Формализованная процедура перехода к классическому приближению в применении к дираковской частице

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
119526, Москва, Проспект Вернадского, 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Строится классическая модель S_{Dcl} дираковской частицы S_{D}. S_{D} является динамической системой, описываемой уравнением Дирака. Для исследования S_{D} и построения S_{Dcl} используется новый динамический метод: динамическая расквантизация. Эта релятивистская чисто динамическая процедура не использует принципы квантовой механики. Получившаяся классическая модель S_{Dcl} описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих квантовую постоянную в качестве параметра. Динамические уравнения для S_{Dcl} однозначно определяются динамической системой S_{D}. Динамическая система S_{Dcl} имеет десять степеней свободы и не может быть точечной частицей, потому что она имеет внутреннюю структуру. Оказалось, что внутренние степени свободы описываются нерелятивистски. Обсуждается взаимоотношение между традиционными аксиоматическими методами и динамическими методами исследования квантовых систем. В частности, обсуждаются причины, почему внутренние степени свободы дираковской частицы и нерелятивистский характер их описания не были обнаружены в течение восьмидесяти лет.

1 Введение

В рамках аксиоматического представления квантовой механики не существует формальной процедуры перехода к классическому приближению. Классическое приближение получается из квантового, если мы полагаем, что квантовая постоянная $\hbar = 0$. К сожалению мы не можем получить классическое приближение для шредингеровской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$, полагая $\hbar = 0$ в действии. Это действие имеет вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{S}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{S}}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi \right\} dt d\mathbf{x} \tag{1.1}$$

где $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$ есть однокомпонентная комплексная волновая функция, $\psi^* = \psi^*(t, \mathbf{x})$ есть величина, комплексно сопряженная к ψ, а m есть масса частицы. Действие (1.1) порождает динамическое уравнение

$$i\hbar \partial_0 \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla}^2 \psi. \tag{1.2}$$

4-ток j^k и тензор энергии-импульса T_l^k являются каноническими величинами, ассоциирующимися с действием $\mathcal{A}_{\mathrm{S}}[\psi, \psi^*]$. Они определяются соотношениями

$$j^k = \{\rho, \mathbf{j}\} = \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \psi^*)} \psi^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \psi)} \psi \right) = \left\{ \psi^* \psi, -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi - \boldsymbol{\nabla} \psi^* \cdot \psi \right) \right\} \tag{1.3}$$

$$T_l^k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \psi^*)} \partial_l \psi^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \psi)} \partial_l \psi - \delta_l^k \mathcal{L}, \qquad k, l = 0, 1, 2, 3 \tag{1.4}$$

где $\mathcal{L}$ есть плотность лагранжиана для действия (1.1)

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi \tag{1.5}$$

Если положить $\hbar = 0$ в действии (1.1), описание вырождается. Такое вырождение обусловлено искусственным использованием квантовой постоянной в действии (1.1). Дело в том, что при естественном описании шредигеровской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ действие содержит две независимые постоянные: динамическую постоянную b и квантовую постоянную $\hbar$. Динамическая постоянная b есть просто произвольная постоянная интегрирования, которая должна принимать ненулевое значение. При таком естественном описании квантовая постоянная $\hbar$ описывает квантовые эффекты, и квантовое описание переходит в классическое, если положить $\hbar = 0$.

Естественное описание получается из действия (1.1) с помощью преобразования

$$\psi \to \Psi_b = |\psi| \exp\left(\frac{\hbar}{b} \log \frac{\psi}{|\psi|} \right), \qquad \psi = |\Psi_b| \exp\left(\frac{b}{\hbar} \log \frac{\Psi_b}{|\Psi_b|} \right) \tag{1.6}$$

Естественное описание осуществляется в терминах волновой функции Ψ_b. Действие имеет вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{S}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{S}}[\Psi_b, \Psi_b^*] = \int \left\{ \frac{ib}{2} \left(\Psi_b^* \partial_0 \Psi_b - \partial_0 \Psi_b^* \cdot \Psi_b \right) - \frac{b^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \Psi_b^* \boldsymbol{\nabla} \Psi_b \right.$$

$$-\frac{\hbar^2-b^2}{2m}\left(\nabla\left|\Psi_b\right|\right)^2\Bigg\}dtd\mathbf{x} \tag{1.7}$$

Динамическое уравнение принимает вид

$$ib\partial_0\Psi_b=-\frac{b^2}{2m}\nabla^2\Psi_b-\frac{\hbar^2-b^2}{8m}\left(\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho^2}+2\nabla\frac{\nabla\rho}{\rho}\right)\Psi_b,\qquad \rho\equiv\Psi_b^*\Psi_b \tag{1.8}$$

Вместо (1.3), получаем

$$\rho=\Psi_b^*\Psi_b,\qquad \mathbf{j}=-\frac{ib}{2m}\left(\Psi_b^*\nabla\Psi_b-\nabla\Psi_b^*\cdot\Psi_b\right) \tag{1.9}$$

Подчеркнем. что действия (1.1) и (1.7) описывают одну и ту же динамическую систему с помощью разных зависимых переменных. Действие (1.7) содержит два параметра b и $\hbar$, тогда как действие (1.1) содержит только один параметр $\hbar$.

Описание в терминах Ψ_b является естественным описанием, потому что постоянная $\hbar$ описывает квантовые эффекты, и полагая $\hbar=0$ в действии (1.7), мы получаем действие для статистического ансамбля свободных классических частиц (этот факт доказан ниже в приложении A)

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}}:\qquad \mathcal{A}_{\mathrm{Scl}}\left[\Psi_b,\Psi_b^*\right]=\int\left\{\frac{ib}{2}\left(\Psi_b^*\partial_0\Psi_b-\partial_0\Psi_b^*\cdot\Psi_b\right)-\frac{b^2}{2m}\nabla\Psi_b^*\nabla\Psi_b\right.$$

$$\left.+\frac{b^2}{2m}\left(\nabla\left|\Psi_b\right|\right)^2\right\}dtd\mathbf{x} \tag{1.10}$$

Если отождествить параметры b и $\hbar$ в (1.7) - (1.9), то получим искусственное описание (1.1) - (1.4), где, полагая $\hbar=0$, мы одновременно полагаем $b=0$ и описание вырождается. При искусственном описании динамический член и квантовый член динамического уравнения компенсируются, и динамическое уравнение становится линейным. Это главное достоинство искусственного описания.

Дираковская частица есть динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемая уравнением Дирака. Действие $\mathcal{A}_{\mathrm{D}}$ для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ имеет вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}}:\qquad \mathcal{A}_{\mathrm{D}}[\bar\psi,\psi]=c^2\int(-mc\bar\psi\psi+\frac{i}{2}\hbar\bar\psi\gamma^l\partial_l\psi-\frac{i}{2}\hbar\partial_l\bar\psi\gamma^l\psi-\frac{e}{c}A_l\bar\psi\gamma^l\psi)d^4x \tag{1.11}$$

где m и e суть соответственно масса и заряд дираковской частицы, а c есть скорость света. Здесь ψ есть четырехкомпонентная комплексная волновая функция, ψ^* есть эрмитово сопряженная волновая функция, а $\bar\psi=\psi^*\gamma^0$ есть сопряженная волновая функция. γ^i, $i=0,1,2,3$ суть 4×4 постоянные комплексные матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^l\gamma^k+\gamma^k\gamma^l=2g^{kl}I,\qquad k,l=0,1,2,3. \tag{1.12}$$

где I есть 4×4 единичная матрица, а $g^{kl} = \text{diag}(c^{-2}, -1, -1, -1)$ есть метрический тензор. Величина A_k, $k = 0, 1, 2, 3$ представляет собой электромагнитный потенциал. Действие (1.11) порождает динамическое уравнение для динамической системы $\mathcal{S}_{\text{D}}$, известное как уравнение Дирака

$$\gamma^l \left(-i\hbar\partial_l + \frac{e}{c}A_l \right) \psi + mc\psi = 0 \tag{1.13}$$

и выражения для физических величин: 4-тока j^k частиц и тензора энергии-импульса T_l^k

$$j^k = c^2 \bar{\psi}\gamma^k\psi, \qquad T_l^k = \frac{ic^2}{2} \left(\bar{\psi}\gamma^k\partial_l\psi - \partial_l\bar{\psi} \cdot \gamma^k\psi \right) \tag{1.14}$$

Описание дираковской частицы также является искусственным в том смысле, что оно вырождается при $\hbar = 0$. К сожалению, в случае дираковской частицы $\mathcal{S}_{\text{D}}$ преобразование вида (1.6) не известно, и мы вынуждены искать другой подход к получению классического приближения. Мы будем использовать динамические методы исследования. Это означает исследование динамической системы $\mathcal{S}_{\text{D}}$ просто как динамической системы без использования квантовых принципов. Такой подход позволяет получить классическое приближение дираковской частицы $\mathcal{S}_{\text{D}}$ с помощью динамической процедуры, которая не содержит ссылки на квантовую постоянную $\hbar$. Эта процедура (динамическая расквантизация) нечуствительна к виду использования квантовой постоянной (естественному или искусственному). Динамическая расквантизация есть частный случай динамических методов, применяемых для исследования квантовых систем. Продемонстрируем применение динамических методов на примере шредингеровской частицы $\mathcal{S}_{\text{S}}$.

2 Динамические методы исследования

Используется формализм более развитый, чем традиционный формализм квантовой механики. Этот формализм предполагает, что вся существенная информация о квантовой динамической системе содержится в самой динамической системе. Такие специфические понятия как волновая функция и принципы квантовой механики оказываются только средствами описания. Волновая функция как средство описания может быть применена как к квантовой, так и к классической динамическим системам. Однако, квантовые принципы могут быть применены только к квантовым динамическим системам, потому что они содержат некоторые ограничения, которые не выполняются для классических систем. Квантовые системы и классические системы различаются динамически (дополнительными членами в действии), а не способом описания. Это утверждение становится очевидным, когда обе системы описываются в одних и тех же терминах. Например, квантовая система и соответствующая классическая система могут описываться в терминах волновой функции, или обе системы могут описываться в терминах положения частицы и ее импульса.

Прогресс в развитии математического формализма имеет *математическую основу: интегрирование динамических уравнений.* Это чисто математическое достижение имеет физические последствия. Оказывается, что квантовая механика может рассматриваться как статистическое описание случайно движущихся частиц. Подчеркнем, что исследуются хорошо известные динамические системы, и все новые результаты являются *следствиями более развитых методов исследования.*

Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ полностью определяется динамическими уравнениями (1.2) и выражениями (1.3), (1.4) для 4-тока и тензора энергии-импульса. Только связь между частицей и волновой функцией не описывается этими соотношениями. Эта связь описывается с помощью соотношений

$$\langle F(\mathbf{x},\mathbf{p})\rangle = B\int \mathrm{Re}\left\{\psi^* F(\mathbf{x},\hat{\mathbf{p}})\,\psi\right\}d\mathbf{x},\qquad \hat{\mathbf{p}}=-i\hbar\boldsymbol{\nabla},\qquad B=\left(\int\psi^*\psi d\mathbf{x}\right)^{-1} \tag{2.1}$$

которые определяют среднее значение $\langle F(\mathbf{x},\mathbf{p})\rangle$ от любой функции $F(\mathbf{x},\mathbf{p})$ координат $\mathbf{x}$ частицы и ее импульса $\mathbf{p}$. Применение правил (2.1) ограничено некоторыми условиями. Они требуют, чтобы динамические уравнения были линейными и волновая функция была бы вектором гильбертова пространства состояний. Мы будем называть квантовыми принципами соотношения (2.1) вместе с налагаемыми на них ограничениями, потому что фон Нейманн показал [1], что квантовая механика может быть выведена из соотношений типа (2.1), при условии, что они верны для всех наблюдаемых величин. Таким образом, интерпретация волновой функции осуществляется на основе квантовых принципов, которые представляют собой нечто внешнее по отношению к динамической системе $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$.

На самом деле, квантовые принципы не являются необходимыми для интерпретации волновой функции и свойств $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$. Достаточно сделать надлежащую замену переменных и описывать динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ в терминах координат $\mathbf{x}$ частицы. Такое описание не содержит таинственной волновой функции, смысл которой темен, и тогда квантовые принципы (2.1) не нужны для ее интерпретации. Шредингеровская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ является частным случаем обобщенной шредингеровской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{gS}}$, которая представляет собой динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{gS}}$, описываемую действием

$$\mathcal{A}_{\mathrm{gS}}[\psi,\psi^*]=\int\left\{\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi+\frac{\hbar^2}{8m}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2\rho\right\}\mathrm{d}^4x \tag{2.2}$$

$$\rho\equiv\psi^*\psi,\qquad \mathbf{s}\equiv\frac{\psi^*\boldsymbol{\sigma}\psi}{\rho},\qquad \boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_\alpha\},\qquad \alpha=1,2,3, \tag{2.3}$$

Здесь $\psi=\binom{\psi_1}{\psi_2}$, $\psi^*=(\psi_1^*,\psi_2^*)$ является двухкомпонентной волновой функцией, а σ_α суть матрицы Паули. 4-ток определяется соотношением (1.3) с двухкомпонентной волновой функцией ψ. В случае, когда составляющие ψ_1 и ψ_2 линейно зависимы (например, $\psi=\binom{\psi_1}{0}$), средний вектор спина $\mathbf{s}=$const, и последний член в действии (2.2) обращается в нуль. В этом случае динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{gS}}$ превращается в динамическую систему (1.1).

Можно показать, что динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{gS}}$ является другим представлением динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, т.е. действие для $\mathcal{S}_{\mathrm{gS}}$ может быть получено из действия для динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ с помощью надлежащей замены переменных [2].

Динамическая система $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ представляет собой статистический ансамбль стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Он описывается действием

$$\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\mathbf{x},\mathbf{u}_{\mathrm{st}}] = \int \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}} \right\} dt d\boldsymbol{\xi} \qquad (2.4)$$

где $\mathbf{u}_{\mathrm{st}} = \mathbf{u}_{\mathrm{st}}(t,\mathbf{x})$ есть векторная функция аргументов $t,\mathbf{x}$ (а не $t,\boldsymbol{\xi}$), и $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ есть 3-векторная функция независимых переменных $t, \boldsymbol{\xi} = \{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$. Динамические уравнения для динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ получаются как результат вариации действия (2.4) по зависимым динамическим переменным $\mathbf{x}, \mathbf{u}_{\mathrm{st}}$. В действии (2.4) переменные $\boldsymbol{\xi}$ маркируют стохастические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, составляющие статистический ансамбль. Оператор $\boldsymbol{\nabla}$ определен в пространстве координат $\mathbf{x}$ соотношением

$$\boldsymbol{\nabla} = \{\partial_1,\partial_2,\partial_3\} \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}, \qquad (2.5)$$

3-вектор $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ описывает среднее значение стохастической составляющей движения частицы, которая рассматривается как функция переменных $t,\mathbf{x}$. Первый член $\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2$ описывает энергию регулярной составляющей скорости стохастической частицы. Второй член $m\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2/2$ описывает энергию случайной составляющей скорости. Составляющие $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ полной скорости связаны с различными степенями свободы, и их энергии следует сложить в выражении для плотности функции Лагранжа. Последний член $-\hbar\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}/2$ описывает взаимодействие между скоростью $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ регулярной составляющей и скоростью $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ случайной составляющей.

Действие (2.4) является суммой (интегралом) действий для независимых стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, маркируемых параметрами $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$. Любая стохастическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является стохастической частицей, состояние которой описывается ее координатами $\mathbf{x}(t)$. Действие для стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ получается из действия (2.4) для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Оно имеет вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{st}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{st}}}[\mathbf{x},\mathbf{u}_{\mathrm{st}}] = \int \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}} \right\} dt \qquad (2.6)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. На самом деле, действие (2.6) не является хорошо определенным математически, если $\hbar \neq 0$. Оно является лишь символическим, потому что оператор (2.5) определен в окрестности точки $\mathbf{x}$, а не в самой точке $\mathbf{x}$. В результате не существует динамических уравнений для стохастической системы

$\mathcal{S}_{\rm st}$, если $\hbar \neq 0$. Этот факт согласуется со стохастичностью системы $\mathcal{S}_{\rm st}$. По определению, система $\mathcal{S}_{\rm st}$ считается стохастической, если для $\mathcal{S}_{\rm st}$ не существует динамических уравнений. Если отключить взаимодействие со стохастическим агентом, положив $\hbar = 0$ в действии (2.6) (или отбросив два последних члена), мы получим хорошо определенное действие для свободной нерелятивистской детерминированной частицы $\mathcal{S}_{\rm d}$

$$\mathcal{S}_{\rm d}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm d}}[\mathbf{x}, \mathbf{u}_{\rm st}] = \int \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}_{\rm st}^2 \right\} dt, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \tag{2.7}$$

Шредингеровская частица $\mathcal{S}_{\rm S}$ (1.1) является частным случаем динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ (2.4), тогда как обобщенная шредингеровская частица $\mathcal{S}_{\rm gS}$ (2.2) совпадает с динамической системой $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ (2.4). Действие (2.2) может быть получено математически из действия (2.4) с помощью надлежащей замены переменных (см. приложение A).

Интерпретация динамической системы (2.4) очень проста, но динамические уравнения для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ довольно сложны. Они имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}}{\delta \mathbf{x}} = -m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{m}{2}\mathbf{u}_{\rm st}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\rm st}\right) = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}}{\delta \mathbf{u}_{\rm st}} = m\mathbf{u}_{\rm st}\rho + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho = 0, \tag{2.9}$$

где ρ является функцией производных $\mathbf{x}$ по $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, определенной соотношением

$$\rho = \left[\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}\right]^{-1} = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \tag{2.10}$$

Разрешая соотношение (2.9) относительно $\mathbf{u}_{\rm st}$ в виде

$$\mathbf{u}_{\rm st} = -\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho, \tag{2.11}$$

и исключая $\mathbf{u}_{\rm st}$ и (з2.8), получаем

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}U(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho), \qquad U(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho) = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} - 2\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\rho}{\rho}\right) \tag{2.12}$$

Таким образом, динамические уравнения, порожденные действием (2.4), описывают регулярную составляющую двиажения частицы $\mathcal{S}_{\rm st}$, как движение в очень сложном потенциальном поле U, зависящем от распределения всех частиц в статистическом ансамбле $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$. Разумеется, траектории $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ не описывают движение отдельных стохастических частиц. Они описывают только среднестатистическое движение стохастических частиц. Положение напоминает ситуацию в газовой динамике. Уравнения газовой динамики описывают движение "частиц газа", которые содержат много молеул. Движение молекул газа случайно и хаотично. Оно не может описываться уравнениями газовой динамики, которые описывают только регулярную составляющую движения молекул.

Заметим, что член $\frac{m}{2}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2$ в (2.6) выглядит как кинетическая энергия, однако, в соответствии с (2.11) он не зависит от временно́й производной $\dot{\mathbf{x}}$, и в динамических уравнениях он действует как потенциальная энергия.

Статистический ансамбль (2.4) может рассматриваться как некая жидкость. Мы можем говорить о течении статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, имея в виду, что динамическое уравнение (2.12) для динамической системы $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ может быть интерпретировано, как гидродинамическое уравнение для некоторой "квантовой" жидкости.

Наоборот, динамические уравнения, порожденные действием (1.1), линейны и довольно просты, тогда как их интерпретация очень сложна, потому что она использует принципы квантовой механики (2.1). Таким образом, описание с помощью действия (2.4) допускает простую интерпретацию, но динамические уравнения очень сложны для решения.

Поскольку действие (1.1) является частным случаем действия (2.4), естественно использовать динамическую систему $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ в качестве исходной точки для постановки проблемы и для интерпретации полученных результатов, тогда как динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ будет использоваться только для решения динамических уравнений, которые имеют простой вид в терминах волновой функции. Заметим, что в соответствии с (A.36) действие (2.4) преобразуется к виду (1.7), содержащему два параметра: произвольную динамическую постоянную b и квантовую постоянную $\hbar$. Это естественная форма действия, порождающая нелинейное динамическое уравнение, если $b \neq \hbar$. Искусственная форма (1.1) действия получается после искусственного отождествления динамической постоянной с квантовой.

Почему статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ не использовался раньше как исходная точка? Почему проблема стохастического движения микрочастиц формулировалась в терминах таинственной волновой функции? Ответ очень прост. Связь между двумя различными видами действия (1.1) и (2.4) для шредингеровской частицы *не была известна в течение долгого времени.*

Известно, что уравнение Шредингера может быть записано в гидродинамическом виде [3]. Д. Бом [4] использовал это обстоятельство для гидродинамической интерпретации квантовой механики. Однако, это была только интерпретация квантовых принципов в терминах гидродинамики. Ему не удалось исключить квантовые принципы и волновую функцию из оснований квантовой механики, и волновая функция оставалась таинственным объектом – вектором гильбертова пространства. Ему не удалось связать волновую функцию с гидродинамическими переменными: плотностью ρ и скоростью $\mathbf{v}$. Точнее, связь между волновой функцией и гидродинамическими переменными ρ, $\mathbf{v}$ была установлена, но это была односторонняя связь. В случае потенциального течения гидродинамические переменные можно было выразить через волновую функцию ψ, но этого нельзя было сделать для завихренного течения. Таким образом, можно было перейти от описания в терминах волновой функции к описанию в терминах ρ, $\mathbf{v}$, но нельзя было перейти от гидродинамческого описания в терминах ρ, $\mathbf{v}$ к описанию в терминах ψ, потому что течение, вообще говоря завихренное, и динамическая система (2.4) не может быть описана в терминах однокомпонентной волновой функции.

Представим волновую функцию в виде.

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\varphi}, \tag{2.13}$$

подставим ее в уравнение Шредингера (1.2) разделим вещественную и мнимую части уравнения. Мы получим два вещественных уравнения

$$\partial_0 \ln \rho = -\frac{\hbar}{m} \left(\nabla^2 \varphi + \nabla \ln \rho \nabla \varphi \right) \tag{2.14}$$

$$\partial_0 \varphi + \frac{\hbar}{2m} \left(\nabla \varphi \right)^2 = \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{1}{2} \nabla^2 \ln \rho + \left(\frac{1}{2} \nabla \ln \rho \right)^2 \right) \tag{2.15}$$

Чтобы получить гидродинамические уравнения, нужно взять градиент от уравнения (2.15) и ввести скорость $\mathbf{v} = \{v^1, v^2, v^3\}$ с помощью соотношения

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \boldsymbol{\nabla} \varphi \tag{2.16}$$

Получаем

$$\partial_0 \rho + \partial_\alpha \left(\rho v^\alpha \right) = 0, \qquad \partial_0 v^\alpha + v^\beta \partial_\beta v^\alpha = -\frac{1}{\rho} \partial_\beta P^{\alpha\beta}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{2.17}$$

где $P^{\alpha\beta}$ есть тензор натяжений

$$P^{\alpha\beta} = \frac{\hbar^2}{4m^2} \left(\frac{\left(\partial_\alpha \rho \right) \partial_\beta \rho}{\rho} - \partial_\alpha \partial_\beta \rho \right) \tag{2.18}$$

Гидродинамические уравнения (2.17) получаются в результате дифференцирования уравнения (1.2), записанного в терминах волновой функции. Это означает, что для перехода от гидродинамических уравнений (2.17) к уравнениям, записанным в терминах волновой функции, нужно интегрировать гидродинамические уравнения (2.17). Кроме того в случае потенциального течения волновая функция представляется в терминах ρ и гидродинамического потенциала φ. То же самое верно в общем случае, но число гидродинамических потенциалов больше одного, и необходимо ввести дополнительные гидродинамические потенциалы (потенциалы Клебша).

Проблема интегрирования гидродинамических уравнений – довольно сложная проблема, которая было решена только в конце восьмидесятых годов. [5]. Чтобы решить эту проблему, понадобилось развить особый якобианный формализм [2], который использовался уже Клебшем [6, 7].

Как только гидродинамические уравнения для идеальной жидкости были проинтегрированы, стало ясно, что волновая функция является просто способом описания идеальной жидкости. Волновая функция ψ перестала быть таинственным вектором гильбертова пространства, смысл которого выявляется только через квантовые принципы. Теперь стало возможным установить цепь преобразований динамических переменных, которые превращают действие (2.4) в действие (2.2) (детали смотри в приложении A). В результате действие (2.4) может использоваться как исходная точка для описания квантовой шредингеровской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$. При таком описании квантовые принципы (2.1) не нужны, потому что они являются только инструментом для интерпретации волновой функции.

Статистический ансамбль (2.4) как исходная точка квантового описания имеет ряд преимуществ перед действием (1.1):

1. Статистический ансамбль (2.4) является очень прозрачным построением, основанном на простой физической идее, что квантовая частица – это стохастически движущаяся частица

2. Он не использует квантовых принципов, которые являются нерелятивистскими и не могут быть надлежащим образом распространены на релятивистский случай.

3. Статистический ансамбль (2.4) является более общим построением, потому что действие (1.1) является частным случаем действия (2.4)

4. Описание в терминах динамической системы (2.4) является статистическим описанием. Как всякое статистическое описание, оно содержит два объекта: индивидуальную стохастическую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и среднестатистическую частицу $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Соответственно существуют два вида измерений: индивидуальное измерение (S-измерение) производимое на индивидуальной частицей $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и массовое измерение (M-измерение), производимое над среднестатистической частицей $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Эти измерения обладают различными свойствами, и их отождествление недопустимо.

Сложность динамических уравнений (2.12) – единственный недостаток статистического описания (2.4).

Подчеркнем, что переход от действия (2.4) как исходной точки к действию (1.1) мотивирован исключительно математически. Для обоснования статистического ансамбля (2.4) как исходной точки квантового описания не использовалось никаких дополнительных физических аргументов.

Статистическое описание, основанное на действии (2.4) приводит к утверждению, что волновая функция описывает состояние статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, а не состояние отдельной квантовой частицы. Обсуждение вопроса, какой объект описывается волновой функцией, имеет долгую историю. Некоторые исследователи [8] полагают, что волновая функция описывает состояние отдельной квантовой частицы, тогда как другие [9, 10] полагают, что волновая функция описывает состояние статистического ансамбля. Имеется длинный список различных мнений по этому вопросу, но мы не приводим его, потому что эта проблема не является вопросом веры. Она может и должна быть решена на основе математического формализма квантовой механики.

Вопрос ставится следующим образом. Какую динамическую систему описывает действие (1.1)? Отдельную квантовую частицу или статистический ансамбль отдельных частиц? Перейдем к пределу $\hbar \to 0$. Тогда действие (1.1) будет описывать классическую динамическую систему $\mathcal{S}_{\text{Scl}}$. Если динамическая система $\mathcal{S}_{\text{Scl}}$ является отдельной классической частицей, то волновая функция описывает состояние отдельной частицы. Если динамическая система $\mathcal{S}_{\text{cl}}$ является статистическим ансамблем классических частиц, то волновая функция описывает состояние статистического ансамбля отдельных частиц.

Полагая $\hbar = 0$ в (1.7), (1.8), получаем

$$\mathcal{S}_{\text{Scl}}: \qquad \mathcal{A}_{\text{Scl}}\left[\Psi_b, \Psi_b^*\right] = \int \left\{ \frac{ib}{2}\left(\Psi_b^* \partial_0 \Psi_b - \partial_0 \Psi_b^* \cdot \Psi_b\right) - \frac{b^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \Psi_b^* \boldsymbol{\nabla} \Psi_b + \frac{b^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}\left|\Psi_b\right|\right)^2 \right\} dt d\mathbf{x} \tag{2.19}$$

$$ib\partial_0 \Psi_b = -\frac{b^2}{2m} \boldsymbol{\nabla}^2 \Psi_b + \frac{b^2}{8m}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} + 2\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\right)\Psi_b, \qquad \rho \equiv \Psi_b^* \Psi_b \tag{2.20}$$

Действие (2.19) описывает статистический ансамбль свободных классических частиц, а не отдельную частицу. Действие (2.19) не может описывать отдельную классическую частицу, потому что динамическая система (2.19) имеет бесконечное число степеней свободы. Поскольку описание (2.19) в терминах волновой функции Ψ_b является пределом $\hbar \to 0$ описания в терминах волновой функции ψ, волновая функция ψ в (1.1) не может описывать отдельную квантовую частицу. Таким образом, *предположение, что волновая функция описывает состояние отдельной частицы не совместимо с формализмом квантовой механики.*

В соответствии с копенгагенской интерпретацией квантовой механики волновая функция ψ описывает состояние отдельной квантовой частицы, тогда как состояние классической частицы описывается ее положением $\mathbf{x}$ и ее импульсом $\mathbf{p}$. Предполагается, что волновая функция является специфической квантовой величиной, которая не имеет классического аналога. В соответствии с таким подходом нельзя перейти к пределу $\hbar \to 0$ в действии (1.1), потому что действие обращается в нуль и описание вырождается.

Преобразование (1.6) изменяет только масштаб фазы волновой функции $\ln(\psi/|\psi|)$, и это изменение может быть очень слабым. Волновая функция Ψ_b является правильной волновой функцией, она может быть использована, в частности, для расчета средних значений с помощью соотношения (2.1). Этот расчет может производиться для любого значения постоянной b. При различных значениях параметра b волновая функция Ψ_b может описывать одно и то же состояние системы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$, потому что состояние динамической системы не определяет волновую функцию однозначно. Одно и то же состояние системы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ может описываться различными волновыми функциями. С точки зрения статистического описания (2.4) волновая функция определена неоднозначно, потому что она построена из гидродинамических потенциалов, т.е. она является результатом интегрирования однозначно определенной скорости $\mathbf{v}$. Параметр b в преобразовании (2.1) является постоянной интегрирования.

Можно положить $b = \hbar$ в соотношениях (2.19), (2.20) и получить описание "классической частицы" в виде действия, содержащего квантовую постоянную.

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{Scl}}[\psi,\psi^*] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}|\psi|\right)^2 \right\} dt d\mathbf{x} \tag{2.21}$$

$$i\hbar\partial_0\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi + \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} + 2\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\right)\psi, \qquad \rho \equiv \psi^*\psi \tag{2.22}$$

Тот же самый результат может быть получен из (2.19), (2.20) с помощью преобразования, обратного к преобразованию (1.6). Формально действие (2.21) отличается от действия (1.1) последним членом, который описывает отсутствие квантовых эффектов. Квантовая постоянная в двух первых членах не имеет никакого отношения к квантовым эффектам. Зависимость от $\hbar$ обусловлена специальным выбором произвольной постоянной b.

Действие (2.21) описывает динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ на "квантовом языке", т.е. в терминах волновой функции. Действие

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]}[\mathbf{x}] = \int \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 dt d\boldsymbol{\xi} \tag{2.23}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$, описывает динамическую систему на классическом языке, т.е. в терминах классических переменных $\mathbf{x},\mathbf{p}$. Точно так же действие (1.1) описывает динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{S}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ на квантовом языке, тогда как действие (2.4) описывает ту же самую динамическую систему на классическом языке. Естественно, что квантовая система $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ проще описывается на квантовом языке, тогда как классическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ проще описывается на классическом языке. Однако, нет причины для утверждения, что квантовая система должна описываться на квантовом языке (т.е. в терминах волновой функции).

Два разных описания классической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$ могут быть использованы для интерпретации правила (2.1) и для интерпретации принципа соответствия. Полученные результаты могут быть приложены к квантовой системе $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$, потому что различие между динамическими системами $\mathcal{S}_{\mathrm{S}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$, описываемыми соответственно действиями (1.1) и (2.21), проявляется только в дополнительном нелинейном члене в динамическом уравнении. Возможность описания систем $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}=\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}}=\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ на обоих языках (классическом и квантовом) закрывает дверь перед копенгагенской интерпретацией, где предполагается, что волновая функция описывает отдельную частицу. Таким образом, *нет ни повода, ни извинения для использования копенгагенской интерпретации.*

Математический формализм квантовой механики имеет дело с непрерывными динамическими системами: шредингеровская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$, дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, и т.д. С точки зрения математического формализма не имеет значения, является ли $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ индивидуальной частицей или статистическим ансамблем частиц (среднестатистической частицей). Копенгагенская интерпретация встречает трудности, когда пытается проверить предсказания математического формализма в экспериментах с индивидуальной частицей. Например, существует проблема механизма редукции волновой функции в индивидуальном эксперименте. Другая проблема касается двух-щелевого эксперимента. Как отдельная частица проходит одновременно через две щели? Такие проблемы интерпретации квантовой механики не являются надуманными. Физические журналы публикуют дискуссии, посвященные проблемам интерпретации квантовой механики. Например, такая дискуссия была объявлена в 2002 году журналом Успехи Физических Наук. Эти проблемы не могут быть решены в рамках копенгагенской интерпретации, которая не делает различия между индивидуальной частицей $\mathcal{S}$ и среднестатистической частицей $\langle\mathcal{S}\rangle$. Смешение двух разных объектов, обладающих разными свойствами порождает трудности и парадоксы. Волновая функция не описывает состояние индивидуальной частицы $\mathcal{S}$, и бессмысленно спрашивать, как меняется состояние индивидуальной частицы в отдельном эксперименте (S-измерение). При массовом измерении (M-измерение) мы получаем распределение $F\left(R'\right)$ измеряемой величины $\mathcal{R}$, а не отдельное значение R' измеряемой величины. В подобной ситуации бессмысленно спрашивать, как полученный результат R' повлиял на состояние статистического ансамбля. Наконец, можно определить третий тип измерения (SM-измерение): массовое измерение величины $\mathcal{R}$ приводящее к определенному значению R' измеряемой величины $\mathcal{R}$. SM-измерение является M-измерением, сопровождаемым селекцией тех частиц, для которых результат S-измерения равен R'. Объединяя все частицы с измеренным значением R' в один статистический ансамбль $\mathcal{E}_{R'}$, мы можем поставить вопрос о волновой функции статистического ансамбля $\mathcal{E}_{R'}$. Разумеется, волновая функция $\psi_{R'}$ ансамбля $\mathcal{E}_{R'}$ не совпадает, вообще говоря, с начальной волновой функцией ψ, и это изменение волновой функции рассматривается как редукция волновой функции. Причина такой редукции совершенно ясна. Это селекция, которая производится в статистическом ансамбле, чтобы получить одно и то же значение R' измеряемой величины для всех частиц статистического ансамбля. Таким образом, проблема редукции обусловлена смешением понятий индивидуальной частицы $\mathcal{S}$ и среднестатистической частицы $\langle\mathcal{S}\rangle$, возникающим при копенгагенской интерпретации.

Что касается частицы, проходящей одновременно через две щели, это естественное свойство среднестатистического объекта. Это свойство является чисто статистическим, и оно не имеет ничего общего с квантовыми свойствами. Индивидуальная частица может пролетать либо через одну щель, либо через другую, тогда как среднестатистическая частица может проходить через обе щели сразу. (Сравни, отдельный человек или мужчина, или женщина, тогда как среднестатистический человек – гермафродит (полумужчина- полуженщина), и здесь нет никаких квантовых свойств.)

3 Динамическая расквантизация

Квантовый язык, т.е. описание содержащее квантовую постоянную $\hbar$, может использоваться для описания классических динамических систем, потому что квантовая постоянная $\hbar$ может использоваться вместо произвольной динамической постоянной b. Замена динамической постоянной b квантовой постоянной производится для того,чтобы сделать динамические уравнения линейными. Например, в действии (1.7) квантовая постоянная $\hbar$ используется естественно, т.е. в том смысле, что полагая $\hbar = 0$, мы подавляем квантовые эффекты. В действии (1.1) для той же самой динамической системы квантовая постоянная $\hbar$ используется искусственно в том смысле что, полагая $\hbar = 0$, мы не подавляем квантовых эффектов. Более того, полагая $\hbar = 0$, мы разрушаем всякое описание. Однако, действие (1.1) порождает линейное динамическое уравнение, и это обстоятельство является причиной искусственного отождествления $b = \hbar$, когда *динамическая* постоянная b отождествляется с *квантовой* постоянной $\hbar$.

Такое искусственное отождествление может производиться в других квантовых системах (например, в $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$), и мы не можем быть уверены, что, полагая $\hbar = 0$, мы подавляем квантовые эффекты. Кроме того мы не можем быть уверены, что используя преобразование типа (1.6), мы можем можем отделить квантовые члены от динамических и статистических.

Нужна более эффективная динамическая процедура, которая могла бы подавить стохастические члены. Сравним динамические уравнения (2.12) для $\mathcal{S}_{\mathrm{S}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, записанные в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho\right), \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \qquad U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho\right) = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho^2} - 2\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\rho}{\rho}\right) \tag{3.1}$$

с динамическими уравнениями для $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$, которые имеют вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} \tag{3.2}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right)$. Динамические уравнения (3.1) являются дифференциальными уравнениями в частных производных, потому что ρ определяется соотношением (2.10), содержащим производные по ξ_α, $\alpha = 1, 2, 3$, тогда как динамические уравнения (3.2) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Уравнения (3.2) содержат производные только в одном направлении в пространстве независимых переменных $\{t, \boldsymbol{\xi}\}$, тогда как уравнения (3.1) содержат производные в различных направлениях пространства независимых переменных $\{t, \boldsymbol{\xi}\}$. Это свойство сохраняется при любой замене независимых динамических переменных, и, в частности, при замене $\{t, \boldsymbol{\xi}\} \to \{t, \mathbf{x}\}$. Если система уравнений в частных производных содержит производные только в одном направлении пространства независимых переменных, эта система может быть приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью надлежащей замены переменных.

Обычно классическая частица (например, классическая шредингеровская частица) обладает двумя свойствами: (1) она не содержит квантовой постоянной $\hbar$, (2) она содержит конечное число степеней свободы. Можно представить себе такую динамическую систему, которая содержит квантовую постоянную $\hbar$ и имеет конечное число степеней свободы. Является ли такая динамическая система классической? Мы полагаем, что такую динамическую систему следует классифицировать как классическую, потому что это детерминированная динамическая система, а не стохастическая. Что касается зависимости от квантовой постоянной $\hbar$, то она может, вообще говоря, описывать не только стохастические эффекты. Квантовая постоянная $\hbar$ является атрибутом пространства-времени [11], и она в принципе может появиться как параметр и в детерминированных классических системах, а не только в стохастических системах. Кроме того динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{f}}$ с конечным числом степеней свободы проще для исследования, чем непрерывная динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$, имеющая бесконечное число степеней свободы, потому что динамические уравнения для системы $\mathcal{S}_{\mathrm{f}}$ являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, тогда как динамические уравнения для системы $\mathcal{S}_{\mathrm{c}}$ являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Переход к классическому приближению как средству исследования квантовой системы, которая является непрерывной, оправдан лишь тогда, когда классическая система является динамической системой $\mathcal{S}_{\mathrm{f}}$.

Если мы желаем подавить квантовые эффекты, следует привести систему дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы сделать это следует спроектировать производные в пространстве независимых переменных на некоторое направление. Тогда система уравнений будет содержать производные только в одном направлении и, следовательно, она может быть приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. На какое направление следует проектировать производные в системе (3.1), чтобы получить систему (3.2)?

Такое направление описывается 4-током $j^k = \{\rho, \mathbf{j}\} = \left\{j^k\right\}$, $k = 0, 1, 2, 3$ в пространстве-времени. Проектирование следует осуществить в пространстве независимых переменных $\{t, \mathbf{x}\}$, т.е. в пространстве-времени. Удобно выбрать зависимые переменные таким образом, чтобы 4-ток j^k был одной из зависимых переменных. Возьмем действие (А.22) для динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\varphi, \boldsymbol{\xi}, j\right] = \int \left\{ \frac{m}{2}\frac{j^{\alpha} j^{\alpha}}{\rho} - b j^{k}\left(\partial_{k}\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial_{k}\xi_{\alpha}\right) - \frac{\hbar^{2}}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^{2}}{\rho} \right\} d^{4}x, \qquad (3.3)$$

где в соответствии с (А.15) и (А.19)

$$j^{k} = \{\rho, \mathbf{j}\} = \left\{\rho, \frac{b\rho}{m}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right)\right\} \qquad (3.4)$$

и $g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть произвольные функции аргумента $\boldsymbol{\xi}$.

Второй член в действии (3.3) содержит производные только в направлении 4-вектора j^{k}. В последнем члене действия (3.3) производные должны быть спроектированы на вектор j^{k}. Осуществим замену

$$\partial_{l} \rightarrow \partial_{||l} = \frac{j_{l} j^{k}}{j_{s} j^{s}}\partial_{k}, \qquad l = 0, 1, 2, 3 \qquad (3.5)$$

в действии (3.3). Получаем

$$\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^{2}}{\rho} = \frac{\left(\partial_{\alpha}\rho\right)\left(\partial_{\alpha}\rho\right)}{\rho} \rightarrow \frac{j_{\alpha} j_{\alpha}\left(j^{i}\partial_{i}\rho\right)^{2}}{\rho\left(j^{s} j_{s}\right)^{2}} \qquad (3.6)$$

$$j_{\alpha} j_{\alpha} = \mathbf{j}^{2} = \rho^{2}\mathbf{v}^{2}, \qquad j^{s} j_{s} = c^{2}\rho^{2} - \rho^{2}\mathbf{v}^{2}$$

В нерелятивистском приближении, когда скорость $|\mathbf{v}| \ll c$, получаем следующую оценку

$$\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^{2}}{\rho} \approx \frac{\mathbf{v}^{2}\left(j^{i}\partial_{i}\rho\right)^{2}}{c^{4}\rho^{3}} \qquad (3.7)$$

В нерелятивистском приближении, когда $c \rightarrow \infty$, последним членом в действии (3.3) после замены (3.5) следует пренебречь. Таким образом, в случае шредингеровской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ замена (3.5) приводит к подавлению квантовых эффектов.

Условимся называть процедуру (3.5) динамической расквантизацией, потому что она преобразует шредингеровскую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{S}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ в классическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{Scl}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$. Динамическая расквантизация является релятивистской динамической процедурой. Она не содержит ссылки не квантовую постоянную и подавляет любую стохастичность, независимо от ее природы. Далее мы будем использовать динамическую расквантизацию для подавления стохастичности в квантовой системе.

Строго говоря, динамическая расквантизация применяется к динамическим уравнениям. Однако, в многих случаях применение динамической расквантизации к действию приводит к тому же результату, что и применение ее к динамическим уравнениям.

4 Классическое приближение дираковской частицы

Для перехода к классическому приближению достаточно осуществить динамическую расквантизацию в уравнении Дирака (1.13). Используя выражение (1.14) для 4-тока j^k, сделаем это прямо в (1.13). Получаем

$$-i\hbar\frac{\psi^*\gamma^0\gamma_l\psi}{(\psi^*\gamma^0\gamma^s\psi)(\psi^*\gamma^0\gamma_s\psi)}\left(\psi^*\gamma^0\gamma^k\psi\right)\gamma^l\partial_k\psi+\frac{e}{c}A_l\gamma^l\psi+mc\psi=0 \tag{4.1}$$

ли после преобразований

$$-i\hbar\frac{d}{d\tau}\psi+\frac{e}{c}A_l\frac{j_k}{\sqrt{j^sj_s}}\gamma^k\gamma^l\psi+mc\frac{j_k}{\sqrt{j^sj_s}}\gamma^k\psi=0,\qquad \frac{d}{d\tau}\equiv\frac{j^k}{\sqrt{j^sj_s}}\partial_k \tag{4.2}$$

где j^k определен через волновую функцию соотношением ψ (1.14).

Формально уравнения (4.2) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений для многокомпонентной зависимой переменной ψ, рассматриваемой как функция независимой переменной τ. К сожалению, интерпретация уравнений (4.2) трудна. Более удобно использовать гидродинамические переменные, где составляющие 4-тока j^k являются зависимыми переменными. Преобразование к гидродинамическим переменным проще осуществить в действии (1.11).

При преобразовании действия (1.11), используется математический формализм [12, 13], где волновая функция ψ рассматривается как функция гиперкомплексных чисел γ и координат x. В этом случае физические величины получаются с помощью свертывания выражений $\psi^*O\psi$ с делителем нуля. Такой формализм позволяет работать без задания представления γ-матриц.

Используя обозначения

$$\gamma_5=c\gamma^{0123}\equiv c\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\}=\{-i\gamma^2\gamma^3,-i\gamma^3\gamma^1,-i\gamma^1\gamma^2\} \tag{4.4}$$

делаем замену переменных

$$\psi=Ae^{i\varphi+\frac{1}{2}\gamma_5\kappa}\exp\left(-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}\right)\exp\left(\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)\Pi \tag{4.5}$$

$$\psi^*=A\Pi\exp\left(-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma\eta}\right)e^{-i\varphi-\frac{1}{2}\gamma_5\kappa} \tag{4.6}$$

где (*) означает эрмитово сопряжение, а величина

$$\Pi=\frac{1}{4}(1+c\gamma^0)(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}),\qquad \mathbf{z}=\{z^\alpha\}=\text{const},\qquad i\alpha=1,2,3;\qquad \mathbf{z}^2=1 \tag{4.7}$$

является делителем нуля (проектором). ВеличиныA, κ, φ, $\boldsymbol{\eta}=\{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n}=\{n^\alpha\}$, $\alpha=1,2,3$, $\mathbf{n}^2=1$ представляют собой восемь вещественных параметров, определяющих волновую функцию ψ. Эти параметры можно рассматривать как новые зависимые переменные, описывающие состояние динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$. Величина φ является скаляром, а κ – псевдоскаляром. Шесть остальных переменных A, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n} = \{n^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ могут быть выражены через 4-вектор тока $j^l = \bar{\psi}\gamma^l\psi$ и 4-псевдовектор спина

$$S^l = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma^l\psi, \qquad l = 0,1,2,3 \tag{4.8}$$

Из-за двух тождеств

$$S^l S_l \equiv -j^l j_l, \qquad j^l S_l \equiv 0. \tag{4.9}$$

имеется только шесть независимых составляющих среди восьми составляющих величин j^l, и S^l.

Математические детали преобразований зависимых переменных можно найти в [14], где действие рассчитывается для случая $c = 1$ и нулевого электромагнитного поля $A_l = 0$. В результате получаем действие, записанное в гидродинамической форме

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}}: \qquad \mathcal{A}_D[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}] = \int \mathcal{L} d^4x, \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{cl}} + \mathcal{L}_{\mathrm{q1}} + \mathcal{L}_{\mathrm{q2}} \tag{4.10}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cl}} = -mc\rho - \hbar j^l\partial_l\varphi - \frac{e}{c}A_l j^l - \frac{\hbar j^l}{2\left(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\partial_l\xi^\beta z^\gamma, \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{4.11}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q1}} = 2mc\rho\sin^2\left(\frac{\kappa}{2}\right) - \frac{\hbar}{2}S^l\partial_l\kappa, \tag{4.12}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q2}} = \frac{\hbar(\rho + cj^0)}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial^\alpha\frac{j^\beta}{(\rho+cj^0)}\xi^\gamma - \frac{\hbar}{2(\rho+cj^0)}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\partial^0 j^\beta\right)j^\alpha\xi^\gamma \tag{4.13}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ псевдотензор Леви-Чивита. Плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ является функцией 4-вектора j^l, скаляра φ, псевдоскаляра κ, и единичного 3-псевдовектора $\boldsymbol{\xi}$, который связан 4-псевдовектором спина S^l с помощью соотношений

$$\xi^\alpha = \rho^{-1}\left[S^\alpha - \frac{j^\alpha S^0}{(\rho+cj^0)}\right], \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{4.14}$$

$$S^0 = \mathbf{j}\boldsymbol{\xi}, \qquad S^\alpha = \rho\xi^\alpha + \frac{(\mathbf{j}\boldsymbol{\xi})j^\alpha}{\rho + cj^0}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{4.15}$$

Положим для простоты $A_l = 0$ и $c = 1$. Производя динамическую расквантизацию (3.5) в (4.10) - (4.13), получаем

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[j,\varphi,\boldsymbol{\xi}] = \int\left\{-\kappa_0 m\rho - \hbar j^i\left(\partial_i\varphi + \frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi_\alpha\partial_i\xi_\beta z_\gamma}{2\left(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\hbar j^k}{2(\rho+j_0)\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_k j^\beta\right)j^\alpha\xi_\gamma\right\}d^4x \tag{4.16}$$

где $\kappa_0 = \pm 1$ есть решение динамического уравнения $\delta\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}/\delta\kappa = 0$, которое не содержит производных, потому что последний член соотношения (4.12) обращается в нуль после динамической расквантизации (3.5) в силу второго тождества (4.9).

Введем лагранжевы координаты $\tau = \{\tau_0, \boldsymbol{\tau}\} = \{\tau_i(x)\}$, $i = 0,1,2,3$ как функции координат x таким образом, чтобы только координата τ_0 изменялась вдоль направления j^l, т.е.

$$j^k \partial_k \tau_\mu = 0, \qquad \mu = 1,2,3 \tag{4.17}$$

Рассматривая переменные $\tau = \{\tau_0, \boldsymbol{\tau}\}$ как независимые переменные в (4.16), получаем после расчетов (смотри математические детали в [14])

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int \left\{ -\kappa_0 m\sqrt{\dot{x}^l\dot{x}_l} + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}+\dot{x}^0)} \right\} d^4\tau \tag{4.18}$$

где точка означает полную производную $\dot{x}^s \equiv dx^s/d\tau_0$. Величины $x = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{x^i\}$, $i = 0,1,2,3$, и $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ рассматриваются как функции лагранжевых координат τ_0, $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Здесь и далее символ $\times$ означает векторное произведение двух 3-векторов. Величина $\mathbf{z}$ является постоянным единичным 3-вектором (4.7). Фактически, переменные x зависят от $\boldsymbol{\tau}$ как от параметров, потому что действие (4.18) не содержит производных по τ_α, $\alpha = 1,2,3$. Плотность лагранжиана действия (4.18) не содержит явно независимых переменных τ. Тогда оно может быть записано в виде

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\boldsymbol{\xi}]d\boldsymbol{\tau}, \qquad d\boldsymbol{\tau} = d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{4.19}$$

где

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int \left\{ -\kappa_0 mc\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}+\dot{x}^0)} \right\} d\tau_0 \tag{4.20}$$

Здесь точка означает дифференцирование по τ_0. Легко видеть, что действие (4.20) инвариантно относительно преобразования $\tau_0 \to \tilde{\tau}_0 = F(\tau_0)$, где F есть произвольная монотонная функция.

Действие (4.20) может быть записано в релятивистски ковариантном виде

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\xi] = \int \{ -\kappa_0 m\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} - \frac{e}{c}A_l\dot{x}^l - \hbar\frac{\varepsilon_{iklm}\xi^i\dot{\xi}^k f^l z^m}{2(1-\xi^s z_s)} + \frac{\hbar}{2}Q\varepsilon_{iklm}\dot{x}^i\ddot{x}^k f^l\xi^m \} d\tau_0 \tag{4.21}$$

$$Q = Q(\dot{x}, f) = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\dot{x}^l f_l + \sqrt{\dot{x}^l\dot{x}_l})}, \qquad \dot{x}^l \equiv \frac{dx^l}{d\tau_0} \tag{4.22}$$

где 4-векторы f^k, z^k определены соответственно соотношениями

$$f^i = \{1,0,0,0\} \tag{4.23}$$

$$z^k = \{0, \mathbf{z}\} = \left(0, z^1, z^2, z^3\right), \qquad z^k z_k = -1, \qquad \boldsymbol{\xi}\mathbf{z} = -\xi_l z^l \tag{4.24}$$

$$\xi^k = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}, \qquad \xi^l f_l = 0 \tag{4.25}$$

Величины f^k и z^k являются постоянными 4-векторами. Они имеют вид (4.23) и (4.24) только в некоторой системе координат. В других системах координат их вид получается в результате соответствующих преобразований соотношений (4.23) и (4.24). Эти 4-векторы описывают некоторые структуры, существующие в пространстве-времени. Вектор z^k описывает введение проектора (4.7). 4-вектор z^k оказывается фиктивным [14]).

Однако, 4-вектор f^k фиктивным не является. Он описывает существование особого направления в пространстве-времени. Это направление описывает разделение пространства-времени на абсолютное время и абсолютное пространство. Обладая вектором f^k, можно приписать абсолютное время $t = x^k f_k$ и абсолютное пространственное расстояние $r = \sqrt{(x^k f_k)^2 - x^k x_k}$ любому пространственно-временному вектору x^k. Это означает, что члены, содержащие постоянный 4-вектор f^k, являются нерелятивистскими. Это утверждение находится в согласии с теоремой Андерсона [15]. В соответствии с этой теоремой группа симметрии динамических уравнений, записанных в релятивистски ковариантном виде, определяется группой симметрии абсолютных объектов. Абсолютными объектами являются величины, которые одни и те же для всех решений динамических уравнений. Абсолютными объектами являются структуры или силовые поля внешние по отношению к рассматриваемой динамической системе. В данном случае 4-вектор f^k является таким абсолютным объектом. Если мы подставим (4.23) в (4.21), мы вернемся к действию (4.18), которое не содержит абсолютного объекта f^k, но одновременно действие (4.18) оказывается записанным в нековариантном виде. Другими словами, релятивистски ковариантная форма записи является способом выделения абсолютных объектов (или пространственно-временных структур), используемых при описании динамической системы.

Два первых члена в действии (4.21) не содержат 4-вектор f^k. Они описывают релятивистски движение классической дираковской частицы в целом. Два последних члена содержат 4-вектор f^k и 4-псевдовектор ξ^k. Они описывают внутренние степени свободы классической дираковской частицы. Описание внутренних степеней свободы оказывается нерелятивистским.

Динамические методы исследования и формализованная процедура перехода к классическому приближению (3.5) позволяют обнаружить два неожиданных свойства дираковской частицы: (1) дираковская частица имеет внутренние степени свободы, (2) эти степени свободы описываются нерелятивистски. Последнее свойство означает, что формально уравнение Дирака является нерелятивистским, т.е. множество всех решений уравнения Дирака не является инвариантным относительно преобразований группы Лоренца.

В случае, когда электромагнитное поле отсутствует $A_k = 0$, динамические уравнения, порожденные действием (4.20) имеют вид (смотри математические детали в [14])

$$\frac{d}{d\tau_0}\left(-\kappa_0 m\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}}+\frac{\hbar Q}{2}(\boldsymbol{\xi}\times\ddot{\mathbf{x}})-\frac{\hbar}{2}\frac{\partial Q}{\partial\dot{\mathbf{x}}}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}+\frac{\hbar}{2}\frac{d}{d\tau_0}\left(Q(\boldsymbol{\xi}\times\dot{\mathbf{x}})\right)\right)=0 \quad (4.26)$$

$$\frac{d}{d\tau_0}\left(\kappa_0 m\frac{\dot{x}^0}{\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}}-\frac{\hbar}{2}\frac{\partial Q}{\partial\dot{x}^0}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}\right)=0 \quad (4.27)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}=-(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\times\boldsymbol{\xi}Q, \quad (4.28)$$

где величина Q определяется соотношением (4.22), (4.23), т.е.

$$Q=Q\left(\dot{x}\right)=\left(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}+\dot{x}^0)\right)^{-1}, \qquad \dot{x}^s\dot{x}_s=\dot{x}_0^2-\dot{\mathbf{x}}^2 \quad (4.29)$$

Мировая линия классической дираковской частицы, описываемой динамическими уравнениями (4.26), (4.27), (4.28), является спиралью (смотри детали в [14])

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\left\{\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\cos\left(\Omega t\right),-\frac{\sqrt{\gamma^2-1}}{\gamma}\sin\left(\Omega t\right),0\right\}, \qquad \Omega=\frac{2m}{\hbar\gamma^2} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{x}=\left\{\frac{\hbar\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}{2m}\sin\left(\frac{2m}{\hbar\gamma^2}t\right),\frac{\hbar\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}{2m}\cos\left(\frac{2m}{\hbar\gamma^2}t\right),0\right\} \quad (4.31)$$

где $\gamma\geq 1$ является произвольной постоянной (лоренц-фактор), описывающей интенсивность вращательного движения классической дираковской частицы.

Подробности интерпретации решения (4.31) можно найти в [14]. Мы здесь не будем вникать в эти детали, потому что нас интересуют главным образом взаимоотношения между динамическими методами и традиционными аксиоматическими методами исследования квантовых систем. В частности, нас интересуют такие вопросы. Возможно ли обнаружение внутренних степеней свободы дираковской частицы традиционными методами? Можно ли было обнаружить нерелятивистский характер уравнения Дирака традиционными методами? Если да, то почему эти свойства дираковской частицы не были обнаружены за восемьдесят лет существования уравнения Дирака? Другими словами, мы хотим сравнить эффективность динамических и аксиоматических методов исследования. К тому же есть дополнительные причины для постановки таких вопросов.

5 Об ошибках в применении традиционного метода исследования к дираковской частице

Впервые неожиданные свойства дираковской частицы были представлены в работе [16]. К сожалению, мне не удалось опубликовать эту работу в физическом журнале, из-за отрицательных отзывов рецензентов. Утверждения работы о внутренних степенях свободы и особенно о нерелятивистском характере уравнения Дирака встретили возражения рецензентов. Эти возражения были такого сорта: (1) "Хорошо известно, что уравнение Дирака является релятивистским", (2) "Может быть расчеты автора содержат ошибку, потому что уравнение Дирака очень хорошо согласуется с экспериментальными данными", (3) "Я не могу себе представить, чтобы уравнение Дирака было нерелятивистским, потому что оно может быть записано в релятивистски ковариантном виде." Обсуждение существа работы отсутствовало во всех отзывах. Точка зрения рецензентов отражает среднестатистическое мнение научного сообщества, и его следует принимать во внимание. Работа была отклонена несмотря на мои комментарии к отзывам рецензентов.

Тогда я решил, что два неожиданных результата – это слишком много для одной статьи и разделил работу на две части. В работе [14] обсуждались внутренние степени свободы, тогда как работа [17] была посвящена обсуждению нерелятивистского характера уравнения Дирака. Снова рецензенты не нашли моих ошибок или дефектов моей работы, но не рекомендовали публиковать работу.

Если рецензенты не хотят или не могут найти ошибки в моих работах, то мне не остается ничего другого, как поискать ошибки в традиционном аксиоматическом методе, который приводит к отсутствию внутренних степеней свободы дираковской частицы и к релятивстскому характеру уравнения Дирака. Соответствующие ошибки были легко найдены. Обнаружение и обсуждение этих ошибок приводится ниже.

Сначала о внутренних степенях свободы дираковской частицы. Традиционно уравнение Паули рассматривается как нерелятивистское приближение уравнения Дирака. Уравнение Паули есть система из двух комплексных дифференциальных уравнений первого порядка для двух комплексных зависимых переменных, тогда как уравнение Дирака есть система из четырех комплексных дифференциальных уравнений первого порядка для четырех комплексных зависимых переменных. Это означает, что классическая частица Паули $\mathcal{S}_{\mathrm{Pcl}}$ имеет меньше степеней свободы, чем классическая дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$. Частица Паули $\mathcal{S}_{\mathrm{Pcl}}$ есть точечная нерелятивистская частица со спином. Является ли классическая дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ релятивистской частицей со спином и дополнительными степенями свободы, или порядок дираковской системы уравнений действительно уменьшается при переходе к нерелятивистскому приближению?

Почему понижается порядок системы динамических уравнений при нерелятивистском приближении? Он понижается потому, что перед некоторыми временны́ми производными стоят коэффициенты порядка c^{-2}, которые обращаются в нуль при $c \to \infty$. Другими словами, дираковская система динамических уравнений представляет собой систему дифференциальных уравнений с малым параметром перед старшей производной. Такими членами пренебрегать нельзя, потому что при больших временны́х частотах они могут быть одного порядка с остальными членами, если даже коэффициенты перед производными малы. Пренебрегая членами со старшими производными, мы теряем высокочастотные решения динамических уравнений. С формальной точки зрения такое пренебрежение членами со старшими производными является математической ошибкой, приводящей к потере высокочастотных решений.

Тщательный анализ показывает [18], что решение уравнения Дирака в нерелятивистском приближении имеет вид

$$\psi = \frac{\exp\left(-\frac{i}{2}\Omega t\right)}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \psi_1 + \psi_2 \\ \psi_1 - \psi_2 \end{array} \right), \qquad \Omega = \frac{2mc^2}{\hbar} \tag{5.1}$$

где ψ есть зависимая переменная в действии (1.11), ψ_1 и ψ_2 суть двухкомпонентные комплексные величины, определенные соотношениями

$$\psi_1 = u_+(t, \mathbf{x}) + e^{i\Omega t} u_-(t, \mathbf{x}) \tag{5.2}$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{2mc}\left(i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\sigma_\mu\left(u_+(t, \mathbf{x}) + e^{i\Omega t} u_-(t, \mathbf{x})\right) \tag{5.3}$$

Здесь σ_μ, $\mu = 1, 2, 3$ суть матрицы Паули, а $u_+(t, \mathbf{x})$, $u_-(t, \mathbf{x})$ являются двухкомпонентными величинами, которые являются решениями уравнения Паули с разным знаком массы m.

$$i\hbar\partial_0 u_+ = \hat{H}_{\mathrm{P}}(m)\, u_+, \qquad i\hbar\partial_0 u_- = \hat{H}_{\mathrm{P}}(-m)\, u_- \tag{5.4}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{P}}(m) = \frac{\pi_\mu \pi_\mu}{2m} + \frac{ie\hbar}{2mc}\varepsilon_{\nu\mu\alpha}\partial_\nu A_\mu \sigma_\alpha = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + \frac{ie\hbar}{2mc}\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3\}, \qquad \pi_\mu \equiv i\hbar\partial_\mu + \frac{e}{c}A_\mu, \qquad \mu = 1, 2, 3$$

Здесь $\mathbf{H} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ есть магнитное поле.

Частота $\Omega = mc^2/\hbar$ стремится к ∞, если $c \to \infty$. В нерелятивистском случае, когда γ близко к 1, частота Ω совпадает с частотой Ω, которая фигурирует в соотношениях (4.30), описывающих мировую линию классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$. Если игнорировать высокочастотную часть решения, положив $u_- = 0$ в соотношениях (5.1) - (5.3), то получается решение уравнения Паули. Поскольку дираковская частица является заряженной, то состояния, где $u_+ \neq 0 \wedge u_- \neq 0$, нестабильны, потому что в таких состояниях 4-ток j^k имеет составляющие, осциллирующие с частотой Ω. Дираковская частица излучает электромагнитные волны с частотой Ω до тех пор, пока одна из величин u_+ или u_- не обратится в нуль [18]. Поскольку время перехода в стабильное состояние очень мало, дираковская частица практически существует или в низкочастотном состоянии ψ_{lf}, когда $u_- = 0$, или в высокочастотном состоянии ψ_{hf}, когда $u_+ = 0$. Состояние ψ_{lf} ассоциируется с частицей, тогда как состояние ψ_{hf} ассоциируется с античастицей. Формально суперпозиция состояний ψ_{lf} и ψ_{hf} возможна, но она не реализуется для заряженной дираковской частицы из-за ее нестабильности. Это заключение о нестабильности верно также и для классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$, описываемой сотношениями (4.30), (4.31).

Таким образом, дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемая действием (1.11), имеет внутренние степени свободы, которые не были обнаружены из-за математической ошибки при переходе к нерелятивистскому приближению, которое осуществляет интерпретацию дираковской частицы. Внутренние степени свободы не проявляются в нерелятивистских приближениях уравнения Дирака, и не было никакой необходимости их искать. Переход к классическому приближению должен автоматически обнаруживать все степени свободы, но только в том случае, когда процедура перехода формализована. Традиционно переход к классическому приближению не формализовался, и тому были причины. Он сопровождался рядом дополнительных предположений, которые всегда выбирались так, чтобы получить желаемый заранее известный результат. Впервые процедура перехода к классическому приближению была формализована в [16], и немедленно были обнаружены внутренние степени свободы классической дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$.

Уравнение Дирака может быть записано в релятивистски ковариантном виде. Принято считать, что это означает релятивистский характер уравнения Дирака. Иными словами, уравнение Дирака имеет симметрию группы Лоренца, т.е. множество всех решений уравнения Дирака преобразуется в то же самое множество при преобразовании Лоренца. Это мнение существует в течении многих лет, и мы попытаемся понять причину этой точки зрения.

Формально релятивистский характер динамических уравнений ассоциируется представлением этих уравнений в релятивистски ковариантном виде. Однако, эта ассоциация верна только при некоторых условиях, которые практически всегда выполняются, и в результате эти условия практически никогда не упоминаются при формулировке условий релятивистской инвариантности (т.е. совместимости динамических уравнений с принципами теории относительности). К сожалению, в случае уравнения Дирака эти дополнительные условия не выполняются, и уравнение Дирака оказывается нерелятивистским. На самом деле, нерелятивистским оказывается описание только внутренних степеней свободы. Если эти внутренние степени свободы игнорировать, то дираковская частица оказывается релятивистской.

Дополнительное ограничение в формулировке релятивистской инвариантности изменяет ее. Правильная формулировка выглядит следующим образом. *Симметрия динамических уравнений, записанных в релятивистски ковариантном виде совпадает с симметрией их абсолютных объектов* [15]. Абсолютными объектами являются такие величины, которые одни и те же для всех решений. Формально абсолютные объекты – это некоторые структуры или объекты, внешние по отношению к рассматриваемой динамической системе. Обычно таким абсолютным объектом является метрический тензор, который имеет вид $g_{ik} = \mathrm{diag}\{c^2, -1, -1, -1\}$. Группа симметрии метрического тензора g_{ik} есть группа Лоренца, и группой симметрии динамических уравнений оказывается группа Лоренца. Уравнения Максвелла, уравнение Клейна-Гордона и многие другие динамические уравнения для реальных динамических систем содержат в качестве абсолютного объекта только метрический тензор, и формулировка релятивистской инвариантности упрощается. Она выглядит следующим образом. *Группа Лоренца является группой симметрии динамических уравнений, записанных в релятивистски ковариантном виде.* В такой форме оно используется большинством исследователей.

Уравнение Дирака не содержит метрического тензора. Вместо него оно содержит γ-матрицы γ^i, $i = 0,1,2,3$. Эти γ-матрицы образуют матричный 4-вектор, симметрия которого ниже группы Лоренца. В результате уравнение Дирака не имеет симметрии группы Лоренца. Другими словами, уравнение Дирака оказывается нерелятивистским уравнением.

Какая физическая ситуация скрывается за этим результатом? Почему динамическое уравнение, записанное в релятивистски ковариантном виде, оказывается нерелятивистским, если оно содержит абсолютный вектор? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим заряженную классическую частицу, движущуюся в заданном электромагнитном поле F^{ik}.

Динамические уравнения для релятивистской частицы могут быть записаны в нековариантном виде

$$\frac{d}{dt}\frac{m\dot{x}^\mu}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{c^2}}} = \frac{e}{c}F^{\mu 0} + \frac{e}{c}F^{\mu\nu}g_{\nu\beta}\dot{x}^\beta, \qquad \mu = 1,2,3, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{5.6}$$

и в релятивистски ковариантном виде

$$m\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = \frac{e}{c}F^{kl}g_{ls}\frac{dx^s}{d\tau}, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{5.7}$$

где τ есть собственное время, e, m суть соответственно заряд и масса частицы.

Если частица нерелятивистская, динамические уравнения записываются в нековариантном виде

$$m\frac{d^2x^\mu}{dt^2} = \frac{e}{c}F^{\mu 0} + \frac{e}{c}F^{\mu\nu}g_{\nu\beta}\frac{dx^\beta}{dt}, \qquad \mu = 1,2,3 \tag{5.8}$$

Можно ли динамические уравнения (5.8) для нерелятивистской частицы записать в релятивистски ковариантном виде? Ответ – да, хотя большинство исследователей полагают, что это невозможно. Релятивистски ковариантная форма уравнений (5.8) выглядит так

$$m\frac{d}{d\tau}\left[\left(l_k\dot{x}^k\right)^{-1}\dot{x}^i - \frac{1}{2}g^{ik}l_k\left(l_j\dot{x}^j\right)^{-2}\dot{x}^s g_{sl}\dot{x}^l\right] = \frac{e}{c}F^{il}g_{lk}\dot{x}^k; \qquad i = 0,1,2,3 \tag{5.9}$$

где $\dot{x}^k \equiv dx^k/d\tau$. Величина l_k, $k = 0,1,2,3$ представляет собой постоянный времениподобный единичный 4-вектор

$$g^{ik}l_il_k = 1; \tag{5.10}$$

Используя специальный выбор вектора $l_k = \{c,0,0,0\}$ и подставляя его в (5.9), легко проверить, что получаются динамические уравнения (5.8) для $i = 1,2,3$.

Для $i = 0$ получаем динамическое уравнение, которое является следствием уравнений (5.8).

Поскольку динамические уравнения для обеих частиц релятивистской и нерелятивистской можно записать как в нековариантном, так и в релятивистски ковариантном виде, становится ясно, что различие между релятивистским и нерелятивистским описанием не связано с видом динамических уравнений. Существует что-то еще, что отличает релятивистскую концепцию от нерелятивистской.

Хорошо известно, что различие заключается в разных концепциях пространства-времени. В ньютоновской концепции имеется абсолютная одновременность и имеются две инвариантные величины: абсолютное время t и абсолютное пространственное расстояние r, тогда как в релятивистской концепции пространства-времени имеется только одна абсолютная величина: пространственно-временной интервал $s = \sqrt{c^2t^2 - r^2}$. Ньютоново пространство-время $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ имеет 7-параметрическую группу движений, тогда как пространство-время Минковского $\mathcal{S}_\mathrm{M}$ имеет 10-параметрическую группу движений. Кроме того ньютоново пространство-время $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ может рассматриваться как пространство-время Минковского $\mathcal{S}_\mathrm{M}$ с дополнительной геометрической структурой $\mathcal{L}$, заданной в нем. Другими словами, $\mathcal{S}_\mathrm{N} = \mathcal{S}_\mathrm{M} \wedge \mathcal{L}$. Дополнительная структура $\mathcal{L}$ представляет собой особое времениподобное направление в $\mathcal{S}_\mathrm{M}$, описываемое постоянным времениподобным вектором l_k. Любая гиперплоскость, ортогональная к l_k, представляет собой множество одновременных событий. Введение структуры $\mathcal{L}$ позволяет построить два инварианта в $\mathcal{S}_\mathrm{M} \wedge \mathcal{L}$

$$t = l_k x^k, \qquad r = \sqrt{x^k x_k + (l_k x^k)^2} \tag{5.11}$$

для любого вектора x^k, тогда как в $\mathcal{S}_\mathrm{M}$ имеется только один инвариант $s = \sqrt{x^k x_k}$. Построение этого инварианта не содержит ссылки на $\mathcal{L}$.

Ньютоново пространство-время $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ рассматриваемое как $\mathcal{S}_\mathrm{M} \wedge \mathcal{L}$ допускает только такие движения пространства-времени $\mathcal{S}_\mathrm{M}$, которые преобразуют вектор l_k в тот же самый вектор l_k и не нарушают структуру $\mathcal{L}$. Условие сохранения структуры $\mathcal{L}$ в пространстве-времени уменьшает 10-параметрическую группу движений пространства-времени $\mathcal{S}_\mathrm{M}$ до 7-параметрической группы движений пространства $\mathcal{S}_\mathrm{M} \wedge \mathcal{L}$. Вообще, при релятивистски ковариантном описании абсолютные объекты, введенные Андерсоном [15], могут рассматриваться как величины, описывающие дополнительные структуры в $\mathcal{S}_\mathrm{M}$. Это означает, что любая система динамических уравнений может быть записана в релятивистски ковариантном виде, при условии, что введены надлежащие абсолютные объекты (дополнительные структуры). Таким образом, чтобы определить являются ли динамические уравнения совместимыми с принципами теории относительности, следует записать их в релятивистски ковариантном виде и определить, содержат ли они абсолютные объекты и каковы свойства этих абсолютных объектов. Если динамические уравнения содержат постоянный времениподобный вектор l_k, то динамическая система является нерелятивистской, потому что l_k описывает дополнительную пространственно-временную структуру, характерную для ньютонова пространства-времени $\mathcal{S}_{\rm N}$, представленного как $\mathcal{S}_{\rm M} \wedge \mathcal{L}$.

Такой подход удобен в том смысле, что он не содержит ссылки на систему координат, которая является просто методом описания. Релятивистский характер динамического уравнения связан прямо с отсутствием дополнительной пространственно-временной структуры в $\mathcal{S}_{\rm M}$, а не с релятивистски ковариантной формой динамических уравнений, потому что любые динамические уравнения могут быть всегда записаны в релятивистски ковариантном виде, если только в $\mathcal{S}_{\rm M}$ введена надлежащая геометрическая структура. Релятивистски ковариантное представление динамических уравнений *необходимо только для обнаружения дополнительных геометрических структур* в пространстве-времени Минковского $\mathcal{S}_{\rm M}$. *Дополнительные геометрические структуры первичны*, тогда как релятивистская ковариантность вторична, поскольку она только позволяет обнаруживать эти структуры, если они присутствуют. Сама по себе релятивистская ковариантность индеферентна по отношению к релятивистской инвариантности динамических уравнений. Дополнительная структура формально присутствует в уравнениях (5.9) и описывается формальными параметрами l_k. Когда мы используем подстановку $l_k = \{c, 0, 0, 0\}$ в (5.9), мы получаем (5.8), где структура $\mathcal{L}$ формально отсутствует, потому что отсутствуют формальные параметры l_k структуры $\mathcal{L}$.

Таким образом, релятивистская инвариантность динамических уравнений связана с существованием (или отсутствием) и свойствами дополнительных структур в $\mathcal{S}_{\rm M}$, тогда как релятивистская ковариантность есть только *метод обнаружения* этих структур.

Релятивистски ковариантное динамическое уравнение является релятивистским при условии, что оно не содержит ссылки на некоторую дополнительную структуру. Однако, такая формулировка не надежна, поскольку оговорка о ссылке на дополнительную структуру может быть по ошибке пропущена. В этом случае релятивистский характер динамических уравнений оказывается связанным с релятивистской ковариантностью этих уравнений, а не с дополнительной структурой $\mathcal{L}$ в $\mathcal{S}_{\rm M}$. Именно этот случай имеет место в реальности. В результате мы получаем ассоциативную ошибку, когда релятивистская инвариантность ассоциируется с релятивистской ковариантностью, хотя на самом деле, релятивистская инвариантность ассоциируется с отсутствием дополнительных геометрических структур в $\mathcal{S}_{\rm M}$. Релятивистски ковариантная форма динамических уравнений есть только условие, когда существование дополнительной структуры в $\mathcal{S}_{\rm M}$ может быть обнаружено.

Таким образом, внутренние степени свободы дираковской частицы не были открыты теоретически, потому что они не могли быть обнаружены экспериментально. Все прецезионные эксперименты с такой дираковской частицей как электрон являются нерелятивистскими (поправки к спектру водорода), и жесткие внутренние степени свободы дают только ничтожную поправку. Поскольку внутренние степени свободы оставались неизвестными, нельзя было экспериментально получить нерелятивистский характер их описания. К сожалению, квантовые принципы не работают в релятивистской области, и традиционная теория не может получить те результаты, которые не получены экспериментально, потому что нужны дополнительные гипотезы, имеющие экспериментальную основу. Динамические методы свободны от этого недостатка. Они работают независимо от экспериментальных данных и дополнительных гипотез.

Математическое приложение

A Преобразование действия для статистического ансамбля

Преобразуем действие

$$\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\right]=\int\left\{\frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2}-\frac{e}{c}A_0-\frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{dt}+\frac{m\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2}{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\right\}dtd\boldsymbol{\xi} \tag{A.1}$$

для статистического ансамбля стохастических частиц, движущихся в заданном электромагнитном поле $A=\{A_0,\mathbf{A}\}=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$. Здесь $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$, $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}=\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\left(t,\mathbf{x}\right)$ суть динамические переменные, а $\boldsymbol{\nabla}=\{\partial_1,\partial_2,\partial_3\}=\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$. Переменная $\mathbf{x}$ описывает регулярную составляющую стохастического движения частицы. Динамическая переменная $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ является функцией от $t,\mathbf{x}$ и зависит от $\boldsymbol{\xi}$ через $\mathbf{x}$. Величина $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ может быть истолкована как средняя скорость стохастической составляющей движения, тогда как $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ описывает регулярную составляющую движения частицы. Последний член в (A.1) описывает влияние стохастичности на регулярную составляющую эволюции.

Для исключения переменной $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$, следует решить динамические уравнения $\delta\mathcal{A}/\delta\mathbf{u}_{\mathrm{st}}=0$ относительно $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$. Поскольку $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ является функцией от $t,\mathbf{x}$, то следует перейти к независимым переменным $t,\mathbf{x}$ в действии (A.1). Получаем вместо (A.1)

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\boldsymbol{\xi},\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\right]=\int\left\{\frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2}-\frac{e}{c}A_0-\frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{dt}+\frac{m\mathbf{u}_{\mathrm{st}}^2}{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\right\}\rho\left(t,\mathbf{x}\right)dtd\mathbf{x} \tag{A.2}$$

где $\boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ суть зависимые переменные, тогда как $t,\mathbf{x}$ являются независимыми переменными. Здесь ρ и $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{u}$ суть функции от $\boldsymbol{\xi}$, определенные соотношениями

$$\rho=\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)},\qquad \dot{\mathbf{x}}\equiv\mathbf{u}\equiv\frac{\partial\left(\mathbf{x},\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\mathbf{x},\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(t,x^1,x^2,x^3\right)}, \tag{A.3}$$

Вариация действия (A.2) по $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ дает

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta\mathbf{u}_{\mathrm{st}}}=m\mathbf{u}_{\mathrm{st}}\rho+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho=0 \tag{A.4}$$

Разрешая уравнение (A.4) относительно $\mathbf{u}_{\mathrm{st}}$ в виде

$$\mathbf{u}_{\mathrm{st}} = -\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho, \tag{A.5}$$

получаем вместо (A.2)

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\boldsymbol{\xi}] = \int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 - \frac{e}{c}A_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}\frac{d\mathbf{x}}{dt} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2}\right\}\rho dt d\mathbf{x} \tag{A.6}$$

где ρ и $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ являются функциями пространственно-временны́х производных от $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, определенных соотношениями (A.3). Действие (A.6) описывает некоторую идеальную заряженную жидкость с внутренней энергией на единицу массы

$$U(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho) = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} \tag{A.7}$$

Введем новые зависимые переменные $j = \{\rho, \rho\mathbf{u}\} = \left\{j^k\right\}, \quad k = 0,1,2,3$ с помощью соотношений (A.3). С формальной точки зрения удобно представить гидродинамические переменные $j = \{\rho, \rho\mathbf{u}\} = \left\{j^k\right\}$, $k = 0,1,2,3$ в виде

$$j^k = \frac{\partial\left(x^k, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)} = \frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{A.8}$$

где якобиан

$$J = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det||\xi_{i,k}||, \qquad \xi_{l,k} \equiv \partial_k\xi_l, \qquad l,k = 0,1,2,3 \tag{A.9}$$

рассматривается как функция переменных $\xi_{l,k} \equiv \partial_k\xi_l$, $l,k = 0,1,2,3$. Переменная ξ_0 является новой зависимой переменной (временна́я лагранжева координата), которая является фиктивной.

Введем новые динамические переменные с помощью множителей Лагранжа $p = \{p_k\}, \quad k = 0,1,2,3$, и получим вместо (A.6)

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\xi, j, p] = \int\left\{\frac{m}{2\rho}j^\alpha j^\alpha - \frac{e}{c}A_0\rho - \frac{e}{c}A_\alpha j^\alpha - p_k\left(j^k - \frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\right) - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho}\right\}d^4x \tag{A.10}$$

где $\xi = \{\xi_k\}, \ k = 0,1,2,3$.

Варьирование действия (A.10) по ξ_l приводит к динамическим уравнениям

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta\xi_l} = \partial_s\left(p_k\frac{\partial^2 J}{\partial\xi_{0,k}\partial\xi_{l,s}}\right) = 0, \qquad l = 0,1,2,3 \tag{A.11}$$

Поскольку переменная ξ_0 фиктивна, имеется только три независимых уравнения среди четырех уравнений (A.11).

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \equiv J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} \xi_{k,l} \equiv J \delta_k^i, \qquad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{A.13}$$

и обозначения (A.8), мы можем исключить переменные $\boldsymbol{\xi}$ из уравнений (A.11). Получаем

$$j^k \partial_l p_k - j^k \partial_k p_l = 0, \qquad l = 0, 1, 2, 3 \tag{A.14}$$

Варьирование (A.10) по j^β и $j^0 = \rho$ дает соответственно

$$p_\beta = m \frac{j^\beta}{\rho} - \frac{e}{c} A_\beta, \qquad \beta = 1, 2, 3 \tag{A.15}$$

$$p_0 = -\frac{m}{2\rho^2} j^\alpha j^\alpha - \frac{e}{c} A_0 + \frac{\hbar^2}{8m} \left(2 \frac{\boldsymbol{\nabla}^2 \rho}{\rho} - \frac{(\boldsymbol{\nabla} \rho)^2}{\rho^2} \right) \tag{A.16}$$

Исключая p_k из уравнений (A.14) с помощью соотношений (A.15), (A.16), получаем гидродинамические уравнения для идеальной заряженной жидкости в традиционном виде

$$(\partial_0 + v^\alpha \partial_\alpha) v^\mu = \frac{e}{mc} F_{\mu 0} + \frac{e}{mc} F_{\mu\alpha} v^\alpha - \frac{1}{m\rho} \partial_\mu p, \qquad \mu = 1, 2, 3 \tag{A.17}$$

где давление p и тензор электромагнитного поля F_{ik} определяются соотношениями

$$p = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{(\boldsymbol{\nabla} \rho)^2}{\rho^2} - 2 \frac{\boldsymbol{\nabla}^2 \rho}{\rho} \right), \qquad F_{ik} = \partial_k A_i - \partial_i A_k, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3 \tag{A.18}$$

Волновая функция строится из потенциалов. Уравнения (A.17) не содержат потенциалов $\boldsymbol{\xi}$ и A_k, и они не могут быть использованы для описания жидкости в терминах волновой функции. Чтобы построить описание в терминах волновой функции, не следует исключать потенциалы $\boldsymbol{\xi}$ из уравнений (A.11). Вместо этого следует проинтегрировать их. Динамические уравнения (A.11) можно рассматривать как линейные дифференциальные уравнения относительно переменных p_k. Они могут быть решены в виде

$$p_k = b \left(\partial_k \varphi + g^\alpha (\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\alpha \right), \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{A.19}$$

где $g^\alpha (\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть произвольные функции аргумента $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, b есть произвольная вещественная постоянная, а φ есть переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной.

Можно проверить прямой подстановкой, что соотношение (A.19) является общим решением линейных уравнений (A.11). В самом деле, используя (A.12) и второе тождество (A.13), можно переписать уравнения (A.11) в виде

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \partial_s p_k = J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \partial_s p_k = 0 \tag{A.20}$$

Подставляя (A.19) в (A.20) и принимая во внимание антисимметрию скобок в (A.20) относительно перестановки индексов k и s, получаем

$$J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \frac{\partial g^\alpha (\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\mu} \xi_{\mu,s} \xi_{\alpha,k} = 0 \tag{A.21}$$

Соотношение (A.21) есть верное равенство, как это следует из первого тождества (A.13).

Подставим (A.19) в действие (A.10). Принимая во внимание первое тождество (A.13) и опуская член

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \partial_k \varphi = \frac{\partial (\varphi, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}$$

который не дает вклада в динамическое уравнение, получаем

$$\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]} [\varphi, \boldsymbol{\xi}, j] = \int \left\{ \frac{m}{2} \frac{j^\alpha j^\alpha}{j^0} - \frac{e}{c} A_k j^k - j^k p_k - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\boldsymbol{\nabla} \rho)^2}{\rho} \right\} d^4 x, \tag{A.22}$$

Здесь величины p_k определяются соотношениями (A.19).

Действие в виде (A.22) замечательно в том отношении, что оно содержит информацию о начальных значениях скорости жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$. Динамические уравнения, порожденные действием (A.22), являются дифференциальными уравнениями в частных производных, и нужно задать начальные значения для переменных $\varphi, \boldsymbol{\xi}$. Однако начальные значения для переменных $\varphi, \boldsymbol{\xi}$ определяют только маркировку частиц жидкости. они могут быть выбраны универсальными. Например, можно выбрать для всех течений жидкости

$$\varphi (0, \mathbf{x}) = \varphi_{\mathrm{in}} (\mathbf{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{\xi} (0, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{in}} (\mathbf{x}) = \mathbf{x} \tag{A.23}$$

Тогда функции $\mathbf{g} (\boldsymbol{\xi})$ определяются начальными значениями скорости $\mathbf{v} (0, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\mathrm{in}} (\mathbf{x})$ в виде [2]

$$\mathbf{g} (\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{v}_{\mathrm{in}} (\boldsymbol{\xi}) \tag{A.24}$$

Начальное значение $\rho (0, \mathbf{x}) = \rho_{\mathrm{in}} (\mathbf{x})$ плотности ρ также может быть включено в действие (A.22). Нужно только переопределить связь между величинами j^k и $\boldsymbol{\xi}$, заменив соотношения (A.8) соотношениями [2]

$$j^k = \rho_0 (\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \left(x^k, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \right)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{A.25}$$

где $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ есть произвольная функция переменных $\boldsymbol{\xi}$. При начальных условиях (A.24) функция выбирается в виде

$$\rho_0(\mathbf{x}) = \rho_{\rm in}(\mathbf{x}) = \rho(0,\mathbf{x})$$

Исключим теперь переменные $\mathbf{j} = \{j^1, j^2, j^3\}$ из действия (A.22), используя соотношение (A.15). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[\rho,\varphi,\boldsymbol{\xi}] = \int\left\{-p_0 - \frac{e}{c}A_0 - \frac{\left(p_\beta + \frac{e}{c}A_\beta\right)\left(p_\beta + \frac{e}{c}A_\beta\right)}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2}\right\}\rho d^4x, \tag{A.26}$$

где величины p_k, $k = 0,1,2,3$ определяются соотношением (A.19).

Вместо зависимых переменных $\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}$ введем n-компонентную комплексную функцию $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\alpha = 1,2,\ldots,n$, которая определена соотношениями [2]

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \psi^*_\alpha = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u^*_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1,2,\ldots,n, \tag{A.27}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{n}\psi^*_\alpha\psi_\alpha, \tag{A.28}$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Величины $u_\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1,2,\ldots,n$ суть функции только переменных $\boldsymbol{\xi}$, и удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u^*_\alpha\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi_\beta} - \frac{\partial u^*_\alpha}{\partial\xi_\beta}u_\alpha\right) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}), \qquad \beta = 1,2,3, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n}u^*_\alpha u_\alpha = 1. \tag{A.29}$$

Число n есть такое натуральное число, что уравнения (A.29) допускают решение. Вообще говоря, n зависит от вида произвольных функций $\mathbf{g} = \{g^\beta(\boldsymbol{\xi})\}$, $\beta = 1,2,3$. Функции $\mathbf{g}$ определяют завихренность течения жидкости. Если $\mathbf{g} = 0$, уравнения (A.29) имеют решение $u_1 = 1$, $u_\alpha = 0$, $\alpha = 2,3,...n$. В этом случае функция ψ имеет один компонент, и течение жидкости будет потенциальным.

В общем случае легко проверить, что

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad \rho p_0(\varphi,\boldsymbol{\xi}) = -\frac{ib}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) \tag{A.30}$$

$$\rho p_\alpha(\varphi,\boldsymbol{\xi}) = -\frac{ib}{2}(\psi^*\partial_\alpha\psi - \partial_\alpha\psi^*\cdot\psi), \qquad \alpha = 1,2,3. \tag{A.31}$$

Вариационная проблема с действием (A.22) оказывается эквивалентной вариационной проблеме с функционалом действия

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[\psi,\psi^*] = \int\left\{\frac{ib}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - \frac{e}{c}A_0\rho\right.$$

$$\left. -\frac{\rho}{2m}\left(-\frac{ib}{2\rho}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi) + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho}\right\}\mathrm{d}^4x \tag{A.32}$$

или

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[\psi,\psi^*]=\int\left\{\frac{ib}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{e}{c}A_0+\frac{b^2}{8m\rho}(\psi^*\nabla\psi-\nabla\psi^*\cdot\psi)^2\right.$$

$$\left.+\frac{ibe}{2mc}\mathbf{A}(\psi^*\nabla\psi-\nabla\psi^*\cdot\psi)-\frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho}-\frac{\rho}{2m}\left(\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\right\}\mathrm{d}^4x \tag{A.33}$$

Для двухкомпонентной функции ψ $(n=2)$ выполняется следующее тождество

$$(\nabla\rho)^2-(\psi^*\nabla\psi-\nabla\psi^*\cdot\psi)^2\equiv 4\rho\nabla\psi^*\nabla\psi-\rho^2\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\nabla s_\alpha)^2, \tag{A.34}$$

$$\rho\equiv\psi^*\psi,\qquad \mathbf{s}\equiv\frac{\psi^*\boldsymbol{\sigma}\psi}{\rho},\qquad \boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_\alpha\},\qquad \alpha=1,2,3, \tag{A.35}$$

где σ_α суть матрицы Паули. В силу тождества (A.34) действие (A.32) приводится к виду

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[\psi,\psi^*]$$

$$=\int\left\{\frac{ib}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{e}{c}A_0-\frac{1}{2m}\left(-ib\nabla\psi^*-\frac{e}{c}\mathbf{A}\psi^*\right)\left(ib\nabla\psi-\frac{e}{c}\mathbf{A}\psi\right)\right.$$

$$\left.+\frac{b^2-\hbar^2}{8\rho m}(\nabla\rho)^2+\frac{b^2}{8m}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\nabla s_\alpha)^2\rho\right\}\mathrm{d}^4x, \tag{A.36}$$

где $\mathbf{s}$ и ρ определяются соотношениями (A.35). Следует ожидать, что двухкомпонентная волновая функция описывает общий случай, потому, что число вещественных составляющих двухкомпонентной волновой функции совпадает с числом гидродинамических переменных $\{\rho,\mathbf{j}\}$. Однако, это утверждение пока не доказано.

В случае потенциального течения, когда двухкомпонентная функция имеет линейно зависимые составляющие, например $\psi=\{\psi_1,0\}$, 3-вектор $\mathbf{s}=$const, и член, содержащий 3-вектор $\mathbf{s}$ обращается в нуль. В специальном случае, когда электромагнитные потенциалы $A_k=0$, действие (A.36) для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ совпадает с действием (1.7) для $\mathcal{S}_{\rm S}$.

Наконец, если произвольная постоянная b на выбрана в виде $b=\hbar$ и положено $A_k=0$, получаем действие (1.1) для шредингеровской частицы.

Список литературы

[1] J.V. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlin, Springer, 1932. chp. 4.

[2] Yu.A. Rylov, "Spin and wave function as attributes of ideal fluid". *J. Math. Phys.* **40**, No.1, 256-278, (1999).

[3] E. Madelung, Quanten Theorie in hydrodynamischer Form. *Z. Phys.* **40,** 322-326, (1926).

[4] D. Bohm, A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. *Phys. Rev.,* **85**, 166, (1952); **85**, 180, (1952).

[5] Yu.A. Rylov, "The equation for isentropic motion of inviscid fluid in terms of wave function" *J. Math. Phys.* **30**, 2516-2520, (1989).

[6] A. Clebsch, Über eine allgemaine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).

[7] A. Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).

[8] W. Heisenberg, "Development of the Quantum Mechanics Interpretation". in *Niels Bohr and the Development of Physics.* ed. W.Pauli , London. Pergamon Press Ltd., 1955.

[9] Д.И. Блохинцев, *Основы квантовой механики.* Наука, 1976.

[10] L.E. Ballentine, The statistical interpretation of quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.,* **72**, 358. (1970)..

[11] Yu. A. Rylov, " Tubular geometry construction as a reason for new revision of the space-time conception." (Available at http://arXiv.org/abs/physics /0504031)

[12] F. Sauter, *Zs. Phys.* **63,** 803, (1930), **64**, 295, (1930).

[13] A. Sommerfeld, *Atombau and Spektrallinien.* bd.2, Braunschweig, 1951.

[14] Yu. A. Rylov, *Is the Dirac particle composite?* (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0410045).

[15] J. L. Anderson, *Principles of relativity physics.* Academic Press, New-York, 1967, pp 75-88.

[16] Yu.A. Rylov, Dynamic disquantization of Dirac equation. (Available at http://arXiv.org/abs/quant-ph/0104060).

[17] Yu.A. Rylov, " Is the Dirac particle completely relativistic?." (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0412032).

[18] Yu. A. Rylov, Dynamical methods of investigation in application to the Dirac particle. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0507084