Обобщение теории относительности на произвольное пространство-время

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site:
http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm

Аннотация

Современная теория относительности ограничена в двух пунктах: (1) использование римановой геометрии пространства-времени и (2) использование неадекватных (нерелятивистских) понятий. Причины ограничений проанализированы в [1]. При устранении этих ограничений теория относительности обобщается на случай неримановой (неаксиоматизируемой) геометрии пространства-времени.

Необходимость в обобщении ОТО возникла в результате прогресса геометрии [2]. Теперь мы знаем неаксиоматизируемые геометрии, которые не были известны еще 20 лет назад. Физические геометрии, ранее неизвестные, представляют собой по существу метрические геометрии, метрика которых освобождена практически от всех традиционных ограничений. В метрической геометрии существует проблема определения геометрических понятий и правил построения геометрических объектов. Можно построить сферу и эллипсоид, которые в евклидовой геометрии определяются в терминах метрики (мировой функции). Но уже для построения прямой приходится налагать ограничения на метрику (условие треугольника). Непонятно как в метрической геометрии определить скалярное произведение, линейную независимость векторов и другие геометрические понятия. Принцип деформации [3] решает проблему определения всех геометрических понятий, какие только имеются в евклидовой геометрии, не налагая ограничений на метрику. Физическая геометрия оборудована принципом деформации, позволяющим строить все определения физической геометрии как результат деформации определений собственно евклидовой геометрии.

В физической геометрии информация о размерности геометрии и ее топологии является избыточной. Она определятся метрикой (мировой функцией), и ее нельзя задавать независимо. Физическая геометрия полностью описывается мировой функцией [4] и является, вообще говоря, многовариантной и неаксиоматизируемой. Мировая функция единообразно описывает непрерывные и дискретные геометрии. В результате динамические уравнения являются уравнениями в конечных разностях (а не дифференциальными). Кроме того для физической геометрии пространства-времени характерно бескоординатное описание динамики частиц, что обусловлено возможностью игнорировать линейное векторное пространство, свойства которого не используются в физической геометрии. Все это очень непривычно, для людей, привыкших иметь дело с римановой геометрией, которая базируется на использовании свойств линейного векторного пространства.

Число физических геометрий существенно больше числа римановых геометрий. Например, в классе римановых геометрий имеется только одна однородная и изотропная геометрия (геометрия Минковского), тогда как среди физических геометрий (т.е. геометрий, полностью описываемых мировой функцией) таких геометрий очень много. В частности, если мировая функция σ, геометрии пространства-времени имеет вид

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{M}} + \lambda_0 \mathrm{sgn}(\sigma_{\mathrm{M}}), \qquad \lambda_0 = \frac{\hbar}{2bc} \tag{1}$$

где σ_{M} есть мировая функция геометрии Минковского, а $\hbar, c, b$ суть соответственно постоянная Планка, скорость света и некоторая универсальная постоянная, то геометрия будет дискретной. Свободное движение частиц будет стохастическим. Статистическое описание его будет эквивалентно квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера [5]. Таким образом, применение физической геометрии в микромире позволяет дать статистическое обоснование квантовой механике и превратить квантовые принципы в проявление правильно выбранной геометрии пространства-времени. Следует ожидать, что и в мегамире рассмотрение наиболее общей геометрии пространства-времени и отказ от римановости геометрии, обусловленный нашим недостаточным знанием геометрии, приведет к прогрессу в нашем понимании теории гравитации и космологии.

Произвольная геометрия пространства-времени полностью описывается заданием мировой функции $\sigma(P, P')$, заданной для всех пар точек P, P'. При этом информация о размерности и топологии геометрии является избыточной, поскольку она может быть извлечена из мировой функции. Риманова геометрия пространства-времени, используемая в теории гравитации, не является наиболее общей возможной геометрией пространства-времени. Она не может описывать дискретную геометрию, или геометрию, обладающую ограниченной делимостью.

Мировая функция римановой геометрии удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^i} g^{ik}(x) \frac{\partial \sigma}{\partial x^k} = 2\sigma, \qquad \sigma(x, x') = \sigma(x', x) \tag{2}$$

Это означает, что в разложении

$$\sigma\left(x,x'\right)=\frac{1}{2}g_{ik}\left(x\right)\xi^{i}\xi^{k}+\frac{1}{6}g_{ikl}\left(x\right)\xi^{i}\xi^{k}\xi^{l}+...\qquad \xi^{k}=x^{k}-x'^{k}$$

метрический тензор полностью определяет всю мировую функцию.

Традиционные уравнения тяготения определяют только метрический тензор. Мировая функция и геометрия пространства-времени определяются на основе предположения о римановости геометрии. Обобщение уравнений тяготения на общий случай позволяет получать прямо мировую функцию, (а не только метрический тензор).

Принцип деформации позволяет построить все определения физической геометрии (т.е. геометрии, полностью описываемой мировой функцией) как результат деформации определений собственно евклидовой геометрии. Используется то обстоятельство, что кроме того, что собственно евклидова геометрия является аксиоматизируемой геометрией, она является еще и физической геометрией. Это означает, что все определения евклидовой геометрии, полученные в рамках евклидовой аксиоматики, можно представить в терминах и только в терминах мировой функции σ_{E} евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Заменяя σ_{E} во всех определениях евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ мировой функцией σ некоторой другой геометрии $\mathcal{G}$, получаем в результате все определения геометрии $\mathcal{G}$. Определение скалярного произведения $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ и и условие их эквивалентности $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ являются наиболее используемыми определениями

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)=\sigma\left(P_0,Q_1\right)+\sigma\left(P_1,Q_0\right)-\sigma\left(P_0,Q_0\right)-\sigma\left(P_1,Q_1\right)\tag{3}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)\quad \text{если}\quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)=|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|\cdot|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|\wedge|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|=|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|\tag{4}$$

Так они определяются в евклидовой геометрии. Точно так же они определяются в любой физической геометрии. Условие эквивалентности двух векторов определяется двумя уравнениями (4).

Решение уравнения (4) единственно в случае собственно евклидовой геометрии, хотя уравнений только два, а координат, подлежащих определению, больше. Для произвольной физической геометрии решение уравнений (4), вообще говоря,. не единственно. В результате имеется много векторов, в точке P_0, эквивалентных вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в точке Q_0.

Уже геометрия Минковского многовариантна относительно пространственноподобных векторов, хотя она одновариантна относительно времениподобных векторов. Геометрия Минковского многовариантна относительно пространственноподобных векторов всегда. Относительно времениподобных векторов геометрия пространства событий становится многовариантной только после надлежащей деформации.

При обобщении общей теории относительности на случай произвольной геометрии пространства-времени важны два обстоятельства: (1) использование принципа деформации, (2) использование адекватных релятивистских понятий и, в частности, релятивистского понятия близости событий (Смотри детали в [6]). Два события A и B близки если и только если

$$\sigma\left(A,B\right)=0 \tag{5}$$

В пространстве-времени Минковского изменение δg_{ik} метрического тензора под действием вещества определяется соотношением

$$\delta g_{ik}\left(x\right)=-\kappa\int G_{\mathrm{ret}}\left(x,x'\right)T_{ik}\left(x'\right)\sqrt{-g\left(x'\right)}d^{4}x',\quad \kappa=\frac{8\pi G}{c^{2}} \tag{6}$$

где

$$G_{\mathrm{ret}}\left(x,x'\right)=\frac{\theta\left(x^{0}-x'^{0}\right)}{2\pi c}\delta\left(2\sigma_{\mathrm{M}}\left(x,x'\right)\right) \tag{7}$$

Здесь G есть гравитационная постоянная, а T_{ik} есть тензор энергии-импульса вещества.

Появление δ-функции в функции Грина означает, что условие близости

$$\sigma_{\mathrm{M}}(x,x')=0$$

приводит к тому, что гравитационное (и электромагнитное) взаимодействие передаются только при прямом столкновении частиц. Тот же вид эти формулы имеют в любой физической геометрии, если представить их в терминах мировой функции.

Получаем для изменения мировой функции [6]

$$\begin{aligned}\delta\sigma\left(S_{1},S_{2}\right) &= -G\sum_{s}m_{s}\frac{\theta\left(\left(\mathbf{P}_{l}'\mathbf{P}.\mathbf{PQ}_{0}\right)\right)}{\left(\mathbf{P}_{l}'\mathbf{P}.\mathbf{P}_{l}'\mathbf{P}_{l+1}'\right)}\frac{\left(\mathbf{P}_{l}'\mathbf{P}_{l+1}'.\mathbf{PQ}_{0}\right)}{\left(\mathbf{P}_{l}'\mathbf{P}_{l+1}'.\mathbf{P}_{l}'\mathbf{P}_{l+1}'\right)\left|\mathbf{PQ}_{0}\right|}\\ &\quad\times\left(\left(\mathbf{P}_{l}'\mathbf{P}_{l+1}'.\mathbf{PS}_{1}\right)-\left(\mathbf{P}_{l}'\mathbf{P}_{l+1}'.\mathbf{PS}_{2}\right)\right)^{2}\end{aligned} \tag{8}$$

где S_1, S_2 суть две произвольные точки в пространстве-времени. Суммирование производится по всем мировым линиям частиц. возмущающих геометрию пространства-времени. Отрезок $\mathbf{P}_{l}'\mathbf{P}_{l+1}'$ представляет собой бесконечно малый элемент мировой линии одной из возмущающих частиц. Точка P_l' близка к точке P, которая является серединой отрезка S_1S_2.

$$\sigma(P,P_{l}')=0,\qquad \mathbf{PS}_{1}=-\mathbf{PS}_{2} \tag{9}$$

Векторы $\mathbf{PQ}_i$, $i=0,1,2,3$ являются базисными векторами в точке P. Вектор $\mathbf{PQ}_0$ времениподобен. Если σ_0 есть невозмущенная мировая функция геометрии пространства-времени без частиц, то $\sigma=\sigma_0+\delta\sigma$ есть мировая функция геометрии пространства-времени с возмущающими частицами. Для расчета правой части равенства (8) при помощи соотношения (3) следует использовать мировую функцию σ. Вначале мировая функция σ неизвестна, и соотношение (8) представляет собой уравнение для определения σ.

Уравнение (8) решается методом последовательных приближений. На первом шаге рассчитывается правая часть уравнения (8) с помощью σ_0 и получается $\sigma_1 = \sigma_0 + \delta\sigma_0$. На втором шаге рассчитывается правая часть уравнения (8) с помощью σ_1 и получается $\sigma_2 = \sigma_0 + \delta\sigma_1$ и т.д.

Применяя (8) к тяжелой точечной частице, получаем в первом приближении

$$\sigma_1 \left(t_1, \mathbf{y}_1; t_2, \mathbf{y}_2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4GM}{c^2 \left|\mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_1\right|}\right) c^2 \left(t_2 - t_1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\right)^2 \qquad (10)$$

где M есть масса частицы. Геометрия пространства-времени оказывается неримановой уже в первом приближении, хотя метрический тензор имеет тот же вид, какой он имеет для слабого гравитационного поля. Последующие приближения не меняют ситуации.

Таким образом, геометрия пространства-времени оказывается неримановой. Более того, предположение о римановости пространства-времени уже в случае гравитационного поля тяжелой частицы приводит к неоднозначности мировой функции для большой разности времен, поскольку имеется много геодезических, соединяющих точки с большой разностью $(t_2 - t_1)$. Это недопустимо в физической геометрии, где мировая функция должна быть однозначной.

Обобщение ОТО на более общий случай геометрии пространства-времени порождено прогрессом в области геометрии. При обобщении использовались два основных положения: 1. Использование адекватных релятивистских понятий, в частности, релятивистского понятия близости событий, что заведомо не является гипотезой, подлежащей экспериментальной проверке. 2. Использование принципа деформации, что тоже не является гипотезой, но принципом, на котором основывается физическая геометрия. Для общего случая характерен единый формализм, пригодный как для непрерывных, так и для дискретных геометрий. Единый формализм использует динамические уравнения в конечных разностях (а не дифференциальные уравнения). Иногда динамические уравнения имеют вид конечных соотношений. Для формализма характерна также бескоординатная формулировка уравнений, что избавляет от необходимости рассматривать преобразования координат и их инварианты.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, Logical reloading as overcoming of crisis in geometry. *e-print 1005.2074*

[2] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002).

[3] Yu.A.Rylov, Non-Euclidean method of the generalized geometry construction and its application to space-time geometry in *Pure and Applied Differential geometry* pp.238-246. eds. Franki Dillen and Ignace Van de Woestyne. Shaker Verlag, Aachen, 2007. Смотри также *e-print Math.GM/0702552.*

[4] J.L.Synge, *Relativity: the General Theory.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1960.

[5] Yu.A.Rylov, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, 2092-2098, (1991).

[6] Yu. A. Rylov, Relativistic nearness of events and deformation principle as tool of the relativity theory generalization on the arbitrary space-time geometry. *e-print 0910.3582v4*