Гидродинамическая интерпретация квантовой механики: распределение по импульсам.

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН.
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101, кор.1.
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Квантовая механика рассматривается как частный случай динамики стохастических систем. Показано, что волновая функция описывает состояние ститистически усредненной системы $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$, а не состояние индивидуальной стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$. Принято считать, что такое построение квантовой механики содержит скрытые параметры и несовместимо с теоремой фон Неймана о скрытых парметрах. Показано, что исходные условия теоремы фон Неймана не выполнены. В частности, квантовая механика не описывает распределение по импульсам частицы. Распределение $w(\mathbf{p}) = |\psi_{\mathbf{p}}|^2$ не является распределением по импульсам частицы в состоянии ψ, потому что оно не может быть приписано какой-либо волновой функции. Это распределение ближе к распределению по средним импульсам, хотя эти два распределения не совпадают в точности.

1 Введение

В настоящей работе мы рассматриваем квантовую механику как частный случай динамики стохастических систем [1]. Динамика стохастических систем описывает любые стохастические системы, а не только квантовые, поэтому динамика стохастических систем не может быть основана на принципах квантовой механики, которые специфичны для описания нерелятивистских квантовых явлений. В динамике стохастических систем квантовые принципы появляются на динамическом уровне как *динамические свойства* квантовых систем. Динамика стохастических систем есть обычная *статистическая концепция*, которая содержит два сорта объектов: (1) индивидуальная стохастическая система $\mathcal{S}_{\text{st}}$ и (2) статистически усредненная система $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$, которая представляет собой статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\text{st}}\right]$ стохастических систем $\mathcal{S}_{\text{st}}$, нормированный на одну систему. Динамические уравнения описывают эволюцию состояния среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$ и не имеют отношения к самой системе $\mathcal{S}_{\text{st}}$.

Традиционная квантовая механика тоже есть статистическая концепция, но это экзотическая статистическая концепция, потому что она содержит только один сорт объектов: квантовую систему $\mathcal{S}_{\text{q}}$. Что такое квантовая система $\mathcal{S}_{\text{q}}$? Это $\mathcal{S}_{\text{st}}$, или $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$? Разные авторы дают различные ответы на этот вопрос. Традиционная (копенгагенская) концепция квантовой механики полагает, что $\mathcal{S}_{\text{q}}$ есть индивидуальная система (т.е. $\mathcal{S}_{\text{st}}$). Однако, все авторы полагают, что концепция квантовой механики содержит только один сорт объектов: $\mathcal{S}_{\text{q}}$. Динамические уравнения описывают эволюцию состояния системы $\mathcal{S}_{\text{q}}$.

Модельная концепция квантовых явлений (МККЯ) – это название квантовой механики, рассматриваемой как частный случай динамики стохастических систем. Традиционную квантовую механику мы будем называть аксиоматической концепцией квантовых явлений (АККЯ). Для краткости мы будем использовать эти аббревиатуры.

В МККЯ гидродинамическая интерпретация квантовой механики рассматривается как первичная интерпретация, а традиционная интерпретация в терминах волновой функции оказывается вторичной (производной) интерпретацией. Такой подход имеет логическое основание, и мы его изложим. Кроме того гидродинамическая интерпретация может быть легко распространена на случай релятивистских квантовых явлений, потому что МККЯ учитывает квантовую специфику только на динамическом уровне. Чтобы описать релятивистское явление достаточно рассмотреть релятивистский лагранжиан системы $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$.

В АККЯ квантовая специфика учитывается на концептуальном уровне. Волновая функция (главный объект АККЯ) является нерелятивистским объектом, и переход к описанию релятивистских явлений связан с пересмотром концептуальной структуры АККЯ. Попытки объединения нерелятивистского формализма КМ с принципами теории относительности не привели к успеху. Во всяком случае, распространение традиционной интерпретации в терминах волновой функции встретилось с трудностями. Как следствие этих трудностей столкновение релятивистских частиц описывается только в терминах S-матрицы, потому что детальное описание процесса столкновения в терминах волновой функции оказывается невозможным. В частности, в терминах волновой функции оказывается невозможным описание деталей механизма рождения пар [2].

Заметим, что МККЯ может рассматриваться как теория со скрытыми параметрами (переменными). Считается, что квантовая теория со скрытыми параметрами невозможна, потому что в соответствии с теоремой фон Неймана о скрытых параметрах [3] (гл.4, пар. 1,2) она несовместима с традиционной концепцией квантовой механики. Математический формализм АККЯ и, в частности, теорема фон Неймана о скрытых параметрах основаны на следующем утверждении.

Для любой наблюдаемой величины $\mathcal{R}$ и для любого состояния φ рассматриваемой квантовой системы выполняется соотношение

$$\mathrm{Erv}\,(\mathcal{R},\varphi)=(R\varphi,\varphi) \tag{1.1}$$

где $\mathrm{Erv}\,(\mathcal{R},\varphi)$ есть математическое ожидание величины $\mathcal{R}$ в состоянии φ. Величина R есть оператор наблюдаемой величины $\mathcal{R}$, и $(R\varphi,\varphi)$ есть скалярное произведение двух векторов $R\varphi$ и φ гильбертова пространства. Предполагается, что любая наблюдаемая величина $\mathcal{R}$ может быть мгновенно измерена и отнесена к состоянию (волновой функции) φ в этот момент времени. Формула (1.1) предполагается верной *для всех наблюдаемых величин $\mathcal{R}$ и для всех состояний* φ (волновых функций). Если формула (1.1) верна не для всех величин $\mathcal{R}$, математический формализм АККЯ не может быть обоснован и теорема о скрытах параметрах оказывается недоказанной.

Мы намереваемся показать, что формула (1.1) не верна в случае, когда $R=F(\mathbf{p})$, где F есть произвольная функция и $\mathbf{p}=-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ есть оператор импульса. В частности, измерение импульса свободной частицы требует длительного времени. В течение этого времени волновая функция ψ частицы существенно изменяется, и измеренное значение $\mathbf{p}'$ импульса не может быть приписано какому-либо определенному состоянию (волновой функции). В результате соотношение (1.1) оказывается невыполненым для такой величины как импульс частицы.

В самом деле, волновая функция для свободной частицы массы m имеет вид

$$\psi\,(t,\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int|\psi_{\mathbf{p}}|\,e^{-i\zeta(\mathbf{p})}\exp\left(i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t+i\frac{\mathbf{px}}{\hbar}\right)d\mathbf{p} \tag{1.2}$$

где $|\psi_{\mathbf{p}}|$ и $\zeta\,(\mathbf{p})$ суть произвольные вещественные функции от $\mathbf{p}$. Величина $|\psi_{\mathbf{p}}|\exp\left(i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t-i\zeta\,(\mathbf{p})\right)$ представляет собой компонент Фурье волновой функции $\psi\,(t,\mathbf{x})$. Модуль $|\psi_{\mathbf{p}}|$ компонента Фурье волновой функции сохраняется. Он может быть определен с помощью дифракционной решетки. Мы получаем распределение $w\,(\mathbf{p})$ по импульсам $\mathbf{p}$, которое задается соотношением

$$w\,(\mathbf{p})=A\,|\psi_{\mathbf{p}}|^2\,,\qquad A=\left(\int|\psi_{\mathbf{p}}|^2\,d\mathbf{p}\right)^{-1} \tag{1.3}$$

Дифракционный эксперимент длится долгое время. За это время фаза $i\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t - i\zeta(\mathbf{p})$ волновой функции существенно изменяется, и нельзя определить к какому времени и к какой волновой функции следует отнести измеренное распределение (1.3). Другие методы измерения импульса также требуют длительного времени [4].

Фактически это означает, что импульс частицы не всегда описывается оператором $-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$. Оператор $-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ является оператором импульса только в случае, когда волновая функция имеет вид волнового пакета (1.2), пространственный размер которого достаточно велик, и $|\psi_{\mathbf{p}}|$ не обращается в нуль только внутри очень малого интервала значений импульса $\mathbf{p}$. В остальных случаях вопрос, является ли оператор $-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ оператором импульса частицы, остается открытым.

В настоящей работе мы докажем два утверждения:

1. Формализм квантовой механики описывает динамику статистических ансамблей.

2. Распределение (1.2) не согласуется с постулатом фон Неймана (1.1).

2 Состояние чего описывает волновая функция?

Тот факт, что уравнение Шредингера для свободной квантовой частицы может быть представлено в виде гидродинамических уравнений, описывающих потенциальное течение некоторой жидкости, известен очень давно [5, 6]. Представление уравнения Шредингера в виде гидродинамических уравнений для идеальной (квантовой) жидкости с внутренней энергией

$$E = \frac{\hbar^2}{8m\rho}\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2 \qquad (2.1)$$

известное как гидродинамическая интерпретация квантовой механики, использовалось многими авторами [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Здесь ρ есть плотность жидкости, m есть масса квантовой частицы, $E = E(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho)$ есть внутренняя энергия жидкости на единицу массы, и $\hbar$ есть квантовая постоянная.

Гидродинамическое описание использовалось главным образом для интерпретации квантовой механики, а не как метод описания квантовой частицы, потому что гидродинамические уравнения нелинейны и труднее для решения, чем уравнение Шредингера. С другой стороны гидродинамическая интерпретация более наглядна, чем традиционная интерпретация в терминах волновой функции.

Хотя связь между уравнением Шредингера и гидродинамическим описанием известна в течение многих лет, все это время эта связь была односторонней. Можно было получить потенциальное течение жидкости из динамического уравнения для волновой функции (уравнения Шредингера), но не было известно как преобразовать динамические уравнения для жидкости в динамические уравнения для волновой функции. Другими словами, мы не знали, как описать завихренное течение в терминах волновой функции. В терминах волновой функции мы могли описать только потенциальное течение жидкости.

Чтобы описать произвольное течение жидкости в терминах волновой функциии, нужно было *проинтегрировать традиционные динамические уравнения для идеальной жидкости* (Уравнения Эйлера). В самом деле, уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi=0 \tag{2.2}$$

может быть приведено к гидродинамическим уравнениям для плотности ρ и скорости $\mathbf{v}$ некоторой идеальной жидкости. Подставляя $\psi=\sqrt{\rho}\exp\left(i\hbar\varphi\right)$ в (2.2) и разделяя вещественную и мнимую части уравнения, мы получаем выражения для временны́х производных $\partial_0\rho$ и $\partial_0\varphi$. Чтобы получить выражение для временно́й производной $\partial_0\mathbf{v}$ от скорости $\mathbf{v}=\frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\nabla}\varphi$, нужно продифференцировать динамическое уравнение для $\partial_0\varphi$, образовав комбинацию $\partial_0\mathbf{v}=\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\hbar}{m}\partial_0\varphi\right)$. Обратный переход от гидродинамических уравнений к динамическим уравнениям для волновой функции (уравнение Шредингера) требует общего интегрирования гидродинамических уравнений. Это интегрирование просто в частном случае потенциального течения, но это довольно трудная проблема в общем случае, когда результат интегрирования должен содержать три произвольных функции от трех аргументов. Без этого интегрирования нельзя получить описание жидкости в терминах волновой функции, и нельзя манипулировать динамическими уравнениями, преобразуя их от представления в терминах ρ, $\mathbf{v}$ к представлению в терминах волновой функции и обратно. Эта проблема оставалась нерешенной в течении многих лет. Сейчас она решена. Показано, что любая идеальная жидкость может быть описана в терминах много-компонентной комплексной волновой функции. Потенциальное течение идеальной жидкости описывается одно-компонентной волновой функцие, тогда как завихренное течение описывается двух-компонентной волновой функцией(или даже много-компонентной) [16]. Это означает, что волновая функция и спин являются атрибутами описания идеальной жидкости (а не атрибутами квантовых принципов). Другими словами, волновая функция есть только способ описания квантовой жидкости, тогда как свойства квантовых явлений описываются свойствами самой жидкости, чьи свойства в свою очередь определяются ее внутренней энергией. Это означает, что действительным носителем квантовых свойств и квантовых эффектов является квантовая жидкость, а не волновая функция, которая есть просто способ описания идеальной жидкости.

Любое статистическое описание содержит два различных объекта: отдельный стохастический объект $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ (индивидуальная частица) и среднестатистический объект (частица) $\langle\mathcal{S}\rangle=\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Отдельная стохастическая частица есть стохастическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Состояние этой частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ описывается ее положением $\mathbf{x}$ и ее скоростью $\mathbf{v}$. По определению стохастичность частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ означает, что отдельное измерение (S-измерение) состояния частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ невоспроизводимо, т.е. приготовляя частицу $\mathcal{S}_{\rm st}$ одним и тем же способом и повторяя S-измерение (положения частицы), мы получаем, вообще говоря, другой результат, потому что динамических уравнений для $\mathcal{S}_{\rm st}$ не существует. Однако, эволюция отдельной частицы $\mathcal{S}_{\rm st}$ не является полностью случайной. Она содержит некоторую регулярную составляющую $\mathcal{C}_{\rm reg}$ эволюции.

Чтобы получить $\mathcal{C}_{\rm reg}$, рассмотрим множество $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ из N независимых тождественных систем $\mathcal{S}_{\rm st}$. Множество $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}_{\rm st}\right]$, известное как статистический ансамбль, есть стохастическая система, имеющая $6N$ степеней свободы (предполагается , что $\mathcal{S}_{\rm st}$ имеет 6 степеней свободы). Если N достаточно велико, стохастические составляющие $\mathcal{C}_{\rm st}$ эволюции состояния компенсируют друг друга, тогда как регулярные эволюционные составляющие $\mathcal{C}_{\rm reg}$ накапливаются, и статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}_{\rm st}\right]$, $(N\rightarrow\infty)$ превращается в динамическую систему. В пределе $N\rightarrow\infty$ множество $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ превращается в статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\infty,\mathcal{S}_{\rm st}\right]$, который является непрерывной динамической системой, имеющей бесконечное число степеней свободы. Для $\mathcal{E}\left[\infty,\mathcal{S}_{\rm st}\right]$, имеются динамические уравнения, которые получаются в результате вариации функционала действия $\mathcal{A}_{\mathcal{E}\left[\infty,\mathcal{S}_{\rm st}\right]}$. Все существенные характеристики статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ не зависят от числа N элементов $\mathcal{S}_{\rm st}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}_{\rm st}\right]$, если N достаточно велико. Тогда можно нормировать статистический ансамбль на одну систему и ввести среднестатистическую систему $\left\langle\mathcal{S}_{\rm st}\right\rangle$, которая является динамической системой. Ее функционал действия $\mathcal{A}_{\left\langle\mathcal{S}_{\rm st}\right\rangle}$ определяется соотношением

$$\mathcal{A}_{\left\langle\mathcal{S}_{\rm st}\right\rangle}=\lim_{N\rightarrow\infty}\frac{1}{N}\mathcal{A}_{\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}_{\rm st}\right]} \tag{2.3}$$

Таким образом, среднестатистическая система $\left\langle\mathcal{S}_{\rm st}\right\rangle$ является непрерывной динамической системой с бесконечным числом степеней свободы. Исследуя $\left\langle\mathcal{S}_{\rm st}\right\rangle$, мы изучаем регулярную эволюционную составляющую $\mathcal{C}_{\rm reg}$ стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$, и гидродинамическое описание среднестатистической системы $\left\langle\mathcal{S}_{\rm st}\right\rangle$ есть способ исследования стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$.

Хотя АККЯ тоже является статистической концепцией, она содержит только один сорт объектов: квантовую частицу (систему) $\mathcal{S}_{\rm q}$. Квантовая система $\mathcal{S}_{\rm q}$ является непрывной динамической системой, чье состояние (волновая функция ψ) изображается точкой в бесконечно-мерном гильбертовом пространстве. АККЯ претендует на роль статистической концепции особого рода, которая содержит только один сорт физических объектов: квантовую частицу $\mathcal{S}_{\rm q}$. В соответствии с традиционной интерпретацией квантовой механики [3] квантовая частица $\mathcal{S}_{\rm q}$ есть индивидуальная частица $\mathcal{S}_{\rm st}$, а не среднестатистическая частица $\left\langle\mathcal{S}_{\rm st}\right\rangle$. Такое отождествление вызывает недоуменный вопрос: "Состояние детерминированной классической частицы $\mathcal{S}_{\rm d}$ есть точка в 6-мерном пространстве. Состояние статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[N,\mathcal{S}_{\rm d}\right]$ из N $(N\rightarrow\infty)$ детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ описывается точкой в $6N$-мерном фазовом пространстве. Почему состояние индивидуальной квантовой системы $\mathcal{S}_{\rm q}$ описывается как точка в бесконечномерном гильбертовом пространстве?"

С точки зрения формализма квантовой механики было бы лучше отождествить индивидуальную квантовую частицу $\mathcal{S}_q$ со среднестатистической частицей $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$, чье состояние тоже описывается точкой в бесконечномерном пространстве. Однако, ответ АККЯ такой: "Квантовая механика есть особый вид статистической концепции, которая содержит только один сорт объектов $\mathcal{S}_{\rm q}$, а не частный случай общей статистической концепции, содержащей два сорта объектов $\mathcal{S}_{\rm st}$ и $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$. Состояние отдельной квантовой частицы $\mathcal{S}_{\rm q}$ описывается волновой функцией ψ, и это есть постулат квантовой механики."

Другой вопрос такой. Положим $\hbar = 0$ в описании квантовой частицы $\mathcal{S}_{\rm q}$. Мы должны получить описание детерминированной классической частицы. Что это за описание? Описание отдельной частицы $\mathcal{S}_{\rm d}$, или описание статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\infty, \mathcal{S}_{\rm d}\right]$ классических частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$? Во-первых, заметим, что нельзя положить $\hbar = 0$ в уравнении Шредингера (2.2), потому что в этом случае мы не получим никакого описания. Прежде чем положить $\hbar = 0$, следует преобразовать фазу волновой функции, положив

$$\psi = \sqrt{\rho}\exp\left(i\varphi\right) = \sqrt{\rho}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right) \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2) и разделяя вещественную и мнимую части уравнения, мы получим

$$\frac{i}{2\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\rho}{m}\nabla^2 S + \frac{\nabla\rho}{m}\nabla S\right) = 0 \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\left(\boldsymbol{\nabla} S\right)^2}{2m} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{2\rho} + \left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{2\rho}\right)^2\right) = 0 \tag{2.6}$$

Теперь введем обозначение $\mathbf{v} = m^{-1}\boldsymbol{\nabla} S$, возьмем градиент от уравнения (2.6) и положим $\hbar = 0$ в (2.5) и (2.6). Мы получаем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho\mathbf{v}\right) = 0, \qquad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v} = 0 \tag{2.7}$$

Итак, мы получили динамические уравнения для идеальной жидкости без давления. Эта жидкость есть статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\infty, \mathcal{S}_{\rm d}\right]$ классических частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$. Мы видим, что при $\hbar = 0$ квантовая система $\mathcal{S}_{\rm q}$ превращается в статистический ансамбль, а не в отдельную систему. Это означает, что с формальной точки зрения квантовую частицу $\mathcal{S}_{\rm q}$ следует рассматривать как статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\infty, \mathcal{S}_{\rm st}\right]$, или как среднестатистическую частицу $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$, но не как отдельную частицу.

Другой интересный вопрос. Почему нужно преобразовывать масштаб фазы φ волновой функции, вводя множитель $\hbar^{-1}$ в экспоненту выражения (2.4)? При $\hbar \to 0$ этот множитель стремится к бесконечности. Ответ очень любопытен. Функционал действия, описывающий потенциальное течение идеальной жидкости с внутренней энергией (2.1) имеет вид [16, 17]

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int\left\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - \frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + \frac{b_0^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho}\right\}\mathrm{d}^4x, \tag{2.8}$$

где $\rho = \psi^*\psi$, ψ есть комплексная однокомпонентная волновая функция, ψ^* есть величина комплексно сопряженная к ψ. Величина b_0 есть произвольная постоянная (интегрирования) ($b_0 \neq 0$), описывающая масштаб фазы волновой функции. Последний член в (2.8) описывает внутреннюю энергию жидкости. Только этот член содержит квантовую постоянную $\hbar$. Все другие члены суть динамические члены, которые присутствуют при описании любого нерелятивистского ансамбля. Динамическое уравнение, порожденное действием (2.8) эквивалентно уравнению Шредингера для любого значения постоянной b_0. Если мы положим $\hbar = 0$, последний член в (2.8) обратится в нуль, так как обратится в нуль внутренняя энергия жидкости $E(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho) = 0$. В этом случае действие (2.8) описывает статистический ансамбль классических (детерминированных) частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Таким образом, в действии (2.8) переход к классическому случаю получается, если положить $\hbar = 0$.

Формальная вариация действия (2.8) по ψ^* приводит к динамическому уравнению для ψ, которое нелинейно из-за двух последних членов в (2.8). Если выбрать постоянную интегрирования $b_0 = \hbar$, два последних члена компенсируют друг друга, и действие (2.8) превратится в действие

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^* \cdot \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi \right\} \mathrm{d}^4x \tag{2.9}$$

которое прямо порождает уравнение Шредингера (2.2). Однако, теперь все члены в действии (2.9) стали квантовыми в том смысле, что все они содержмт квантовую постоянную $\hbar$ в качестве множителя. Положив $\hbar = 0$, мы не сможем перейти к классическому случаю, потому что при $\hbar = 0$ действие (2.9) обращается в нуль. Однако, можно преобразовать масштаб фазы волновой функции ψ с помощью преобразования [17]

$$\psi \to \tilde{\psi} = |\psi| \exp\left(\frac{b_0}{\hbar} \log \frac{\psi}{|\psi|} \right), \tag{2.10}$$

После этого преобразования действие (2.9) превратится в действие (2.8). Если мы теперь положим $\hbar = 0$, мы получим действие для статистического ансамбля классических частиц. Сделав замену фазы φ (2.4) в уравнении Шредингера (2.2), мы осуществили преобразование (2.10) с $b_0 = 1$. После этого, положив $\hbar = 0$, мы получаем динамические уравнения для статистического ансамбля классических частиц.

Итак, формальное рассмотрение показывает, что квантовая частица $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ есть на самом деле среднестатистическая частица $\langle \mathcal{S}_{\mathrm{st}} \rangle$, или статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, но не индивидуальная частица. Если мы рассматриваем $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ как индивидуальную частицу, мы разрушаем непрерывную связь между классической физикой и квантовой механикой.

Некоторые авторы рассматривают квантовую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ как статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ (например, [18]). Такая интерпретация лучше, потому что она восстанавливает непрерывную связь между классической физикой и квантовой механикой. К сожалению, квантовая механика не всегда излагается последовательно, потому что рассматривается только один сорт объектов (частица $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$). Такая интерпретация находится в согласии с формализмом квантовой механики, который имеет дело только с одним сортом частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, и все предсказания квантовой механики касаются только $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Однако, имеется два вида измерений: (1) отдельное измерение (S-измерение) производимое над отдельной частицей и (2) массовое измерение (M-измерение), производимое над статистическим ансамблем. Свойства S-измерения и свойства M-измерения различны и несовместимы. Результатом S-измерения является определенное значение измеряемой величины, тогда как результатом M-измерения является распределение измеряемой величины. Результат S-измерения случаен и невоспроизводим, тогда как результат M-измерения регулярен и воспроизводим. S-измерение не изменяет состояние (волновую функцию), тогда как M-измерение заменяет волновую функцию ψ матрицей плотности. Если мы не различаем между M-измерением и S-измерением и используем один и тот же термин "измерение" для обоих видов измерения, то мы создаем этим источник возможных парадоксов [1].

К сожалению, нам не доводилось встречать такого изложения квантовой механики, где бы рассматривались два вида измерения. Различение между двумя видами измерения необходимо, если мы рассматриваем квантовую механику как частный случай общей статистической концепции (динамики стохастических систем). Мне не доводилось встречать такого различения между S-измерением и M-измерением даже в изложении тех авторов, которые полагали, что волновая функция описывает состояние статистического ансамбля (а не отдельной частицы). Изложение квантовой механики не может быть последовательным без этого различения. Кроме того всякое M-измерение есть множество, состоящее из многих S-измерениий, и нельзя игнорировать S-измерение, хотя его результаты не описываются КМ формализмом.

Квантовая механика представляет собой логическое построение, содержащее аксиомы (первичные утверждения) и их следствия. Первичные утверждения могут быть выбраны разными способами. Этот выбор несущественен для самой нерелятивистской квантовой механики, но он важен, если мы намерены распространить квантовую механику на релятивистские квантовые явления. Например, если квантовые принципы являются первичными утверждениями квантовой механики, то динамические уравнения в терминах волновой функции должны быть линейными, и внутренняя энергия квантовой жидкости должна иметь вид (2.1), для того чтобы последний член в (2.8) мог быть скомпенсирован предыдущим членом при $\hbar = b_0$. Другой вид выражения для внутренней энергии жидкости недопустим. Компенсация динамического члена с членом описывающим свойства жидкости выглядит достаточно искусственно. Она оправдана только стремлением получить линейное динамическое уравнение. С точки зрения динамики стохастических систем, где допустимы любые идеальные жидкости, возведение линейности динамического уравнения в принцип выглядит довольно сомнительно. Разумеется, если для некоторой специальной квантовой жидкости мы можем получить линейное динамическое уравнение, пусть даже путем искусственного отождествления членов различной природы, следует принять и использовать это отождествление. Однако, кажется сомнительным рассматривать линейность, связанную с таким отождествлением, как принцип квантовой механики.

Кроме того, действие для квантовой жидкости с внутренней энергией (2.1) имеет вид (2.8) только для потенциального течения жидкости. Волновая функция двух-компонентна для завихренного течения той же самой жидкости, и действие имеет вид [16]

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] &= \int\left\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{b_0^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi\right.\\ &\left.+\frac{b_0^2}{8m}(\nabla s_\alpha)(\nabla s_\alpha)\rho+\frac{b_0^2-\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho}\right\}\mathrm{d}^4x\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\psi=\binom{\psi_1}{\psi_2},\qquad \psi^*=(\psi_1^*,\psi_2^*),\qquad \rho\equiv\psi^*\psi,\qquad s_\alpha\equiv\frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}/,\qquad \alpha=1,2,3,\tag{2.12}$$

где σ_α суть матрицы Паули. Динамическое уравнение для завихренного течения нелинейно, если даже $b_0=\hbar$. Оно имеет вид

$$i\hbar\partial_0\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\partial_\alpha\partial_\alpha\psi+\frac{\hbar^2}{8m}\left(\nabla s_\alpha\right)\left(\nabla s_\alpha\right)\psi=\hbar^2\frac{\nabla\left(\rho\nabla s_\alpha\right)}{4\rho m}\left(\sigma_\alpha-s_\alpha\right)\psi\tag{2.13}$$

Это уравнение нелинейно, и едва ли его можно привести к линейному уравнению. Тогда уравнение (2.13) оказывается несовместимым с принципами квантовой механики.

Линейность динамического уравнения, рассматриваемая как принцип, сильно ограничивает возможности динамики стохастических систем. В частности, попытки распространения квантовой механики на релятивистские явления микромира не удались, и условия, налагаемые на динамику стохастических систем принципами квантовой механики, могли сыграть важную роль в этой неудаче.

В традиционной (копенгагенской) интерпретации квантовой механики движение квантовой частицы описывается в терминах волновой функции ψ и соответствующих этому волновых понятий: интерференции, дифракции, когерентности. Такие понятия как импульс, энергия, угловой момент тоже употребляются, но они выражаются через волновую функцию ψ, и иногда их смысл иной, чем в классической механике. Однако, волновая функция ψ является нерелятивистским понятием, и традиционная интерпретация встречает трудности при распространении ее на движение релятивистских квантовых частиц. Это основной дефект традиционной интерпретации. Кроме того, волновая функция есть только способ описания квантовой жидкости. Построение интерпретации на основе метода описания представляется ненадежным. Рассмотрение самой квантовой жидкости (т.е. $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$) представляется более надежной интерпретацией. Будучи флюидоподобной непрерывной динамической системой, среднестатистическая частица $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ может быть описана в терминах обычных гидродинамических понятий: 4-вектор потока $j^i = \{\rho, \rho\mathbf{v}\}$ и тензора энергии-импульса T^{ik}.

Интегрируя систему динамических уравнений

$$\frac{dx^i}{d\tau} = j^i(x), \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{2.14}$$

где

$$j^i = \{\rho, \mathbf{j}\}, \qquad j^0 = \rho = \psi^*\psi, \qquad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2m}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi) \tag{2.15}$$

мы получаем мировые линии $\mathcal{L} : x^i = x^i(\tau)$, которые ассоциируются со среднестатистической частицей $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Рассматривая тензор энергии-импульса T^{ik} вдоль $\mathcal{L}$, мы можем оценить импульсно-энергетические характеристики, связанные со средней мировой линией $\mathcal{L}$. Таким образом, гидродинамическая интерпретация описывает все квантовые явления в терминах средних мировых линий и других атрибутов гидродинамики.

Свойства квантовой жидкости определяются внутренней энергией E жидкости, которая зависит от свойств некоторого 4-вектора u^k, $k = 0, 1, 2, 3$. Этот вектор описывает среднее значение стохастической составляющей скорости частицы. Выбор поля этого вектора u^k представляет собой процедуру квантования классической частицы. Чтобы получить действие $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle}$ для квантовой жидкости $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$, необходимо рассмотреть действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)]}$ для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)]$ детерминированных классических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)$, где P есть множество параметров классической частицы. Для свободной классической частицы имеется только один параметр P: ее масса m. Действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ свободных детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ имеет вид

$$\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(m)]}[\mathbf{x}] = \int L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) dt\, d\boldsymbol{\xi}, \tag{2.16}$$

где плотность функции Лагранжа описывается уравнением

$$L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) = -mc^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 \tag{2.17}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Здесь переменные $\boldsymbol{\xi}$ маркируют частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$. Постоянная c есть скорость света. Действие (2.16) описывает некоторую жидкость без давления.

Заменим теперь величину массы m в (2.17), (2.16) на ее эффективное значение m_{eff}

$$m \to m_{\mathrm{eff}} = m\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2c^2} + \frac{\hbar}{2mc^2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right) \tag{2.18}$$

Замена (2.18) является нерелятивистской. В этом случае составляющая u^0 4-вектора u^k мала и ей можно пренебречь [17]. В нерелятивистском приближении мы получим действие $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ для статистического ансамбля стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\left(m_{\mathrm{eff}}\right)\right]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int L\left(\mathbf{x},\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)+L_{\mathrm{st}}\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right)dtd\boldsymbol{\xi}, \tag{2.19}$$

$$L_{\mathrm{st}}\left(\mathbf{u},\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right)=\frac{m}{2}\mathbf{u}^{2}-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} \tag{2.20}$$

Здесь $\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ есть среднее значение стохастической составляющей скорости. Первый член в (2.20) описывает энергию стохастической составляющей скорости. Квантовая постоянная $\hbar$ появляется здесь как постоянная связи, описывающая связь между регулярной и стохастической составляющими движения частицы. Скорость $\mathbf{u}$ предполагается малой по сравнению со скоростью света c. Динамические уравнения для квантовой жидкости с давлением получаются в результвте вариации действия (2.19) по переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$. Из динамического уравнения для $\mathbf{u}$ следует, что

$$\mathbf{u}=-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho,\qquad E_{\mathrm{int}}=\frac{m\mathbf{u}^{2}}{2}\rho=\frac{\hbar^{2}}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^{2}}{\rho},\qquad \rho=\left(\frac{\partial\left(x^{1},x^{2},x^{3}\right)}{\partial\left(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3}\right)}\right)^{-1} \tag{2.21}$$

где ρ есть плотность жидкости, а E_{int} есть плотность энергии, связанная с о средним значением $\mathbf{u}$ стохастической составляющей скорости. Можно показать, что потенциальное течение квантовой жидкости описывается уравнением Шредингера (2.2) [17].

Таким образом, квантование классической частицы осуществляется добавлением дополнительного члена (2.20) к действию $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ для статистического ансамбля свободных классических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ перестает быть статистическим ансамблем классических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, потому что теперь его элементы взаимодействуют между собой. Это взаимодействие порождает давление в квантовой жидкости.

Квантование свободных релятивистских частиц осуществляется с помощью релятивистского варианта замены (2.18) [16, 19]. Иногда возникает неодуменный вопрос: "Как квантовая жидкость описывает такие волновые явления как интерференция и дифракция?" Дело в том, что внутренняя энергия квантовой жидкости зависит от плотности ρ и от градиента плотности $\boldsymbol{\nabla}\rho$, тогда как внутренняя энергия обычной жидкости зависит только от плотности ρ. Появление дополнительных пространственных производных в гидродинамических уравнениях порождает волновые свойства квантовой жидкости. Формально это следует из описания потенциального течения квантовой жидкости в терминах уравнения Шредингера.

3 Распределение по импульсам.

Гидродинамическая интерпретация квантовой механики не может дать распределения $w\left(\mathbf{p}\right)$ по импульсам $\mathbf{p}$ в состоянии, описываемом волновой функцией ψ.

Оно может дать только распределение по средним импульсам. Традиционная (копенгагенская) интерпретация дает распределение по импульсам в виде

$$w(\mathbf{p}) = A\psi_{\mathbf{p}}^{*}\psi_{\mathbf{p}}, \qquad \psi_{\mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int \psi(\mathbf{x})\, e^{-i\frac{\mathbf{px}}{\hbar}}d\mathbf{x} \qquad \mathbf{A} = \int \psi_{\mathbf{p}}^{*}\psi_{\mathbf{p}}d\mathbf{p}, \tag{3.1}$$

где $\psi_{\mathbf{p}}$ есть Фурье компонент волновой функции ψ. Однако, это утверждение нельзя проверить экспериментально, потому что измеренное распределение не может быть приписано состоянию $\psi(\mathbf{x})$. Напротив, распределение по средним импульсам, которое дается гидродинамической интерпретацией, может быть проверено экспериментально и приписано волновой функции ψ, но это распределение не совпадает с (3.1).

Чтобы понять различие между импульсом и средними импульсом, мы рассмотрим измерение импульса молекулы на примере стационарного течения идеального газа. Пусть имеется изотермический поток газа, и температура $kT =$const. Распределение молекул газа по скоростям дается распределением Максвелла.

$$F(\mathbf{x},\mathbf{v})\, d\mathbf{v} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{x}))^2}{2kT}\right\} d\mathbf{v} \tag{3.2}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ есть скорость газа в точке $\mathbf{x}$ (средняя скорость молекул газа в точке $\mathbf{x}$). Распределение по импульсам $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ имеет вид

$$F_1(\mathbf{x},\mathbf{p})\, d\mathbf{p} = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{p}-m\mathbf{u}(\mathbf{x}))^2}{2mkT}\right\} d\mathbf{p} \tag{3.3}$$

Разделим объем V, заполненный течением газа на одинаковые кубические ячейки $V_1, V_2, ...V_N$, $N \gg 1$. Пусть выполнены следующие условия

$$l_{\mathrm{c}} \ll L, \qquad |v_{\mathrm{t}}\tau_c| \ll L, \qquad |\mathbf{u}(\mathbf{x})| \ll v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \tag{3.4}$$

где L есть линейный размер ячейки, l_{c} есть средний путь между молекулярными столкновениями, τ_{c} есть среднее время между столкновениями, и v_{t} есть средняя тепловая скорость молекул.

Рассчитаем средний импульс $\langle\mathbf{p}_i\rangle$ молекулы газа в ячейке V_i. Мы получим $\langle\mathbf{p}_i\rangle = m\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in V_i$, $i = 1, 2, ...N$. Множество всех $\langle\mathbf{p}_i\rangle$, $i = 1, 2, ...N$ образует распределение по средним импульсам. Это распределение полностью определяется течением газа и не имеет ничего общего с распределением Максвелла по импульсам (3.3), которое описывает и регулярную, и случайную составляющие импульса молекулы. При условиях (3.4) распределение по средним импульсам много у́же, чем распределение Максвелла, потому что распределение Максвелла учитывает случайную составляющую скорости молекулы, а в данном случае случайная составляющая скорости молекулы много больше, чем ее регулярная составляющая. Представим себе, что мы измеряем импульс случайно взятой молекулы. Мы измеряем ее положение $\mathbf{x}$ в момент времени t и ее положение $\mathbf{x}_1$ в момент времени $t+t_{\mathrm{m}}$. Импульс молекулы в интервале времени $(t, t+t_{\mathrm{m}})$ определяется соотношением

$$\mathbf{p} = m\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}}{t_{\mathrm{m}}} \tag{3.5}$$

Произведя много таких измерений импульса молекулы, мы получаем распределение по импульсам. Какое распределение мы получим? Распределение по средним импульсам или распределение Максвелла? Результат зависит от времени измерения t_{m}. Если $t_{\mathrm{m}} \ll \tau_{\mathrm{c}}$, мы получаем распределение Максвелла (3.3), усредненное по объему V, занимаемому потоком газа. Если $\tau_{\mathrm{c}} \ll t_{\mathrm{m}} \ll L/\left|\mathbf{u}(\mathbf{x})\right|$, мы получаем распределение по средним импульсам. Если $t_{\mathrm{m}} \approx \tau_{\mathrm{c}}$, мы получаем помежуточный результат, который близок к распределению Максвелла, потому что характерная скорость распределения Максвелла $v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \gg \left|\mathbf{u}(\mathbf{x})\right|$. Наконец, если $\tau_{\mathrm{c}} \ll L/\left|\mathbf{u}(\mathbf{x})\right| \ll t_{\mathrm{m}}$, мы получаем распределение по средним импульсам, содержащее некоторое дополнительное усреднение по пространственным ячейкам.

Если течение газа нестационарно, время измерения t_{m} должно быть короче, чем характерное время τ изменения потока газа. Если средняя скорость нестационарного потока газа есть $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$, то распределение по средним импульсам $\langle\mathbf{p}\rangle$ молекул дается соотношением

$$\begin{aligned} w(\langle\mathbf{p}\rangle) &= A\int \delta\left(\langle\mathbf{p}\rangle - m\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right)\rho(t,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \\ A &= \left(\int w(\langle\mathbf{p}\rangle)\,d\langle\mathbf{p}\rangle\right)^{-1} = \left(\int \rho(t,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $\rho(t,\mathbf{x})$ есть плотность газа. Средний импульс $\langle\mathbf{p}\rangle$ есть однозначная функция от координат $\mathbf{x}$. Бессмысленно говорить об одновременном распределении $F(\mathbf{x},\langle\mathbf{p}\rangle)$ по координатам и импульсам, потому что переменные $\mathbf{x}$ и $\langle\mathbf{p}\rangle$ не являются независимыми, и это распределение есть функция только координат $\mathbf{x}$.

Возможно ли получить распределение по средним импульсам $\langle\mathbf{p}\rangle$ молекул и приписать его нестационарному течению газа в случае, когда $\tau \approx \tau_{\mathrm{c}}$? Да, это возможно. Мы должны измерить последовательные положения $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_1$ молекулы соответственно в моменты времени t и $t+t_{\mathrm{m}}$, ($t_{\mathrm{m}} \ll \tau_{\mathrm{c}} \approx \tau$, $\mathbf{x} \in V_i$) и определить импульс $\mathbf{p}$ с помощью соотношения (3.5). Производя множество таких измерений в момент времени t и взяв среднюю величину измеренного импульса $\mathbf{p}$, мы получим средний импульс $\langle\mathbf{p}_i\rangle$ в ячейке V_i. Произведя такие измерения во всех ячейках в момент времени t, мы получим распределение по средним импульсам $\langle\mathbf{p}\rangle$ в момент времени t. Это распределение по средним импульсам может быть приписано состоянию $\rho, \mathbf{u}$ потока газа в момент времени t, потому что время измерения $t_{\mathrm{m}} \ll \tau \approx \tau_{\mathrm{c}}$. С другой стороны это распределение не имеет ничего общего с рапределением Максвелла по импульсам молекул. Таким образом, распределение (3.6) по средним импульсам может быть измерено и приписано состоянию потока газа в момент времени t.

Теперь применим проведенное выше рассмотрение к квантовой жидкости, описывающей свободную квантовую частицу. Пусть состояние жидкости описывается волновой функцией ψ. В соответствии с (3.6) мы получаем распределение по средним импульсам

$$w(\langle\mathbf{p}\rangle) = A\int \delta\left(\langle\mathbf{p}\rangle - m\mathbf{v}(t,\mathbf{x})\right)\rho(t,\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{v} = \frac{\hbar}{2m\rho}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi\right), \tag{3.7}$$

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad \mathbf{A} = \left(\int w(\langle\mathbf{p}\rangle)\,d\langle\mathbf{p}\rangle\right)^{-1} = \left(\int \psi^*\psi d\mathbf{x}\right)^{-1} \tag{3.8}$$

После интегрирования по $\mathbf{x}$ распределение (3.7) может быть записано в виде

$$w(\mathbf{p}) = A\sum_l \left[\frac{\rho(t,\mathbf{x})}{m^3\left|D(\mathbf{x})\right|}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_l(t,\mathbf{p})}, \qquad D(\mathbf{x}) = \frac{\partial\left(v^1(\mathbf{x}), v^2(\mathbf{x}), v^3(\mathbf{x})\right)}{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)} \tag{3.9}$$

где суммирование производится по всем корням $\mathbf{x}_l(t,\mathbf{p})$ уравнения

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{p}}{m} \tag{3.10}$$

Распределение (3.7) может быть измерено за очень короткое время измерения t_m и приписано некоторому состоянию ψ жидкости, но это распределение не имеет вида (1.1), потому что оно не билинейно по волновой функции ψ. Распределение (3.1) не имеет также вида (1.1), потому что оно не может быть приписано волновой функции ψ.

Вообще говоря, распределение (3.7) отличается от традиционного распределения (3.1) по импульсам. Сравним эти два распределения для состояния, описываемого волновой функцией

$$\psi(x) = A_1 e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-X)^2}{a^2}+\frac{i}{\hbar}k(x-X)} = \frac{A_1\left|a\right|}{\sqrt{2\pi}\hbar}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a^2(k-p)^2}{2\hbar^2}} e^{\frac{i}{\hbar}p(x-X)}dp, \qquad A_1 = \mathrm{const} \tag{3.11}$$

Эта волновая функция описывает одномерный волновой пакет с характерной шириной a, движущийся с импульсом k. Центр волновой функции находится в точке X.

Вычисление дает для распределения (3.1)

$$w(p) = A\psi_p^*\psi_p = \frac{a}{\sqrt{\pi}\hbar}e^{-\frac{a^2}{\hbar^2}(k-p)^2} \tag{3.12}$$

Для ρ и j мы получаем

$$\rho(x) = \left|\psi\right|^2 = \left|A_1\right|^2\exp\left(-\frac{(x-X)^2}{\left|a\right|^2}\right)dx \tag{3.13}$$

$$j(x) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right) = \frac{k}{m}\left|A_1\right|^2\exp\left(-\frac{(x-X)^2}{\left|a\right|^2}\right) \tag{3.14}$$

Тогда распределение по средним импульсам (3.7) описывается соотношением

$$w\left(\langle p\rangle\right)=\int\delta\left(\langle p\rangle-k\right)\rho\left(x\right)dx=\left|A_1\right|^2\frac{\sqrt{\pi}}{|a|}\delta\left(\langle p\rangle-k\right) \tag{3.15}$$

Выражения (3.15) и (3.12) совпадают в пределе $a\to\infty$. Они близки, если $a\gg\hbar/k$. Таким образом, распределения (3.15) и (3.12) близки для широких волновых пакетов. В других случаях распределения (3.15) и (3.12) могут быть близкими или нет. Обе интерпретации (традиционная или гидродинамическая) предполагают, что одновременные распределения по координатам и импульсам невозможно. (Формально, такое распределение возможно, но в этом распределении импульс $\mathbf{p}$ есть функция положения $\mathbf{x}$). Однако, причины этой невозможности различны. Традиционная интерпретация предполагает, что такое распределение невозможно, потому что оператор координаты и оператор импульса не коммутируют. В гидродинамической интерпретации такое распределение невозможно, потому что средний импульс и положение не являются независимыми величинами.

Рассмотрим влияние измерительного прибора на измерение импульса в стационарном состоянии, описываемом волновой функцией ψ. Мы хотим измерить составляющую p_1 импульса $\mathbf{p}$ в интервале $\{x,x+\Delta x\}$.

Сначала мы встанем на точку зрения АККЯ, которая не различает между M-измерением и S-измерением. Мы рассмотрим измерение импульса как измерение проведенное над отдельной частицей. Мы измеряем координату x дважды с временным интервалом t_{m}. Для определения положения частицы мы используем фотон с частотой ω и с импульсом $\hbar\omega/c$. При столкновении с частицей фотон передает ей часть своего импульса. Неопределенность Δp импульса связана с неопределенностью Δx положения частицы с помощью соотношения неопределенности.

$$\Delta x\Delta p\geq\hbar/2 \tag{3.16}$$

Измерение первого положения частицы осуществляется с неопределенностью Δx. Импульс определяется соотношением (3.5), и неопределенность δp измерения импульса есть функция от Δx, определяемая соотношением

$$\delta p=\frac{m\Delta x}{t_{\mathrm{m}}}+\frac{\hbar}{\Delta x} \tag{3.17}$$

Минимум выражения (3.17) достигается при $\Delta x=\sqrt{m\hbar/t_{\mathrm{m}}}$. Минимальная величина неопределенности импульса задается соотношением

$$\delta p_{\min}=2\sqrt{\frac{m\hbar}{t_{\mathrm{m}}}} \tag{3.18}$$

Таким образом, точное измерение импульса возможно только при $t_{\mathrm{m}}\to\infty$, когда измеренное значение импульса не может быть приписано волновой функции. Считается, что невозможность точного измерения импульса частицы связана с воздействием измерительного прибора (в данном случае фотона).

Теперь мы рассмотрим измерение импульса с точки зрения МККЯ, которая различает между S-измерением и M-измерением. Рассмотрение S-измерения бессмысленно, потому что результат S-измерения случаен и невоспроизводим. Кроме того результат S-измерения не может быть предсказан статистической концепцией (квантовой механикой).

M-измерение есть множество (ансамбль) из N одинаковых S-измерений: $M_1, M_2, ..., M_N$ $(N \to \infty)$. Любое из S-измерений производится над отдельной частицей. Все частицы приготовляются одним и тем же способом, и все N частиц образуют статистический ансамбль $\mathcal{E}_N$, состояние которого описывается волновой функцией ψ. Любое S-измерение M_i состоит из двух S-измерений $\{F_i, S_i\}$, где F_i означает измерение первого положения i-ой частицы в момент времени t, а S_i означает измерение положения той же самой частицы в момент времени $t + t_{\mathrm{m}}$. Пусть S-измерения $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, ...F_{\alpha_K}$, $(K \gg 1)$ положения x дают результаты в интервале $L_k = (k\Delta x, (k+1)\,\Delta x)$, где L есть некоторый пространственный интервал. Мы отберем эти частицы с номерами $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_K$ и образуем новый статистический ансамбль $\mathcal{E}'_K$. Эти K частиц статистического ансамбля $\mathcal{E}'_K$ в момент времени t имеют координату в интервале L_k. Если $N \to \infty$ и $K \to \infty$, оба статистических ансамбля $\mathcal{E}_N$ и $\mathcal{E}'_K$ суть динамические системы, состояния которых описываются соответственно волновыми функциями ψ и ψ'. Волновая функция ψ' статистического ансамбля $\mathcal{E}'_K$ не совпадает, вообще говоря, с волновой функцией ψ статистического ансамбля $\mathcal{E}_N$. Это изменение состояния статистического ансамбля есть результат главным образом селекции, хотя динамическое взаимодействие с измерительным прибором (фотоном) тоже вносит свой вклад в изменение состояния статистического ансамбля $\mathcal{E}'_K$.

В результате произведенной селекции координата x всех частиц статистического ансамбля $\mathcal{E}'_K$ концентрируется в интервале $L_k = (k\Delta x, (k+1)\,\Delta x)$. Тогда $|\partial\rho'/\partial x| \geq \hbar\rho'/\Delta x$, $\rho' = |\psi'|^2$ и внутренняя энергия (2.1) статистического ансамбля $\mathcal{E}'_K$ увеличивается. По прошествии некоторого времени внутренняя энергия преобразуется в x-компонент импульса частицы. Произведем теперь S-измерения $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_1}, ...S_{\alpha_K}$ координаты x всех K частиц статистического ансамбля $\mathcal{E}'_K$ в момент времени $t + t_{\mathrm{m}}$. Используя соотношение (3.5), мы получим распределение $w_{t_{\mathrm{m}},\Delta x}(x, p_x)$ по x-компоненту импульса в окрестности точки $x = k\Delta x$. Вид этого распределения зависит от времени измерения t_{m} и от влияния измерительного прибора. Измерение учитывает также стохастическую составляющую $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ движения частицы. Если числа N и K элементов в статистических ансамблях $\mathcal{E}_N$ и $\mathcal{E}'_K$ стремятся к ∞, то полученные распределения $w_{t_{\mathrm{m}},\Delta x}(x, p_x)$ оказываются воспроизводимыми. Они воспроизводятся при повторных M-измерениях x-составляющей импульса.

Полученное распределение $w_{t_{\mathrm{m}},\Delta x}(p_x)$ по импульсам зависит от t_{m} и от Δx, которые выбраны произвольно. Рассмотрим предел

$$w_{\Delta x}(x, p_x) = \lim_{t_{\mathrm{m}} \to 0} w_{t_{\mathrm{m}},\Delta x}(x, p_x) \qquad (3.19)$$

Мы не можем быть уверены, что такой предел существует, потому что мы ничего не знаем о стохастической составляющей эволюции $\mathcal{C}_{\mathrm{st}}$ движения частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Поскольку все частицы статистического ансамбля $\mathcal{E}'_K$ независимы, то следует ожидать, что влияние квантовой стохастичности и влияние измерительного прибора на среднее значение величины $\langle p_x \rangle$ x-составляющей импульса будут скомпенсированы. Следует ожидать, что $w_{\Delta x}(x, p_x)$ зависит только от $x = k\Delta x$, но не от Δx, т.е. $w_{\Delta x}(x, p_x) = w(x, p_x)$. Тогда среднее значение импульса $\langle p_x(x) \rangle$ частицы на интервале $L_k = (k\Delta x, (k+1)\Delta x)$

$$\langle p_x(x) \rangle = \int p_x w(x, p_x)\, dp_x \tag{3.20}$$

существует и совпадает со значением mv_x, определяемым вторым соотношением (3.7). Измеренное значение $\langle p_x(x) \rangle$ среднего импульса может быть приписано состоянию ψ (а не ψ'), потому что время измерения может быть сделано очень коротким. Состояние ψ' может рассматриваться как промежуточное состояние, которое возникает в процессе M-измерения. Формализм квантовой механики предсказывает значение среднего импульса (3.20) и приписывает его волновой функции ψ. Однако, формализм квантовой механики не может предсказать вида распределения (3.19), так же как газовая динамика, описывая скорость газа (среднюю скорость молекул), не может описывать распределение Максвелла и его эволюцию. В этом смысле параметры распределения (3.19) могут рассматриваться как скрытые параметры АККЯ. Они являются также скрытыми параметрами и для МККЯ.

В некотором смысле распределение (3.19) по импульсам есть аналог распределения Максвелла по импульсам (3.3) в кинетической теории газов. Возможно ли экспериментальное измерение распределения по импульсам? Возможно ли устранить влияние измерительного прибора на измерение распределения по импульсам? Это интересный вопрос, который является открытым в настоящее время.

4 Заключительные замечания

На первый взгляд традиционная интерпретация квантовой механики кажется более информативной, чем гидродинамическая интерпретация, т.к. АККЯ предсказывает распределение по импульсам, а МККЯ – нет. Мы показываем в настоящей работе, что распределение по импульсам (1.3) не является на самом деле распределением по импульсам. Оно может рассматриваться как распределение по модулю компонента Фурье, или даже как распределение по среднему импульсу, но не как распределение по импульсам. Если это так, то гидродинамическая интерпретация, которая не может предсказать распределения по импульсам, оказывается столь же информативной как и традиционная интерпретация квантовой механики.

Кроме того было показано, что волновая функция описывает состояние статистического ансамбля стохастических частиц $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, или состояние среднестатистической частицы $\langle \mathcal{S}_{\mathrm{st}} \rangle$, но не состояние отдельной стохастической частицы

$\mathcal{S}_{\rm st}$. Это серьезный аргумент против традиционной интерпретации квантовой механики.

Таким образом, мы показали, квантовая система $\mathcal{S}_{\rm q}$ есть среднестатистическая система $\langle \mathcal{S}_{\rm st} \rangle$, а не индивидуальная система $\mathcal{S}_{\rm st}$. Формализм квантовой механики предсказывает только результаты M-измерений. S-измерения важны, потому что всякое M-измерение есть ансамбль независимых S-измерений.

Было показано, что некоторые исходные положения (1.1), необходимые для доказательства теоремы фон Неймана о скрытых парметрах, не могут быть проверены экспериментально, потому что измернные величины не могут быть приписаны какому-либо определенному состоянию (волновой функции). Все эти аргументы свидетельствуют в пользу гидродинамической интерпретации, которая непринужденно может быть распространена на случай релятивистских явлений.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them. (Available at http:// arXiv.org/abs /physics/0210003).

[2] Yu. A. Rylov, Classical description of pair production. (In preparation, available at http:// arXiv.org/abs /physics/0301020).

[3] J. V. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik,* Berlin, Springer, 1932. (русс. пер. Иоганн фон Нейман, *Математические основы квантовой механики*, Наука, Москва, 1964.

[4] Yu. A. Rylov, "The correspondence principle and measurability of physical quantities in quantum mechanics" in *Uncertainty Principle and Foundations of Quantum Mechanics.* ed. W.Price and S.Chissick, Wiley, N.Y., 1977, p.109.

[5] E. Madelung, Quanten theorie in hydrodynamischer Form. *Z.Phys.* **40,** 322-326, (1926).

[6] L. de Broglie, Sur la possibilité de relier les phénomenes d'interference et de diffraction é la théorie des quanta de lumiere. *Comptes Rendus* **183**, 447-448, (1926).

[7] D. Bohm, *Phys.Rev.* **85,** 166, 180, (1952).

[8] T. Takabayasi, *Progr. Theor. Phys.*, **8**, 143, (1952).

[9] T. Takabayasi, *Progr. Theor. Phys.*, **9**, 187, (1953).

[10] L. Janosssy and M.Ziegler, *Acta Phys. Hung.*, **16**, 37, (1963).

[11] L. Janosssy and M.Ziegler, *Acta Phys. Hung.*, **16**, 345, (1964).

[12] M. Husar and M. Ziegler-Naray, *Acta Phys. Acad. Scien. Hung.*, **26**, 223, (1969).

[13] F.J. Belinfante, *A Survey of Hidden-Variables Theories*, (Pergamon, Oxford, 1973) and references therein.

[14] D. Bohm and B.J. Hiley, *Phys. Rep.* **172** (1989) 93 and references therein.

[15] P. Holland, *The Quantum Theory of Motion*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993) and references therein.

[16] Yu. A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid, *J. Math. Phys.* **40**, 256-278, (1999).

[17] Yu. A. Rylov, Hamilton variational principle for statistical ensemble of deterministic systems and its application for ensemble of stochastic systems. *Rus. J. Math. Phys.*, **9**, iss. 3, 335-348, (2002), (Available at http:// arXiv.org/abs /math-ph/0011017.

[18] Д.И. Блохинцев *Основы квантовой механики*, Издание пятое, Наука, Москва, 1976.

[19] Yu. A. Rylov, Quantum mechanics as a dynamic construction. *Found. Phys.* **28**, No.2, 245-271, (1998).