Теорема Геделя как следствие невозможности полной аксиоматизации геометрии

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Не всякая геометрия может быть аксиоматизирована. Парадоксальная теорема Геделя исходит из предположения, что любая геометрия может быть аксиоматизирована, и приходит к тому результату, что не всякая геометрия может быть аксиоматизирована. Рассматривается пример двух близких геометрий (римановой и σ-римановой), которые строятся разными методами и различаются в некоторых деталях. Риманова геометрия напоминает такую геометрию, которая представляет собой только часть полной геометрии. Такая возможность предусматривается теоремой Геделя.

1 Введение

Пусть имеется множество Ω точек $P_1, P_2, ...$ Геометрический объект O представляет собой подмножество O точек $P_1, P_2, ...$ множества Ω, $(O \subset \Omega)$.

Определение 1. *Геометрия $\mathcal{G}$ представляет собой множество $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ утверждений $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, ...$ о свойствах геометрических объектов $O_1, O_2, ... \subset \Omega$.*

Определение 2. *Если можно выбрать конечное или счетное множество $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ предложений таким образом, что бесконечное множество $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ всех предложений $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, ...$ о свойствах геометрических объектов $O_1, O_2, ... \subset \Omega$ может быть получено из предложений $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ как результат логических рассуждений, геометрия $\mathcal{G}$ может быть аксиоматизирована, и множество $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ предложений $\mathcal{P}$ образует аксиоматику (систему аксиом) геометрии $\mathcal{G}$.*

Очевидно, что не всякая геометрия может быть аксиоматизирована. Однако, существуют геометрии, которые могут быть аксиоматизированы. Например, аксиоматизирована может быть собственно евклидова геометрия.

Рассмотрим геометрию $\mathcal{G}$, которая может быть аксиоматизирована частично. Это означает, что часть $\mathcal{S}_{\mathcal{G}_1} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ всех предложений $\mathcal{P}$ геометрии $\mathcal{G}$ может быть получен как результат логических рассуждений из предложений $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ представляет собой множество аксиом $\mathcal{S}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{S}_{\mathcal{G}}$. Предполагается, что множество аксиом $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ является полным в том смысле, что любое предложение $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\mathcal{G}_1}$ может быть выведено из множества $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ аксиом. Предполагается также, что множество $\mathcal{S}_{\mathrm{r}} = \mathcal{S}_{\mathcal{G}} \backslash \mathcal{S}_{\mathcal{G}_1}$ остальных предложений геометрии $\mathcal{G}$ не может быть выведено из множества $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ аксиом.

Теорема Геделя утверждает то же самое, Гедель исходит из предположения, что полная аксиоматизация геометрии возможна и приходит, по существу, к выводу, что полная аксиоматизация не всегда возможна.

Действительная проблема построения геометрии обусловлена тем обстоятельством, что мы не знаем других методов построения геометрии кроме выведения предложений геометрии из аксиом геометрии. Евклид вывел свою евклидову геометрию из системы аксиом. Было доказано [1], что евклидовы аксиомы совместны между собой, и собственно евклидова геометрия является последовательной геометрией.

Математики пытаются повторить опыт Евклида по построению других (неоднородных) геометрий. Они используют евклидов метод построения геометрии. В результате нельзя быть уверенным, что получается вся геометрия, а не только ее часть.

Мы исходим из общего предположения, что полная аксиоматизация геометрии не всегда возможна. В этом случае результат теоремы Геделя очевиден. Однако, принимая такое предположение, мы должны иметь альтернативный метод построения геометрии, потому что формальное рассмотрение множества геометрических предложений не конструктивно без метода получения этих предложений.

На самом деле, существует альтернативный метод построения геометрии. Он основывается на двух утверждениях.

1. Геометрия полностью описывается ее метрикой (расстоянием между двумя точками в пространстве, описываемом, геометрией).

2. Собственно евклидова геометрия является правильной геометрией, полностью описываемой ее метрикой.

Будем называть физической геометрией любую геометрию, которая полностью описывается ее метрикой. Геометрию, которая может быть выведена из некоторой системы аксиом, будем называть аксиоматической геометрией, или математической геометрией. Тогда альтернативный метод построения физической геометрии формулируется следующим образом.

Всякая физическая геометрия получается из собственно евклидовой геометрии в результате ее деформации.

Это означает, что все предложения собственно евклидовой геометрии выражаются через евклидову метрику, и евклидова метрика во всех предложениях заменяется метрикой интересующей нас геометрии. Существует теорема, в которой доказывается, что все предложения собственно евклидовой геометрии могут быть выражены через евклидову метрику [2]. В результате получаются все предложения интересующей нас геометрии, выраженные через ее метику.

Обычно предполагается что термин "метрика" означает расстояние, удовлетворяющее аксиоме треугольнака. В предыдущем изложении термин "метрика" означал просто расстояние (которое, вообще говоря, не удовлетворяет аксиоме треугольника).

Чтобы устранить путаницу, в дальнейшем вместо метрики $\rho(P, Q)$ будет использоваться мировая функция $\sigma(P, Q) = \frac{1}{2}\rho^2(P, Q)$. Это более удобно с технической точки зрения. Кроме того, в случае индефинитной геометрии (например, геометрии Минковского) мировая функция σ вещественна, хотя расстояние $\rho = \sqrt{2\sigma}$ может быть мнимым.

2 Принцип деформации как метод построения физической геометрии

Если собственно евклидова геометрия известна, то выражение ее предложений через евклидову мировую функцию является чисто технической проблемой. Однако в этой проблеме имеются некоторые тонкости. Дело в том, что собственно евклидова геометрия имеет как специфические евклидовы свойства, так и общие геометрические свойства. Все предложения собственно евклидовой геометрии должны быть выражены только через общие геометрические свойства. Только в этом случае выражения через евклидову мировую функцию могут быть деформированы и использоваться в деформированной геометрии. Дело в том, что специфические свойства собственно евклидовой геометрии различны в евклидовых пространствах разных размерностей. Каждое специфическое свойство собственно евклидовой геометрии содержит ссылку на размерность n евклидова пространства.

Общие геометрические предложения собственно евклидовой геометрии не содержат ссылки на размерность n евклидова пространства. Таким образом, только евклидовы предложения, не содержащие ссылки на размерность, могут быть деформированы, чтобы получить соответствующие соотношения деформированной геометрии.

Рассмотрим простой пример. Вектор $\mathbf{PQ} = \overrightarrow{PQ}$ есть упорядоченное множество из двух точек P и Q. Скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) \tag{2.1}$$

где σ есть мировая функция

$$\sigma: \qquad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \qquad \sigma(P, P) = 0, \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{2.2}$$

Определение (2.1) скалярного произведения двух векторов совпадает с традиционным определением скалярного произведения векторов в собственно евклидовом пространстве. (Это легко проверить). Соотношение (2.1) не содержит ссылки на размерность евклидова пространства и на систему координат в нем. Таким образом, соотношение (2.1) представляет собой общее геометрическое соотношение, которое может рассматриваться как определение скалярного произведения двух векторов в любой физической геометрии.

Эквивалентность (равенство) двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ определяется соотношениями

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{2.3}$$

где $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ есть длина вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = \sqrt{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)} = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \tag{2.4}$$

В развернутой форме условие (2.3) эквивалентности двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ имеет вид

$$\sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) = 2\sigma(P_0, P_1) \tag{2.5}$$

$$\sigma(P_0, P_1) = \sigma(Q_0, Q_1) \tag{2.6}$$

Если точки P_0, P_1, определяющие вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, и начало Q_0 вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ заданы, то можно определить вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, эквивалентный (равный) вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, решив два уравнения (2.5), (2.6) относительно положения точки Q_1.

В случае собственно евклидовой геометрии имеется одно и только одно решение уравнений (2.5), (2.6) независимо от размерности n евклидовой геометрии. В случае произвольной физической геометрии нельзя гарантировать ни существования, ни единственности решения уравнений (2.5), (2.6) для точки Q_1. Число решений зависит от вида мировой функции σ. Этот факт означает многовариантность свойства эквивалентности двух векторов в произвольной физической геометрии. Иными словами, одновариантность равенства векторов в собственно евклидовой геометрии является специфическим свойством собственно евклидовой геометрии, и это свойство определяется видом евклидовой мировой функции. В других физических геометриях это свойство, вообще говоря, не имеет места.

Многовариантность есть общее свойство физической геометрии. Оно связано с необходимостью решения алгебраических уравнений, содержащих мировую функцию. Поскольку мировая функция различна в разных физических геометриях, решение этих уравнений может быть не единственным, или оно может не существовать совсем.

В собственно евклидовой геометрии равенство двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ может быть определено также как равенство составляющих этих векторов в некоторой прямолинейной системе координат. (Это традиционный метод определения равенства двух векторов.)

Пусть размерность евклидова пространства равна n. Введем n линейно независимых векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k=1,2,...n$. Линейная независимость векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$ означает, что определитель Грама

$$\det ||\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right)|| \neq 0, \qquad i,k=1,2,...n \tag{2.7}$$

Рассмотрим прямолинейную систему координат с базисными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k=1,2,...n$ в n-мерном евклидовом пространстве. Ковариантные координаты $x_k=\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right)_k$ и $y_k=\left(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right)_k$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в этой системе координат имеют вид

$$x_k=\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\right)_k=\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right), \qquad y_k=\left(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\right)_k=\left(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right), \qquad k=1,2,...n \tag{2.8}$$

Равенство векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ записывается в виде

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right)=\left(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right), \qquad k=1,2,...n \tag{2.9}$$

и в соответствии с (2.1) его можно записать в терминах мировой функции (метрики). Точки P_0,P_1,Q_0 предполагаются заданными. Точка Q_1 подлежит определению уравнениями (2.9). Уравнения (2.9) определяют равенство векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ только в n-мерном евклидовом пространстве E_n. Уже в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E_{n+1} n уравнений (2.9) не определяют равенства векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, потому что в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве E_{n+1} нужно $(n+1)$ уравнений вида (2.9) для определения равенства векторов. В физической геометрии размерность может не существовать, или размерность может быть различной в разных точках. В этом случае традиционные условия (2.9) равенства двух векторов также нельзя использовать.

С формальной точки зрения уравнения (2.9) определяют некоторый геометрический объект, или множество геометрических объектов, точки которых описываются текущей точкой Q_1. Этот геометрический объект зависит от параметров $Q_0,P_0,P_1,...P_n$. Как интерпретировать этот объект? Совершенно непонятно.

С формальной точки зрения соотношения (2.5), (2.6) описывают некоторый геометрический объект с помощью текущей точки Q_1. Этот объект зависит от параметров Q_0,P_0,P_1, и может интерпретироваться как множество векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, эквивалентных вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Можно считать, что соотношения (2.5), (2.6) описывают некоторый геометрический объект с помощью текущей точки P_1. Этот объект зависит от параметров Q_0,Q_1,P_0, и может интерпретироваться как множество векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, эквивалентных вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$.

Нужно заметить, что собственно евклидова геометрия является вырожденной геометрией в том смысле, что один и тот же геометрический объект может описываться в терминах мировой функции разными способами. Например, круговой цилиндр $\mathcal{CY}\left(P_0,P_1,Q\right)$ определяется соотношением

$$\mathcal{CY}\left(P_0,P_1,Q\right)=\left\{R|S_{P_0P_1R}=S_{P_0P_1Q}\right\} \tag{2.10}$$

где P_0, P_1 суть две различные точки на оси цилиндра и Q есть некоторая точка на поверхности цилиндра. Величина $S_{P_0P_1Q}$ представляет собой площадь треугольника с вершинами в точках P_0, P_1, Q. Площадь треугольника может быть вычислена с помощью формулы Герона, выражающей площадь треугольника через длины его сторон, или с помощью формулы

$$S_{P_0P_1Q} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\begin{array}{cc} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \\ (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{Q}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) \end{array}\right|} \tag{2.11}$$

которая может быть представлена в терминах мировой функции с помощью (2.1). В собственно евклидовой геометрии круговой цилиндр $\mathcal{CY}(P_0, P_1, Q)$ зависит только от его оси $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, проходящей через точки P_0, P_1, но не от положения точек P_0, P_1 на оси $\mathcal{T}_{P_0P_1}$.

Ось цилиндра $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ описывается соотношением

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \{R|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{R}\} \tag{2.12}$$

где $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{R}$ означает, что векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ коллинеарны (линейно зависимы). Математически это означает, что

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad \left|\begin{array}{cc} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) \\ (\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) \end{array}\right| = 0 \tag{2.13}$$

Таким образом, если точка $P_1' \in \mathcal{T}_{P_0P_1}$, $P' \neq P_1$, $P' \neq P_0$, то прямая $\mathcal{T}_{P_0P_1'} = \mathcal{T}_{P_0P_1}$ в евклидовом пространстве, но, вообще говоря, $\mathcal{T}_{P_0P_1'} \neq \mathcal{T}_{P_0P_1}$ в произвольной физической геометрии.

Тогда в собственно евклидовой геометрии

$$\mathcal{CY}(P_0, P_1, Q) = \mathcal{CY}(P_0, P_1', Q) \wedge P_1' \in \mathcal{T}_{P_0P_1} \tag{2.14}$$

но, вообще говоря,

$$\mathcal{CY}(P_0, P_1, Q) \neq \mathcal{CY}(P_0, P_1', Q) \wedge P_1' \in \mathcal{T}_{P_0P_1} \tag{2.15}$$

Другими словами, круговой цилиндр собственно евклидовой геометрии расщепляется при деформации евклидова пространства на множество разных цилиндров.

Более аккуратное утверждение выглядит так. Цилиндры $\mathcal{CY}(P_0, P_1, Q)$, $\mathcal{CY}(P_0, P_1', Q)$, вообще говоря, различны. Но в собственно евклидовой геометрии они могут совпадать, даже если $P_1' \neq P_1$, но $P_1' \in \mathcal{T}_{P_0P_1}$. Это означает, что в собственно евклидовой геометрии различные геометрические объекты могут совпадать из-за очень высокой степени симметрии евклидовой геометрии. Другими словами, деформация евклидовой геометрии может нарушать ее симметрию и совпадение геометрических объектов исчезает.

3 Многовариантность эквивалентности двух векторов

Применительно к свойству эквивалентности свойство многовариантности выглядит следующим образом. Вообще говоря, существует много векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$,$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1'$, ..., эквивалентных вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и не эквивалентных между собой. Эта ситуация является общей для всех физических геометрий. Однако, возможны такие геометрии, где множество векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$,$\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1'$,... вырождается в один вектор. В собственно евклидовой геометрии такое вырождение имеет место для всех векторов. $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и любой точки Q_0, являющейся началом вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, эквивалентного вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Это означает, что многовариантность свойства эквивалентности является общим свойством физической геометрии, тогда как одновариантность свойства эквивалентности в собственно евклидовой геометрии является специфическим свойством евклидовой геометрии, которое обусловлено видом евклидовой мировой функции.

Многовариантность есть новое свойство физической геометрии. Свойства многовариантности пока еще не исследованы должным образом. Многовариантность свойства эквивалентности порождает интранзитивность эквивалентности векторов. Другими словами, если $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\text{eqv}\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\text{eqv}\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1$, то, вообще говоря, вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ не эквивалентен вектору $\mathbf{S}_0\mathbf{S}_1$. Интранзитивная эквивалентность трудна для исследования. Разумно рассмотреть физические геометрии, которые не содержат многовариантности, или содержат ее в минимальной степени.

Вид мировой функции является единственной характеристикой физической геометрии. Можно изменить физическую геометрию, только изменяя ее мировую функцию. Чтобы получить риманову геометрию, надо наложить на мировую функцию следующее ограничение

$$F_3(P_0,R,P_1) \equiv \sqrt{2\sigma(P_0,R)} + \sqrt{2\sigma(R,P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0,P_1)} \geq 0, \qquad \forall P_0,P_1,R \in \Omega \tag{3.1}$$

Это аксиома треугольника. Она имеет следующий смысл. Отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ прямой между точками P_0, P_1 описывается соотношением

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \{R | F_3(P_0,R,P_1) = 0\} \tag{3.2}$$

Вообще говоря, уравнение

$$F_3(P_0,R,P_1) \equiv \sqrt{2\sigma(P_0,R)} + \sqrt{2\sigma(R,P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0,P_1)} = 0 \tag{3.3}$$

описывает некоторую поверхность S вокруг некоторого объема V в пространстве Ω. Внешние точки R по отношению к объему V удовлетворяют соотношению $F_3(P_0,R,P_1) > 0$. Внутренние точки R внутри объема V удовлетворяют соотношению $F_3(P_0,R,P_1) < 0$. Если выполняется аксиома треугольника (3.1), объем V пуст, и отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ прямой одномерный, потому что поверхность S не содержит точек внутри.

С другой стороны, отрезок (3.2) прямой может быть описан соотношением

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \{R|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \upuparrows \mathbf{P}_0\mathbf{R} \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{R}| \leq |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|\} \tag{3.4}$$

где $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \upuparrows \mathbf{P}_0\mathbf{R}$ является условием параллельности векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$, которое описывается соотношением

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \upuparrows \mathbf{P}_0\mathbf{R}: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) = |\mathbf{P}_0\mathbf{R}| \cdot |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \tag{3.5}$$

Легко проверить, что два определения (3.2), (3.3) и (3.4), (3.5) эквивалентны из-за тождества

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R})^2 - |\mathbf{P}_0\mathbf{R}|^2 |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \equiv \frac{1}{4} F_0(P_0, R, P_1) F_1(P_0, R, P_1) F_2(P_0, R, P_1) F_3(P_0, R, P_1) \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}
F_0(P_0, R, P_1) &= \sqrt{2\sigma(P_0, R)} + \sqrt{2\sigma(R, P_1)} + \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \\
F_1(P_0, R, P_1) &= \sqrt{2\sigma(P_0, R)} - \sqrt{2\sigma(R, P_1)} + \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \\
F_2(P_0, R, P_1) &= -\sqrt{2\sigma(P_0, R)} + \sqrt{2\sigma(R, P_1)} + \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \\
F_3(P_0, R, P_1) &= \sqrt{2\sigma(P_0, R)} + \sqrt{2\sigma(R, P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)}
\end{aligned}$$

Итак, если мировая функция удовлетворяет аксиоме треугольника (3.1), любой отрезок (3.4) одновариантен (одномерен), и эквивалентность (2.3) двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ одновариантна, при условии, что они имеют общее начало P_0. Это означает, что из соотношений $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{P}_0\mathbf{R}$ и (3.1) следует, что $R = P_1$. Заметим, что одновариантность двух векторов имеет место только для собственно римановой геометрии, когда мировая функция неотрицательна, и все члены в соотношении (3.1) вещественны для любых точек $P_0, P_1, R \in \Omega$. Для псевдо-римановой геометрии, когда мировая функция σ может иметь любой знак, эквивалентность двух векторов многовариантна, вообще говоря, даже если векторы имеют общее начало.

Исследование показывает, что эквивалентность двух векторов одновариантна только в случае плоского собственно риманова пространства, т.е. в собственно евклидовом пространстве. Заметим, что в [2] исследовалась только многовариантность параллельности двух направлений, а понятие эквивалентности векторов еще не было введено . Однако, имеется однозначная связь между многовариантностью эквивалентности двух векторов и многовариантностью параллельности двух векторов. Существуют некоторые специальные случаи геометрий и векторов, когда свойство эквивалентности одновариантно. Например, в собственно римановом пространствое, где мировая функция неотрицательна и выполнена аксиома треугольника (3.1), эквивалентность двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ одновариантна, если $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0$.

4 Риманова и σ-риманова геометрии

Физическую геометрию, чья мировая функция удовлетворяет аксиоме треугольника (3.1) будем называть σ-римановой геометрией. Риманова геометрия отличается от σ-римановой геометрии методом построения. σ-риманова геометрия строится с помощью принципа деформации и полностью определяется своей мировой функцией. σ-риманова геометрия может быть дискретной или непрерывной. Это обстоятельство не имеет никакого значения, потому что построение физической геометрии с помощью принципа деформации не нуждается во введении системы координат.

n-мерная риманова геометрия строится как внутренняя геометрия n-мерной гладкой поверхности S_n в m-мерном собственно евклидовом пространстве E_m $(m > n)$. Вводится криволинейная система координат K_m в E_m с координатами $\xi = \{\mathbf{x},\mathbf{y}\} = \{\xi^i\}$, $i = 1,2,...m$, где $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, ...x^n\}$, $\mathbf{y} = \{y^{n+1}, y^{n+2}, ...y^m\}$. Координаты вводятся таким образом, что координаты $\{\mathbf{x},\mathbf{0}\}$ описывают точки n-мерной поверхности S_n. Кроме того, координаты ξ выбираются таким образом, чтобы любой вектор $\mathbf{U}(P) = \{0,0,...0,U^{n+1},U^{n+2},...U^m\}$ в точке $P \in S_n$ был ортогонален к любому касательному к поверхности S_n вектору $\mathbf{V}(P) = \{V^1, V^2, ...V^n, 0, 0, ...0\}$, взятому в той же самой точке $P \in S_n$. Пусть g_{ik}, $i,k = 1,2,...m$ является метрическим тензором в собственно евклидовом пространстве E_m в системе координат K_m. Тогда

$$g_{ik}(\xi) = g_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^{l=m} \frac{\partial X^l(\xi)}{\partial \xi^i}\frac{\partial X^l(\xi)}{\partial \xi^k}, \qquad i,k = 1,2,...m, \tag{4.1}$$

где $X^l(\xi)$, $l = 1,2,...m$ суть декартовы координаты точки ξ in E_m. Криволинейные координаты выбраны таким образом, что на поверхности S_n они удовлетворяют условиям

$$\sum_{l=1}^{l=m} \frac{\partial X^l(\mathbf{x},\mathbf{0})}{\partial \xi^i}\frac{\partial X^l(\mathbf{x},\mathbf{0})}{\partial \xi^k} = 0, \qquad i = 1,2,...n, \qquad k = n+1, n+2, ...m \tag{4.2}$$

Линейный элемент ds на поверхности S_n описывается соотношением

$$ds^2 = \sum_{l=1}^{l=n} g_{ik}(\mathbf{x},\mathbf{0})\, dx^i dx^k \equiv g_{ik}(\mathbf{x})\, dx^i dx^k \tag{4.3}$$

где знак суммы опущен, и суммирование производится по повторяющимся индексам от 1 до n. Это правило используется и дальше. Можно определить геодезические на проверхности S_n с помощью соотношений

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} + \gamma_{ls}^k(\mathbf{x})\frac{dx^l}{d\tau}\frac{dx^s}{d\tau} = 0 \tag{4.4}$$

где γ_{ls}^k суть символы Кристоффеля в системе координат K_n на поверхности S_n

$$\gamma_{ls}^k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}g^{ki}(\mathbf{x})\left(\frac{\partial g_{is}(\mathbf{x})}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}(\mathbf{x})}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{ls}(\mathbf{x})}{\partial x^i}\right), \qquad k,l,s = 1,2,...n \tag{4.5}$$

$$g^{ki}(\mathbf{x})\, g_{li}(\mathbf{x}) = \delta_l^k, \qquad k,l = 1,2,...n$$

Пусть для простоты имеется только один отрезок геодезической $\mathcal{L}_{[P_0P_1]} \subset S_n$, соединяющий любые две точки $P_0, P_1 \in S_n$. Мы можем определить мировую функцию σ_R на S_n с помощью соотношения

$$\sigma_\mathrm{R}(P_0,P_1) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_{[P_0P_1]}} \sqrt{g_{ik}(\mathbf{x})\, dx^i dx^k}\right)^2, \qquad P_0,P_1 \in S_n \tag{4.6}$$

В соответствии с определением (4.6) мировая функция σ_R удовлетворяет аксиоме треугольника (3.1). Это означает, что мировая функция σ_R римановой геометрии может совпадать с мировой функцией σ-римановой геометрии, если множество Ω отождествить с поверхностью S_n. Тогда мы можем повторить построение римановой геометрии на поверхности S_n с помощью принципа деформации. В этом случае мы получим описанные выше результаты. Мы получим линейный элемент в виде (4.3) и уравнение для прямой (геодезической) в виде (4.4). Все полученные одновариантные результаты римановой геометрии могут быть получены с помощью принципа деформации из мировой функции (4.6).

Два вектора $\mathbf{U}(\mathbf{x}_1,\mathbf{0})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{x}_2,\mathbf{0})$ в двух различных точках $P_1 = \{\mathbf{x}_1,\mathbf{0}\} \in S_n$ и $P_2 = \{\mathbf{x}_2,\mathbf{0}\} \in S_n$ равны в евклидовом пространстве E_m, если их декартовы составляющие равны

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial X^l}{\partial \xi^k}(\mathbf{x}_1,\mathbf{0})\, U^k(\mathbf{x}_1,\mathbf{0}) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\partial X^l}{\partial \xi^k}(\mathbf{x}_2,\mathbf{0})\, V^k(\mathbf{x}_2,\mathbf{0}), \qquad l = 1,2,...m \tag{4.7}$$

где $U^k(\mathbf{x}_1,\mathbf{0})$ и $V^k(\mathbf{x}_2,\mathbf{0})$ суть составляющие векторов $\mathbf{U}(\mathbf{x}_1,\mathbf{0})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{x}_2,\mathbf{0})$ соответственно в системе криволинейных координат K_m. Если векторы $\mathbf{U}(\mathbf{x}_1,\mathbf{0})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{x}_2,\mathbf{0})$ являются векторами внутренней геометрии в S_n, то они касательны к поверхности S_n, т.е.

$$U^k(\mathbf{x}_1,\mathbf{0}) = 0, \qquad V^k(\mathbf{x}_2,\mathbf{0}) = 0, \qquad k = n+1, n+2, ...m \tag{4.8}$$

Пусть вектор $\mathbf{U}(\mathbf{x}_1,\mathbf{0})$, удовлетворяющий первому соотношению (4.8), фиксирован. Тогда вектор $\mathbf{V}(\mathbf{x}_2,\mathbf{0})$, удовлетворяющий условиям (4.7), (4.8), вообще говоря, не существует, если точки P_1 и P_2 различны, и

$$\frac{\partial X^l}{\partial \xi^k}(\mathbf{x}_1,\mathbf{0}) \neq \frac{\partial X^l}{\partial \xi^k}(\mathbf{x}_2,\mathbf{0}), \qquad l,k = 1,2,...m \tag{4.9}$$

Но многовариантные соотношения σ-римановой геометрии не могут быть получены в римановой геометрии, потому что риманова геометрия в принципе не содержит многовариантных соотношений. Итак, вообще говоря, мы не можем взять из собственно евклидовой геометрии понятие равенства удаленных векторов для использования во внутренней геометрии поверхности S_n.

Если риманова геометрия рассматривается как абстрактная логическая конструкция, то можно, вовсе не вводить равенство удаленных векторов и их параллелизм. В этом случае мы получаем геометрию, в которой имеются только некоторые понятия евклидовой геометрии, но не все они. Полученная геометрия оказывается более бедной в своих понятиях, чем евклидова геометрия.

Однако, если (псевдо)риманова геометрия претендует на использование в качестве геометрии пространства-времени, то эти понятия нужно ввести, потому что построение динамики частиц невозможно без понятия равенства удаленных векторов. Параллельный перенос вводится в риманову геометрию следующим образом.

Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left\{u^k(\mathbf{x})\right\}$, $k = 1, 2, ...n$ является вектором на поверхности S_n. Одновременно вектор $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{0}\}$ является вектором в собственно евклидовом пространстве E_m. Его координаты в системе координат K_m имеют вид $U^k = u^k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, ...n$, $U^k = u^k = 0$, $k = n+1, n+2, ...m$. Пусть $d\xi$ есть бесконечно малый вектор перемещения на поверхности S_n, $d\xi = \{d\mathbf{x}, \mathbf{0}\}$.

Перенесем вектор $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ в E_m из точки $\xi = \{\mathbf{x}, \mathbf{0}\}$ в точку $\xi + d\xi = \{\mathbf{x} + d\mathbf{x}, \mathbf{0}\}$. Перенос производится таким образом, что $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{U}(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{0})$. Это всегда возможно в собственно евклидовом пространстве E_m. Поскольку $d\mathbf{x}$ является бесконечно малой величиной, то в системе координат K_m вектор $\mathbf{U}(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{0})$ имеет вид

$$U^k(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{0}) = U^k(\mathbf{x}, \mathbf{0}) + \delta U^k(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \qquad k = 1, 2, ...m \tag{4.10}$$

где $\delta U^k(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ есть бесконечно малая величина порядка $O(|d\mathbf{x}|)$. Поскольку $U^k(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$, $k = n+1, n+2, ...m$, то получаем

$$U^k(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{0}) = \delta U^k(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \qquad k = n+1, n+2, ...m \tag{4.11}$$

и величина $|\mathbf{U}(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{0})|$ совпадает с $|\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{0})|$ с точностью до $O\left(|d\mathbf{x}|^2\right)$.

Спроектируем вектор $\mathbf{U}(\mathbf{x} + \mathbf{dx}, \mathbf{0})$ на поверхность S_n. Это означает, что мы полагаем $\delta U^k(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0, \qquad k = n+1, n+2, ...m$. Вычисление $\delta U^k(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \qquad k = 1, 2, ...n$ дает

$$\delta U^k(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \sum_{l,s=1}^{l,s=n} \gamma_{ls}^k(\mathbf{x}) U^l(\mathbf{x}, \mathbf{0}) dx^s + O\left(|d\mathbf{x}|^2\right), \qquad k = 1, 2, ...n \tag{4.12}$$

где символ Кристоффеля $\gamma_{ls}^k(\mathbf{x})$ задается на поверхности S_n соотношением (4.5).

Соотношение (4.12) содержит только тангенциальные составляющие $\mathbf{u}$ вектора $\mathbf{U} \in \mathbf{E}_n$. Это означает, что соотношение (4.12) является соотношением внутренней геометрии на поверхности S_n. Это соотношение может быть записано в виде, содержащем только величины внутренней геометрии. Вектор

$$u^k(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = u^k(\mathbf{x}) + \delta u^k(\mathbf{x}) = u^k(\mathbf{x}) + \gamma_{ls}^k(\mathbf{x}) u^l(\mathbf{x}) dx^s, \qquad k = 1, 2, ...n \tag{4.13}$$

считается параллельным вектору $u^k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, ...n$.

Это хорошо известное соотношение для параллельного переноса вектора римановой геометрии. Параллельный перенос из точки $\mathbf{x}$ в точку $\mathbf{x}'$ производится следующим образом. Точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ связываются некоторой кривой $\mathcal{L}_{xx'}$. Кривая делится на бесконечно малые отрезки. Параллельный перенос производится последовательно вдоль всех отрезков кривой с помощью формулы (4.13). Результат параллельного переноса зависит от пути $\mathcal{L}_{xx'}$. По существу результат параллельного переноса многовариантен, но каждый вариант параллельного переноса связывается с некоторым путем $\mathcal{L}_{xx'}$ переноса.

Параллельный перенос в σ-римановой геометрии исследовался в разделе 6 работы [2]. Здесь представлен только результат этого исследования. Параллельный перенос (параллельность векторов) определяется соотношением (3.5). В координатном виде оно записывается следующим образом

$$\left(\sigma_{i,l'}\left(x,x'\right)\sigma_{k,s'}\left(x,x'\right)-g_{ik}\left(x\right)g_{l's'}\left(x'\right)\right)u^{i}\left(x\right)u^{k}\left(x\right)v^{l'}\left(x'\right)v^{k'}\left(x'\right)=0 \qquad (4.14)$$

где $\sigma\left(x,x'\right)$ есть мировая функция σ-римановой геометрии между точками с координатами $x=\{x^{i}\}$, $i=1,2,...n$ и $x'=\{x'^{i}\}$, $i=1,2,...n$

$$\sigma_{il'}\left(x,x'\right)\equiv\sigma_{i,l'}\left(x,x'\right)\equiv\frac{\partial^{2}\sigma\left(\left(x,x'\right)\right)}{\partial x^{i}\partial x'^{l}} \qquad (4.15)$$

Штрих у индекса означает, что этот индекс соответствует точке x'. $u^{i}\left(x\right)$ является контравариантным вектором в точке x. $v^{k'}\left(x'\right)$ является контравариантным вектором в точке x'. Если векторы $u^{k}\left(x\right)$, $v^{k}\left(x'\right)$ параллельны, то они удовлетворяют соотношению (4.14). Соотношение (4.14) было получено для бесконечно малых векторов $u^{i}\left(x\right)$ и $v^{k'}\left(x'\right)$. Но соотношение (4.14) инвариантно относительно длин векторов $u^{i}\left(x\right)$ и $v^{k'}\left(x'\right)$. По этой причине оно верно также для конечных векторов $u^{i}\left(x\right)$, $v^{k'}\left(x'\right)$. При получении соотношения (4.14) использовался тот факт, что мировая функция σ определяется соотношением (4.6), т.е. она является мировой функцией риманова пространства.

Пусть вектор $\mathbf{x}'-\mathbf{x}$ является бесконечно малым. Тогда

$$d\xi^{k}=x'^{k}-x^{k},\qquad v^{k}\left(\mathbf{x}'\right)=v^{k}\left(\mathbf{x}\right)+\delta v^{k}\left(\mathbf{x}\right),\qquad k=1,2,...n \qquad (4.16)$$

где $d\xi^{k}$ и δv^{k} являются бесконечно малыми величинами, и соотношение (4.14) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned}&\left(u_{k}v^{k}\right)^{2}-u_{k}u^{k}v_{l}v^{l}+\left(\gamma_{j;is}g_{kr}+g_{ij}\gamma_{r;ks}-g_{ik}g_{rj,s}\right)u^{j}u^{r}v^{i}v^{k}d\xi^{s}\\&+\left(g_{ij}g_{kr}-g_{ik}g_{rj}\right)u^{j}u^{r}\delta v^{i}v^{k}+\left(g_{ij}g_{kr}-g_{ik}g_{rj}\right)u^{j}u^{r}v^{i}\delta v^{k}=0\end{aligned} \qquad (4.17)$$

где

$$\gamma_{j;is}=g_{jl}\gamma_{is}^{l},\qquad g_{rj,s}\equiv\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^{s}} \qquad (4.18)$$

Легко проверить, что традиционный параллельный перенос (4.13)

$$v^{k}\left(\mathbf{x}\right)=u^{k}\left(\mathbf{x}\right),\qquad\delta v^{k}\left(\mathbf{x}\right)=\gamma_{ls}^{k}\left(\mathbf{x}\right)v^{l}\left(\mathbf{x}\right)d\xi^{s} \qquad (4.19)$$

удовлетворяет соотношению (4.17). Однако, решение (4.19) единственно, если направление $d\xi$ переноса совпадает с направлением вектора $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. В общем случае, когда кривизна поверхности S_n отлична от нуля, множество решений $v+\delta v^k$ уравнения (4.17) образует конус (конус коллинеарности). Этот конус вырождается в одномерную линию, если вектор $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ параллелен вектору $d\xi$, или кривизна поверхности S_n равна нулю. В этих случаях традиционный параллельный перенос (4.19) является единственным решением уравнения (4.17).

Следует ожидать, что мировая функция однозначно определяет геометрию. Во всяком случае евклидова мировая функция однозначно определяет евклидову геометрию. Если мировая функция удовлетворяет аксиоме треугольника (3.1), то она определяет σ-риманову геометрию единственным образом. Кроме того, имеется риманова геометрия, которая не совпадает с σ-римановой геометрией в некоторых деталях. Риманова геометрия претендует на роль правильной геометрии, способной описывать реальное пространство-время. Во всяком случае, большинство современных математиков рассматривают риманову геометрию как истинную геометрию и игнорируют σ-риманову геометрию. Мы сравним σ-риманову геометрию и риманову геометрию, во-первых, как логические построения, а, во-вторых, как возможные геометрии пространства-времени.

Риманова геометрия довольно специальная геометрия. Она описывается только в терминах координат. Риманово пространство вложимо в евклидово пространство достаточно большой размерности. Риманова геометрия использует аксиому треугольника (3.1), взятую в виде (4.6), как внутреннее условие геометрии. Условие (4.6) является внутренним в том смысле, что некоторые базовые понятия римановой геометрии (понятие кривой) не могут быть сформулированы без аксиомы треугольника. Понятие мировой функции в римановой геометрии является вторичным (производным) понятием. Понятие мировой функции, определяемой соотношением (4.6), не может быть сформулировано без ссылки на понятие кривой (геодезической). Невозможно получить обобщение римановой геометрии в терминах ее базовых понятий.

σ-риманова геометрия является частным случаем физической геометрии, когда мировая функция ограничена аксиомой треугольника (3.1). Мировая функция является первичным понятием σ-римановой геометрии. σ-риманова геометрия не подвержена таким ограничениям, как использование координат и изометрическая вложимость в евклидово пространство. σ-риманова геометрия не использует неметрическое понятие кривой. Аксиома треугольника в σ-римановой геометрии является внешним ограничением в том смысле, что оно не используется при построении геометрии. Устраняя аксиому треугольника, мы получаем более общую геометрию, понятия которой строятся без ссылки на аксиому треугольника.

σ-риманова геометрия является более общим построением, чем риманова геометрия в том смысле, что накладывая ограничения на σ-риманову геометрию, можно получить риманову геометрию. Например, в физической геометрии имеются два вида прямых

$$\mathcal{T}_{P_0P_1;P_0} \equiv \mathcal{T}_{P_0P_1} = \{R|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{R}\} \tag{4.20}$$

и

$$\mathcal{T}_{P_0P_1;Q_0} = \{R|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{Q}_0\mathbf{R}\} \tag{4.21}$$

Прямые типа (4.20) являются одновариантными (одномерными) в σ-римановой геометрии, тогда как прямые типа (4.21), вообще говоря, многовариантны. Прямая типа (4.20) является частным (вырожденным) случаем прямой (4.21), когда точка Q_0 совпадает с точкой P_0. В собственно евклидовой геометрии прямые обоих типов одновариантны (одномерны).

Чтобы получить риманову геометрию из σ-римановой геометрии нужно удалить многовариантные прямые вида (4.21) и использовать только вырожденные одномерные прямые типа (4.20). После этого вырожденные прямые (4.20) используются для введения понятия геодезической. Мировая функция строится как производное понятие на основе бесконечно малого линейного элемента и геодезической. Мировая функция не используется при построении римановой геометрии. Риманова геометрия строится как внутренняя геометрия поверхности в собственно евклидовом пространстве. Устраняя многовариантные прямые (4.21) из римановой геометрии и оставляя только вырожденные прямые, нельзя быть уверенным в том, что способ построения римановой геометрии, основанный на использовании только вырожденных прямых, является последовательным. Использование геодезических при построении геометрии приводит к тому, что двумерная евклидова плоскость с вырезанной в ней дырой не может быть изометрически вложена в евклидову плоскость без дыры. Кроме того в римановой геометрии отсутствует абсолютный параллелизм, хотя он имеется в σ-римановой геометрии.

Таким образом создается впечатление, что риманова геометрия представляет собой только часть полной физической геометрии. Остальная часть полной геометрии отрезается условием, что вырожденные прямые (4.20) образуют все множество прямых. Это условие является внутренним ограничением, которое используется при построении римановой геометрии. Оно не может быть удалено без разрушения римановой геометрии.

В приложении к пространству-времени σ-риманова геометрия более эффективна, чем риманова геометрия. σ-риманова геометрия является более общей геометрией. Чтобы получить более общую геометрию пространства-времени из σ-римановой геометрии, достаточно только убрать аксиому треугольника, которая является внешним ограничением. Мы немедленно получаем геометрию пространства-времени в общем виде. В римановой геометрии аксиома треугольника является внутренним ограничением, которое используется при построении римановой геометрии. Устраняя аксиому треугольника, мы теряем метод построения римановой геометрии.

Используя риманову геометрию как пространственно-временную геометрию, нельзя представить себе геометрию пространства-времени, ответственную за квантовые эффекты [3]. Нельзя представить себе геометрию пространства-времени, ответственную за ограниченную делимость физических тел [4]. Неограниченная делимость, используемая в римановой геометрии, порождает независимость динамики частиц от пространственно-временной геометрии. На самом деле, истинная геометрия пространства-времени может определять динамику частиц [5].

Список литературы

[1] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.* 7 Auflage, B.G.Teubner, , Leipzig, Berlin, 1930.

[2] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (Смотри также http://arXiv.org/abs/math.MG/0103002).

[3] Yu.A.Rylov, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, 2092-2098, (1991).

[4] Yu.A.Rylov, Tubular geometry construction as a reason for new revision of the space-time conception. (Printed in *What is Geometry?* polimetrica Publisher, Italy, pp.201-235 http://www.polimetrica.com/polimetrica/406/), см. также http;//arXiv.org/abs/physics/0504031

[5] Yu.A.Rylov, Deformation principle and further geometrization of physics http://arXiv.org/abs/0704.3003