координат x^i, $i=1,2,3,4$ мы будем использовать координаты

$$t_1 = x^1 + x^2, \quad t_2 = x^3 + x^4, \quad y_1 = x^1 - x^2, \quad y_2 = x^3 - x^4 \tag{5.3}$$

$$x^1 = \frac{t_1 + y_1}{2}, \quad x^2 = \frac{t_1 - y_1}{2}, \quad x^3 = \frac{t_2 + y_2}{2}, \quad x^4 = \frac{t_2 - y_2}{2} \tag{5.4}$$

Тогда мировая функция принимает вид

$$\begin{aligned}
& \sigma\left(t_1, t_2, y_1, y_2; t_1', t_2', y_1', y_2'\right) \\
= \; & \frac{1}{2}\left|\sqrt{\left((t_1 - t_1')^2 - (y_1 - y_1')^2\right)\left((t_2 - t_2')^2 - (y_2 - y_2')^2\right)}\right| \\
& \times\theta\left(\left(t_1 - t_1'\right)^2 - \left(y_1 - y_1'\right)^2\right)\theta\left(\left(t_2 - t_2'\right)^2 - \left(y_2 - y_2'\right)^2\right) \\
& -\frac{1}{2}\left|\sqrt{\left((t_1 - t_1')^2 - (y_1 - y_1')^2\right)\left((t_2 - t_2')^2 - (y_2 - y_2')^2\right)}\right| \\
& \times\theta\left(\left(y_1 - y_1'\right)^2 - \left(t_1 - t_1'\right)^2\right)\theta\left(\left(y_2 - y_2'\right)^2 - \left(t_2 - t_2'\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Здесь

$$\theta\left(x\right) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{если} \quad x < 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{t_1, t_2, y_1 y_2\}$ является времениподобным, если $(t_1 > y_1 > 0) \wedge (t_2 > y_2 > 0)$, или если $(t_1 < y_1 < 0) \wedge (t_2 < y_2 < 0)$. Он будет пространственноподобным, если $(y_1 > t_1 > 0) \wedge (y_2 > t_2 > 0)$, или если $(y_1 < t_1 < 0) \wedge (y_2 < t_2 < 0)$ Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{t_1, t_2, y_1 y_2\}$ будет изотропным, если $t_1 = y_1 \vee t_2 = y_2$. Области значений координат $t_1^2 < y_1^2 \wedge t_2^2 > y_2^2$ и $t_1^2 > y_1^2 \wedge t_2^2 < y_2^2$ следует исключить, потому что в этих областях мировая функция мнима.

Рассмотрим отрезок мировой цепи в пространственно-временной геометрии Бервальда-Моора. Мы рассмотрим три смежные точки P_0, P_1, P_2 этой мировой цепи, описывающей движение свободной частицы. Мировая цепь свободной частицы содержит два смежных вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ которые эквивалентны. Это означает, что

$$\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right| = \left|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right|, \quad \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right) = \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right| \cdot \left|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right| \tag{5.7}$$

где скалярное произведение $\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right)$ имеет вид

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right) = \sigma\left(P_0, P_2\right) - \sigma\left(P_1, P_2\right) - \sigma\left(P_0, P_1\right) \tag{5.8}$$

и

$$\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right| = 2\sigma\left(P_0, P_1\right) \tag{5.9}$$

Уравнения (5.7) описывают как времениподобную, так и пространственноподобную мировые линии.

Используя (5.8), (5.9), можно представить уравнения (5.7) в виде

$$\sigma\left(P_0, P_1\right) = \sigma\left(P_1, P_2\right), \quad \sigma\left(P_0, P_2\right) = 4\sigma\left(P_0, P_1\right) \tag{5.10}$$

Пусть три точки P_0, P_1, P_2 имеют координаты

$$P_0 = \{0,0,0,\}, \quad P_1 = \{t_1, t_2, y_1, y_2\}, \quad P_2 = \{2t_1+\tau_1, 2t_2+\tau_2, 2y_1+\xi_1, 2y_2+\xi_2\} \tag{5.11}$$

Здесь греческие переменные $\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2$ описывают вихляние мировой цепи. Если $\tau_1 = \tau_2 = \xi_1 = \xi_2 = 0$, Мировая цепь не вихляет. Четыре переменные $\tau_1, \tau_2, \xi_1, \xi_2$ должны определяться из двух уравнений (5.10).

В соответствии с (5.5) динамические уравнения (5.10) преобразуются к виду

$$\left((t_1+\tau_1)^2 - (y_1+\xi_1)^2\right)\left((t_2+\tau_2)^2 - (y_2+\xi_2)^2\right) = \left(t_1^2 - y_1^2\right)\left(t_2^2 - y_2^2\right) \tag{5.12}$$

$$\left(\left(t_1+\frac{\tau_1}{2}\right)^2 - \left(y_1+\frac{\xi_1}{2}\right)^2\right)\left(\left(t_2+\frac{\tau_2}{2}\right)^2 - \left(y_2+\frac{\xi_2}{2}\right)^2\right) = \left(t_1^2 - y_1^2\right)\left(t_2^2 - y_2^2\right) \tag{5.13}$$

Введем обозначения

$$f_1\left(\tau_2, \xi_2\right) = \frac{\left(t_1^2 - y_1^2\right)\left(t_2^2 - x_2^2\right)}{(t_2+\tau_2)^2 - (y_2+\xi_2)^2} \tag{5.14}$$

$$f_2\left(\tau_2, \xi_2\right) = \frac{16\left(t_1^2 - y_1^2\right)\left(t_2^2 - y_2^2\right)}{(2t_2+\tau_2)^2 - (2y_2+\xi_2)^2} \tag{5.15}$$

Тогда уравнения (5.12), (5.13) записываются в виде

$$\left((t_1+\tau_1)^2 - (y_1+\xi_1)^2\right) = f_1\left(\tau_2, \xi_2\right) \tag{5.16}$$

$$\left((2t_1+\tau_1)^2 - (2y_1+\xi_1)^2\right) = f_2\left(\tau_2, \xi_2\right) \tag{5.17}$$

где левая часть уравнений не зависит от τ_2, ξ_2.

Решения уравнений (5.16), (5.17) имеют вид

$$\xi_1 = \frac{t_1}{y_1}\tau_1 - \frac{f_2 - f_1 - 3\left(t_1^2 - y_1^2\right)}{2y_1}$$

$$\tau_1 = t_1\left(\frac{f_2 - f_1}{2\left(t_1^2 - y_1^2\right)} - \frac{3}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{y_1^2 f_1}{\left(t_1^2 - y_1^2\right)} - \frac{y_1^2}{4}\left(\frac{f_2 - f_1}{\left(t_1^2 - y_1^2\right)} - 1\right)^2} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\xi_1 \quad = \quad & \frac{t_1}{y_1}\left(t_1\left(\frac{f_2 - f_1}{2\left(t_1^2 - y_1^2\right)} - \frac{3}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{y_1^2 f_1}{\left(t_1^2 - y_1^2\right)} - \frac{y_1^2}{4}\left(\frac{f_2 - f_1}{\left(t_1^2 - y_1^2\right)} - 1\right)^2}\right) \\ & - \frac{f_2 - f_1 - 3\left(t_1^2 - y_1^2\right)}{2y_1}\end{aligned} \tag{5.19}$$

Существенны только вещественные решения. Они имеют место, если и только если

$$F_2(\tau_2,\xi_2) \equiv \frac{f_1(\tau_2,\xi_2)}{(t_1^2-y_1^2)} - \frac{1}{4}\left(\frac{f_2(\tau_2,\xi_2)-f_1(\tau_2,\xi_2)}{(t_1^2-y_1^2)} - 1\right)^2 \geq 0 \tag{5.20}$$

Введем переменные

$$a_1 = \frac{\tau_1}{t_1}, \quad a_2 = \frac{\tau_2}{t_2}, \quad b_1 = \frac{\xi_1}{y_1}, \quad b_2 = \frac{\xi_2}{y_2} \tag{5.21}$$

и разложим (5.20) по степеням a_2, b_2, предполагая, что a_2^2, $b_2^2 \ll 1$. Получаем

$$F_2(\tau_2,\xi_2) = \frac{4y_2^2}{(t_2^2-y_2^2)}\left(\frac{\tau_2}{t_2}\right)\left(\frac{\xi_2}{y_2}\right) + \frac{3t_2^4}{(t_2^2-y_2^2)^2}\left(\frac{\tau_2}{t_2}\right)^2 + \frac{y_2^2(2y_2^2+t_2^2)}{(t_2^2-y_2^2)^2}\left(\frac{\xi_2}{y_2}\right)^2 \tag{5.22}$$

Таким образом, в приближении

$$\frac{\tau_1}{t_1}, \frac{\tau_2}{t_2}, \frac{\xi_1}{y_1}, \frac{\xi_2}{y_2} \ll 1 \tag{5.23}$$

получаем следующий результат. В случае времениподобного вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, когда $t_1^2 > y_1^2 > 0$ и $t_2^2 > y_2^2 > 0$, $F_2(\tau_2,\xi_2) > 0$, если $\xi_2\tau_2 \mathrm{sgn}(t_2y_2) > 0$, и динамические уравнения (5.12), (5.13) имеют много решений, потому что τ_2, ξ_2 суть произвольные параметры, удовлетворяющие неравенствам (5.23). В приближении (5.23) динамические уравнения (5.12), (5.13) имеют вид

$$\xi_1 = \frac{t_1}{y_1}\tau_1 + \frac{\tau_2^2(t_1^2-y_1^2)}{y_1(t_2^2-y_2^2)} \tag{5.24}$$

$$\left(\tau_1 + t_1\frac{\tau_2^2}{(t_2^2-y_2^2)}\right)^2 = \frac{1}{(t_2^2-y_2^2)^2}\left(4y_2(t_2^2-y_2^2)\frac{\tau_2\xi_2}{t_2} + 3t_2^2\tau_2^2 + \xi_2^2(2y_2^2+t_2^2)\right) \tag{5.25}$$

В случае пространственноподобного вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, когда $y_2^2 > t_2^2 > 0$ и $y_1^2 > t_1^2 > 0$, $F_2(\tau_2,\xi_2) > 0$, если $\xi_2\tau_2 \mathrm{sgn}(t_2y_2) < 0$, и динамические уравнения (5.12), (5.13) тоже имеют много решений, потому что τ_2, ξ_2 суть произвольные величины, удовлетворяющие неравенствам (5.23).

Можно видеть, что мировые линии свободных частиц вихляют в пространстве-времени, имеющем геометрию Бервальда-Моора. В реальной геометрии пространства-времени имеются два вида вихляний мировой линии: (1) квантовое вихляние, (2) тахионное вихляние. Квантовое вихляние имеет место для тардионов (частиц, имеющих времениподобную мировую линию). Это вихляние обусловлено элементарной длиной λ_0 дискретной геометрии пространства-времени. Элементарная длина связана с квантовой постоянной $\hbar$ соотношением $\lambda_0^2 = \hbar/bc$, где c есть скорость света, а b есть некоторая универсальная постоянная. Это может интерпретироваться в том смысле, что вихляние мировой линии тардионов связано с квантовыми эффектами. Мировая линия тахиона (частицы, имеющей пространственноподобную мировую линию) вихляет с бесконечной амплитудой. Это вихляние не ограничено квантовой постоянной. Отдельный тахион не может быть обнаружен из-за неограниченного вихляния его мировой линии. Принято считать, что тахионов нет. На самом деле, тахионы существуют, но отдельный тахион обнаружить нельзя. Однако тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационному полю. Тахионный газ является наилучшим кандидатом для темной материи [16].

В пространственно-временной геометрии Бервальда-Моора вихляние мировых линий отличается от квантового вихляния тардионов и от тахионного вихляния тахионов. Это означает, что геометрия Бервальда-Моора едва ли может использоваться как реальная геометрия пространства-времени.

Список литературы

[1] H. Rund, *The Differential Geometry of Finsler Spaces*, Springer-Verlag, 1959. Русс. перевод Х. Рунд, Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. Наука, 1981.

[2] Г.И. Гарасько, *Начала финслеровой геометрии ля физиков*. Москва. ТЕТРУ, 2009.

[3] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928)

[4] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953

[5] J.L.Synge, *Relativity: the General Theory.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1960.

[6] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, *iss. 12, 733-760, (2002)*

[7] Ю.А.Рылов, О возможности описания риманова пространства в терминах конечного интервала. *Изв. ВУЗов Математика* No.3(28), 131-142. (1962)

[8] Yu.A.Rylov, Relative gravitational field and conservation laws in general relativity. *Ann. Phys.(Leipzig)* **12**, *329-353, (1964)*

[9] Yu.A.Rylov, Different representations of Euclidean geometry and their application to the space-time geometry *e-print :0709.2755*

[10] Yu.A.Rylov, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, *2092-2098, (1991).*

[11] Yu. A.Rylov, Multivariance as immanent property of the space-time geometry (submitted to *IJTP,* now can be found: http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/mimst1e.pdf)

[12] J.L.Synge, A characteristic function in Riemannian space and its applications to the solution of geodesic triangles. *Proc. London Math Soc.* **32**,*241 (1932).*

[13] H.S.Ruse, Some theorem in tensor calculus. *Proc.London Math.Soc.* **31,***225 (1930).*

[14] D.G.Pavlov, Philosophical and mathematical reasons for Finsler extensions of Relativity Theory .140 -147 in *Space-Time Structure. Algebra and Geometry Moscow: Lilia-Print 2007,* editors D. G. Pavlov, Gh. Atanasiu, V. Balan

[15] G. I. Garas'ko, D.G.Pavlov, Construction of the Pseudo-Riemannian geometry on the Base of the Berwald-Moor Geometry. 376 - 385.in *Space-Time Structure. Algebra and Geometry Moscow: Lilia-Print 2007,* editors D. G. Pavlov, Gh. Atanasiu, V. Balan

[16] Yu.A. Rylov, Dynamic equations for tachyon gas. Submitted to *Int. J. Theor. Phys* (now can be found in http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/detg2e.pdf)