Геометрическая динамика: спин как результат вращения со сверхсветовой скоростью

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, Москва 119526, Проспект Вернадского 101-1.
e-mail: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{\ }rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{\ }rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Динамика рассматривается как следствие геометрии пространства-времени. Эволюция частицы в пространстве-времени описывается как цепь связанных эквивалентных геометрических объектов. Геометрия пространства-времени однозначно определяется мировой функцией σ. Надлежащая модификация мировой функции пространства-времени Минковского для больших пространственно-временных интервалов приводит к вихлянию цепи, состоящей из прямолинейных времениподобных отрезков. Статистическое описание случайной мировой цепи совпадает с квантовым описанием с помощью уравнения Шредингера. Надлежащая модификация мировой функции пространства-времени Минковского для малых пространственно-временных интервалов приводит к появлению мировой цепи, имеющей форму винтовой линии с времениподобной осью. Звеньями цепи являются пространственноподобные отрезки. Такая мировая цепь описывает пространственную эволюцию частицы. Другими словами, винтообразная мировая цепь описывает вращение частицы со сверхсветовой скоростью. Спиральная мировая цепь ассоциируется с классической дираковской частицей, чья мировая линия является спиралью (винтовой линией). Длина звеньев мировой цепи не может быть произвольной. Она определяется геометрией пространства-времени и, в частности, элементарной длиной. Существует дискриминационный механизм, который может дискриминировать некоторые мировые цепи.

1 Введение

Геометрическая динамика представляет собой динамику элементарных частиц, порожденную геометрией пространства-времени. В пространстве-времени Минковского геометрическая динамика совпадает с традиционной классической динамикой, и геометрическая динамика может рассматриваться как обобщение классической динамики на более общие пространственно-временные геометрии. Однако, геометрическая динамика имеет более фундаментальную основу и может быть определена в многовариантных пространственно-временных геометриях, где нельзя ввести традиционную классическую динамику. Дело в том, что классическая динамика была введена пространстве-времени с безграничной делимостью, тогда как реальное пространство-время обладает ограниченной делимостью. Ограниченная делимость пространства-времени не имеет значения для динамики макроскопических тел. Однако, когда размер движущегося тела порядка элементарной длины пространства-времени, уже нельзя пренебрегать ограниченной делимостью геометрии пространства-времени.

Геометрическая динамика развивается в рамках программы дальнейшей геометризации физики, провозглашенной в [1]. Специальная теория относительности и общая теория относительности представляют шаги в развитии этой программы. Необходимость дальнейшего развития появилась в тридцатых годах двадцатого века, когда была обнаружена дифракция электронов. Движение электронов, прошедших сквозь щель, многовариантно. Поскольку свободное движение электронов зависит только от свойств пространства-времени, то нужно было изменить геометрию пространства-времени, сделав ее многовариантной. В многовариантной геометрии в точке Q_0 имеется много векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1'$,..., которые равны заданному вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, но не равны друг другу. Такая геометрия не была известна в начале двадцатого века. Она невозможна в рамках римановой геометрии. В результате многовариантность была приписана динамике. Чтобы учесть многовариантность, динамические переменные были заменены матрицами и операторами. Получилась квантовая динамика, которая отличалась от классической динамики своими принципами. Многовариантная геометрия пространства-времени появилась только в конце двадцатого века [2, 3]. Дальнейшая геометризация физики стала возможной.

Следует заметить, что имеются многочисленные попытки дальнейшей геометризации физики. Они основывались на римановой геометрии. К сожалению, истинная пространственно-временная геометрия микромира не принадлежит к классу римановых геометрий, и приближение истинной пространственно-временной геометрии с помощью римановой геометрии не может быть полностью успешным. В частности, риманова геометрия не может описывать такое свойство геометрии пространства-времени как многовариантность. Многовариантность геометрии пространства-времени заменяется многовариантностью динамики (квантовой теорией).

Понимание природы элементарных частиц является целью дальнейшей геометризации физики. Эта цель отличается от цели традиционной теории элементарных частиц. Поясним различие на примере истории исследования химических элементов. Исследование химических элементов в некоторой степени напоминает исследование элементарных частиц. Химические элементы исследовались с двух сторон. Химики систематизировали химические элементы, исследуя их феноменологические свойства. Результаты этих исследований были сформулированы в 1970 году в виде периодической системы химических элементов. Формулируя эту систему Д.И. Менделеев ничего не знал о строении атомов. Тем не менее, периодическая система оказалась очень полезной с практической точки зрения.

Физики не стремились объяснить периодическую систему химических элементов. Они просто пытались понять структуру атома и причину дискретности атомных спектров. После построения теории атома стало ясно, что периодическая система химических элементов может быть получена и объяснена на основе атомной теории. В результате "физический" подход к исследованию химических элементов оказался более фундаментальным, глубоким и многообещающим, чем подход химиков. С другой стороны, "физический" подход к объяснению периодической системы был долгим и трудным. Объяснение периодической системы при "физическом" подходе едва ли было бы можно достигнуть без промежуточной цели (построение структуры атома).

Аналогично, используя геометризацию физики, мы пытаемся достигнуть промежуточной цели: объяснение многовариантности движения частиц (квантового движения) и объяснение способности дискриминировать массы частиц. Дискретный характер масс элементарных частиц может быть понят, только если мы поймем причину дискриминации элементарных частиц. Современный подход к теории элементарных частиц представляет собой "химический" (феноменологический подход. Он полезен с практической точки зрения. Однако, он едва ли позволит понять природу элементарных частиц.

Наиболее общая геометрия – это физическая геометрия, которая называется также трубчатой геометрией (Т-геометрией) [2, 3, 4], потому что прямые в Т-геометрии представляют собой, вообще говоря, полые трубки. Физическая геометрия полностью определяется ее мировой функцией $\sigma(P,Q) = \frac{1}{2}\rho^2(P,Q)$, где $\rho(P,Q)$ представляет собой интервал между точками P и Q в пространстве-времени, описываемом Т-геометрией. Все понятия Т-геометрии выражаются в терминах мировой функции σ. Динамика частиц (геометрическая динамика) также описывается в терминах мировой функции.

Элементарная частица рассматривается как элементарный геометрический объект (ЭГО) в пространстве-времени. Элементарный геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается его каркасом $\mathcal{P}^n = \{P_0,\ \ P_1, ...P_n\}$ и его оболочкой $\mathcal{E}$. Оболочка $\mathcal{E}$ определяется как множество нулей оболочной функции $f_{\mathcal{P}^n}$

$$\mathcal{O} = \{R | f_{\mathcal{P}^n}(R) = 0\} \tag{1.1}$$

Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$ представляет собой вещественную функцию аргументов $w = \{w_1, w_2, ...w_s\}$. Каждый аргумент w_k $k = 1, 2, ...s$ есть мировая функция $w_k = \sigma(L_k, S_k)$, $L_k, S_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$. Предполагается, что ЭГО с каркасом $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ находится в точке P_0.

В Т-геометрии вектор $\overrightarrow{P_0P_1} \equiv \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ представляет собой упорядоченное множество из двух точек $\{P_0, P_1\}$. Длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяется через мировую функцию с помощью соотношения

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = 2\sigma(P_0, P_1) \tag{1.2}$$

Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) \tag{1.3}$$

Эквивалентность $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется следующим образом. Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ эквивалентны (равны), если

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \quad ((\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|) \wedge (|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|) \tag{1.4}$$

В развернутом виде имеем

$$\begin{aligned} \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) &= 2\sigma(P_0, P_1) \\ \sigma(P_0, P_1) &= \sigma(Q_0, Q_1) \end{aligned}$$

Каркасы $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и $\mathcal{Q}^n = \{Q_0, Q_1, ...Q_n\}$ эквивалентны ($\mathcal{P}^n\mathrm{eqv}\mathcal{Q}^n$), если эквивалентны соответствующие векторы обоих каркасов

$$\mathcal{P}^n\mathrm{eqv}\mathcal{Q}^n: \quad \mathbf{P}_i\mathbf{P}_k\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k, \qquad i, k = 0, 1, ...n \tag{1.5}$$

Каркас $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ ЭГО в точке P_0 может существовать как каркас физического тела, если он может существовать в любой точке $Q_0 \in \Omega$ пространства-времени Ω. Это означает, что решение системы уравнений

$$\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k, \qquad i, k = 0, 1, ...n \tag{1.6}$$

существует для любой точки $Q_0 \in \Omega$. Далее мы примем для краткости, что существование каркаса означает существование соответствующего геометрического объекта.

В пространстве-времени Минковского проблема существования каркаса выглядит довольно просто, потому что при заданном $\mathcal{P}^n$ и Q_0 система (1.6) из $n(n+1)$ алгебраических уравнений всегда имеет единственное решение, хотя число уравнений может отличаться от числа переменных, подлежащих определению. В самом деле, в четырехмерном пространстве-времени число координат n точек $Q_1, Q_2, ...Q_n$ равно $4n$ (точка Q_0 предполагается заданной). Если $n > 3$, число $n(n+1)$ уравнений больше, чем число $(4n)$ переменных. В случае произвольной геометрии пространства-времени (произвольная мировая функция σ) существование решения системы (1.6) проблематично, вопрос о существовании каркаса как каркаса физического тела представляет собой существенную проблему.

Напротив, если $n < 3$, то число координат, подлежащих определению, меньше, чем число уравнений, и в точке Q_0 может быть много каркасов $\mathcal{Q}^n, \mathcal{Q}'^n, ...$

которые эквивалентны каркасу $\mathcal{P}^n$, но не эквивалентны между собой. Это свойство есть свойство многовариантности геометрии пространства-времени. Это свойство актуально для простых каркасов, которые содержат менее четырех точек ($n < 3$). Например, для каркаса из двух точек $\{P_0, P_1\}$, который описывается вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, проблема многовариантности актуальна.

В пространстве-времени Минковского эквивалентность двух векторов ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\text{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$) одновариантна для времениподобных векторов, однако она многовариантна для пространственноподобных векторов. В пространстве-времени общего вида соотношение эквивалентности $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\text{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ многовариантно как для времениподобных, так и для пространственноподобных векторов. Проблема многовариантности существенна как для существования, так и для динамики элементарных геометрических объектов (элементарных частиц).

Сформулируем динамику элементарных частиц в бескоординатной форме. Динамика элементарной частицы, имеющей каркас $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$, описывается мировой цепью

$$\mathcal{C} = \bigcup_k \mathcal{P}^n_{(k)}, \qquad \mathcal{P}^n_{(s)} = \left\{P_0^{(s)}, P_1^{(s)}, ...P_n^{(s)}\right\}, \qquad \mathcal{P}^n_{(0)} = \mathcal{P}^n, \tag{1.7}$$

$$P_0^{(s+1)} = P_1^{(s)} \qquad s = ...0, 1, 2, ... \tag{1.8}$$

Направление эволюции в пространстве-времени описывается ведущим вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Если движение элементарной частицы является свободным, то смежные звенья цепи $\mathcal{P}^n_{(s)}$ и $\mathcal{P}^n_{(s+1)}$ эквивалентны в том смысле, что

$$\mathcal{P}^n_{(s)}\text{eqv}\mathcal{P}^n_{(s+1)}: \qquad \mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)}\text{eqv}\mathbf{P}_i^{(s+1)}\mathbf{P}_k^{(s+1)}, \qquad i,k = 0,1,...n, \qquad s = ...0,1,2,... \tag{1.9}$$

Соотношения (1.7) - (1.9) реализуют бескоординатное описание свободного движения элементарной частицы. В простейшем случае, когда пространство-время является пространством-временем Минковского и каркас состоит из двух точек P_0, P_1 с времениподобным ведущим вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, бескоординатное описание с помощью соотношений (1.7) - (1.9) совпадает с традиционным описанием. Традиционная классическая динамика является хорошо определенной только в римановом пространстве-времени. Бескоординатное динамическое описание (1.7) - (1.9) элементарных частиц представляет собой обобщение традиционной классической динамики на случай произвольной геометрии пространства-времени.

2 Представления собственно евклидовой геометрии

Всякая геометрия получается как модификация собственно евклидовой геометрии. Однако, не все представления собственно евклидовой геометрии удобны для модификации. Имеются три представления собственно евклидовой геометрии [5]. Они различаются числом первичных (базисных) элементов, образующих евклидову геометрию.

Евклидово представление (E-представление) содержит три базисных элемента (точка, отрезок, угол). Любой геометрический объект (фигура) может быть построен из этих базисных элементов. Свойства базисных элементов и метод их использования описываются аксиомами Евклида.

Векторное представление (V-представление) собственно евклидовой геометрии содержит два базисных элемента (точка, вектор). Угол является производным элементом, который строится из двух векторов. Использование двух базисных элементов при построении геометрических объектов, регламентируется специальной геометрической структурой, известной как линейное векторное пространство со скалярным произведением, заданным на нем (евклидово пространство). Скалярное произведение описывает взаимоотношение двух базисных элементов (векторов), тогда как другие свойства линейного пространства ассоциируются с перемещением векторов.

Третье представление (σ-представление) собственно евклидовой геометрии содержит только один базисный элемент (точку). Отрезок (вектор) является производным элементом. Угол также является производным элементом. он строится из двух отрезков (векторов). σ-представление содержит специальную геометрическую структуру: мировую функцию σ, которая описывает взаимоотношение двух базисных элементов (точек). Мировая функция $\sigma\left(P_0, P_1\right) = \frac{1}{2}\rho^2\left(P_0, P_1\right)$, где $\rho\left(P_0, P_1\right)$ представляет собой расстояние между точками P_0 и P_1.

Понятие расстояния ρ, так же как и понятие мировой функции σ, используется во всех представлениях собственно евклидовой геометрии. Однако, мировая функция является структурой только в σ-представлении, где мировая функция σ описывает взаимоотношение двух базисных элементов (точек). Кроме того, мировая функция удовлетворяет ряду ограничений, формулируемых в терминах σ и только в терминах σ. Эти условия (условия евклидовости) будут сформулированы ниже. Условия евклидовости эквивалентны использованию линейного векторного пространства со скалярным произведением на нем, но формально они не упоминают линейное векторное пространство, потому что все понятия линейного векторного пространства, так же как все понятия собственно евклидовой геометрии выражаются прямо через мировую функцию σ и только через нее.

Если мы хотим модифицировать собственно евклидову геометрию, то эту модификацию следует осуществлять в σ-представлении. В σ-представлении специальная геометрическая структура (мировая функция) имеет вид функции двух точек. Модифицируя вид мировой функции, мы автоматически модифицируем все понятия собственно евклидовой геометрии, которые выражаются через мировую функцию. Очень важно, что все выражения геометрических понятий через мировую функцию не содержат ссылок на способ описания (размерность, систему координат, понятие кривой). Тот факт, что модифицируя мировую функцию, мы нарушаем условия евклидовости, не имеет значения, потому что в результате модификации получается неевклидова геометрия.

Изменение мировой функции означает изменение расстояния, что интерпретируется как деформация собственно евклидовой геометрии. Обобщенная геометрия, получившаяся в результате деформации собственно евклидовой геометрии называется трубчатой геометрией (Т-геометрией), потому что в обобщенной геометрии прямые являются, вообще говоря, трубками (поверхностями), а не одномерными линиями. Физическая геометрия – другое название Т-геометрии. Физическая геометрия представляет собой геометрию, полностью описываемую мировой функцией.

Всякая физическая геометрия может использоваться как геометрия пространства-времени в том смысле, что множество всех Т-геометрий представляет собой множество всех возможных геометрий пространства-времени. Возможность модификации собственно евклидовой геометрии в V-представлении очень ограничена, потому что в этом представлении имеются два базисных элемента. Они не являются независимыми и их нельзя модифицировать независимо. Формально это означает, что линейное векторное пространство нужно сохранить как геометрическую структуру. Это означает, в частности, что обобщенная геометрия остается непрерывной, однородной и изотропной. Размерность обобщенной геометрии должна быть фиксированной. Кроме того, такая обобщенная геометрия не может быть многовариантной.

Такое свойство геометрии пространства-времени как многовариантность можно получить только в σ-представлении. Поскольку σ-представление собственно евклидовой геометрии не было известно в двадцатом веке, многовариантность геометрии тоже была неизвестным понятием.

Переход от V-представления к σ-представлению осуществляется следующим образом. Все понятия линейного векторного пространства выражаются в терминах мировой функции σ. На самом деле, понятие скалярного произведения двух векторов и понятие линейной зависимости n векторов выражаются через мировую функцию σ_{E} собственно евклидовой геометрии. Такие операции над векторами как равенство векторов, сложение векторов и умножение вектора на вещественное число выражаются с помощью некоторых формул. Характерные свойства этих операций, задаваемые в V-представлении с помощью аксиом, задаются теперь с помощью специальных свойств евклидовой мировой функции σ_{E}. После выражения свойств линейного векторного пространства через мировую функцию о линейном векторном пространстве можно не упоминать, потому что все его свойства описываются мировой функцией.

Мы получаем σ-представление собственно евклидовой геометрии, где некоторые свойства линейного векторного пространства выражаются в виде формул, тогда как другая часть свойств скрыта в специфическом виде евклидовой мировой функции σ_{E}. Модифицируя мировую функцию, мы автоматически модифицируем свойства линейного векторного пространства (которое на самом деле не упоминается). При такой модификации мы не задумываемся над способом модификации линейного векторного пространства, которое является главной геометрической структурой в V-представлении.

В σ-представлении линейное векторное пространство является производной структурой, о которой можно не упоминать вовсе. Таким образом, при переходе к σ-представлению понятия линейного векторного пространства (первичные в V-представлении) становятся вторичными понятиями (производными понятиями σ-представления). В σ-представлении мы имеем следующие выражения для понятий собственно евклидовой геометрии.

Вектор $\mathbf{PQ} = \overrightarrow{PQ}$ представляет собой упорядоченное множество из двух точек P и Q. Длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяется соотношением

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = \sqrt{2\sigma\left(P_0, P_1\right)} \tag{2.1}$$

Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma\left(P_0, Q_1\right) + \sigma\left(P_1, Q_0\right) - \sigma\left(P_0, Q_0\right) - \sigma\left(P_1, Q_1\right) \tag{2.2}$$

где мировая функция σ

$$\sigma: \qquad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma\left(P, Q\right) = \sigma\left(Q, P\right), \qquad \sigma\left(P, P\right) = 0, \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{2.3}$$

является мировой функцией σ_{E} собственно евклидовой геометрии.

В собственно евклидовой геометрии n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, ...n$ линейно зависимы, если и только если определитель Грама

$$F\left(\mathcal{P}^n\right) = 0, \qquad \mathcal{P}^n = \left\{P_0, P_1, ..., P_n\right\} \tag{2.4}$$

где определитель Грама $F\left(\mathcal{P}^n\right)$ задается соотношением

$$F\left(\mathcal{P}^n\right) \equiv \det\left|\left|\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right)\right|\right|, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{2.5}$$

При использовании выражения (2.2) для скалярного произведения, условие линейной зависимости n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, ...n$ записывается в виде

$$F\left(\mathcal{P}^n\right) \equiv \det\left|\left|\sigma\left(P_0, P_i\right) + \sigma\left(P_0, P_k\right) - \sigma\left(P_i, P_k\right)\right|\right| = 0, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{2.6}$$

Определение (2.2) скалярного произведения двух векторов совпадает с традиционным определением скалярного произведения векторов в собственно евклидовом пространстве (это легко проверить). Соотношения (2.2), (2.6) не содержат ссылок на размерность евклидова пространства и на систему координат в нем. Следовательно, соотношения (2.2), (2.6) являются общими геометрическими соотношениями, которые можно рассматривать как определения скалярного произведения двух векторов и линейной зависимости векторов.

Эквивалентность (равенство) двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношениями

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{2.7}$$

где $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ есть длина (2.1) вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = \sqrt{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)} = \sqrt{2\sigma\left(P_0, P_1\right)} \tag{2.8}$$

В развернутой форме соотношение (2.7) эквивалентности двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ имеет вид

$$\sigma\left(P_0, Q_1\right) + \sigma\left(P_1, Q_0\right) - \sigma\left(P_0, Q_0\right) - \sigma\left(P_1, Q_1\right) = 2\sigma\left(P_0, P_1\right) \tag{2.9}$$

$$\sigma\left(P_0, P_1\right) = \sigma\left(Q_0, Q_1\right) \tag{2.10}$$

Если точки P_0, P_1, определяющие вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, и начало Q_0 вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ заданы, то можно определить вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, эквивалентный (равный) вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, решая два уравнения (2.9), (2.10) относительно положения точки Q_1. В случае собственно евклидова пространства имеется одно и только одно решение уравнений (2.9), (2.10) независимо от размерности n пространства.

В случае произвольной Т-геометрии нельзя гарантировать ни существования, ни единственности решения уравнений (2.9), (2.10) для точки Q_1. Число решений зависит от вида мировой функции σ. Этот факт означает многовариантность свойства эквивалентности векторов в произвольной Т-геометрии. Другими словами, одновариантность эквивалентности векторов векторов в собственно евклидовом пространстве является специфическим свойством собственно евклидовой геометрии, и это свойство обусловлено видом евклидовой мировой функции. В других Т-геометриях это свойство, вообще говоря, не имеет места.

Многовариантность является общим свойством физической геометрии. Оно связано с необходимостью решения алгебраических уравнений, содержащих мировую функцию. Поскольку мировая функция различна в разных физических геометриях, решение этих уравнений может быть не единственным, или не существовать вовсе.

Если в n-мерном евклидовом пространстве $F\left(\mathcal{P}^n\right) \neq 0$, векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, ...n$ линейно независимы. Тогда можно построить прямолинейную систему координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, ...n$ в n-мерном евклидовом пространстве. Ковариантные координаты $x_k = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}\right)_k$ вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ в этой системе координат имеют вид

$$x_k = x_k\left(P\right) = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}\right)_k = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right), \qquad k = 1, 2, ...n \tag{2.11}$$

Теперь мы можем сформулировать условия евклидовости. Эти условия являются условиями того, что Т-геометрия, описываемая мировой функцией σ, является n-мерной собственно евклидовой геометрией.

I. Определение размерности и введение прямолинейной системы координат:

$$\exists\mathcal{P}^n \equiv \left\{P_0, P_1, ...P_n\right\} \subset \Omega, \qquad F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{2.12}$$

где $F_n\left(\mathcal{P}^n\right)$ есть определитель Грама (2.5).

Векторы P_0P_i, $i = 1, 2, ...n$ являются базисными векторами прямолинейной системы координат K_n с началом в точке P_0. В K_n ковариантный метрический тензор $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, ...n$ и контравариантный метрический тензор $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, ...n$ определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i, l = 1, 2, ...n \tag{2.13}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{2.14}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)(x_i(P) - x_i(Q))(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{2.15}$$

где координаты $x_i = x_i(P)$, $i = 1, 2, ...n$ точки P являются ковариантными координатами вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$. Они определяются соотношением (2.11).

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{2.16}$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.17}$$

рассматриваемая в качестве системы уравнений для определения положения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ...n$ имеет всегда одно и только одно решение.

Все условия I $\div$ IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства. Можно показать, что условия I $\div$ IV являются необходимыми и достаточными условиями того, что множество Ω вместе с мировой функцией σ, заданной на Ω описывает n-мерное евклидово пространство [2].

Исследование дираковской частицы (динамической системы, описываемой уравнением Дирака) показало, что дираковская частица является составной частицей [6], внутренние степени свободы которой описываются нерелятивистски [7]. Сложная структура дираковской частицы может быть объяснена как релятивистский ротатор, состоящий из двух или большего числа частиц, вращающихся вокруг общего центра инерции. Релятивистский ротатор объясняет существование спина дираковской частицы, но появляется проблема конфайнмента вращающихся частиц. В настоящей работе мы пытаемся объяснить проблему спина в рамках программы геометризации физики, когда динамика физических тел определяется геометрией пространства-времени. Хотя первые этапы геометризации физики (СТО и ОТО) проявили себя очень хорошо, работы по дальнейшей геометризации физики, игнорирующие принципы квантовой теории, обычно рассматривались как диссидентские.

3 Динамика как результат геометрии пространства-времени

Динамика, описываемая физической геометрией (Т-геометрией) представлена в [1]. Здесь мы только напомним постановку проблемы динамики. Геометрический объект $\mathcal{O} \subset \Omega$ представляет собой подмножество точечного множества Ω. В Т-геометрии геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается с помощью каркасно-оболочного метода. Это означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ рассматривается как множество пересечений и объединений элементарных геометрических объектов (ЭГО). Элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ описывается своим каркасом $\mathcal{P}^n$ и оболочной функцией $f_{\mathcal{P}^n}$. Конечное множество $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \Omega$ параметров оболочной функции $f_{\mathcal{P}^n}$ является каркасом элементарного геометрического объекта (ЭГО) $\mathcal{E} \subset \Omega$.

Множество $\mathcal{E} \subset \Omega$ точек, образующих ЭГО, называется оболочкой его каркаса $\mathcal{P}^n$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$

$$f_{\mathcal{P}^n}: \qquad \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

определяющая ЭГО, является функцией текущей точки $R \in \Omega$ и параметров $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}^n}$ предполагается алгебраической функцией s аргументов $w = \{w_1, w_2, ...w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)/2$. Каждый из аргументов $w_k = \sigma(Q_k, L_k)$ является мировой функцией σ двух точек $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}^n\}$, или принадлежащих каркасу $\mathcal{P}^n$, или совпадающих с текущей точкой R.

Таким образом, любой геометрический объект $\mathcal{E}$ определяется его каркасом $\mathcal{P}^n$ и его оболочной функцией $f_{\mathcal{P}^n}$. Элементарный геометрический объект $\mathcal{E}$ представляет собой множество нулей оболочной функции

$$\mathcal{E} = \{R | f_{\mathcal{P}^n}(R) = 0\} \tag{3.2}$$

Определение. Два ЭГО $\mathcal{E}_{\mathcal{P}^n}$ и $\mathcal{E}_{\mathcal{Q}^n}$ эквивалентны, если их каркасы $\mathcal{P}^n$ и $\mathcal{Q}^n$ эквивалентны и оболочные функции $f_{\mathcal{P}^n}$ и $g_{\mathcal{Q}^n}$ эквивалентны.

Эквивалентность ($\mathcal{P}^n \mathrm{eqv} \mathcal{Q}^n$) двух каркасов $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \Omega$ и $\mathcal{Q}^n \equiv \{Q_0, Q_1, ..., Q_n\} \subset \Omega$ означает, что

$$\mathcal{P}^n \mathrm{eqv} \mathcal{Q}^n: \qquad \mathbf{P}_i\mathbf{P}_k \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k, \qquad i,k = 0,1,...n, \quad i \leq k \tag{3.3}$$

Эквивалентность оболочных функций $f_{\mathcal{P}^n}$ и $g_{\mathcal{Q}^n}$ означает, что они имеют одно и то же множество нулей. Другими словами

$$f_{\mathcal{P}^n}(R) = \Phi\left(g_{\mathcal{P}^n}(R)\right), \qquad \forall R \in \Omega \tag{3.4}$$

где Φ является произвольной функцией, обладающей свойством

$$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \qquad \Phi(0) = 0 \tag{3.5}$$

Эволюция ЭГО $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^n}$ в пространстве-времени описывается мировой цепью $\mathcal{C}_{\rm fr}$ связанных эквивалентных ЭГО. Точка P_0 каркаса $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ рассматривается как начало геометрического объекта $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^n}$. ЭГО $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^n}$ считается находящимся в его начале P_0.

Рассмотрим множество эквивалентных каркасов $\mathcal{P}^n_{(l)} = \left\{P_0^{(l)}, P_1^{(l)}, ...P_n^{(l)}\right\}$, $l = ...0, 1, ...$ которые попарно эквивалентны

$$\mathbf{P}_i^{(l)}\mathbf{P}_k^{(l)}\mathrm{eqv}\mathbf{P}_i^{(l+1)}\mathbf{P}_k^{(l+1)}, \qquad i,k = 0,1,...n; \qquad l = ...1,2,... \tag{3.6}$$

Каркасы $\mathcal{P}^n_{(l)}$, $l = ...0, 1, ...$ связаны, и они образуют цепь в направлении вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, если точка P_1 одного каркаса совпадает с началом P_0 смежного каркаса

$$P_1^{(l)} = P_0^{(l+1)}, \qquad l = ...0,1,2,... \tag{3.7}$$

Цепь $\mathcal{C}_{\rm fr}$ описывает эволюцию элементарного геометрического объекта $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^n}$ в направлении ведущего вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Эволюция ЭГО $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^n}$ является временной эволюцией, если векторы $\mathbf{P}_0^{(l)}\mathbf{P}_1^{(l)}$ времениподобны $\left|\mathbf{P}_0^{(l)}\mathbf{P}_1^{(l)}\right|^2 > 0$, $l = ...0, 1, ...$ Эволюция ЭГО $\mathcal{O}_{\mathcal{P}^n}$ является пространственной эволюцией, если векторы $\mathbf{P}_0^{(l)}\mathbf{P}_1^{(l)}$ пространственноподобны $\left|\mathbf{P}_0^{(l)}\mathbf{P}_1^{(l)}\right|^2 < 0$, $l = ...0, 1, ...$

Заметим, что все смежные звенья (ЭГО) цепи попарно эквиалентны, хотя два звена могут быть не эквивалентны, если они не являются смежными. Однако длины соответствующих векторов равны во всех звеньях цепи.

$$\left|\mathbf{P}_i^{(l)}\mathbf{P}_k^{(l)}\right| = \left|\mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)}\right|, \qquad i,k = 0,1,...n; \qquad l,s = ...1,2,... \tag{3.8}$$

Мы будем называть вектор $\mathbf{P}_0^{(l)}\mathbf{P}_1^{(l)}$, определяющий вид эволюции и форму цепи, ведущим вектором. Этот вектор определяет направление 4-скорости физического тела, которое ассоциируется со звеном мировой цепи. Если соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^n\mathrm{eqv}\mathcal{Q}^n \quad &: \qquad (\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k.\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k) = |\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k|\cdot|\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k|, \quad |\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k| = |\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k|, \\ i,k \quad &= \quad 0,1,2,...n \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^n\mathrm{eqv}\mathcal{R}^n \quad &: \qquad (\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k.\mathbf{R}_i\mathbf{R}_k) = |\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k|\cdot|\mathbf{R}_i\mathbf{R}_k|, \quad |\mathbf{Q}_i\mathbf{Q}_k| = |\mathbf{R}_i\mathbf{R}_k|, \\ i,k \quad &= \quad 0,1,2,...n \end{aligned} \tag{3.10}$$

удовлетворяются, то соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^n\mathrm{eqv}\mathcal{R}^n \quad &: \qquad (\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k.\mathbf{R}_i\mathbf{R}_k) = |\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k|\cdot|\mathbf{R}_i\mathbf{R}_k|, \quad |\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k| = |\mathbf{R}_i\mathbf{R}_k|, \\ i,k \quad &= \quad 0,1,2,...n \end{aligned} \tag{3.11}$$

вообще говоря не удовлетворяются, потому что соотношения (3.11) содержат скалярные произведения $(\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k.\mathbf{R}_i\mathbf{R}_k)$. Эти скалярные произведения содержат мировые функции $\sigma(P_i, R_k)$, которые не содержатся в соотношениях (3.9), (3.10).

Мировая цепь $\mathcal{C}_{\rm fr}$, состоящая из эквивалентных звеньев (3.6), (3.7), описывает свободное движение физического тела (частицы), ассоциированного с каркасом $\mathcal{P}^n$. Примем, что *движение физического тела является свободным, если все точки тела движутся свободно* (т.е. без ускорения). Если внешние силы отсутствуют, физическое тело как целое движется без ускорения. Однако, если тело вращается, то нельзя рассматривать движение этого тела как свободное, потому что не все точки этого тела движутся свободно (без ускорения). Во вращающемся теле имеются внутренние силы, которые порождают центростремительное ускорение некоторых точек тела. В результате некоторые точки тела не движутся свободно. Движение вращающегося тела может быть свободным только в среднем, но не полностью свободным. Концепция несвободного движения частицы довольно неопределенна, и мы ограничимся рассмотрением только свободного движения.

Традиционная концепция движения неточечной частицы, которое является свободным в среднем, содержит свободный сдвиг, который описывается 4-вектором скорости и пространственное вращение, описываемое 3-псевдовектором угловой скорости ω. 4-вектор скорости ассоциируется с времениподобным ведущим вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. При свободном в среднем движении вращающегося тела некоторые из векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2^{(\rm s)}, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_3^{(\rm s)}$,... каркаса $\mathcal{P}^n$ не параллельны векторам $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2^{(\rm s+1)}, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_3^{(\rm s+1)}$, ... хотя при свободном движении все векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2^{(\rm s)}, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_3^{(\rm s)}$, ... должны быть эквивалентны векторам $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2^{(\rm s+1)}, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_3^{(\rm s+1)}$, ... как это следует из (3.6). Это означает, что мировая цепь $\mathcal{C}_{\rm fr}$ свободно движущегося тела описывает только поступательное движение физического тела, но не его вращение.

Если ведущий вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является пространственноподобным, тело, описываемое каркасом $\mathcal{P}^n$, эволюционирует в пространственноподобном направлении. Кажется, что пространственная эволюция невозможна. Однако, это не совсем так. Если мировая цепь образует винтовую линию с времениподобной осью, то такая мировая цепь может рассматриваться как времениподобная в среднем. На самом деле такие мировые цепи возможны. Например, мировая цепь классической дираковской частицы представляет собой спираль с времениподобной осью. Не совсем ясно, являются ли звенья этой цепи пространственноподобными, потому что внутренние степени свободы дираковской частицы, ответственные за спиральность мировой цепи, описываются нерелятивистски.

Таким образом, рассмотрение пространственной эволюции не бессмысленно, особенно если принять во внимание, что пространственная эволюция может имитировать вращение, которое отсутствует при свободном движении частицы. Далее мы рассмотрим проблему пространственной эволюции.

4 Динамика классической дираковской частицы

Дираковская частица $\mathcal{S}_{\rm D}$ представляет собой динамическую систему, описываемую уравнением Дирака. Свободная дираковская частица $\mathcal{S}_{\rm D}$ описывается свободным уравнением Дирака

$$i\hbar\gamma^l\partial_l\psi - m\psi = 0 \tag{4.1}$$

где ψ есть четырехкомпонентная комплексная волновая функция, и γ^l, $l = 0,1,2,3$ суть 4×4 комплексные матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma^i\gamma^k + \gamma^k\gamma^i = 2Ig^{ik}, \qquad i,k = 0,1,2,3,$$

I есть 4×4 единичная матрица.

Выражения для физических величин: 4-тока j^k частиц и тензора энергии-импульса T_l^k имеют вид

$$j^k = \bar{\psi}\gamma^k\psi, \qquad T_l^k = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^k\partial_l\psi - \partial_l\bar{\psi}\cdot\gamma^k\psi\right), \qquad k,l = 0,1,2,3 \tag{4.2}$$

где $\bar{\psi} = \psi^*\gamma^0$, ψ^* является величиной эрмитово сопряженной к ψ. Классическая дираковская частица является динамической системой $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$, которая получается из динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ в классическом пределе.

Чтобы получить классический предел, нельзя было положить квантовую постоянную $\hbar = 0$ в уравнении (4.1), потому что в этом случае мы не получили бы никакого разумного описания. Дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ является квантовой частицей в том смысле, что она описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, которые содержат квантовую постоянную $\hbar$. Классическая дираковская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые содержат квантовую постоянную $\hbar$ в качестве параметра.

Может ли система ОДУ осуществлять классическое описание, если она содержит квантовую постоянную $\hbar$? Ответ зависит от позиции исследователя. Если исследователь полагает, что *квантовая постоянная является атрибутом квантовых принципов и только квантовых принципов*, то он заключает, что динамические уравнения, содержащие $\hbar$, не могут осуществлять классическое описание, в котором не должны использоваться квантовые принципы.

Однако, если исследователь рассматривает классическое описание просто как метод исследования квантовых динамических уравнений, то не имеет значения, содержит ли система ОДУ квантовую постоянную. Важно лишь то, что система дифференциальных уравнений в частных производных аппроксимируется системой ОДУ. Динамическая система, описываемая дифференциальными уравнениями в частных производных содержит бесконечное число степеней свободы. Динамическая система, описываемая ОДУ, имеет несколько степеней свободы. Она существенно проще, чем система дифференциальных уравнений в частных производных и может быть исследована более эффективно.

Для получения классического приближения мы используем процедуру динамической расквантизации [8]. Эта процедура преобразует систему дифференциальных уравнений в частных производных в систему ОДУ. Процедура динамической расквантизации является динамической процедурой, которая не имеет отношения к процессу квантования или деквантования в том смысле, что она не ссылается на квантовые принципы. Динамическая расквантизация означает, что все производные ∂_k в динамических уравнениях заменяются проекцией вектора ∂_k на вектор тока j^k

$$\partial_k \longrightarrow \frac{j_k}{j_l j^l} j^s \partial_s \tag{4.3}$$

Эта динамическая процедура называется динамической расквантизацией, потому что, применяя ее к уравнению Шредингера, мы получаем динамические уравнения для статистического ансамбля классических нерелятивистских частиц. Эти динамические уравнения представляют собой ОДУ, которые не зависят от квантовой постоянной $\hbar$.

Применяя операцию (4.3) к уравнению Дирака (4.1), получаем динамические уравнения для динамической системы $\mathcal{E}_{\mathrm{Dqu}}$ в виде

$$i\hbar\gamma^l \frac{j_l}{j^k j_k} j^s \partial_s \psi - m\psi = 0, \qquad j^k = \bar{\psi}\gamma^k\psi \tag{4.4}$$

Уравнение (4.4) содержит только производные $j^s\partial_s = \left(\bar{\psi}\gamma^s\psi\right)\partial_s$ в направлении 4-вектора тока j^k. В терминах волновой функции ψ динамические уравнения (4.4) для $\mathcal{E}_{\mathrm{Dqu}}$ выглядят довольно громоздко.

Однако, в надлежащим образом выбранных переменных действие для динамической системы $\mathcal{E}_{\mathrm{Dqu}}$ имеет вид [8]

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[x,\vec{\xi}] = \int \left\{ -\kappa_0 m\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} + \hbar\frac{(\dot{\vec{\xi}}\times\vec{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\vec{\xi}\mathbf{z})} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\vec{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}+\dot{x}^0)} \right\} d^4\tau \tag{4.5}$$

где точка означает полную производную $\dot{x}^s \equiv dx^s/d\tau_0$. Величины $x = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{x^i\}$, $i = 0,1,2,3$, $\vec{\xi} = \{\xi^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$ рассматриваются как функции лагранжевых координат τ_0, $\vec{\tau} = \{\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$. Здесь и далее символ $\times$ означает векторное произведение двух 3-векторов. Величина $\mathbf{z}$ представляет собой единичный 3-вектор, κ_0 является дихотомической величиной $\kappa_0 = \pm 1$, m есть постоянная (масса), взятая из уравнения Дирака (4.1). Фактически величины x зависят от $\vec{\tau}$ как от параметров, потому что действие (4.5) не содержит производных по τ_α, $\alpha = 1,2,3$.

Плотность лагранжиана действия (4.5) не содержит явно независимые переменные $\vec{tau}$. Следовательно, оно может быть записано в виде

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[x,\vec{\xi}] = \int \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\vec{\xi}]d\vec{\tau}, \qquad d\vec{\tau} = d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{4.6}$$

где

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\vec{\xi}] = \int \left\{ -\kappa_0 m\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} + \hbar\frac{(\dot{\vec{\xi}}\times\vec{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\vec{\xi}\mathbf{z})} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\vec{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}+\dot{x}^0)} \right\} d\tau_0 \tag{4.7}$$

Действие (4.6) является действием для динамической системы $\mathcal{E}_{\mathrm{Dqu}}$, которая представляет собой множество одинаковых независимых динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$. Такая динамическая система называется статистическим ансамблем. Динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ являются элементами (конституэнтами) статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{Dqu}}$.

Динамические уравнения для каждой $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Это можно интерпретировать в том смысле, что динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ может рассматриваться как классическая, хотя лагранжиан динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ содержи

т квантовую постоянную $\hbar$. Динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ условимся называть классической дираковской частицей.

Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ имеет десять степеней свободы. Она описывает составную частицу [6]. Внешние степени свободы описываются релятивистски переменными x. Внутренние степени свободы описываются нерелятивистски [7] переменными $\vec{\xi}$. Решение динамических уравнений, порожденных действием (4.7) дает следующий результат [6].

В системе координат, где 4-вектор канонического импульса P_k имеет вид

$$P_k = \{p_0, \mathbf{p}\} = \left\{ -\left(2 - \frac{1}{\gamma}\right) \kappa_0 m, 0, 0, 0 \right\} \tag{4.8}$$

мировая линия классической дираковской частицы представляет собой винтовую линию, которая описывается соотношением

$$\{t, \mathbf{x}\} \quad = \quad \{t, a \sin(\Omega t), a \cos(\Omega t), 0\} \tag{4.9}$$

$$a \quad = \quad \frac{\hbar\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1}}{2m}, \qquad \Omega = \frac{2m}{\hbar\gamma^2} \tag{4.10}$$

где скорость света $c = 1$, и γ представляет собой произвольную постоянную (Лоренц-фактор классической дираковской частицы).

Скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ классической дираковской частицы выражается следующим образом

$$\mathbf{v}^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \tag{4.11}$$

Спиральность мировой линии классической дираковской частицы означает вращение частицы вокруг некоторой точки. С одной стороны, такое вращение представляется разумным, поскольку оно непринужденно объясняет спин дираковской частицы и ее магнитный момент. С другой стороны описание этого вращения является нерелятивистским. Кроме того кажется странным, что мировая линия свободной классической частицы является спиралью, а не прямой линией. Попытка рассмотрения дираковской частицы как ротатора, состоящего из двух частиц [6], сталкивается с проблемой удержания двух частиц.

Хотя чисто динамические методы исследования являются более общими и эффективными, чем методы исследования, основанные на квантовых принципах, чисто динамические методы исследования встречают непонимание со стороны большинства исследователей, которые верят, что дираковская частица должна исследоваться квантовыми методами, т.е. методами основанными на квантовых принципах. Работы, посвященные исследованию уравнения Дирака динамическими методами рассматриваются как диссидентские. Они отклоняются рецензируемыми журналами (смотри обсуждение в [9, 10])

Совершенно неожиданно было обнаружено, что спиральные мировые линии, характерные для классической дираковской частицы, могут быть получены как результат пространственной эволюции геометрических объектов в рамках надлежащим образом выбранной геометрии пространства-времени.

5 Существование такой геометрии пространства-времени, где мировая линия классической дираковской частицы выглядит как результат пространственной эволюции

Рассмотрим плоское однородное изотропное пространство-время $V_\mathrm{d} = \{\sigma_\mathrm{d}, \mathbb{R}^4\}$, описываемое мировой функцией

$$\sigma_\mathrm{d} = \sigma_\mathrm{M} + d \cdot \mathrm{sgn}\,(\sigma_\mathrm{M}) \tag{5.1}$$

$$d = \lambda_0^2 = \mathrm{const} > 0 \tag{5.2}$$

$$\mathrm{sgn}\,(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0 \\ 0, & \text{если} \quad x = 0 \\ -1, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}, \tag{5.3}$$

где σ_M является мировой функцией 4-мерного пространства-времени Минковского. λ_0 есть некоторая элементарная длина.

В такой пространственно-временной геометрии два связанных времениподобных вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ описываются следующим образом [1]

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 : \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{\mu, 0, 0, 0\}, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \left\{\mu + \frac{3\lambda_0^2}{\mu}, \lambda_0\sqrt{6 + \frac{9\lambda_0^2}{\mu^2}}\mathbf{n}\right\} \tag{5.4}$$

где $\mathbf{n}$ есть произвольный единичный 3-вектор. Величина μ представляет собой длину вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ (геометрическая масса, принадлежащая частице, которая описывается вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$).

Мы видим, что пространственная часть вектора $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ определяется с точностью до произвольного 3-вектора длиной $\lambda_0\sqrt{6 + \frac{9\lambda_0^2}{\mu^2}}$. Эта многовариантность порождает вихляние звеньев мировой линии, состоящей из эквивалентных времениподобных векторов ...$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$,...

Статистическое описание цепи с вихляющимися звеньями совпадает с квантовым описанием частицы с массой $m = b\mu$, если элементарная длина $\lambda_0 = \hbar^{1/2}\,(2bc)^{-1/2}$, где c есть скорость света, $\hbar$ является квантовой постоянной, а b

есть некоторая универсальная постоянная, чья точная величина не определена [11], потому что статистическое описание не содержит величины b. Таким образом, характерная длина вихляния порядка λ_0.

Чтобы объяснить квантовое описание частицы как статистическое описание многовариантного классического движения, следует использовать мировую функцию (5.3). Однако вид мировой функции (5.3) определяется совпадением двух описаний только для величины $\sigma_{\mathrm{M}} > \sigma_0$, где постоянная σ_0 определяется через массу m_{L} легчайшей массивной частицы (электрона) с помощью соотношения

$$\sigma_0 \leq \frac{\mu_{\mathrm{L}}^2}{2} - d = \frac{m_{\mathrm{L}}^2}{2b^2} - d = \frac{m_{\mathrm{L}}^2}{2b^2} - \frac{\hbar}{2bc} \tag{5.5}$$

где $\mu_{\mathrm{L}} = m_{\mathrm{L}}/b$ есть геометрическая масса легчайшей массивной частицы (электрона). Геометрическая масса μ_{LM} той же самой частицы, рассматриваемая в пространственно-временной геометрии Минковского, имеет вид

$$\mu_{\mathrm{LM}} = \sqrt{\mu_{\mathrm{L}}^2 + 2d}$$

Поскольку $\sigma_0 > 0$, и, следовательно, $m_{\mathrm{L}}^2 - b\hbar c^{-1} > 0$, Получаем следующую оценку для универсальной постоянной b

$$b < \frac{m_{\mathrm{L}}^2 c}{\hbar} \approx 2.4 \times 10^{-17} \mathrm{g/cm}. \tag{5.6}$$

Интенсивность вихляния может описываться вектором многовариантности b_{m}, который определяется следующим образом. Пусть $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2'$ суть векторы, которые эквивалентны вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$. Пусть

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \left\{\mu + \frac{3\lambda_0^2}{\mu}, \lambda_0\sqrt{6 + \frac{9\lambda_0^2}{\mu^2}}\mathbf{n}\right\}, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2' = \left\{\mu + \frac{3\lambda_0^2}{\mu}, \lambda_0\sqrt{6 + \frac{9\lambda_0^2}{\mu^2}}\mathbf{n}'\right\}$$

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2' = \left\{0, \lambda_0\sqrt{6 + \frac{9\lambda_0^2}{\mu^2}}\left(\mathbf{n}' - \mathbf{n}\right)\right\} \tag{5.7}$$

который представляет собой разность векторов $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2'$. Рассмотрим длину $|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2'|_{\mathrm{M}}$ вектора $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2'$ в пространстве-времени Минковского. Получаем

$$|\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2'|_{\mathrm{M}}^2 = -\lambda_0^2\left(6 + \frac{9\lambda_0^2}{\mu^2}\right)(2 - 2\mathbf{n}\mathbf{n}') \tag{5.8}$$

Длина вектора (5.7) минимальна при $\mathbf{n} = -\mathbf{n}'$. При $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$ длина вектора (5.7) максимальна и равна нулю. По определению вектор $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2'$ при $\mathbf{n} = -\mathbf{n}'$

является 4-вектором многовариантности $b_{\rm m}$, который описывает интенсивность многовариантности. Имеем

$$b_{\rm m}=\left\{0,\ 2\lambda_0\sqrt{6+\frac{9\lambda_0^2}{\mu^2}}\mathbf{n}\right\}\qquad |b_{\rm m}|^2=(b_{\rm m}.b_{\rm m})=-4\lambda_0^2\left(6+\frac{9\lambda_0^2}{\mu^2}\right)\tag{5.9}$$

где $\mathbf{n}$ есть произвольный единичный 3-вектор. Вектор многовариантности $b_{\rm m}$ пространственноподобен.

В случае, когда $\mu\gg\lambda_0$, соответствующая длина вихляния определяется соотношением

$$\lambda_{\rm w}=\frac{1}{2}\sqrt{|(b_{\rm m}.b_{\rm m})|}\approx\sqrt{6}\lambda_0=\sqrt{6}\sqrt{\frac{\hbar}{2bc}}>\sqrt{3}\frac{\hbar}{m_{\rm L}c}=\sqrt{3}\lambda_{\rm com}$$

где $\lambda_{\rm com}$ есть комптоновская длина волны частицы с массой $m_{\rm L}$. Соотношение (5.6) означает, что

$$\sigma_{\rm d}=\sigma_{\rm M}+d,\qquad \text{если } \sigma_{\rm M}>\sigma_0\tag{5.10}$$

Для других значений $\sigma_{\rm M}<\sigma_0$ вид мировой функции $\sigma_{\rm d}$ может отличаться от соотношения (5.10). Однако, $\sigma_{\rm d}=0$, если $\sigma_{\rm M}=0$.

Два связанных эквивалентных пространственноподобных вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ имеют вид [1]

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1=\{0,l,0,0\}\,,\qquad \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2=\left\{\sqrt{\gamma_2^2+\gamma_3^2+6\lambda_0^2+\frac{9\lambda_0^4}{l^2}},l,\gamma_2,\gamma_3\right\}\tag{5.11}$$

где постоянные γ_2 и γ_3 являются произвольными. Результат получен для пространственно-временной геометрии (5.1). Произвольность постоянных γ_2,γ_3 порождает многовариантность вектора $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ даже в пространственно-временной геометрии Минковского, где $\lambda_0=0$.

Векторы $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2'$

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2&=\left\{\sqrt{\gamma_2^2+\gamma_3^2+6\lambda_0^2+\frac{9\lambda_0^4}{l^2}},l,\gamma_2,\gamma_3\right\},\\ \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2'&=\left\{\sqrt{\gamma_2'^2+\gamma_3'^2+6\lambda_0^2+\frac{9\lambda_0^4}{l^2}},l,\gamma_2',\gamma_3'\right\}\end{aligned}$$

эквивалентны вектору $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$. Разность $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2'$ двух векторов $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2'$ имеет вид

$$\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2'=\left\{\sqrt{\gamma_2'^2+\gamma_3'^2+6\lambda_0^2+\frac{9\lambda_0^4}{l^2}}-\sqrt{\gamma_2^2+\gamma_3^2+6\lambda_0^2+\frac{9\lambda_0^4}{l^2}},0,\gamma_2'-\gamma_2,\gamma_3'-\gamma_3\right\}$$

Вектор $\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2'$ может быть пространственноподобным и времениподобным. Его длина имеет экстремум, если $\gamma_2' = \gamma_2$ и $\gamma_3' = \gamma_3$. В этом случае длина $|\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2'|^2 = 0$ Однако, длина

$$|\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2'|^2 = \left(\sqrt{\gamma_2'^2 + \gamma_3'^2 + 6\lambda_0^2 + \frac{9\lambda_0^4}{l^2}} - \sqrt{\gamma_2^2 + \gamma_3^2 + 6\lambda_0^2 + \frac{9\lambda_0^4}{l^2}}\right)^2 - (\gamma_2' - \gamma_2)^2 - (\gamma_3' - \gamma_3)^2$$

не имеет ни максимума ни минимума, и нельзя ввести вектор многовариантности типа (5.9).

Многовариантность эквивалентности пространственноподобных векторов не вводится дисторсией d, определенной соотношением (5.2). Она появляется уже в пространстве-времени Минковского. При традиционном подходе к геометрии Минковского многовариантность эквивалентности пространственноподобных векторов не признается. Более того, понятие многовариантности параллельности (и эквивалентности) двух векторов отсутствует при традиционном подходе к геометрии. Например, когда в римановой геометрии появляется многовариантность параллельности двух удаленных векторов, математики предпочитают, вообще, отказаться от ферןпараллелизма (параллельность удаленных векторов), но не вводить понятие многовариантности. Это обстоятельство связано с тем, что многовариантность не может появиться, если геометрия строится на основе системы аксиом.

Мировая цепь, состоящая из эквивалентных времениподобных векторов, имитирует мировую линию свободной частицы. Это утверждение представляется довольно разумным. Рассматривая векторы $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ в (5.11) с точки зрения геометрии Минковского, мы видим, что вектор $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ получается из вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в результате пространственного вращения с добавлением некоторой временной составляющей. Следует ожидать, что мировая цепь, состоящая из эквивалентных пространственноподобных векторов, имитирует мировую линию свободной частицы, движущейся со сверхсветовой скоростью.

Движение со сверхсветовой скоростью представляется ненаблюдаемым. Такое движение считается невозможным. Однако, если пространственноподобная мировая линия имеет вид винтовой линии с времениподобной осью, то такая ситуация может рассматриваться как свободная вращающаяся частица. Тот факт, что частица вращается со сверхсветовой скоростью не очень важен, если ось винтовой линии времениподобна. Мировая линия классической дираковской частицы представляет собой спираль (винтовую линию). При этом не очень важно, является ли скорость вращения сверхсветовой. Особенно, если принять во внимание, что уравнение Дирака описывает внутренние степени свободы (вращение) нерелятивистски, (т.е. описание внутренних степеней свободы дираковской частицы неправильно с точки зрения релятивистской теории).

Исследуем теперь, может ли мировая цепь эквивалентных пространственноподобных векторов образовать винтовую линию с времениподобной осью. Если это окажется возможным, то попытаемся исследовать при какой мировой функции возможна такая ситуация. Рассмотрим мировую функцию $\sigma_{\rm d}$ вида

$$\sigma_{\rm d} = \sigma_{\rm M} + d \cdot f\left(\frac{\sigma_{\rm M}}{\sigma_0}\right), \qquad f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad \text{если} \quad |x| > 1, \qquad d = \lambda_0^2 = \text{const} > 0 \tag{5.12}$$

где функцию $f\left(\frac{\sigma_{\rm M}}{\sigma_0}\right)$ следует определить из условия, что мировая цепь, состоящая из пространственноподобных звеньев, образует винтовую линию с времениподобной осью.

Для оценки вида $\sigma_{\rm d}$ как функции от $\sigma_{\rm M}$ при $\sigma_{\rm M} < \sigma_0$, рассмотрим цепь, состоящую из эквивалентных пространственноподобных векторов ... $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$,... Предположим, что цепь представляет собой винтовую линию с времениподобной осью в пространстве-времени. Пусть точки $...P_0, P_1, ...$ имеют координаты

$$P_k = \{kl_0, R\cos(k\varphi - \varphi_0), R\sin(k\varphi - \varphi_0), 0\}, \qquad k = ...0, 1, 2, ... \tag{5.13}$$

Все точки (5.13) лежат на винтовой линии с времениподобной осью. В пространстве-времени Минковского шаг винтовой линии равен $2\pi l_0/\varphi$, и R есть радиус винтовой линии. Постоянные φ и φ_0 суть параметры винтовой линии. Все векторы $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}$ имеют одну и ту же длину.

Вводя обозначения

$$\phi = \frac{\varphi}{2}, \qquad l_1 = 2R\sin\phi, \qquad \varphi_0 = \phi - \frac{\pi}{2} \tag{5.14}$$

получим координаты векторов $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ в виде

$$\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{P}_k = \{l_0, l_1\cos(2k\phi), l_1\sin(2k\phi), 0\}, \qquad k = ...0, 1, ... \tag{5.15}$$

где l_0, l_1, φ суть параметры винтовой линии. Исследуем, при каких условиях $\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{P}_k \text{eqv} \mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$.

Мы считаем, что все векторы винтовой линии пространственноподобны $|\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k-1}|^2 < 0$. Очевидно, что достаточно исследовать ситуацию для случая $k = 1$, когда $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \text{eqv} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Пусть координаты векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ имеют вид

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{l_0, l_1, 0, 0\}, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \{l_0, l_1\cos(2\phi), l_1\sin(2\phi), 0\} \tag{5.16}$$

В этом случае координаты точек P_0, P_1, P_2 могут быть выбраны в виде

$$P_0 = \{0, 0, 0, 0\}, \qquad P_1 = \{l_0, l_1, 0, 0\}, \qquad P_2 = \{2l_0, l_1(1 + \cos(2\phi)), l_1\sin(2\phi), 0\}, \tag{5.17}$$

и вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ имеет координаты

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = \{2l_0, l_1(1 + \cos(2\phi)), l_1\sin(2\phi), 0\} \tag{5.18}$$

Выберем мировую функцию (5.12) в виде

$$\sigma_{\rm d} = \sigma_{\rm M} + \lambda_0^2 \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma_{\rm M}) & \text{если} \quad |\sigma_{\rm M}| > \sigma_0 > 0 \\ \left(\frac{\sigma_{\rm M}}{\sigma_0}\right)^3 & \text{если} \quad |\sigma_{\rm M}| < \sigma_0 \end{cases} \tag{5.19}$$

и введем величину

$$\varkappa = \frac{\sigma_0}{\lambda_0^2} \tag{5.20}$$

Тогда получаем

$$\sigma_{\mathrm{d}} = \sigma_{\mathrm{M}} + d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right), \qquad d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right) = \lambda_0^2 f\left(\frac{\sigma_{\mathrm{M}}}{\sigma_0}\right), \qquad f\left(x\right) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad x \geq 1 \\ x^3 & \text{если} \quad -1 < x < 1 \\ -1 & \text{если} \quad x \leq -1 \end{cases} \tag{5.21}$$

Пространственно-временная геометрия (5.21) является частным случаем геометрии пространства-времени (5.10). Мы не претендуем на то, что (5.21) является мировой функцией реальной пространственно-временной геометрии. Мы только хотим показать, что в пространственно-временной геометрии (5.21) пространственноподобные векторы (5.16) могут оказаться эквивалентными при некотором подходящем выборе параметров l_0, l_1 и φ.

В своих расчетах мы будем использовать две геометрии: геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ Минковского и пространственно-временную геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, описываемую мировой функцией σ_{d}, определяемой соотношением (5.21). Тогда выражения геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ могут быть приведены к соотношениям геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ при помощи соотношений

$$\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|^2 = \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\mathrm{M}}^2 + 2d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_1\right)\right) \tag{5.22}$$

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right) = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right)_{\mathrm{M}} + w\left(P_0, P_1, Q_0, Q_1\right) \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned} & w\left(P_0, P_1, Q_0, Q_1\right) = d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, Q_1\right)\right) + d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_1, Q_0\right)\right) \\ & -d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, Q_0\right)\right) - d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_1, Q_1\right)\right) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Геометрические соотношения в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ выражаются через те же самые соотношения, записанные в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ с дополнительными членами, содержащими дисторсию d. Эти дополнительные члены можно интерпретировать как дополнительные метрические взаимодействия, действующие на частицу, когда реальная пространственно-временная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ рассматривается как геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$.

Появление дополнительных взаимодействий напоминает появление сил инерции при использовании ускоренных систем координат вместо инерциальных. Условие $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ эквивалентности векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ записывается в виде двух уравнений

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right) = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right)_{\mathrm{M}} + w\left(P_0, P_1, P_1, P_2\right) = \left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\mathrm{M}}^2 + 2d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_1\right)\right) \tag{5.25}$$

$$\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\mathrm{M}}^2 + 2d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_1\right)\right) = \left|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right|_{\mathrm{M}}^2 + 2d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_1, P_2\right)\right) \tag{5.26}$$

где индекс 'M' означает соответствующие величины рассчитанные в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Функция d определяется соотношением (5.21), а величина w задается соотношением

$$w\left(P_0, P_1, P_1, P_2\right) = d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_2\right)\right) - d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_1\right)\right) - d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_1, P_2\right)\right) \tag{5.27}$$

которое следует из определения скалярного произведения (5.23).

Используя традиционные соотношения для скалярного произведения в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, можно переписать соотношения (5.25), (5.26) в виде

$$l_0^2 - l_1^2 \cos(2\phi) + w\left(P_0, P_1, P_1, P_2\right) = l_0^2 - l_1^2 + 2d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_1\right)\right) \tag{5.28}$$

$$l_0^2 - l_1^2 = l_0^2 - l_1^2\left(\cos^2(2\phi) + \sin^2(2\phi)\right) \tag{5.29}$$

где

$$w\left(P_0, P_1, P_1, P_2\right) = d\left(2l_1^2 \sin^2\phi + 2\left(l_0^2 - l_1^2\right)\right) - 2d\left(\frac{l_0^2 - l_1^2}{2}\right) \tag{5.30}$$

Чтобы получить соотношения (5.30) из (5.27), используем соотношения

$$\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right|_{\mathrm{M}}^2 = \left|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\right|_{\mathrm{M}}^2 = 2\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_1\right) = l_0^2 - l_1^2 \equiv l^2 \tag{5.31}$$

$$\frac{1}{2}\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2\right|_{\mathrm{M}}^2 = \sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_2\right) = 2l_0^2 - l_1^2\left(1 + \cos(2\phi)\right) = 2l_1^2 \sin^2\phi + 2l^2 \tag{5.32}$$

Уравнение (5.29) является тождеством. Введем безразмерные величины ν, a, определив их соотношениями

$$l^2 = l_0^2 - l_1^2 = -2\nu\sigma_0, \qquad \nu > 0 \tag{5.33}$$

$$a = \frac{2l_1^2}{\sigma_0}\sin^2\phi, \qquad \varkappa = \frac{\sigma_0}{\lambda_0^2} \tag{5.34}$$

Тогда уравнение (5.28) принимает вид

$$\varkappa a + f\left(a - 4\nu\right) = -4f\left(\nu\right) \tag{5.35}$$

где функция f определяется соотношением (5.21)

$$f(\nu) = \frac{1}{\lambda_0^2} d\left(\sigma_0\nu\right) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\nu) & \text{если} \quad |\nu| > 1 \\ \nu^3 & \text{если} \quad |\nu| < 1 \end{cases} \tag{5.36}$$

и постоянная $\varkappa$ определяется посредством (5.20).

Заметим, что в случае, когда $f(\nu)$ является линейной функцией $f(\nu) = \nu$, для $\nu \in [-1, 1]$, уравнение (5.35) имеет единственное решение $a = 0$. Решение с $a = \frac{2l_1^2}{\sigma_0}\sin^2\phi = 0$ описывает прямую, а не винтовую линию.

Рассматривая решения уравнения (5.35) относительно $a = a(\nu)$, мы будем интересоваться только положительными значениями a, потому что величина a неотрицательна по определению (5.34). При $\varkappa = 1$ численные решения уравнения (5.35) относительно величины a представляются в виде

ν	$a(\nu)$	ν	$a(\nu)$	ν	$a(\nu)$	ν	$a(\nu)$
0	0	0.4	0.63701	−0.63	0	−0.956 47	2
0.1	0.04191	0.5	0.5	−0.7	0.372	−0.974 35	2.7
0.2	0.19236	0.6	0.136	−0.8	1.048	−0.991 60	2.9
0.3	0.40137	0.63	0	−0.9	1. 916	−1	3

В соответствии с (5.14), (5.33) и (5.34) получаем следующие соотношения для радиуса R винтовой линии

$$\sin\phi = \sqrt{\frac{a\sigma_0}{2l_1^2}}, \qquad R = \frac{l_1}{2\sin\phi} = \frac{l_1^2}{\sqrt{2a\sigma_0}} \tag{5.37}$$

Получаем шаг S винтовой линии в виде

$$S = \frac{\pi}{\phi} l_0 = \frac{\pi l_0}{\arcsin\sqrt{\frac{a\sigma_0}{2l_1^2}}} = \frac{\pi\sqrt{l_1^2 - 2\sigma_0\nu}}{\arcsin\sqrt{\frac{a\sigma_0}{2l_1^2}}} \tag{5.38}$$

Отрицательные значения величины ν соответствуют винтовой линии с времениподобными векторами $\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{P}_k$. Положительные решения уравнения (5.35) возникают только для $\nu \in (0, 0.63)$ (пространственноподобные векторы) и $\nu \in (-0.63, -1)$ (времениподобные векторы).

Значения параметра a принадлежат интервалам

$$a \in [0, 0.695], \qquad a \in (0, 3) \tag{5.39}$$

соответственно для пространственноподобных и времениподобных векторов.

Таким образом, мы видим, что в пространственно-временной геометрии с мировой функцией (5.21) пространственная эволюция, определяемая пространственноподобными векторами $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$, может привести к винтовой мировой цепи с времениподобной осью. Однако, эквивалентность пространственноподобных векторов $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ многовариантна даже в пространстве-времени Минковского. Это верно также и для пространственно-временной геометрии (5.21). В результате возникает вихляние пространственноподобных векторов. Оно может разрушить винтовую линию.

Действительно условия $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ определяют вектор $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ с точностью до вектора $\alpha = \{\alpha_0, \vec{\alpha}\}$, и мы получаем вместо уравнений (5.16)

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = l, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = q + \alpha \tag{5.40}$$

где l, q, α являются 4-векторами с координатами

$$l = \{l_0, l_1, 0, 0\}, \qquad q = \{l_0, l_1\cos(2\phi), l_1\sin(2\phi), 0\}, \qquad \alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \tag{5.41}$$

Вместо (5.28) – (5.30) получаем следующие уравнения

$$\alpha^2 + 2(q.\alpha) = 0 \tag{5.42}$$

$$2l_1^2\sin^2\phi + (l.\alpha) + \lambda_0^2 f\left(\frac{2l^2 + 2l_1^2\sin^2\phi + (l.\alpha)}{\sigma_0}\right) - 4\lambda_0^2 f\left(\frac{l^2}{2\sigma_0}\right) = 0 \tag{5.43}$$

где $(l.\alpha)$ и $(q.\alpha)$ означают скалярные произведения векторов l, q, α в пространстве-времени Минковского. Соотношение (5.35) представляет собой необходимое условие того, что $\alpha = 0$ является решением уравнений (5.42), (5.43).

Получаем из (5.42)

$$\alpha_0 = -q_0 \pm \sqrt{q_0^2 + \vec{\alpha}^2 + 2\mathbf{q}\vec{\alpha}} = -l_0 \pm \sqrt{l_0^2 + \vec{\alpha}^2 + 2\mathbf{q}\vec{\alpha}} \tag{5.44}$$

где $\mathbf{q}\vec{\alpha}$ означает скалярное произведение 3-векторов $\mathbf{q}$ и $\vec{\alpha}$. Принимая во внимание соотношение (5.35), получаем из соотношения (5.43)

$$(l.\alpha) + \lambda_0^2 \left(f\left(\frac{2l^2 + 2l_1^2 \sin^2\phi + (l.\alpha)}{\sigma_0}\right) - f\left(\frac{2l^2 + 2l_1^2 \sin^2\phi}{\sigma_0}\right)\right) = 0 \tag{5.45}$$

Предполагая, что $(l.\alpha)$ является малой величиной, получаем из (5.45) с помощью (5.44)

$$\left(l_0\left(-l_0 \pm \sqrt{l_0^2 + \alpha^2 + 2\mathbf{q}\alpha}\right) - \mathbf{l}\alpha\right)\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\sigma_0} f'\left(\frac{2l^2 + 2l_1^2 \sin^2\phi}{\sigma_0}\right)\right) = 0 \tag{5.46}$$

Соотношение (5.46) может быть преобразовано к уравнению

$$\left(1 - \frac{\mathbf{l}^2}{l_0^2}\right)\left(\vec{\alpha}_\parallel + \frac{\mathbf{q}_\parallel - 2\mathbf{l}}{1 - \frac{\mathbf{l}^2}{l_0^2}}\right)^2 + (\vec{\alpha}_\perp + \mathbf{q}_\perp)^2 = \frac{(\mathbf{q}_\parallel - 2\mathbf{l})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{l}^2}{l_0^2}\right)} + \mathbf{q}_\perp^2 \tag{5.47}$$

где

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_\parallel + \vec{\alpha}_\perp, \qquad \vec{\alpha}_\parallel = \frac{\mathbf{l}\,(\mathbf{l}\vec{\alpha})}{\mathbf{l}^2}, \qquad \mathbf{q}_\parallel = \frac{\mathbf{l}\,(\mathbf{l}\vec{q})}{\mathbf{l}^2}, \qquad \mathbf{q}_\perp = \mathbf{q} - \mathbf{q}_\parallel \tag{5.48}$$

Поскольку $\mathbf{l}^2 > l_0^2$, то получаем, что $1 - \mathbf{l}^2/l_0^2 < 0$, и поверхность (5.47) представляет собой гиперболоид в 3-пространстве величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Это означает, что решения уравнений (5.44), (5.45) могут отклоняться произвольно далеко от винтообразного решения (5.16). Это отклонение является проявлением многовариантности пространственно-временной геометрии.

6 Стабилизация пространственноподобной мировой цепи

Подавление многовариантности и стабилизация мировой цепи, состоящей из пространственноподобных векторов, могут быть достигнуты, если рассматривать мировую цепь со звеньями, каркасы которых состоят из трех точек $\{P_k, P_{k+1}, Q_{k+1}\}$, $k = ...1, 2, ...$ (Смотри фиг.1). Пусть $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ является пространственноподобным вектором, тогда как вектор $\mathbf{P}_k\mathbf{Q}_{k+1}$ является времениподобным вектором в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$.

Чтобы исследовать эффект стабилизации, достаточно рассмотреть точки P_0, P_1, P_2, Q_1, Q_2, имеющие координаты

$$P_0 = \{0\}, \qquad P_1 = \{l\}, \qquad P_2 = \{l + q + \alpha\}, \tag{6.1}$$

$$Q_1 = \{s\}, \qquad Q_2 = \{s + l + \beta\} \tag{6.2}$$

Следующие векторы ассоциируются с этими точками каркаса

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 &= l, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = q+\alpha, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = l+q+\alpha, && (6.3)\\
\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 &= s, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2 = s+\rho+\beta, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_2 = s+\rho+l+\beta, && (6.4)\\
\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 &= s-l, \qquad \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2 = s+\rho-q+\gamma, \qquad \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \rho+l+\beta, && (6.5)\\
\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_2 &= l+q-s+\alpha, \qquad \gamma=\beta-\alpha && (6.6)
\end{aligned}$$

где величины l, q, s, ρ являются заданными 4-векторами, тогда как величины $\alpha, \beta, \gamma = \beta - \alpha$ являются 4-векторами, которые должны быть определены из условий

$$\{P_0, P_1, Q_1\} \operatorname{eqv} \{P_1, P_2, Q_2\} \tag{6.7}$$

Выражения для 4-векторов q и ρ выбраны таким образом, чтобы векторы $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2$ (at $\alpha = \beta = 0$) были результатом поворота векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1$ в плоскости x^1x^2 на угол 2ϕ. Величины

$$\begin{aligned}
s &= \{s_0, s_\perp \cos\phi, s_\perp \sin\phi, s_3\} \qquad q = \{l_0, l_1\cos(2\phi), l_1\sin(2\phi), 0\} && (6.8)\\
\rho &= \{0, -2s_\perp \sin\phi \sin(2\phi), 2s_\perp \sin\phi\cos(2\phi), 0\}, \qquad l = \{l_0, l_1, 0, 0\} && (6.9)
\end{aligned}$$

предполагаются заданными. 4-векторы

$$\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{\alpha_0, \vec{\alpha}\}, \qquad \beta = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \left\{\beta_0, \vec{\beta}\right\} \tag{6.10}$$

должны быть определены из соотношений (6.7). 4-векторы l и q совпадают с векторами (5.16).

Нас интересует вопрос, можно ли выбрать стабилизирующий вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 = s$ таким образом, чтобы уравнения (6.7) имели единственное решение $\alpha = \beta = 0$. Если такой стабилизирующий вектор существует, мировая цепь будет иметь форму винтовой линии без вихляний. Возможно, что полная стабилизация невозможна. Тогда, может быть возможна частичная стабилизация, когда величины α, β малы, хотя и не обращаются в нуль. В любом случае проблема существования стабилизирующего вектора является чисто математической проблемой.

Решая эту проблему, мы будем использовать соотношения (5.22), (5.23), чтобы свести все геометрические соотношения к геометрическим соотношениям в пространстве-времени Минковского. Работая в пространстве-времени Минковского, будем использовать традиционный ковариантный формализм, где соотношения типа α^2 и $(\alpha.\beta)$ означают

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &\equiv \alpha_0^2 - \vec{\alpha}^2 \equiv \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2, && (6.11)\\
(\alpha.\beta) &\equiv \alpha_0\beta_0 - \vec{\alpha}\vec{\beta} \equiv \alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 && (6.12)
\end{aligned}$$

Индекс "M" будет для краткости опускаться.

Из условия $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ следует

$$\begin{aligned}
l^2 &= (q+\alpha)^2 && (6.13)\\
(l.q+\alpha) + w(P_0, P_1, P_1, P_2) &= l^2 + 2d\left(\frac{s^2}{2}\right) && (6.14)
\end{aligned}$$

где

$$
\begin{aligned}
& w\left(P_0, P_1, P_1, P_2\right) \\
= \; & d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_2\right)\right)+d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_1, P_1\right)\right)-d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_1\right)\right)-d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_1, P_2\right)\right) \\
= \; & \lambda_0^2 f\left(\frac{(l+q+\alpha)^2}{2 \sigma_0}\right)-2 \lambda_0^2 f\left(\frac{l^2}{2 \sigma_0}\right)
\end{aligned} \tag{6.15}
$$

После преобразований получаем

$$\alpha^2+2(q . \alpha)=0 \tag{6.16}$$

$$2 l_1^2 \sin ^2 \phi+(l . \alpha)+\lambda_0^2 f\left(\frac{2 l^2+2 l_1^2 \sin ^2 \phi+(l . \alpha)}{\sigma_0}\right)-4 \lambda_0^2 f\left(\frac{l^2}{2 \sigma_0}\right)=0 \tag{6.17}$$

Эти уравнения совпадают с (5.42), (5.43). Если $\alpha=0$ уравнения (6.16), (6.17) совпадают соответственно с (5.29) и (5.35).

Получаем из условия $\mathbf{P}_0 \mathbf{Q}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{P}_1 \mathbf{Q}_2$

$$s^2=(s+\rho+\beta)^2 \tag{6.18}$$

$$(s+\rho+\beta . s)+w\left(P_0, Q_1, P_1, Q_2\right)=s^2+2 d\left(\frac{s^2}{2}\right) \tag{6.19}$$

где

$$
\begin{aligned}
& w\left(P_0, Q_1, P_1, Q_2\right) \\
= \; & d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, Q_2\right)\right)+d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(Q_1, P_1\right)\right)-d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_1\right)\right)-d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(Q_1, Q_2\right)\right) \\
= \; & d\left(\frac{(s+\rho+l+\beta)^2}{2}\right)+d\left(\frac{(s-l)^2}{2}\right)-d\left(\frac{l^2}{2}\right)-d\left(\frac{(\rho+l+\beta)^2}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Уравнения (6.18) и (6.19) преобразуются к виду

$$\rho^2+2(\rho . s)+2(s+\rho . \beta)+\beta^2=0 \tag{6.20}$$

$$
\begin{aligned}
(\rho+\beta . s)+d\left(\frac{(s+\rho+l+\beta)^2}{2}\right)+d\left(\frac{(s-l)^2}{2}\right)-d\left(\frac{l^2}{2}\right) & \\
-d\left(\frac{(\rho+l+\beta)^2}{2}\right)-2 d\left(\frac{s^2}{2}\right)=0 &
\end{aligned} \tag{6.21}
$$

Предположим, что стабилизирующий вектор s длинный в том смысле, что

$$s^2 \gg \sigma_0 \tag{6.22}$$

Тогда в (6.21) функции d, содержащие s в их аргументе, будут равны λ_0^2 и все члены, содержащие s, компенсируются друг с другом.

Необходимое условие того обстоятельства, что $\beta = 0$ есть решение уравнений (6.20), (6.21), имеет вид

$$\rho^2 + 2(\rho.s) = 0 \tag{6.23}$$

$$(\rho.s) - d\left(\frac{l^2}{2}\right) - d\left(\frac{(\rho + l)^2}{2}\right) = 0 \tag{6.24}$$

Уравнение (6.23) удовлетворяется тождественно при выборе (6.8), (6.9) векторов s и ρ.

Получаем из условия $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2$

$$(s - l)^2 = (s + \rho - q + \gamma)^2 \tag{6.25}$$

$$(s - l.s + \rho - q + \gamma) + w(P_1, Q_1, P_2, Q_2) = (s - l)^2 + 2d\left(\frac{(s - l)^2}{2}\right) \tag{6.26}$$

$$w(P_1, Q_1, P_2, Q_2) = d(\sigma_{\mathrm{M}}(P_1, Q_2)) + d(\sigma_{\mathrm{M}}(Q_1, P_2)) - d(\sigma_{\mathrm{M}}(P_1, P_2)) - d(\sigma_{\mathrm{M}}(Q_1, Q_2))$$

$$= d\left(\frac{(s + \rho + \beta)^2}{2}\right) + d\left(\frac{(l + q - s + \alpha)^2}{2}\right) - d\left(\frac{l^2}{2}\right) - d\left(\frac{(\rho + l + \beta)^2}{2}\right) \tag{6.27}$$

Необходимые условия того, что $\gamma = \beta - \alpha = 0$ есть решение уравнений (6.25), (6.26), имеют вид

$$(s - l)^2 = (s + \rho - q)^2 \tag{6.28}$$

$$(s - l.s + \rho - q) - d\left(\frac{l^2}{2}\right) - d\left(\frac{(\rho + l)^2}{2}\right) = 0 \tag{6.29}$$

$$(\rho.s) = (s - l.s + \rho - q) \tag{6.30}$$

Подставим выражения для ρ, s, l, q, определяемые соотношениями (6.8), (6.9), в (6.30). После преобразований получаем связь между величинами $s_\perp, l_1$ и ϕ в виде

$$s_\perp = l_1 \frac{1 - 2\sin^2\phi}{\left(1 - 4\sin^2\phi\right)\cos\phi} \tag{6.31}$$

Уравнение (6.24) при помощи (6.31) приводится к виду

$$\frac{2l_1^2\left(1 - 2\sin^2\phi\right)^2}{\left(1 - 3\sin^2\phi\right)^2\left(1 - \sin^2\phi\right)}\sin^2\phi - \lambda_0^2 f\left(\frac{l^2}{2\sigma_0}\right) \tag{6.32}$$

$$-\lambda_0^2 f\left(\frac{l^2 + 4l_1^2\frac{\left(1-2\sin^2\phi\right)}{\left(1-3\sin^2\phi\right)}\sin^2\phi - 16l_1^2\frac{\left(1-2\sin^2\phi\right)^2}{\left(1-3\sin^2\phi\right)^2\left(1-\sin^2\phi\right)}\sin^2\phi}{2\sigma_0}\right) = 0 \tag{6.33}$$

где в соответствии с (5.21) функция $d(x)$ заменяется функцией $\lambda_0^2 f(x/\sigma_0)$.

Полагая

$$y = \sin^2 \phi \tag{6.34}$$

и используя обозначения (5.33), (5.34), преобразуем уравнение (6.33) к виду

$$\varkappa \frac{a\,(1-2y)^2}{(1-3y)^2\,(1-y)} + f\,(\nu) + f\left(\nu + 2a\frac{(1-2y)\,(3+y)}{(1-3y)\,(1-y)}\right) = 0 \tag{6.35}$$

Уравнение (5.35) и (6.35) образуют систему из двух необходимых условий, налагаемых на параметры спиральной мировой цепи. Каждое звено цепи состоит из двух векторов: ведущего вектора $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ и стабилизирующего вектора $\mathbf{P}_s\mathbf{Q}_s$. Параметр $\varkappa = \sigma_0/\lambda_0^2$ определяется геометрией пространства-времени. Величина $\nu = -2l^2/\sigma_0$ описывает длину пространственноподобного ведущего вектора $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$. Параметр $a/y = 2l_1^2/\sigma_0$ описывает длину проекции ведущего вектора $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ на плоскость вращения. Наконец $y = \sin^2\phi$ описывает угол 2ϕ поворота ведущего вектора в плоскости вращения.

Численные решения уравнений (5.35) и (6.35) для параметра $\varkappa = 1$ имеют вид

ν	a	y	$s_\perp^2/\sigma_0$
0.1	4.1915×10^{-2}	0.39241	0.12957
0.15	0.10661	0.44436	2.4098×10^{-2}
0.2	0.19236	0.46267	1.4324×10^{-2}
0.3	0.40137	0.47461	1.1553×10^{-2}
0.4	0.63701	0.47889	1.1931×10^{-2}
0.5	0.5	0.46809 0.39899	2.5023×10^{-2} 1.0967
0.6	0.136	0.40667	0.20286
0.615	6.9567×10^{-2}	0.37528	0.58294

7 Оценка вихляния ведущего вектора

Решения уравнений, описывающих необходимые условия того факта, что мировая цепь может быть спиралью, не единственны. Имеются решения уравнений (6.7), описываемые отличными от нуля векторами α β, которые порождают нарушение спирального характера мировой линии. Выпишем шесть уравнений (6.7) как уравнения для α, β с параметрами l, q, s, ρ, удовлетворяющими необходимым условиям (5.35) и (6.35). Получаем вместо уравнений (6.16), (6.17) следующие два уравнения

$$\alpha^2 + 2\,(q.\alpha) = 0 \tag{7.1}$$

$$(l.\alpha)\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\sigma_0} f'\left(\frac{2l^2 + 2l_1^2 \sin^2\phi}{\sigma_0}\right)\right) = 0 \tag{7.2}$$

где величины l, q удовлетворяют необходимым условиям (6.35) (5.35), и f' есть производная функции (5.36), которая всегда неотрицательна. Тогда из (7.2) следует

$$(l.\alpha) = l_0\alpha_0 - l_1\alpha_1 = 0 \tag{7.3}$$

Уравнения (7.1), (7.3) содержат только переменную α (а не β) и совпадают с уравнениями (5.42), (5.43). Однако существуют дополнительные ограничения, содержащие α. В результате ограничения на α отличаются от соотношений (5.47), описывающих значения α без стабилизирующего вектора $\mathbf{P}_s\mathbf{Q}_s$.

В развернутой форме соотношения (6.20), (6.21) имеют вид

$$\beta_0^2 - \beta^2 + 2\left(s_0\beta_0 - \beta_1 s_\perp \cos\phi\left(1 - 4\sin^2\phi\right) - \beta_2 s_\perp \sin\phi\left(1 + 2\cos\left(2\phi\right)\right)\right) = 0 \tag{7.4}$$

$$(\beta_0 s_0 - \beta\mathbf{s})\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\sigma_0}f'\left(\frac{(\rho + l)^2}{2\sigma_0}\right)\right) - \frac{\lambda_0^2}{\sigma_0}f'\left(\frac{(\rho + l)^2}{2\sigma_0}\right)(l.\beta) = 0 \tag{7.5}$$

Они содержат только переменную β (а не α)

Наконец, соотношения (6.25), (6.26) могут быть написаны в развернутой форме следующим образом

$$\gamma_0^2 - \gamma^2 + 2\left(s_0 - l_0\right)\gamma_0 - \gamma_1\left(s_\perp \cos\phi\left(1 - 4\sin^2\phi\right) - l_1\cos\left(2\phi\right)\right) \tag{7.6}$$

$$-2\gamma_2\left(s_\perp \sin\phi\left(1 + 2\cos\left(2\phi\right)\right) + l_1\sin\left(2\phi\right)\right) = 0 \tag{7.7}$$

$$l_0\beta_0 - l_1\beta_1 + s_0\alpha_0 - \mathbf{s}\alpha = 0 \tag{7.8}$$

Соотношение (7.8) представляет собой линейную комбинацию уравнений (6.21) и (6.26), которое не содержит функции f. Соотношения (7.7) и (7.8) содержат обе величины α, β и $\gamma = \beta - \alpha$. Ограничения (7.7) и (7.8) видоизменяют ограничения (5.47), преобразуя гиперболоид в эллипсоид.

Положим для простоты, что вектор $\mathbf{P}_s\mathbf{Q}_s$ очень длинен ($s_0 \gg \sigma_0$). Предположим, что $s_0 \to \infty$. В этом случае получаем из соотношения (7.5), что $\beta_0 = 0$. Из (7.8)следует, что $\alpha_0 = 0$. Кроме того из (7.3) следует, что $\alpha_1 = 0$. Таким образом, решения уравнений (7.5), (7.8) и (7.3) имеют вид

$$\beta_0 = \alpha_0 = 0, \qquad \alpha_1 = 0 \tag{7.9}$$

При ограничениях (7.9) три другие уравнения (7.1), (7.4) и (7.7) принимают вид

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2l_1\sin\left(2\phi\right)\alpha_2 = 0 \tag{7.10}$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + 2\beta_1 s_\perp \cos\phi\left(1 - 4\sin^2\phi\right) - 2\beta_2 s_\perp \sin\phi\left(1 + 2\cos\left(2\phi\right)\right) = 0 \tag{7.11}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + 2\gamma_1\left(s_\perp \cos\phi\left(1 - 4\sin^2\phi\right) - l_1\cos\left(2\phi\right)\right) \tag{7.12}$$

$$+2\gamma_2\left(s_\perp \sin\phi\left(1 + 2\cos\left(2\phi\right)\right) - l_1\sin\left(2\phi\right)\right) = 0 \tag{7.13}$$

Решение уравнения (7.10) имеет вид

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = -l_1\sin\left(2\phi\right)\left(1 - \cos\eta\right), \qquad \alpha_3 = l_1\sin\left(2\phi\right)\sin\eta \tag{7.14}$$

где η представляет собой произвольную величину.

Решение уравнения (7.11) имеет вид

$$\beta_1 = -s_\perp \cos\phi \left(1 - 4\sin^2\phi\right) + s_\perp \cos\xi_1 \cos\xi_2 \qquad (7.15)$$

$$\beta_2 = -s_\perp \sin\phi \left(1 + 2\cos(2\phi)\right) + s_\perp \cos\xi_1 \sin\xi_2 \qquad (7.16)$$

$$\beta_3 = s_\perp \sin\xi_1 \qquad (7.17)$$

где величины ξ_1, ξ_2 произвольны, а величина $s_\perp$ определяется соотношением (6.31).

Подставляя (7.14) - (7.17) в (7.13), получаем ограничение на величины η, ξ_1, ξ_2. Независимо от этого ограничения 3-вектор

$$\mathbf{q} + \alpha = \{l_1 \cos(2\phi), l_1 \sin(2\phi)\cos\eta, l_1 \sin(2\phi)\sin\eta\} \qquad (7.18)$$

имеет ту же самую 3-длину l_1, как длина 3-вектора $\mathbf{l} = \{l_1, 0, 0\}$. Угол между 3-векторами $\mathbf{q} + \alpha$ и $\mathbf{l}$ равен 2ϕ. Если $\eta = 0$, то $\alpha = 0$, и векторы $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ и $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$ являются элементами одной и той же спирали.

Мы видим, что стабилизирующий вектор $\mathbf{P}_s\mathbf{Q}_s$ уменьшает вихляние вектора $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$. В случае уравнения (5.47) пространственная составляющая $\vec{\alpha}$ 4-вектора α может быть бесконечно большой. В случае уравнения (3.9) длина $|\vec{\alpha}|$ пространственной составляющей $\vec{\alpha}$ 4-вектора α меньше, чем $|l_1 \sin(2\phi)|$. Таким образом, стабилизирующий вектор $\mathbf{P}_s\mathbf{Q}_s$ уменьшает вихляние мировой цепи. Нельзя быть уверенным, что это вихляние не разрушит спиральный характер мировой цепи. Однако, главный вопрос в том, может ли эволюция мировой цепи в пространственнподобном направлении привести к мировой цепи, которая времениподобна в среднем.

Всякая последующая точка P_l мировой цепи перемещается во времениподобном направлении на расстояние l_0, а в 3-пространстве, ортогональном этому направлению точка перемещается на расстояние $l_1 > l_0$. Направление перемещения в 3-пространстве описывается вектором $\mathbf{q} + \vec{\alpha}$, который задается соотношением (7.18). Длина 3-вектора $\mathbf{q} + \vec{\alpha}$ равна l_1. Если направление перемещения полностью случайно, то перемещение L_n для n шагов ($n \gg 1$) пропорционально $\sqrt{n} l_1$, тогда как перемещение во временном направлении равно nl_0. Это означает, что средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{\sqrt{n} l_1}{nl_0} = \frac{l_1}{\sqrt{n} l_0} < 1, \qquad n \gg 1$$

стремится к нулю для $n \to \infty$, хотя $l_0 < l_1$. В случае, когда $\alpha = 0$ и 3-вектор $\vec{q} + \vec{\alpha}$, определяемый соотношением (7.18) не является случайным, мировая цепь образует спираль с времениподобной осью. В этом случае средняя скорость также стремится к нулю. Следует ожидать, что в случае, когда вектор (7.18) случаен, но его стохастичность ограничена соотношением (7.18) (угол η полностью случаен), средняя мировая цепь может быть также времениподобной в среднем. Сейчас мы не можем строго доказать этот факт, но этот результат представляется очень правдоподобным.

8 Обсуждение

Полученная спиральная мировая цепь (5.13) ассоциируется с классической дираковской частицей, которая имеет аналогичную мировую линию (4.9), (4.10). Направление среднего импульса отличается от направления 4-скорости. Это обстоятельство характерно для обеих частиц (дираковской частицы и частицы, описываемой мировой цепью (5.13)). Обе частицы обладают угловым моментом. Для дираковской частицы масса m, которая входит в уравнение Дирака, отличается от массы M частицы, движущейся вдоль мировой линии (4.9), (4.10) [6].

Что касается массы частицы, описываемой мировой цепью (5.13), то она пока еще не определена. Для определения массы нужно рассмотреть мировую цепь (5.13) заряженной частицы с каркасом $\{P_k, P_{k+1}, Q_{k+1}\}$ в искаженном пространстве-времени Калуцы-Клейна, содержащем электромагнитное поле.

Существование спиральной мировой цепи с времениподобной осью кажется довольно неожиданным, потому что ведущие векторы $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ цепи оказываются пространственноподобными, и это соответствует сверхсветовой скорости частицы. Сверхсветовое движение кажется несовместимым с принципом относительности, который допускает движение только со скоростью, меньшей скорости света. Однако это ограничение верно только для непрерывной пространственно-временной геометрии, которая допускает неограниченную делимость. В дискретной геометрии не существует расстояний, меньших некоторой элементарной длины, и трудно сформулировать утверждение принципа относительности о невозможности сверхсветового движения. Требуется другая, более адекватная формулировка принципа относительности.

Является ли дискретной пространственно-временная геометрия (5.19)? При $\sigma_0 \to 0$ геометрия пространства-времени (5.19) превращается в пространственно-временную геометрию

$$\sigma_{\rm d} = \sigma_{\rm M} + \lambda_0^2 \mathrm{sgn}\,(\sigma_{\rm M}) \tag{8.1}$$

которая определенно дискретна, потому что в таком пространстве-времени нет времениподобных интервалов $|\mathbf{PQ}|$, которые были бы меньше, чем λ_0, и нет пространственноподобных интервалов $\sqrt{-|\mathbf{PQ}|^2}$, которые меньше, чем λ_0. В такой геометрии пространства-времени нет частиц, чья геометрическая масса μ меньше, чем λ_0.

Однако, дискретно ли пространство-время, если $\sigma_0 > 0$? Чтобы ответить на этот вопрос введем параметр дискретности: (относительную) плотность точек в пространстве-времени по отношению к плотности точек в пространстве-времени Минковского.

Определим относительную плотность $\rho(\sigma_{\rm d})$ с помощью соотношения

$$\rho(\sigma_{\rm d}) = \frac{d\sigma_{\rm M}(\sigma_{\rm d})}{d\sigma_{\rm d}} \tag{8.2}$$

В случае (5.19) получаем для $\sigma_{\mathrm{M}} \in [-\sigma_0, \sigma_0]$

$$\sigma_{\mathrm{M}} + \lambda_0^2 \left(\frac{\sigma_{\mathrm{M}}}{\sigma_0}\right)^3 - \sigma_{\mathrm{d}} = 0 \tag{8.3}$$

Разрешая (8.3) относительно σ_{M}, получаем

$$\sigma_{\mathrm{M}} = \sigma_0 g^{1/3} (\sigma_{\mathrm{d}}) - \frac{\sigma_0^2}{3\lambda_0^2} g^{-1/3} (\sigma_{\mathrm{d}}) \tag{8.4}$$

где

$$g (\sigma_{\mathrm{d}}) = \sqrt{\frac{\sigma_0^3}{27\lambda_0^6} + \frac{\sigma_d^2}{4\lambda_0^4}} + \frac{\sigma_d}{2\lambda_0^2} \tag{8.5}$$

Принимая во внимание (8.4) получаем мировую функцию σ_{M} как функцию от σ_{d}

$$\sigma_{\mathrm{M}} = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{\mathrm{d}} - \lambda_0^2 \mathrm{sgn} (\sigma_{\mathrm{d}}) & \text{если} \quad |\sigma_{\mathrm{d}}| > \sigma_0 + \lambda_0^2 \\ \sigma_0 g^{1/3} (\sigma_{\mathrm{d}}) - \frac{\sigma_0^2}{3\lambda_0^2} g^{-1/3} (\sigma_{\mathrm{d}}) & \text{если} \quad |\sigma_{\mathrm{d}}| \leq \sigma_0 + \lambda_0^2 \end{array} \right. \tag{8.6}$$

Относительная плотность точек в пространственно-временной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ относительно эталонной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ Минковского задается соотношением (8.2). Выражение для $\rho (\sigma_{\mathrm{d}})$ задается соотношением

$$\rho (\sigma_{\mathrm{d}}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{если} \quad |\sigma_{\mathrm{d}}| > \sigma_0 + \lambda_0^2 \\ g' (\sigma_{\mathrm{d}}) \left(\frac{\sigma_0}{3} g^{-2/3} (\sigma_{\mathrm{d}}) + \frac{\sigma_0^2}{9\lambda_0^2} g^{-4/3} (\sigma_{\mathrm{d}})\right) & \text{если} \quad |\sigma_{\mathrm{d}}| \leq \sigma_0 + \lambda_0^2 \end{array} \right. \tag{8.7}$$

где $g' (\sigma_{\mathrm{d}})$ задано соотношением

$$g' (\sigma_{\mathrm{d}}) = \frac{\sigma_d}{4\lambda_0^4 \sqrt{\frac{1}{27} \frac{\sigma_0^3}{\lambda_0^6} + \frac{1}{4\lambda_0^4} \sigma_d^2}} + \frac{1}{2\lambda_0^2} \tag{8.8}$$

Если $\sigma_0 \to 0$ и $\sigma_0 \ll \lambda_0^2$, то получаем приближенно

$$g (\sigma_{\mathrm{d}}) = \frac{\sigma_d}{\lambda_0^2}, \qquad g' (\sigma_{\mathrm{d}}) = \frac{1}{\lambda_0^2} \tag{8.9}$$

В пределе $\sigma_0 \to 0$, когда мировая функция (5.19) превращается в мировую функцию (8.1) полностью дискретной геометрии, получаем для относительной плотности

$$\lim_{\sigma_0 \to 0} \rho (\sigma_{\mathrm{d}}) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{если} & |\sigma_{\mathrm{d}}| > \lambda_0^2 \\ 0 & \text{если} & |\sigma_{\mathrm{d}}| \leq \lambda_0^2 \end{array} \right. \tag{8.10}$$

Таким образом, $\rho (\sigma_{\mathrm{d}}) = 0$ для $\sigma_{\mathrm{d}} \in (-\lambda_0^2, \lambda_0^2)$, и это соответствует пространственно-временной геометрии (8.1), где отсутствуют близкие точки, для которых $|\sigma_{\mathrm{d}}| \leq \lambda_0^2$. Относительная плотность $\rho (\sigma_{\mathrm{d}})$ точек может служить в качестве величины, описывающей дискретность пространственно-временной геометрии и характер этой дискретности. Дискретность может быть полной, когда плотность $\rho(\sigma_\mathrm{d})$ обращается в нуль в некоторой области, как в случае (8.10). Но дискретность может быть неполной, как в случае (8.7). В этом случае получаем для $\sigma_0 = \lambda_0^2$

$$\rho(\sigma_\mathrm{d}) = \frac{1}{6\sqrt{\frac{4}{27}\lambda_0^4 + \sigma_d^2}} \left(\sqrt[3]{g_1(\sigma_\mathrm{d})} + \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{g_1(\sigma_\mathrm{d})}} \right), \qquad \sigma_\mathrm{d} \in \left(-2\lambda_0^2, 2\lambda_0^2\right) \tag{8.11}$$

где

$$g_1(\sigma_\mathrm{d}) = \frac{1}{2\lambda_0^2} \left(\sigma_d + \sqrt{\frac{4}{27}\lambda_0^4 + \sigma_d^2} \right) \tag{8.12}$$

Выражение (8.11) является симметричной функцией σ_d, как это можно видеть из (8.3). Оно действительно симметрично, хотя формально оно не выглядит как симметричная функция от σ_d. Численные значения величины $\rho(\sigma_\mathrm{d})$, $\sigma_\mathrm{d} \in (-2\lambda_0^2, 2\lambda_0^2)$ представлены в таблице

σ_d	ρ	σ_d	ρ	σ_d	ρ
0	0.5	$1.0\lambda_0^2$	0.208 62	$1.8\lambda_0^2$	0.135 28
$0.2\lambda_0^2$	0.449 82	$1.2\lambda_0^2$	0.182 85	$2.0\lambda_0^2$	0.125
$0.4\lambda_0^2$	0.362 72	$1.4\lambda_0^2$	0.163 20	$-0.2\lambda_0^2$	0.449 82
$0.8\lambda_0^2$	0.243 63	$1.6\lambda_0^2$	0.147 74	$-0.4\lambda_0^2$	0.362 72

Относительная плотность $\rho(\sigma_\mathrm{d})$ меньше единицы. Это можно интерпретировать в том смысле, что пространственно-временная геометрия дискретна только частично. Тем не менее неполная дискретность пространственно-временной геометрии дискриминирует мировые цепи с пространственноподобными ведущими векторами, оставляя только некоторые из них. Многовариантность движения частиц и дискриминация некоторых состояний движения играет ключевую роль в структуре элементарных частиц, так же как и в структуре атомов.

Поясним это обстоятельство на примере атома водорода. В соответствии с законами классической механики электрон атома водорода должен упасть на ядро в соответствии с кулоновым притяжением. Этому препятствуют две причины: (1) многовариантность (стохастичность) движения электрона, (2) вращение электрона вокруг ядра. Многовариантное движение электрона приводит к уходу электрона с поверхности ядра. Этот процесс имеет ту же природу, что и поднятие пыли с поверхности Земли. Частицы пыли, двигаясь многовариантно (как броуновские частицы), образуют стационарное распределение в гравитационном поле Земли. Если исключить многоварантность движения частиц пыли, то все они упадут на поверхность Земли.

Статистическое описание распределения электронов и частиц пыли различно, потому что многовариантное движение электронов релятивистское, тогда как броуновское движение частиц пыли является нерелятивистским. Движение броуновских частиц можно описывать с помощью вероятностного статистического описания, тогда как для статистического описания многовариантного (релятивистского) движения электронов пригодна только динамическая концепция статистического описания. Вращение электронов вокруг ядра создает поле центробежных сил, которые добавляются к силе Кулона. В результате возникают дополнительные состояния электронных распределений. Если возникшее распределение электронов нестационарно, электроны излучают электромагнитное поле до тех пор, пока распределение электронов не станет стационарным. Таким образом, электромагнитное излучение осуществляет дискриминацию нестационарных состояний (электронных распределений).

Многовариантность движения электрона и механизм дискриминации нестационарных состояний порождают структуру атома водорода и дискретный характер спектров излучения. С математической точки зрения дискретный характер электронных состояний обусловлен процедурой определения собственных состояний. Только собственные состояния оператора Гамильтона оказываются стационарными и стабильными.

Многовариантность движения частицы и некоторый механизм дискриминации также играют ключевую роль в понимании структуры элементарных частиц. Однако в случае элементарных частиц механизм дискриминации обусловлен некоторыми метрическими (геометрическими) силами, которые появляются, когда мы используем геометрию Минковского вместо реальной многовариантной пространственно-временной геометрии. Формально эти силы имеют вид дополнительных членов типа (5.27) в динамических уравнениях. Эти дополнительные члены выражаются через дисторсию d пространства-времени. Они описывают как многовариантность движения, так и механизм дискриминации.

Многовариантность движения ассоциируется с многовариантностью определения (2.7) эквивалентности векторов, тогда как механизм дискриминации ассоциируется с нуль-вариантностью того же определения (2.7) для некоторых векторов. Кроме того, как мы видели нуль-вариантность (дискриминация) ассоциируется с дискретностью (или частичной дискретностью) геометрии пространства-времени.

Очень важно, что рассмотрение многовариантной геометрии *не является гипотезой*, которая нуждается в экспериментальной проверке. Рассмотрение многовариантной геометрии является следствием исправления нашей несовершенной концепции геометрии. Концепция геометрии, основанная на предположении, что любая пространственно-временная геометрия может быть аксиоматизирована (т.е. может быть выведена из некоторой системы аксиом) является несовершенной, потому что она принципиально не позволяет построить многовариантную геометрию. Однако движение электронов и других элементарных частиц многовариантно. Многовариантность этого движения является экспериментальным фактом, который нельзя игнорировать.

Поскольку несовершенство концепции геометрии не позволяло построить многвариантную геометрию, то исследователи вынуждены были приписывать многовариантность динамике, вводя квантовые принципы со всеми их атрибутами. Квантовые принципы выглядят искусственными и таинственными, потому что многовариантность приписывается динамике, тогда как ее следует приписывать геометрии пространства-времени.

Многовариантность и нуль-вариантность выглядят как совершенно естественные свойства определения (2.7). В самом деле, ниоткуда не следует, что уравнения (2.7) должны иметь единственное решение для произвольной мировой функции, которая определяет вид этих уравнений.

Отсутствие каких-либо гипотез является очень важным свойством геометрического подхода к структуре элементарных частиц. Кроме того, геометрическая динамика является очень общей и простой. Динамические уравнения геометрической динамики не используют даже дифференциальных уравнений. Формулировка динамических уравнений не содержит ссылки на систему координат. С другой стороны, когда геометрическая динамика в реальном пространстве времени описывается в терминах пространства-времени Минковского, возникают дополнительные метрические силы, которые выглядят довольно экзотично. Их едва ли можно получить в рамках традиционного подхода.

Традиционный подход к теории элементарных частиц содержит вторичные понятия и свойства. Нельзя усмотреть какого-либо механизма дискриминации в волновых функциях, уравнениях поля, глюонах, бранах и других отдаленных следствиях неизвестной структуры элементарных частиц. Невозможно, получить и понять дискретные свойства элементарных частиц без надежного механизма дискриминации. Если даже исследуя и систематизируя эти отдаленные следствия, удастся создать совершенную систематизацию элементарных частиц, структура элементарных частиц может быть получена из этой совершенной систематизации с тем же успехом, с каким можно извлечь структуру атома из периодической системы химических элементов.

9 Заключительные замечания

Рассмотрение Т-геометрии как геометрии пространства-времени позволяет получить динамику частицы как следствие ее геометрической структуры. Эволюция геометрического объекта в пространстве-времени определяется каркасом $\{P_0, P_1, ..P_n\}$ геометрического объекта и заданием ведущего вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Каркас и ведущий вектор определяют мировую цепь, которая полностью описывает эволюцию.

Мировая цепь может вихлять, и это является проявлением многовариантности геометрии пространства-времени. Квантовые эффекты являются только одним из проявлений многовариантности. Замечательно, что для определения мировой цепи не нужны дифференциальные уравнения, которые могут использоваться только на пространственно-временном многообразии. Не нужна и непрерывность (непрерывная геометрия). Разумеется, можно ввести непрерывную систему координат и написать в ней дифференциальные уравнения. Можно, но это не является необходимым. Вообще, геометрическая динамика (т.е. динамика, порожденная геометрией пространства-времени) является дискретной динамикой, где шаг эволюции определяется длиной ведущего вектора. Возможно, что для геометрической динамики потребуется развитие специального математического формализма.

Реальная геометрия пространства-времени содержит квантовую постоянную $\hbar$ в качестве параметра. В результате геометрическая динамика непринужденно объясняет квантовые эффекты и не только их. Масса частицы геометризуется (масса частицы – это просто длина некоторого вектора). В результате проблема масс элементарных частиц есть просто геометрическая проблема. Это проблема структуры геометрического объекта и его эволюции. Нужно просто исследовать разные виды каркасов простейших геометрических объектов.

Вообще говоря, не все виды каркасов возможны, потому что при пространственной эволюции мировые цепи наблюдаемы только для некоторых каркасов. Дополнительные точки каркасов приводят к дополнительным (иногда неожиданным) свойствам соответствующих геометрических объектов (элементарных частиц).

Заметим, что геометрическая динамика не содержит вращательного движения. Она содержит только сдвиг ("параллельный перенос"). Все векторы каркаса $\left\{P_0^{(s)}, P_1^{(s)}, ..P_n^{(s)}\right\}$ звена L_s эквивалентны векторам каркаса $\left\{P_0^{(s+1)}, P_1^{(s+1)}, ...\right.$ $\left.P_n^{(s+1)}\right\}$ смежного звена L_{s+1}. Такая ситуация совершенно естественна, поскольку геометрическая динамика описывает эволюцию свободных частиц.

Вращающаяся частица не может быть полностью свободной, потому что во вращающейся частице имеются центростремительные ускорения. Однако, для полностью свободного движения ускорение должно отсутствовать для всех частей тела. С другой стороны, геометрическая динамика содержит пространственную эволюцию, которая отсутствует в традиционной динамике. С геометрической точки зрения мы не можем дискриминировать пространственную эволюцию на том основании, что ведущий вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является пространственноподобным и его длина является мнимой.

По существу пространственная эволюция дискриминирует себя тем, что соответствующая мировая цепь, вообще говоря. не наблюдаема. Она оказывается наблюдаемой только для некоторых сложных каркасов, состоящих более, чем из двух точек. Мировая цепь, описывающая пространственную эволюцию наблюдаема только в том случае, когда она может быть локализована вблизи мировой цепи наблюдателя. Это имеет место в том случае, когда мировая цепь имеет форму винтовой линии с времениподобной осью, или какую-то другую форму, которая может быть локализована вблизи мировой цепи наблюдателя. В результате не все каркасы оказываются наблюдаемыми.

Хотя геометрическая динамика не содержит вращения, но следствия вращения (угловой момент, магнитный момент) могут быть получены как результат пространственной эволюции, когда мировая цепь представляет собой винтовую линию. По-видимому, тот факт, что "вращение частицы" является следствием пространственной эволюции, приводит к дискретности спина дираковской частицы. Разумеется, что утверждения такого сорта должны быть проверены аккуратным математическим исследованием различных типов каркасов и различных пространственно-временных геометрий. Однако, такая постановка вопроса является вполне конкретной и реализуемой.

Заметим, что геометрическая динамика в реальном (не-Минковском) пространстве-времени содержит дополнительные члены по отношению к динамике в пространстве-времени Минковского. С точки зрения пространства-времени Минковского эти дополнительные члены можно интерпретировать как некоторые дополнительные (метрические) взаимодействия, которые имеют место внутри реальных частиц. С традиционной точки зрения эти взаимодействия выглядят очень странно и экзотично. До них невозможно (или очень трудно) догадаться, используя традиционную концепцию пространства-времени и динамики.

В геометрической динамике нет дополнительных взаимодействий, если мы используем истинную пространственно-временную геометрию. Однако, дополнительные взаимодействия появляются, если мы используем неадекватную геометрию (например, геометрию Минковского или риманову геометрию). Другими словами, можно скомпенсировать неправильную геометрию введением дополнительных взаимодействий. Из общей теории относительности известно, что движение свободного тела в кривом пространстве-времени выглядит как движение в гравитационном поле, если это движение рассматривается как движение в пространстве-времени Минковского.

Описание принципиально новых явлений с помощью изменения геометрии пространства-времени проще, чем введение новых взаимодействий, потому что пространство-время описывается мировой функцией, которая является функцией от двух точек. Вид мировой функции для больших расстояний определяется необходимостью получения нерелятивистской квантовой механики. Ограничения, налагаемые на мировую функцию на малых расстояниях, определяются условием, что пространственная эволюция способна описывать мировую цепь дираковской частицы. (Очень многие элементарные частицы являются дираковскими частицами).

Кроме того, условие локализации (винтовая мировая цепь) накладывает ограничения на параметры частицы. Не все параметры частиц оказываются возможными. Это условие является условием "специфического квантования" параметров частицы, включая массу частицы. Заметим, что современная теория элементарных частиц вернулась к геометрическому рассмотрению (струны, браны). Однако это рассмотрение ограничено рамками римановой геометрии и геометрий, близких к римановой. Например, квантовая геометрия использует операторы вместо координат точек. Это некоторый способ введения многовариантности в геометрию. Однако, эта геометрия развивается на основе линейного векторного пространства, которое является ограничением на пространственно-временную геометрию.

В любом случае традиционный подход к пространственно-временной геометрии рассматривает только часть возможных пространственно-временных геометрий. Нельзя быть уверенным, что класс рассматриваемых геометрий содержит правильную геометрию пространства-времени. Разумеется, если используется неправильная геометрия, то ее можно подправить с помощью дополнительного взаимодействия, порожденного отличием от истинной геометрии. Однако, такая коррекция трудна, особенно если истинная геометрия дискретна или близка к дискретной.

Заметим, что геометрия (5.1) дискретна, хотя она задана на непрерывном многообразии Минковского. Она дискретна потому, что модуль расстояния между двумя точками больше, чем λ_0. Это неожиданно, потому что принято рассматривать геометрию, заданную на многообразии как непрерывную геометрию, хотя, на самом деле, геометрия определяется мировой функцией и только мировой функцией. Дискретная геометрия ассоциируется с решеткой. Разумеется, геометрия, заданная на решетке не может быть непрерывной. Однако геометрия, заданная на непрерывном множестве точек (многообразии) может быть дискретной.

Почему же физика микромира оставила в двадцатом веке успешную программу геометризации физики? Открытие дифракции электронов требовало многовариантности физики микромира. Многовариантность можно было учесть либо на уровне пространственно-временной геометрии, либо на уровне динамики. Многовариантная геометрия пространства-времени не была известна в тридцатые годы, когда была обнаружена дифракция электронов. Нерелятивистская квантовая механика была уже построена, и она была успешно применена для объяснения дифракции электронов.

Вводя многовариантность в динамику, можно описать не только нерелятивистские явления в микромире. Можно описать также релятивистские явления и ту часть явлений микромира, которая известна как теория элементарных частиц. Принципы квантовой механики, которые вводили многовариантность в физику микромира, были придуманы для ньютоновской концепции пространства-времени. Их экстраполяция на релятивистские явления оказалась проблематичной.

Разумеется, некоторые свойства истинной пространственно-временной геометрии могли быть приняты во внимание при введении дополнительных взаимодействий. Однако, очень трудно придумать и ввести дополнительные взаимодействия без понимания этих новаций. Возможности геометрического подхода очень велики, особенно если принять в расчет все возможные пространственно-временные геометрии.

Современная теория элементарных частиц уже возвращается к геометрическому описанию, но это описание обременено такими понятиями как волновая функция, струна, брана, которые имеют очень отдаленное отношение к структуре элементарных частиц и физике микромира.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, Deformation principle and further geometrization of physics http://arXiv.org/abs/0704.3003

[2] Yu.A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *Journ. Math. Phys.* **31**, 2876-2890, (1990).

[3] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (Available at http://arXiv.org/abs/math.MG/0103002).

[4] Yu. A. Rylov, Tubular geometry construction as a reason for new revision of the space-time conception. (*What is Geometry?* polimetrica Publisher, Italy, pp.201-235 http://www.polimetrica.com/polimetrica/406/

[5] Yu. A. Rylov, Different conceptions of Euclidean geometry. *http://arXiv.org /abs /0709.2755*

[6] Yu. A. Rylov, Is the Dirac particle composite? *http://arXiv.org/abs/physics /0410045*

[7] Yu. A. Rylov, Is the Dirac particle completely relativistic? *http://arXiv.org /abs/physics /0412032*

[8] Yu.A. Rylov, Dynamic disquantization of Dirac equation. *http://arXiv.org /abs/quant-ph/0104060*

[9] Yu. A. Rylov, Dynamical methods of investigation in application to the Dirac particle. *http://arXiv.org/abs/physics/0507084*

[10] Yu. A. Rylov Author's comments to referee's reports on the paper by Y. A. Rylov "Dynamical methods of investigation in application to the Dirac particle", submitted to a scientific journal. (Available at *http://rsfq1.physics.sunysb. edu/~rylov /comm1e. pdf*)

[11] Yu.A. Rylov, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, 2092-2098, (1991).