Дискретная геометрия пространства-времени и каркасная концепция динамики частиц

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site: $http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Показано, что свойства дискретной геометрии пространства-времени существенно отличаются от свойств римановой геометрии пространства-времени. Дискретная геометрия является физической геометрией, полностью описываемой мировой функцией. Дискретная геометрия неаксоматизируема и многовариантна. Отношение эквивалентности интранзитивно в дискретной геометрии. Частицы описываются мировыми цепями (ломаными линиями с конечной длиной звеньев), потому что в дискретной геометрии пространства-времени нет бесконечно малых длин. Движение частиц стохастично, и статистическое описание приводит к уравнению Шредингера, если элементарная длина дискретной геометрии зависит от квантовой постоянной надлежащим образом.

Ключевые слова: неаксиоматизируемая геометрия; дискретная геометрия пространства-времени; геометризация параметров частицы; каркасная концепция динамики частиц

1 Введение

Дискретна ли геометрия пространства-времени, или она непрерывна, но оснащена квантовыми свойствами? Квантовые свойства ассоциируются с порциями, квантами и дискретностью. Однако, интуитивно кажется, что геометрия пространства-времени скорее дискретна, чем имеет мистические квантовые свойства, потому что концепция дискретности не содержит ничего таинственного. Тем не менее, если рассматривать масштабы много большие, чем элементарная длина λ_0 (характерная длина дискретной геометрии), то неважно какова геометрия пространства-времени, дискретная или непрерывная.

Современная геометрия пространства-времени является дифференциальной геометрией. Все понятия дифференциальной геометрии основаны на понятии непрерывности. Такие понятия (многообразие, размерность, система координат, дифференциальные уравнения динамики) могут быть введены только в непрерывной геометрии пространства-времени. Кроме того, дискретная геометрия является неаксиоматизируемой геометрией. Это означает, что дискретная геометрия не может быть получена как логическое построение, потому что отношение эквивалентности в дискретной геометрии, вообще говоря, интранзитивно. В свою очередь интранзитивность отношения эквивалентности является следствием того факта, что для определения вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ в данной точке P_0, который эквивалентен данному вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в точке Q_0, нужно решить два алгебраических уравнения (условие параллельности векторов и условие равенства их длин). Число координат (четыре) точки P_1 больше, чем число уравнений. В результате возникает, вообще говоря, много решений. Имеется много векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}'_1$,... в данной точке P_0, которые эквивалентны вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в точке Q_0, но векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}'_1$,... не эквивалентны между собой. Такая ситуация означает интранзитивность отношения эквивалентности для векторов. Следовательно, дискретная геометрия не может быть логическим построением, потому что в логическом построении отношение эквивалентности транзитивно. Она не может быть построена евклидовым методом, который используется для построения собственно евклидовой геометрии.

С другой стороны, евклидов метод построения геометрии используется более двух тысяч лет, и мы не знаем какого-нибудь другого метода. Только евклидов метод построения геометрии изучается во всех школах. В результате мы с трудом воспринимаем идею альтернативного метода построения геометрии. Мы не можем представить себе, как можно строить дискретную геометрию пространства-времени, если она неаксиоматизируема и нельзя использовать традиционный евклидов метод. Кажется, что проще рассмотреть непрерывную геометрию пространства-времени, оснастив ее таинственными квантовыми свойствами, которые имитируют дискретность. Эта имитация оказалась очень успешной. К сожалению, эта имитация не полна (так же как имитация тепловых явления с помощью теплорода), и мы вынуждены вернуться к идее дискретной геометрии пространства-времени, если мы хотим описывать физические явления в микромире.

Геометрия есть наука о геометрических объектах, об их форме и расположении в пространстве или в пространстве-времени. Собственно евклидова геометрия была первой построенной геометрией. Геометрические объекты евклидовой геометрии обычно строят как комбинацию фундаментальных блоков (точка, отрезок прямой, угол). Свойства фундаментальных блоков и правила их комбинаций при построении геометрических объектов формулируются в виде аксиом некоторого логического построения. Собственно евклидова геометрия изучается в виде логического построения последние две тысячи лет. В результате практически все исследователи верят, что геометрия является логическим построением и что любая геометрия должна строиться как логическое построение. Предполагается, что любая геометрия может быть выведена из системы надлежащим образом выведенных аксиом, и не существует геометрий, которые не могут быть выведены из надлежащим образом выбранной аксиоматики.

Этот факт формулируется следующим образом. Существуют только аксиоматизируемые геометрии и не существует неаксиоматизируемых геометрий. Другими словами, геометрия отождествляется с логическим построением. Вера в тождественность геометрии и логического построения так велика, что термин "геометрия" используется по отношению к дисциплинам, которые имеют логическую структуру евклидовой геометрии, но не имеют отношения к науке о геометрических объектах и их форме (например, симплектическая геометрия). Геометрию, отождествляемую с логическим построением (аксиоматизируемую геометрию) мы будем называть математической геометрией. Собственно евклидова геометрия является математической геометрией.

Геометрия как наука о геометрических объектах об их форме и их расположении полностью описывается функцией расстояния $\rho\left(P,Q\right)$ между любыми двумя точками $P,Q\in\Omega$, где Ω есть множество точек, где задана геометрия. Более удобно использовать мировую функцию $\sigma=\frac{1}{2}\rho^{2}$ вместо функции расстояния ρ, потому что мировая функция σ является вещественной в любой геометрии (даже в пространственно-временной геометрии Минковского). Геометрию, которая полностью описывается ее мировой функцией, будем называть физической геометрией, потому что физиков не интересует способ построения геометрии. Их не интересует то обстоятельство, является ли физическая геометрия аксиоматизируемой.

Собственно евклидова геометрия так же как и геометрия Минковского являются непрерывными геометриями. Однако могут существовать дискретные геометрии, где расстояние между двумя любыми точками пространства-времени больше, чем некоторая элементарная длина λ_{0}. Если характерный масштаб задачи много больше, чем элементарная длина λ_{0}, можно считать, что $\lambda_{0}=0$ и рассматривать непрерывную геометрию. Однако, в микромире, где характерные длины порядка λ_{0}, следует рассматривать дискретную геометрию пространства-времени.

При традиционном построении евклидовой геометрии используются такие понятия как многообразие, размерность, система координат, линейное векторное пространство, которые могут использоваться только в непрерывных геометриях. Строя дискретную геометрию как обобщение собственно евклидовой геометрии, нельзя использовать эти понятия. Единственное понятием, которое можно использовать в обеих геометриях, непрерывной и дискретной является понятие расстояния ρ. Но расстояние ρ нужно вводить как фундаментальную величину. В римановой геометрии расстояние ρ вводится как интеграл вдоль геодезической от бесконечно малого расстояния

$$ds=\sqrt{g_{ik}dx^{i}dx^{k}}$$

Такой метод введения расстояния ρ неадекватен в дискретной геометрии, потому что в ней не используется бесконечно малое расстояние, которого нет в дискретной геометрии. Кроме того, в случае, когда имеется несколько геодезических, соединяющих две точки, возникает многозначное выражение для расстояния или мировой функции. Многозначная мировая функция недопустима в геометрии.

Чтобы построить дискретную геометрию, нужно представить собственно евклидову геометрию в терминах расстояния ρ (или в терминах мировой функции $\sigma=\frac{1}{2}\rho^{2}$) и использовать это представление для обобщения собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ на случай дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Представление геометрии в терминах мировой функции мы будем называть σ-имманентным представлением. σ-имманентное представление собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ всегда возможно.

Основные геометрические объекты и понятия евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$: (1) отрезок прямой $\mathcal{T}_{[PQ]}$ между точками P и Q, (2) скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, (3) линейная зависимость n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, ...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$, (4) эквивалентность $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ могут быть выражены в терминах мировой функции σ_{E} геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$

$$\mathcal{T}_{[PQ]} = \{R|\rho(P,R) + \rho(R,Q) = \rho(P,Q)\}, \qquad \rho(P,Q) = \sqrt{2\sigma(P,Q)} \tag{1.1}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0,Q_1) + \sigma(P_1,Q_0) - \sigma(P_0,Q_0) - \sigma(P_1,Q_1) \tag{1.2}$$

$$F_n(\mathcal{P}_n) \equiv \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)|| = 0, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{1.3}$$

где

$$\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\} \tag{1.4}$$

а скалярное произведение двух векторов определяется формулой (1.2), которая в случае общего начала векторов имеет вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) = \sigma(P_0,P_2) + \sigma(P_0,P_1) - \sigma(P_1,P_2) \tag{1.5}$$

Эквивалентность $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов описывается соотношениями

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1): \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|\cdot|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{1.6}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = \sqrt{2\sigma(P_0,P_1)} \tag{1.7}$$

где $\sigma = \sigma_{\mathrm{E}}$ есть мировая функция собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.

Эти соотношения используются для определения таких величин как $\mathcal{T}_{[PQ]}$, $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$, $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ и линейная зависимость векторов, потому что эти определения не ссылаются на размерность, систему координат, линейное векторное пространство и другие средства описания собственно евклидовой геометрии. Эти определения содержат только такую фундаментальную геометрическую величину как мировая функция. Эти определения записаны в инвариантном бескоординатном виде. В результате эти определения могут и должны использоваться как определения любой физической геометрии, т.е. геометрии, полностью описываемой в терминах мировой функции. Любой геометрический объект может быть описан в терминах мировой функции. Свойства геометрического объекта рассчитываются на основе его σ-имманентного представления (представления в терминах мировой функции) и вида мировой функции.

Обобщение этих выражений на случай дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ получается с помощью замены $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma_{\mathrm{d}}$, где σ_{d} есть мировая функция дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Мы должны быть готовы к тому, что свойства понятий (1.1) - (1.6) в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ сильно отличаются от их свойств в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Для определения свойств дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ мы не имеем альтернативы соотношениям (1.1) - (1.6).

Определение 1.1: Физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ представляет собой множество точек Ω с заданной на нем однозначной функцией σ

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(P,P) = 0, \qquad \sigma(P,Q) = \sigma(Q,P), \qquad P,Q \in \Omega \tag{1.8}$$

Определение 1.2: Две физические геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ эквивалентны ($\mathcal{G}_1 \mathrm{eqv} \mathcal{G}_2$), если точечное множество $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \wedge \sigma_1(P,Q) = \sigma_2(P,Q)\,, \quad \forall P,Q \in \Omega_1$, или $\Omega_2 \subseteq \Omega_1 \wedge \sigma_2(P,Q) = \sigma_1(P,Q)\,, \quad \forall P,Q \in \Omega_2$

Замечание: Совпадение точечных множеств Ω_1 и Ω_2 не является необходимым для совпадения геометрий $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. Если потребовать совпадения Ω_1 и Ω_2 в случае эквивалентности $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, то исключение одной точки P из точечного множества Ω_1 превращает геометрию $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ в геометрию $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_1, \Omega_1 \backslash P\}$, которая оказывается не эквивалентной геометрии $\mathcal{G}_1$. Такая ситуация представляется недопустимой, потому что геометрия на части $\omega \subset \Omega_1$ точечного множества Ω_1 оказывается не эквивалентной геометрии на всем точечном множестве Ω_1.

В соответствии с определением геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$ на частях Ω, $\omega_1 \subset \Omega$ и $\omega_2 \subset \Omega$ эквивалентны $(\mathcal{G}_1 \mathrm{eqv} \mathcal{G})\,, (\mathcal{G}_2 \mathrm{eqv} \mathcal{G})$ геометрии $\mathcal{G}$, тогда как $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$, вообще говоря, неэквивалентны, если $\omega_1 \nsubseteq \omega_2$ и $\omega_2 \nsubseteq \omega_1$. Таким образом, отношение эквивалентности, вообще говоря, интранзитивно. Геометрия пространства-времени, может варьироваться в различных областях пространства-времени. Это означает, что физическое тело, рассматриваемое как геометрический объект, может эволюционировать таким образом, что оно будет появляться в областях с различной геометрией пространства-времени.

Пространственно-временная геометрия Минковского так же как и евклидова геометрия являются непрерывными геометриями. Это верно для обычной шкалы расстояний. Однако, нельзя быть уверенным, что геометрия пространства-времени непрерывна в микромире. Геометрия пространства-времени может оказаться дискретной в микромире. Мы рассматриваем дискретную геометрию пространства-времени и обсуждаем последствия предполагаемой дискретности.

Функция расстояния ρ_{d} дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ удовлетворяет условию

$$|\rho_{\mathrm{d}}(P,Q)| \notin (0, \lambda_0)\,, \qquad \forall P,Q \in \Omega \tag{1.9}$$

которое означает, что в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ нет расстояний короче, чем элементарная длина λ_0. Расстояние $\rho_{\mathrm{d}}(P,Q) = 0$ допустимо. Это соотношение возникает, если $P = Q$.

Заметим, что условие (1.9) представляет собой ограничение на функцию расстояния, а не на точечное множество Ω, хотя обычно рассматривают дискретную геометрию как геометрию на решетке. Это верно, что геометрии на решетке являются дискретными геометриями, но они образуют очень специальный класс дискретных геометрий. Кроме того, такая дискретная геометрия не может быть однородной и изотропной. Общий случай дискретной геометрии возникает, когда ограничения налагаются на возможные значения мировой функции (функции расстояния).

Простейший случай дискретной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ получается, если $\mathcal{G}_{\mathrm{d}} = \{\Omega_{\mathrm{M}}, \sigma_{\mathrm{d}}\}$ задана на том многообразии Ω_{M}, где задается геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}} = \{\Omega_{\mathrm{M}}, \sigma_{\mathrm{M}}\}$. Мировая функция σ_{d} выбирается в виде

$$\sigma_{\mathrm{d}}(P,Q) = \sigma_{\mathrm{M}}(P,Q) + \frac{1}{2}\lambda_0^2 \mathrm{sgn}(\sigma_{\mathrm{M}}(P,Q))\,, \qquad \forall P,Q \in \Omega_{\mathrm{M}} \tag{1.10}$$

где σ_{M} есть мировая функция геометрии Минковского. Легко проверить, что $\rho_{\mathrm{d}} = \sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}}$, определенное соотношением (1.10) удовлетворяет ограничению (1.9). Такая дискретная геометрия однородна и изотропна так же, как и геометрия Минковского.

Кроме того в дискретной пространственно-временной геометрии (1.10) точечная частица не может описываться мировой линией, потому что любая мировая линия представляет собой предел ломаной линии, когда длины ее звеньев стремятся к нулю. Но в дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ нет бесконечно малых длин, и точечная частица описывается мировой цепью (ломаной линией) вместо непрерывной мировой линии. Описание состояния точечной частицы с помощью ее положения и импульса становится неадекватным, потому что в непрерывной геометрии пространства-времени 4-импульс p_k частицы описывается соотношением

$$p_k = g_{kl} \frac{dx^l}{d\tau} = g_{kl} \lim_{d\tau \to 0} \frac{x^l(\tau + d\tau) - x^l(\tau)}{d\tau} \tag{1.11}$$

где $x^l = x^l(\tau)$, $l = 0, 1, 2, 3$ есть уравнение мировой линии. Предел в формуле (1.11) не существует в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, и 4-импульс p_k оказывается неопределенным (по крайней мере в таком виде). Вообще, математический формализм, основанный на исчислении бесконечно малых (дифференциальные уравнения) неадекватен в дискретной геометрии пространства-времени.

Мировая цепь $\mathcal{C}$ частицы имеет вид

$$\mathcal{C}: \qquad \bigcup_s \mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1}, \tag{1.12}$$

где вектор $\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1} = \{P_s, P_{s+1}\}$ представляет собой упорядоченное множество из двух точек P_s, P_{s+1}. Длины $|\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1}|$ всех векторов равны

$$|\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1}| = \sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}(P_s, P_{s+1})} = \mu, \qquad s = ...0, 1, ... \tag{1.13}$$

В описании точечной частицы появляется новый параметр μ, который описывает длину звеньев мировой цепи $\mathcal{C}$. Этот новый параметр (геометрическая масса) может быть связан с массой m частицы с помощью соотношения

$$m = b\mu \tag{1.14}$$

где b есть некоторая универсальная постоянная.

Мировая цепь $\mathcal{C}$ описывает свободное движение точечной частицы, если в добавление к соотношению (1.13) смежные звенья цепи параллельны

$$\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1} \upuparrows \mathbf{P}_{s+1} \mathbf{P}_{s+2}: \qquad (\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1} . \mathbf{P}_{s+1} \mathbf{P}_{s+2}) = |\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1}| \cdot |\mathbf{P}_{s+1} \mathbf{P}_{s+2}| = \mu^2 \tag{1.15}$$

где $(\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1} . \mathbf{P}_{s+1} \mathbf{P}_{s+2})$ есть σ-имманентное выражение для скалярного произведения двух векторов $\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1}$ и $\mathbf{P}_{s+1} \mathbf{P}_{s+2}$.

Соотношения (1.13) и (1.15) означают, что смежные векторы $\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1}$ и $\mathbf{P}_{s+1} \mathbf{P}_{s+2}$ эквивалентны. В соответствии с (1.13) уравнение (1.15) может быть записано в виде

$$(\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1} . \mathbf{P}_{s+1} \mathbf{P}_{s+2}) = |\mathbf{P}_s \mathbf{P}_{s+1}|^2 = \mu^2, \qquad s = ...0, 1, ... \tag{1.16}$$

Скалярное произведение векторов в дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ имеет тот же вид (1.2), но евклидова мировая функция σ_{E} заменяется мировой функцией σ_{d} дискретной геометрии (1.10). В пределе $\lambda_0 \to 0$ мировая функция $\sigma_{\mathrm{d}} \to \sigma_{\mathrm{M}}$ и скалярное произведение в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ превращается в скалярное произведение в геометрии Минковского.

Фиксируя точки P_s и P_{s+1} и решая уравнения (1.13), (1.16) чтобы определить точку P_{s+2}, получаем много решений для точки P_{s+2}. Это обстоятельство объясняется тем фактом, что имеется только два уравнения для определения четырех координат точки P_{s+2}. Это означает, что звенья мировой цепи(1.12) вихляют, и форма мировой цепи оказывается случайной (стохастической).

Статистическое описание случайных мировых цепей приводит к уравнению Шредингера [1], при условии, что элементарная длина λ_0 имеет вид

$$\lambda_0^2 = \frac{\hbar}{bc} \tag{1.17}$$

где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света, и b есть универсальная постоянная, определенная соотношением (1.14). Уравнение Шредингера описывает движение свободной стохастической (квантовой) частицы, и это описание содержит массу m частицы, хотя классическое описание движения свободной частицы не содержит ссылки на массу частицы.

Объяснение квантовых эффектов (уравнение Шредингера) как геометрических эффектов дискретной геометрии пространства-времени очень важно, потому что оно показывает, что введение квантовых принципов избыточно. Этот результат предлагает разрешение между двумя парадигмами: или дискретная геометрия пространства-времени, или непрерывная геометрия пространства-времени, оснащенная квантовыми принципами. Очевидно, что дискретная геометрия пространства-времени - это более простое и естественное решение, чем изобретение квантовых принципов, смысл которых неясен. Заметим, что заменяя классический импульс в квантовой механике оператором или матрицей, мы имитируем многовариантность (неопределенность) импульса частицы, описываемое соотношением (1.11) в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$.

Кроме того, дискретная геометрия позволяет описывать и недетерминированное движение отельной частицы и детерминированное движение среднестатистической частицы, тогда как квантовая парадигма позволяет описывать только детерминированное движение среднестатистической частицы. В приложениях к теории элементарных частиц движение среднестатистической частицы не дает возможности проникнуть в структуру элементарной частицы, тогда как описание движения отдельной частицы (даже недетерминированной) подает надежду понять устройство элементарных частиц.

Формально это означает, что концепция динамики частиц в дискретной геометрии отличается от концепции динамики частиц в пространственно-временной геометрии Минковского, потому что в геометрии Минковского формализм динамики частиц существенно использует непрерывность геометрии пространства-времени. Это формализм не может быть использован в дискретной геометрии пространства-времени.

2 Описание геометрических объектов в физической геометрии

В физической геометрии имеется только одна базовая величина (мировая функция), которая полностью описывает все геометрические объекты геометрии. Все геометрические объекты описываются единообразно во всех физических геометриях. Такие геометрические объекты как отрезок прямой и угол являются фундаментальными объектами при традиционном представлении собственно евклидовой геометрии. Их свойства формулируются в виде аксиом, и они используются при построении более сложных геометрических объектов. В физической геометрии отрезок прямой и угол являются производными объектами, которые строятся в терминах мировой функции.

В σ-имманентном представлении собственно евклидовой геометрии отрезок прямой $\mathcal{T}_{[PQ]}$ Межу двумя точками P и Q описывается соотношением (1.1). Угол φ между двумя векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ описывается формулой

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|} = \frac{\sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1)}{\sqrt{4\sigma(P_0 P_1)\,\sigma(Q_0, Q_1)}} \tag{2.1}$$

где скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ определяется формулой (1.2).

Если попробовать построить дискретную геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, определенную соотношением (1.9), стартуя с аксиом, которые описывают свойства отрезка и угла, то мы не сможем определить, каковы свойства отрезка $\mathcal{T}_{[PQ]}$ в произвольной геометрии (например, в дискретной геометрии). Начиная с аксиом собственно евклидовой геометрии, очень трудно представить себе, что отрезок прямой может быть трубкой (поверхностью), а не одномерной линией. Стартуя с этих аксиом, нельзя получить формулу (1.1) для отрезка прямой в дискретной геометрии пространства-времени. В результате вариант дискретной геометрии пространства-времени не разрабатывался. Вместо дискретной геометрии пространства-времени разрабатывалась непрерывная геометрия пространства-времени, оснащенная квантовыми принципами. Этот подход был основан на предположении, что все геометрические объекты могут быть построены как комбинации фундаментальных блоков (точки, отрезка, угла). Это предположение означает, что геометрия является логическим построением (аксиоматизируемой геометрией). Это условие может быть слишком ограничительным для реальной геометрии пространства-времени. Во всяком случае не очень разумно налагать ограничения с самого начала, особенно если дискретная геометрия пространства-времени оказывается неаксиоматизируемой.

Почти все базовые положения дифференциальной геометрии (многообразие, размерность, система координат, линейная зависимость векторов) используются при предположении, что геометрия непрерывна. Исключением является только понятие функции расстояния, которое может быть определено и в дискретной геометрии. Используя функцию расстояния как единственную базовую величину геометрии, можно надеяться описать и непрерывную геометрию и дискретную. Идея описывать геометрию в терминах функции расстояния – это старая идея. На функцию расстояния ϱ накладываются следующие условия

$$\rho(P, Q) \geq 0, \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{2.2}$$

$$\rho(P, Q) = 0, \qquad \text{iff } P = Q \tag{2.3}$$

$$\rho(P, Q) + \rho(Q, R) \geq \rho(P, R), \qquad \forall P, Q, R \in \Omega \tag{2.4}$$

Такая геометрия известна как метрическая геометрия. Условие (2.4) допускает только такие геометрии, где отрезок прямой (1.1) является одномерным множеством точек. Условие (2.2) запрещает применение метрической геометрии в качестве геометрии пространства-времени.

Были попытки ввести так называемую дистантную геометрию [2, 3], которая свободна от ограничения (2.4). Заметим, что аксиома треугольника (2.4) означает, что прямая является одномерным множеством точек. Однако, Блюменталь [3] не мог преодолеть представление евклидовой геометрии, что прямая не имеет толщины, хотя формальное препятствие в виде аксиомы треугольника (2.4) было преодолено. С логической точки зрения тот факт, что в евклидовой геометрии прямая есть одномерное множество точек, не означает, что прямая является одномерным множеством точек в любой геометрии. Тем не менее, Блюменталь ввел кривую как непрерывное отображение интервала $(0,1)$ на пространство Ω. Он ввел дополнительное фундаментальное понятие (непрерывное отображение), которое нельзя сформулировать в терминах расстояния. В результате дистантная геометрия потеряла монистический характер, когда геометрия полностью описывается в терминах расстояния.

Физическая геометрия отличается от традиционного представления евклидовой геометрии в том отношении, что она является монистической концепцией, которая полностью описывается в терминах мировой функции (или расстояния). В физической геометрии нет необходимости согласовывать разные фундаментальные понятия, потому что имеется только одна фундаментальная величина.

Геометрический объект есть геометрический образ физического тела. Любой геометрический объект есть некоторое подмножество точек пространства-времени. Однако геометрический объект – это не произвольное множество точек. Геометрический объект должен быть так определен в физической геометрии, чтобы геометрические объекты (которые являются образами соответствующих физических тел) могли быть опознаны в различных геометриях пространства-времени.

Определение 2.1: Геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ геометрии $\mathcal{G}=\{\sigma,\Omega\}$ есть подмножество $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}\subset\Omega$ точечного множества Ω. Этот геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ представляет собой множество корней $R\in\Omega$ функции $F_{\mathcal{P}_n,\sigma}$

$$F_{\mathcal{P}_n,\sigma}: \qquad \Omega\rightarrow\mathbb{R} \tag{2.5}$$

где

$$F_{\mathcal{P}_n,\sigma} \quad : \qquad F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=G_{\mathcal{P}_n,\sigma}(u_1,u_2,...u_s), \qquad s=\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{2.6}$$

$$u_l = \sigma(w_i,w_k), \qquad i,k=0,1,...n+1, \qquad l=1,2,...\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{2.7}$$

$$w_k = P_k\in\Omega, \qquad k=0,1,...n, \qquad w_{n+1}=R\in\Omega \tag{2.8}$$

Здесь $\mathcal{P}_n=\{P_0,P_1,...,P_n\}\subset\Omega$ суть $n+1$ точек, которые являются параметрами геометрического объекта $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$

$$g_{\mathcal{P}_n,\sigma}=\{R|F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=0\}, \qquad R\in\Omega, \qquad \mathcal{P}_n\in\Omega^{n+1} \tag{2.9}$$

$F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=G_{\mathcal{P}_n,\sigma}(u_1,u_2,...u_s)$ есть произвольная функция от $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ аргументов u_s и от $n+1$ параметров $\mathcal{P}_n$. Множество $\mathcal{P}_n$ параметров геометрического объекта называется каркасом геометрического объекта. Подмножество $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ называется оболочкой каркаса. Каркас является аналогом репера, жестко прикрепленному к физическому телу. Следя за движением каркаса, мы следим за движением физического тела. Когда частица рассматривается как геометрический объект, ее движение в пространстве-времени описывается движением ее каркаса $\mathcal{P}_n$. При таком подходе (приближение твердого тела) форма оболочки не имеет значения.

Замечание: Произвольное подмножество Ω' точек множества Ω не является, вообще говоря, геометрическим объектом. Предполагается, что физические тела могут иметь форму физических объектов, потому что только в этом случае можно отождествить одинаковые физические тела (геометрические объекты) в разных геометриях.

Существование некоторых геометрических объектов в различных областях пространства-времени, имеющих различные геометрии, поднимает вопрос об эквивалентности геометрических объектов в различных пространственно-временных геометриях. Такой вопрос не возникал раньше, потому что не рассматривались такие ситуации, когда физическое тело перемещалось из одной области пространства- времени в другую область, имеющую другую геометрию. Вообще, математический формализм традиционной геометрии пространства-времени (дифференциальной геометрии) не приспособлен для одновременного рассмотрения нескольких различных геометрий разных областей пространства-времени.

Мы можем воспринимать геометрию пространства-времени только через движение физических тел в пространстве-времени или через построение геометрических объектов, соответствующих этим физическим телам. Как следует из *определения 2.1* геометрического объекта, функция F как функция ее аргументов (мировых функций различных точек) одна и та же во всех физических геометриях. Это означает, что геометрический объект $\mathcal{O}_1$ в геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ получается из некоторого геометрического объекта $\mathcal{O}_2$ в геометрии $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ с помощью замены $\sigma_2 \to \sigma_1$ в определении этого геометрического объекта.

Определение 2.2: Геометрический объект $g_{P'_n,\sigma'}$ ($\mathcal{P}'_n = \{P'_0, P'_1, ..P'_n\}$) в геометрии $\mathcal{G}' = \{\sigma', \Omega'\}$ и геометрический объект $g_{P_n,\sigma}$ ($\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ..P_n\}$) в геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ эквивалентны, если

$$\sigma'(P'_i, P'_k) = \sigma(P_i, P_k), \qquad i, k = 0, 1, ..n \tag{2.10}$$

и функция $G'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}$ для $g_{P'_n,\sigma'}$ совпадает с функцией $G_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ для $g_{P_n,\sigma}$ в формуле (2.6)

$$G'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}(u_1, u_2, ...u_s) = G_{\mathcal{P}_n,\sigma}(u_1, u_2, ...u_s) \tag{2.11}$$

В этом случае

$$u_l \equiv \sigma(P_i, P_k) = u'_l \equiv \sigma'(P'_i, P'_k), \qquad i, k = 0, 1, ...n, \qquad l = 1, 2, ..n(n+1)/2 \tag{2.12}$$

Поскольку физическая геометрия определяется построением геометрических объектов, физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ может быть получена из некоторой известной стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}} = \{\sigma_{\mathrm{st}}, \Omega\}$ с помощью деформации стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$. Деформация стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$ осуществляется заменой $\sigma_{\mathrm{st}} \to \sigma$ во всех определениях геометрических объектов в стандартной геометрии. Собственно евклидова геометрия является аксиоматизируемой геометрией. Она была построена как логическая конструкция с помощью евклидова метода. Собственно евклидова геометрия является физической геометрией. Она может быть использована в качестве стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$. Построение физической геометрии как результат деформации собственно евклидовой геометрии называется принципом деформации [4]. Большинство физических геометрий являются неаксиоматизируемыми геометриями. Они могут быть построены только с помощью принципа деформации..

Описание движения элементарных частиц в пространстве-времени содержит только каркасы частиц $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$. Вид функции (2.6) не имеет значения в приближении, когда частица рассматривается как твердое тело. В динамике элементарных частиц существенны только длины $|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k| = \sqrt{2\sigma\left(P_i, P_k\right)}$ векторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k$, $i, k = 0, 1, ...n$. Эти векторы определяются каркасом частицы $\mathcal{P}_n$.

Эквивалентность ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$) двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношениями

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1): \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{2.13}$$

где

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = \sqrt{2\sigma\left(P_0, P_1\right)} \tag{2.14}$$

и скалярное произведение ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$) определяется соотношением (1.2)

Каркасы $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и $\mathcal{P}'_n = \{P'_0, P'_1, ...P'_n\}$ могут принадлежать одному и тому же геометрическому объекту, если

$$|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k| = |\mathbf{P}'_i\mathbf{P}'_k|, \qquad i, k = 0, 1, ...n \tag{2.15}$$

т.е. длины всех векторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k$ и соответствующих векторов $\mathbf{P}'_i\mathbf{P}'_k$ равны. Однако, этого недостаточно для эквивалентности каркасов $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}'_n$, потому что взаимная ориентация каркасов (соответствующих им реперов) важна для этой эквивалентности.

Каркасы $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и $\mathcal{P}'_n = \{P'_0, P'_1, ...P'_n\}$ эквивалентны, если

$$(\mathcal{P}_n\mathrm{eqv}\mathcal{P}'_n): \qquad \text{if} \quad \mathbf{P}_i\mathbf{P}_k\mathrm{eqv}\mathbf{P}'_i\mathbf{P}'_k, \qquad i, k = 0, 1, , ...n \tag{2.16}$$

Другими словами, эквивалентность каркасов требует равенства длин векторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k$ и $\mathbf{P}'_i\mathbf{P}'_k$ и равенства их взаимной ориентаций. Для отождествления геометрических объектов нужно только равенство длин векторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_k$ и $\mathbf{P}'_i\mathbf{P}'_k$

Когда мы начинаем с мировой функции как единственной фундаментальной величины геометрии, то такие геометрические объекты как отрезок прямой и угол появляются как результат обработки некоторой фундаментальной величины (мировой функции). Вообще говоря, можно использовать другие способы обработки мировой функции. Однако мы используем отрезки прямой и каркасы, построенные из них, потому что мы знаем, как каркасы (реперы) связаны с динамикой частиц. При свободном движении физического тела, каркас, ассоциированный с ним, движется поступательно. Вращательное движение твердого тела не является свободным, потому что внутри физического тела появляются внутренние силы, и некоторые части физического тела движутся ускоренно.

3 Подвижность границы между геометрией и динамикой

Движение твердых тел описывается динамическими уравнениями, записанными в геометрии пространства-времени. Граница между геометрией и динамикой подвижна. Можно выбрать простую геометрию пространства-времени и сложную динамику. Наоборот, можно выбрать простую динамику и сложную геометрию пространства-времени.

Например, движение заряженной частицы в заданном электромагнитном поле описывается в однородной пространственно-временной геометрии Минковского как движение под действием силового поля. Соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}-\frac{e}{c}A_i\right)g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^k}-\frac{e}{c}A_k\right)=m^2c^2,\quad S=S\left(x\right),\quad g^{ik}=\mathrm{diag}\left\{c^{-2},-1,-1,-1\right\}$$

где m есть масса частицы и e – ее заряд. Такое описание содержит две основные сущности: геометрию пространства-времени и электромагнитное поле.

То же самое движение заряженной частицы может быть описано как свободное движение частицы в 5-мерном пространстве-времени Калуцы-Клейна. Соответствующее уравнение Гамильтона – Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial X^A}\gamma^{AB}\frac{\partial S}{\partial X^B}=m_5^2c^2,\quad S=S\left(X\right),\quad X=\left\{x^0,x^1,x^2,x^3,x^5\right\},\quad \frac{\partial S}{\partial x^5}=\frac{e}{ac}=\mathrm{const}$$

$$\gamma^{AB}=\left\Vert \begin{array}{cc} g^{ik} & -g^{il}a_l \\ -g^{kl}a_l & -1+g^{ls}a_la_s \end{array}\right\Vert ,\qquad a_l=aA_l,\qquad m_5^2=m^2-\left(\frac{e}{ac}\right)^2$$

где a есть некоторая постоянная.

В этом случае электромагнитное поле включается в геометрию пространства-времени. Описание в пространственно-временной геометрии "поглощает" динамику. Динамика становится проще, а геометрия становится сложнее. Геометрия перестает быть однородной, потому что она содержит электромагнитное поле.

Если геометрия пространства-времени описывается одной фундаментальной величиной (мировой функцией), и движение частицы предполагается свободным, то такое "поглощение" динамики геометрией пространства-времени приводит к упрощению динамики частицы. В результате возникает монистическое описание движения частицы в терминах мировой функции.

В микромире, где существует несколько различных силовых полей, такое сведение динамики к геометрии пространства-времени сильно упрощает описание движения частицы. Если имеется несколько силовых полей, то их согласование очень сложно, потому что число вариантов согласования быстро растет с числом силовых полей. В случае, когда все поля поглощаются геометрией пространства-времени, возникает монистическая концепция, которая не нуждается во взаимном согласовании. Разумеется, мировая функция становится более сложной, однако это только одна инвариантная величина, представляющая собой функцию двух пространственно-временных точек. То, что динамика частицы может формулироваться в бескоординатном виде в инвариантных терминах, является привлекательным обстоятельством.

Мы увидим, что каркасная концепция динамики частиц формулируется очень просто в виде уравнений в конечных разностях (а не в виде дифференциальных уравнений). Это естественно, поскольку геометрия пространства-времени может оказаться дискретной. В дискретной геометрии пространства-времени, где нет бесконечно малых расстояний, дифференциальные уравнения нельзя использовать.

Однако, в случае, когда характерные масштабы много больше элементарной длины, можно использовать дифференциальные уравнения вместо уравнений в конечных разностях.

4 Дискретность и ее проявления

Простейшая дискретная геометрия пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ описывается мировой функцией (1.10). Плотность точек в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ по отношению к плотности точек в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ описывается соотношением

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{M}}}{d\sigma_{\mathrm{d}}}=\left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{if} & |\sigma_{\mathrm{d}}|<\frac{1}{2}\lambda_0^2 \\ 1 & \text{if} & |\sigma_{\mathrm{d}}|>\frac{1}{2}\lambda_0^2 \end{array}\right. \qquad (4.1)$$

Если мировая функция имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{g}}=\sigma_{\mathrm{M}}+\frac{\lambda_0^2}{2}\left\{\begin{array}{lll} \operatorname{sgn}(\sigma_{\mathrm{M}}) & \text{if} & |\sigma_{\mathrm{M}}|>\sigma_0 \\ \frac{\sigma_{\mathrm{M}}}{\sigma_0} & \text{if} & |\sigma_{\mathrm{M}}|\leq\sigma_0 \end{array}\right. \qquad (4.2)$$

где σ_0 =const, $\sigma_0\geq 0$, то относительная плотность точек имеет вид

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{M}}}{d\sigma_{\mathrm{g}}}=\left\{\begin{array}{lll} \frac{2\sigma_0}{2\sigma_0+\lambda_0^2} & \text{if} & |\sigma_{\mathrm{g}}|<\sigma_0+\frac{1}{2}\lambda_0^2 \\ 1 & \text{if} & |\sigma_{\mathrm{g}}|>\sigma_0+\frac{1}{2}\lambda_0^2 \end{array}\right. \qquad (4.3)$$

Если параметр $\sigma_0\rightarrow 0$, мировая функция $\sigma_{\mathrm{g}}\rightarrow\sigma_{\mathrm{d}}$, и плотность точек (4.3) стремится к плотности точек (4.1). Пространственно-временная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$, описываемая мировой функцией σ_{g} является геометрией, которая дискретна только частично, потому что она является промежуточной между дискретной геометрией $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ и непрерывной геометрией $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Мы будем называть геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$ зернистой.

Отклонение дискретной геометрии пространства-времени от непрерывной геометрии Минковского порождает особые свойства геометрии, которые являются следствием невозможности введения линейного векторного пространства.

Пусть $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ является времениподобным вектором в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ ($\sigma_{\mathrm{D}}(Q_0,Q_1)>0$). Попытаемся определить вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ в точке P_0, который эквивалентен вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$. Пусть для простоты координаты имеют вид

$$P_0=Q_0=\{0,0,0,0\}, \qquad Q_1=\{1,0,0,0\}, \qquad P_1=\left\{x^0,\mathbf{x}\right\}=\left\{x^0,x^1,x^2,x^3\right\} \qquad (4.4)$$

В этой системе координат мировая функция геометрии Минковского имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{M}}(x,x')=\frac{1}{2}\left(\left(x^0-x^{0\prime}\right)^2-(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2\right) \qquad (4.5)$$

и σ_{d} определяется соотношением (1.10). мы должны определить координаты x точки P_1 из двух уравнений (2.13), которые имеют вид

$$\frac{1}{2}\left(\left(\left(x^0\right)^2-\mathbf{x}^2\right)+\frac{\lambda_0^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda_0^2}{2}\right) \qquad (4.6)$$

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda_0^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\left(x^0\right)^2-\mathbf{x}^2\right)+\frac{\lambda_0^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\left(\left(x^0-1\right)^2-\mathbf{x}^2\right)+\frac{\lambda_0^2}{2}\right)=\left(1+\frac{\lambda_0^2}{2}\right) \quad (4.7)$$

После упрощений получаем

$$x^0=1+\frac{\lambda_0^2}{4},\qquad \mathbf{x}^2=\left(1+\frac{\lambda_0^2}{4}\right)^2-1 \quad (4.8)$$

Если $\lambda_0=0$, то дискретная геометрия превращается в геометрию Минковского, и $\mathbf{x}^2=0$. Из этого уравнения следуют три уравнения

$$x^1=0,\quad x^2=0,\quad x^3=0 \quad (4.9)$$

Это означает, что геометрия Минковского является вырожденной геометрией, потому что различные решения дискретной геометрии сливаются в одно решение геометрии Минковского.

Получаем для координат точки P_1:

$$P_1=\left\{\sqrt{r+1},r\sin\theta,r\sin\theta\sin\varphi,r\sin\theta\cos\varphi\right\},\qquad r=\frac{\lambda_0}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{\lambda_0^2}{4}} \quad (4.10)$$

где углы θ, φ произвольны. Такое положение формулируется как многовариантность отношения эквивалентности. Все решения лежат на поверхности двумерной сферы радиуса $r\simeq\lambda_0/\sqrt{2}$ ($\lambda_0^2\ll 1$).

Пусть теперь $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ пространственноподобный вектор в $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ ($\sigma_\mathrm{d}(Q_0,Q_1)<0$). Попытаемся определить вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ в точке P_0, который эквивалентен вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$. Пусть

$$P_0=Q_0=\{0,0,0,0\},\qquad Q_1=\{0,1,0,0\},\qquad P_1=\left\{x^0,\mathbf{x}\right\}=\left\{x^0,x^1,x^2,x^3\right\} \quad (4.11)$$

Два уравнения (2.13) имеют вид

$$\frac{1}{2}\left(\left(x^0\right)^2-\mathbf{x}^2\right)-\frac{\lambda_0^2}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\lambda_0^2}{2} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}&\left(-\frac{1}{2}-\frac{\lambda_0^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(x^0\right)^2-\mathbf{x}^2\right)-\frac{\lambda_0^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\left(x^0\right)^2-\left(x^1-1\right)^2-\left(x^2\right)^2-\left(x^3\right)^2\right)+\frac{\lambda_0^2}{2}\\ =&\ -\left(1+\lambda_0^2\right) \quad (4.13)\end{aligned}$$

После упрощений получаем

$$x^1=1+\frac{\lambda_0^2}{2},\qquad \left(x^0\right)^2-\mathbf{x}^2=-1 \quad (4.14)$$

Решение для точки P_1 имеет вид

$$P_1=\left\{\sqrt{a_2^2+a_3^2+\frac{\lambda_0^2}{2}\left(2+\frac{\lambda_0^2}{2}\right)},1+\frac{\lambda_0^2}{2},a_2,a_3\right\} \quad (4.15)$$

где a_2 и a_3 суть произвольные вещественные числа. В случае пространственноподобных векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ решение не единственно, даже если $\lambda_0 = 0$, и геометрия является геометрией Минковского. Все решения лежат на поверхности двумерной сферы произвольного радиуса $\sqrt{a_2^2 + a_3^2}$.

Таким образом, обе геометрии (дискретная и Минковского) многовариантны по отношению к пространственноподобным векторам. Однако это обстоятельство остается незамеченным в традиционной релятивистской динамике частиц, потому что пространственноподобные векторы там не используются.

Многовариантность дискретной геометрии приводит к интранзитивности отношения эквивалентности для двух векторов. В самом деле, если $(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)$ и $(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{P}_0\mathbf{P}'_1)$, но вектор $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \overline{\mathrm{eqv}} \mathbf{P}_0\mathbf{P}'_1)$, то это означает интранзитивность отношения эквивалентности. Кроме того, это означает, что дискретная геометрия неаксоматизируема, поскольку в любом логическом построении отношение эквивалентности транзитивно.

Перенос вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ в некоторую точку Q_0 приводит к неопределенности результата этого переноса, потому что в точке Q_0 имеется много векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}'_1$,..., которые эквивалентны вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Сумма $\mathbf{Q}_0\mathbf{S}$ двух векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_1\mathbf{S}$, когда конец одного вектора является началом другого определяется точками Q_0 и S

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{S} = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{S} \tag{4.16}$$

Сумма $\mathbf{Q}_0\mathbf{S}$ двух векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ в точке Q_0 определяется соотношениями

$$\mathbf{Q}_0\mathbf{S} = \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1\mathbf{S}, \qquad (\mathbf{Q}_1\mathbf{S} \mathrm{eqv} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) \tag{4.17}$$

В дискретной геометрии сумма двух векторов, вообще говоря, неоднозначна.

Результат умножения вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ на вещественное число a также неоднозначен. Результат $\mathbf{P}_0\mathbf{S}$ такого умножения на число a Определяется соотношениями

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \upuparrows \mathbf{P}_0\mathbf{S} \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{S}| = a\,|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \tag{4.18}$$

или в терминах алгебраических соотношений

$$((\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{S}) = a\,|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|) \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{S}| = a\,|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \tag{4.19}$$

Таким образом, в дискретной геометрии результат суммирования векторов и умножения вектора на число не является , вообще говоря, единственным. Это означает, что нельзя ввести линейное векторное пространство в дискретной геометрии.

Пусть дискретная геометрия описывается n координатами. Пусть каркас $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ определяет n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, ...n$, которые линейно независимы в смысле

$$F_n(\mathcal{P}_n) = \det \|(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)\| \neq 0 \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{4.20}$$

Можно однозначно определить проекции вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ на векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, ...n$ с помощью соотношений

$$\mathrm{Pr}\,(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k} = \frac{(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k|} \tag{4.21}$$

Однако нельзя восстановить вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, используя его проекции на векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$. Таким образом, в дискретной геометрии все операции в линейном векторном пространстве неоднозначны.

Математический аппарат непрерывной геометрии неадекватен для применения в дискретной геометрии, потому что он слишком специален и адаптирован к непрерывной геометрии.

5 Каркасная концепция динамики частиц

Предположим,что движение частицы свободно, и все силовые поля включены в геометрию пространства-времени. Движение частицы описывается движением ее каркаса $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$, который представляет собой множество из $n+1$ пространственно-временных точек. Каркас представляет собой аналог репера, жестко скрепленного с частицей (физическим телом). Следя за движением каркаса, можно следить за движением частицы. Движение каркаса описывается мировой цепью $\mathcal{C}$ связанных каркасов

$$\mathcal{C} = \bigcup_{s=-\infty}^{s=+\infty} \mathcal{P}_n^{(s)} \tag{5.1}$$

Каркасы $\mathcal{P}_n^{(s)}$ мировой цепи связаны в том смысле, что

$$P_1^{(s)} = P_0^{(s+1)}, \qquad s = ...0, 1, ... \tag{5.2}$$

Вектор $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)} = \mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_0^{(s+1)}$ является ведущим вектором, который определяет направление мировой цепи. Если движение частицы является свободным, то смежные каркасы цепи эквивалентны

$$\mathcal{P}_n^{(s)}\mathrm{eqv}\mathcal{P}_n^{(s+1)}: \qquad \mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)}\mathrm{eqv}\mathbf{P}_i^{(s+1)}\mathbf{P}_k^{(s+1)}, \qquad i,k = 0,1,...n, \qquad s = ..0,1,.. \tag{5.3}$$

Если частица описывается каркасом $\mathcal{P}_n^{(s)}$, то мировая цепь (5.1) имеет $n(n+1)/2$ инвариантов

$$\mu_{ik} = \left|\mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)}\right|^2 = 2\sigma\left(P_i^{(s)}, P_k^{s}\right), \qquad i,k = 0,1,...n, \qquad s = ...0,1,... \tag{5.4}$$

которые постоянны вдоль всей мировой цепи.

Уравнения (5.3) образуют систему из $n(n+1)$ уравнений в конечных разностях для определения nD координат n точек каркаса $\{P_1, P_2, ..P_n\}$, где D есть размерность пространства-времени.

В случае точечной частицы, когда $n = 1$, $D = 4$, число уравнений $n_e = 2$, тогда как число переменных $n_v = 4$. Число уравнений меньше числа динамических переменных. В дискретной геометрии пространства-времени (1.10) положение смежного каркаса определяется неоднозначно. В результате мировая цепь вихляет. В нерелятивистском приближении статистическое описание стохастических мировых цепей приводит к уравнению Шредингера [1], если элементарная длина λ_0 имеет вид (1.17).

Динамические уравнения (5.4) являются уравнениями в конечных разностях. На больших масштабах, когда можно перейти к пределу $\lambda_0 = 0$, динамические уравнения (5.4) превращаются в дифференциальные динамические уравнения. В случае точечной частицы ($n = 1$) и 5-мерной геометрии Калуцы-Клейна эти уравнения описывают движение заряженной частицы в заданном электромагнитном поле.

Динамические уравнения (5.3) осуществляют каркасную концепцию динамики частиц в микромире. Каркасная концепция динамики отличается от традиционной концепции динамики частиц в том отношении, что число динамических уравнений может отличаться от числа динамических переменных, подлежащих определению. В традиционной концепции динамики частиц число динамических уравнений (первого порядка) всегда совпадает с числом динамических переменных, подлежащих определению. В результате движение частицы (или среднестатистической частицы) оказывается детерминированным. В случае квантовых частиц, чье движение является стохастическим (недетерминированным) уравнения записываются для статистического ансамбля недетерминированных частиц (или для среднестатистической частицы).

Статистический ансамбль недетерминированных представляет собой непрерывную динамическую систему. Он может рассматриваться как жидкость (или газ), чье состояние описывается функциями от пространственных координат. Эти функции могут быть гидродинамическими переменными: плотность $\rho(t, \mathbf{x})$ и скорость $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, или волновая функция $\psi(t, \mathbf{x})$, которая также представляет собой метод описания жидкости [5]. В любом случае среднестатистическая частица (или статистический ансамбль) имеет бесконечное число степеней свободы. Тем не менее динамические уравнения детерминированные. Они могут быть получены из вариационного принципа.

Динамические уравнения (5.3) не могут быть получены из вариационного принципа, потому что эволюция каркаса может быть недетерминированной. Проиллюстрируем различие между каркасной концепцией динамики частиц и традиционной концепцией динамики частиц на примере стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ [6]

Действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ записывается в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int \int_{V_\xi} \left\{ \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} \right\} \rho_0(\boldsymbol{\xi})\, dt d\boldsymbol{\xi}, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{5.5}$$

Переменные $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ описывают регулярную составляющую движения частицы. Переменные $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ описывают среднее значение стохастической составляющей скорости, $\hbar$ есть квантовая постоянная. Второй член в (5.5) описывает кинетическую энергию стохастической составляющей скорости. Третий член описывает взаимодействие между стохастической составляющей $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и регулярной составляющей $\dot{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\xi})$. Переменные $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ маркируют элементы статистического ансамбля. Оператор

$$\boldsymbol{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \tag{5.6}$$

определен в пространстве координат $\mathbf{x}$. Динамические уравнения для динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ получаются как результат вариации действия (5.5) по динамическим переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$.

Чтобы получить действие для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ из действия (5.5) для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, следует опустить интегрирование по $\boldsymbol{\xi}$ в (5.5). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{st}}}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^{2}+\frac{m}{2}\mathbf{u}^{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}dt,\qquad\dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt}\tag{5.7}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t\right)$ и $\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ суть зависимые динамические переменные. Функционал действия (5.7) не является хорошо определенным (для $\hbar\neq0$), потому что оператор $\boldsymbol{\nabla}$ определен в трехмерной окрестности точки $\mathbf{x}$, а не в самой точке $\mathbf{x}$. Поскольку функционал действия (5.7) не является хорошо определенным, нельзя получить динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Это по определению означает, что частица $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является стохастической. Полагая $\hbar=0$ в (5.7), преобразуем действие (5.7) в действие для детерминированной частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{d}}}\left[\mathbf{x}\right]=\int\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^{2}dt,\qquad\dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt}\tag{5.8}$$

потому что в этом случае $\mathbf{u}=0$ в силу динамических уравнений.

После надлежащей замены переменных действие (5.5) преобразуется к виду (смотри детали преобразования в [6])

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^{*}]=\int\left\{\frac{i\hbar}{2}(\psi^{*}\partial_{0}\psi-\partial_{0}\psi^{*}\cdot\psi)-\frac{\hbar^{2}}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^{*}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi+\frac{\hbar^{2}}{8m}\rho\boldsymbol{\nabla}s_{\alpha}\boldsymbol{\nabla}s_{\alpha}\right\}\mathrm{d}^{4}x\tag{5.9}$$

где ψ есть двух-компонентная комплексная волновая функция

$$\rho=\psi^{*}\psi,\qquad s_{\alpha}=\frac{\psi^{*}\sigma_{\alpha}\psi}{\rho},\qquad\alpha=1,2,3\tag{5.10}$$

σ_{α} суть 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_{1}=\left(\begin{array}{cc}0&1\\1&0\end{array}\right),\qquad\sigma_{2}=\left(\begin{array}{cc}0&-i\\i&0\end{array}\right),\qquad\sigma_{3}=\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&-1\end{array}\right),\tag{5.11}$$

В случае, когда волновая функция ψ одно-компонентна, например, $\psi=\left\{\begin{smallmatrix}\psi_{1}\\0\end{smallmatrix}\right\}$, величины $\mathbf{s}=\{s_{1},s_{2},s_{3}\}$ постоянны ($s_{1}=0,\quad s_{2}=0,\quad s_{3}=1$), и действие (5.9) превращается в

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^{*}]=\int\left\{\frac{i\hbar}{2}(\psi^{*}\partial_{0}\psi-\partial_{0}\psi^{*}\cdot\psi)-\frac{\hbar^{2}}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^{*}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi\right\}\mathrm{d}^{4}x\tag{5.12}$$

Динамическое уравнение, порожденное действием (5.12), является уравнением Шредингера

$$i\hbar\partial_{0}\psi+\frac{\hbar^{2}}{2m}\boldsymbol{\nabla}^{2}\psi=0\tag{5.13}$$

Это динамическое уравнение описывает потенциальное течение жидкости.

В общем случае получаем из действия (5.9)

$$()i\hbar\partial_0\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi+\frac{\hbar^2}{8m}\boldsymbol{\nabla}^2 s_\alpha\cdot(s_\alpha-2\sigma_\alpha)\,\psi-\frac{\hbar^2}{4m}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\sigma_\alpha\psi=0 \tag{5.14}$$

где два последние члена описывают завихренность течения жидкости.

В традиционной концепции динамики получаются динамические уравнения для среднестатистической частицы (т.е. для статистического ансамбля, нормированного на одну частицу), но не существует динамических уравнений для отдельной стохастической частицы. В каркасной концепции динамики динамические уравнения существуют для отдельной частицы. Эти уравнения многозначны (многовариантны), но они существуют. Можно получить уравнения для среднестатистической частицы, которая представляет собой разновидность жидкости (сплошной среды). Течение этой жидкости детерминировано, и динамические уравнения для этого течения могут быть получены из вариационного принципа.

Таким образом, различие между традиционной концепцией динамики и каркасной концепцией динамики заключается в описании отдельной частицы. Традиционная концепция не может получить динамические уравнения для отдельной стохастической частицы, тогда как каркасная концепция может получить динамические уравнения для отдельной частицы, хотя эти уравнения многовариантны. Это различие обусловлено тем фактом, что в случае каркасной концепции стохастичность обусловлена геометрией пространства-времени, тогда как в традиционной концепции динамики стохастичность вводится аксиоматически, и модели для нее нет.

Можно сравнить эту ситуацию с ситуацией в описании тепловых явлений. Если используется аксиоматическая термодинамика, то мы не можем ничего сказать о структуре молекул газа. Мы не можем даже сказать о существовании молекул. Если мы используем статистическую физику, мы можем получить некоторую информацию о поведении и структуре молекул газа, хотя их движение хаотическое и оно многовариантно.

Каркасная концепция динамики частиц осуществляет более детальное описание элементарной частицы, и можно надеяться получит некоторую информацию о структуре элементарной частицы.

Сейчас имеются только два примера применения каркасной концепции. Рассматривая компактификацию в 5-мерной геометрии Калуцы-Клейна и налагая условие единственности на мировую функцию, получаем, что значение электрического заряда стабильной элементарной частицы ограничено сверху элементарным зарядом [7]. Этот результат известен из экспериментов. но не мог быть получен теоретически, потому что никто не рассматривал мировую функцию как фундаментальную величину и не требовал ее единственности.

Другой пример касается структуры Дираковской частицы(фермиона). Рассмотрение в рамках каркасной концепции [8] показывает, что мировая цепь фермиона представляет собой пространственноподобную спираль с времениподобной осью. Усредненная мировая цепь свободного фермиона представляет собой времениподобную прямую. Спиральное движение фермиона порождает угловой момент (спин) и магнитный момент. Такой результат выглядит довольно естественным. В традиционной концепции динамики частиц спин и магнитный момент фермиона постулируются без ссылки на его структуру.

6 Заключительные замечания

Таким образом предположение о дискретности геометрии пространства-времени оказывается более разумным и естественным, чем предположение о квантовой природе физических явлений в микромире. Дискретность есть просто свойство пространства-времени, тогда как квантовые принципы предполагают введение новых сущностей.

Формализм дискретной геометрии очень прост. Он не содержит теорем со сложными доказательствами. Тем не менее дискретная геометрия и ее формализм очень трудно воспринимаются. Дискретная геометрия не развивалась в двадцатом веке, хотя дискретное пространство время было необходимо для описания физических явлений в микромире. Было довольно вероятно, что в микромире пространство-время дискретно. Что было причиной пренебрежения дискретной геометрией? Мы попытаемся ответить на этот вопрос.

Дискретная геометрия не развивалась, потому что она могла быть получена только как обобщение собственно евклидовой геометрии. Но почти все понятия и величины собственно евклидовой геометрии существенно используют понятия непрерывной (дифференциальной) геометрии. Они не могут быть использованы для построения дискретной геометрии. Только мировая функция (или расстояние) не использует ссылки на непрерывность геометрии. Только бескоординатные выражения (1.1) - (1.6) базовых величин евклидовой геометрии в терминах мировой функции позволяют построить дискретную геометрию и другие физические геометрии.

Положение, что любая геометрия аксиоматизируема, было вторым препятствием на пути построения дискретной геометрии. Вообще, тот факт, что собственно евклидова геометрия является вырожденной геометрией, являлся другим препятствием. В частности, будучи физической геометрией, собственно евклидова геометрия является аксиоматизируемой геометрией, и это обстоятельство является подтверждением ее вырожденности. Очень трудно получить общую концепцию как обобщение вырожденной концепции, потому что многие величины общей концепции совпадают в вырожденной концепции. Слившиеся понятия довольно трудно разделить. Например, физическая геометрия многовариантна, вообще говоря. Одновариантная вырожденная геометрия является вырожденной геометрией. В физической геометрии отрезок прямой (1.1) является, вообще говоря, поверхностью (трубкой). В вырожденной физической геометрии (собственно евклидовой геометрии) отрезок прямой является одномерной линией. Как можно догадаться, что отрезок прямой есть, вообще говоря, поверхность? Кроме того многовариантность отношения эквивалентности приводит к неаксиматизируемости геометрии. Но в последние две тысячи лет мы изучали только аксиоматизируемые геометрии. Как можно догадаться, что существуют неаксиоматизируемые геометрии? Прямой путь от евклидовой геометрии к физическим геометриям был очень труден, и физические геометрии были получены окольным путем.

Дж.Л.Синг [9] ввел мировую функцию для описания римановой геометрии. Я не знал работ Синга и ввел мировую функцию для описания римановой геометрии в общей теории относительности. Мой подход несколько отличался от подхода Синга. В частности, я получил уравнение для мировой функции римановой геометрии [10].

$$\frac{\partial \sigma\left(x,x'\right)}{\partial x^{i}}G^{ik'}\frac{\partial \sigma\left(x,x'\right)}{\partial x'^{k}}=2\sigma\left(x,x'\right), \qquad G^{ik'}G_{lk'}=\delta_{l}^{i}, \qquad G_{lk'}\equiv\frac{\partial^{2}\sigma\left(x,x'\right)}{\partial x^{l}\partial x'^{k}} \tag{6.1}$$

Это уравнение было получено как следствие определения мировой функции как интеграла вдоль геодезической, соединяющей точки x и x'. Это уравнение содержит только мировую функцию и ее производные.

Это уравнение поставило вопрос. Пусть мировая функция не удовлетворяет этому уравнению. Будет ли мировая функция описывать нериманову геометрию или она не будет описывать никакой геометрии? Было очень трудно ответить на этот вопрос. С одной стороны, формализм, основанный на мировой функции, был более развитым формализмом, чем формализм, основанный на использовании метрического тензора, потому что геодезическая в терминах мировой функции описывается алгебраическим уравнением (1.1), тогда как та же самая геодезическая в терминах метрического тензора описывается дифференциальными уравнениями.

С другой стороны, геодезическая, описываемая уравнением (1.1) является одномерной только в римановой геометрии. А вообще, уравнение (1.1) в n-мерном пространстве описывает $(n-1)$-мерную поверхность. Я не знал, является ли поверхность обобщением геодезической в любой геометрии. Я был не уверен, потому что в евклидовой геометрии отрезок прямой одномерен по определению. Я оставил вопрос нерешенным и вернулся к нему почти тридцать лет спустя, в начале девяностых годов.

Когда появилась струнная теория элементарных частиц, мне стало ясно, что частица может описываться мировой поверхностью (трубкой), а не только мировой линией. Поскольку мировая линия частицы ассоциируется с геодезической, я решил, что мировая трубка может описывать частицу. Это означало, что существуют геометрии пространства-времени, где прямые (геодезические) описываются мировыми трубками. Вопрос о возможности физических геометрий пространства-времени был окончательно решен, когда оказалось, что квантовое описание может быть следствием многовариантности пространства-времени. [1].

Список литературы

[1] Yu.A.Rylov, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, 2092-2098, (1991)

[2] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928).

[3] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953

[4] Yu.A.Rylov, Non-Euclidean method of the generalized geometry construction and its application to space-time geometry in *Pure and Applied Differential geometry*

pp.238-246. eds. Franki Dillen and Ignace Van de Woestyne. Shaker Verlag, Aachen, 2007. See also *e-print Math.GM/0702552*

[5] Yu.A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *Journ. Math. Phys.* **40**, *pp. 256 - 278, (1999).*

[6] Yu. A. Rylov, Uniform formalism for description of dynamic, quantum and stochastic systems *e-print /physics/0603237v6*

[7] Yu. A. Rylov, Discriminating properties of compactification in discrete uniform isotropic space-time. *e-print 0809.2516v2*

[8] Yu. A. Rylov, Geometrical dynamics: spin as a result of rotation with superluminal speed. *e-print 0801.1913.*

[9] J.L.Synge, *Relativity: the General Theory.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1960.

[10] Ю.А.Рылов, О возможности описания риманова пространства в терминах конечного интервала *Известия ВУЗОВ, Математика. с.3(28), 131-142, (1962).*