

# Перемешивание, маркировка и линии тока невязкой баротропной жидкости

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН  
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1  
email: rylov@ipmnet.ru

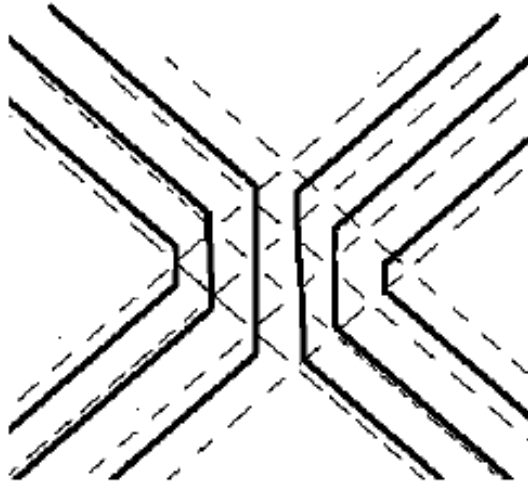
Web site: [http : //rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm](http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm)  
or mirror Web site:  
[http : //gasdyn - ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm](http://gasdyn - ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm)

## Аннотация

Показано, что эйлерова система гидродинамических уравнений для плотности и скорости невязкой баротропной жидкости не является полной системой динамических уравнений для невязкой баротропной жидкости. Она является только замкнутой системой из четырех динамических уравнений. Полная система динамических уравнений состоит из семи динамических уравнений для семи зависимых переменных: плотности, скорости и маркировки (лагранжевы координаты, рассматриваемые как зависимые переменные). Решение задачи Коши для эйлеровой подсистемы единственно. Решение задачи Коши для полной системы гидродинамических уравнений, содержащей семь уравнений, единственно только для потенциальных течений. Для завихренных течений решение задачи Коши не единственно. Причиной неединственности является перемешивание, которое не может быть учтено в рамках гидродинамики. Имеются некоторые указания в пользу связи между перемешиванием и турбулентностью.

## 1 Введение

Описывая течение жидкости, частицы жидкости нумеруют с помощью лагранжевых координат  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ . Предполагается, что лагранжевы координаты  $\xi$  маркируют одну и ту же частицу жидкости все время. Применяя законы ньютоновой динамики к каждой частице жидкости, можно получить гидродинамические уравнения для течения жидкости в лагранжевом представлении (в лагранжевых координатах). Лагранжево представление чувствительно к правильной маркировке в том смысле, что возможны ситуации, когда в разные моменты времени одни и те же лагранжевы координаты  $\xi$  описывают разные



частицы жидкости. Например, если два потока газа, состоящего из невзаимодействующих молекул, проходят один сквозь другой, маркировка частиц после "столкновения" двух потоков изменяется. Картина показана на рисунке, на котором изображены мировые линии частиц газа в пространстве-времени. Сплошные линии показывают частицы газа с одной и той же маркировкой  $\xi$ , тогда как прерывистые линии показывают мировые линии реальных молекул газа.

На этом примере нарушение маркировки частиц после "столкновения" становится очевидным. Линии тока, представленные сплошными линиями не описывают движение реальных частиц газа.

Важно ли это? Можно ли наблюдать линии тока жидкости? Представим себе, что мы ввели несколько пылинок в один из потоков газа и следим за их движением. Предполагается, что размер пылинок много больше размера молекул газа и что каждая пылинка взаимодействует со многими молекулами газа. Тогда можно ожидать, что каждая пылинка будет двигаться вдоль линии тока газа. Поскольку столкновения пылинок с молекулами газа случайны, то пылинки после "столкновения" потоков окажутся в обоих потоках, хотя до "столкновения" они находились только в одном из них. С другой стороны, обычно предполагается, что пылинки движутся вместе с газом, и каждая пылинка движется вдоль линии тока газа. Наблюдение движения взвешенного порошка является обычным методом исследования линий тока.

Гидродинамическое описание жидкости верно при предположении, что один поток жидкости проникает внутрь другого только на глубину длины свободного пробега молекул. В этом случае перемешивание различных потоков жидкости будет бесконечно малым. Однако, такое малое перемешивание имеет место, и это перемешивание может оказаться существенным для формы линий тока.

Такое физическое явление как турбулентность может быть обнаружено только, если мы следим за нерегулярным поведением линий тока. Иными словами, для наблюдения турбулентности важно перемещение частиц жидкости, а не

только их скорости. Скорости важны только как источник этого перемещения.

Движение невязкой баротропной жидкости описывается уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad p = p(\rho) = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.2)$$

где  $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$  есть плотность жидкости,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  есть скорость жидкости,  $p = p(\rho) = \rho^2 \partial E(\rho) / \partial \rho$  есть давление и  $E(\rho)$  есть плотность внутренней энергии на единицу массы.

Линии тока описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагается, что частицы жидкости движутся вдоль линий тока  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , которые определяются уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  есть решение уравнений Эйлера (1.1), (1.2).

Система уравнений Эйлера (1.1), (1.2) является замкнутой системой дифференциальных уравнений, которая может быть решена независимо от уравнений (1.3). Система уравнений Эйлера является системой нелинейных уравнений в частных производных. Она трудна для решения. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3) проще, чем система уравнений Эйлера. Кроме того, она может быть решена только после того, как решена система уравнений Эйлера (1.1), (1.2). Именно по этим причинам исследователи изучают главным образом систему уравнений Эйлера. Система уравнений (1.3) для линий тока обычно остается вне поля рассмотрения из-за ее тривиальности.

Однако система уравнений Эйлера (1.1), (1.2) и уравнения (1.3) являются динамическими уравнениями одной динамической системы, и их следует рассматривать вместе. Будем называть эту динамическую систему полной системой гидродинамических уравнений. Одни только уравнения Эйлера (1.1), (1.2) не являются динамическими уравнениями полноценной динамической системы, потому что они не могут быть получены из вариационного принципа, тогда как динамические уравнения (1.1), (1.2), (1.3) могут. Кажется, что динамические уравнения не влияют на решение динамических уравнений (1.1), (1.2). На самом деле это верно только для потенциальных течений. Для завихренных течений ситуация изменяется. В завихренных течениях появляется перемешивание. Это перемешивание не столь велико как на рисунке со сталкивающимися пучками газа. Это бесконечно малое перемешивание. Оно обусловлено разными скоростями смежных объемов жидкости. Это бесконечно малое перемешивание влияет на форму линий тока и на маркировку частиц жидкости, хотя оно не влияет на величины  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ , которые являются решением системы уравнений Эйлера (1.1), (1.2).

В случае эйлера представления гидродинамических уравнений маркировка частиц жидкости не является необходимой. Четыре уравнения Эйлера получаются как следствие законов сохранения энергии и импульса. Однако, в этом случае закон сохранения углового момента не используется, и нельзя быть уверенным, что система из четырех уравнений Эйлера для баротропной жидкости полностью описывает вращательные степени свободы молекул и частиц жидкости. Вращательные степени свободы могут оказаться существенными в турбулентных течениях.

В этой работе мы пытаемся учесть перемешивание, которое появляется во завихренных течениях баротропной жидкости. Влияние перемешивания проявляется в маркировке жидких частиц с помощью лагранжевых координат  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ . Это изменение маркировки не важно для решения уравнений Эйлера (1.1), (1.2), которые образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений. Однако, это изменение маркировки может оказаться важным для таких физических явлений, где форма линий тока существенна (таких как турбулентность).

Мы рассматриваем связь между маркировкой и перемешиванием на формально математическом уровне. Мы будем рассматривать динамические уравнения Эйлера для невязкой баротропной жидкости.

Нас интересует вопрос, является ли маркировка, порождаемая уравнением (1.3) единственным возможным способом маркировки. Чтобы решить эту проблему, мы будем рассматривать лагранжевы координаты  $\xi$  как зависимые динамические переменные. Эйлеравы координаты  $t, \mathbf{x}$  рассматриваются как независимые динамические переменные.

Итак, мы рассматриваем динамическую систему, описываемую семью независимыми переменными  $\rho, \mathbf{v}, \xi$ , которые являются функциями четырех независимых переменных  $t, \mathbf{x}$ . Заметим, что система динамических уравнений (1.1), (1.2) образует замкнутую систему динамических уравнений. Однако, эта динамическая система система, описываемая четырьмя независимыми переменными  $\rho, \mathbf{v}$  не является полноценной динамической системой в том смысле, что динамические уравнения (1.1), (1.2) не могут быть получены из вариационного принципа.

Чтобы получить динамические уравнения (1.1), (1.2) из вариационного принципа [5], нужно добавить так называемые условия Лина [3]. Эти условия имеют вид

$$\partial_0 \xi + (\mathbf{v} \nabla) \xi = 0 \quad (1.4)$$

Легко видеть, что характеристики линейного дифференциального уравнения (1.4)

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3} \quad (1.5)$$

Совпадают с уравнениями (1.3). Наоборот, любой интеграл системы уравнений (1.3) является решением уравнения (1.4). Условия Лина (1.4) интересны в том отношении, что независимые переменные в них те же, что и независимые переменные системе уравнений Эйлера (1.1), (1.2). Следовательно, динамические

уравнения (1.1), (1.2) и динамические уравнения (1.4) могут рассматриваться как динамические уравнения одной динамической системы. Довольно трудно рассматривать систему уравнений (1.1), (1.2), (1.3) как динамические уравнения некоторой динамической системы, потому что независимые переменные различны в уравнениях (1.1), (1.2) и (1.3).

## 2 Обобщенная функция тока

Заметим, что величины  $\xi$  могут рассматриваться как обобщенная функция тока (ОФТ), потому что  $\xi$  обладает двумя главными свойствами функции тока.

1. ОФТ  $\xi$  маркирует линии тока жидкости.

2. Некоторые комбинации первых производных любой  $\xi$  тождественно удовлетворяют уравнению непрерывности.

$$\partial_k j^k \equiv 0, \quad j^k = \frac{\partial J_{\xi/x}}{\partial \xi_{0,k}}, \quad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

где  $j^k = \{j^0, j^1, j^2, j^3\} = \{\rho, \rho \mathbf{v}\}$  есть 4-вектор потока. Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование (0-3) для латинских индексов и (1-3) для греческих. Определитель Якоби  $J = J_{\xi/x}$

$$J_{\xi/x} = J(\xi_{l,k}) = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det \|\xi_{l,k}\|, \quad \xi_{l,k} \equiv \frac{\partial \xi_l}{\partial x^k} \quad l, k = 0, 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

рассматривается как 4-линейная функция от  $\xi_{l,k}$ . Величина  $\xi_0$  является временной лагранжевой координатой, которая оказывается фиктивной в выражениях для 4-вектора тока  $j^k$

$$\begin{aligned} \rho &= j^0 = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}, & \rho v^1 &= j^1 = -\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, x^2, x^3)}, \\ \rho v^2 &= j^2 = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, x^1, x^3)}, & \rho v^3 &= j^3 = -\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, x^1, x^2)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Использование якобианов для описания идеальной жидкости восходит к Клебшу [1, 2], который использовал якобианы в развернутой форме. Это было несколько громоздко. Мы используем более рациональные обозначения, когда 4-ток и другие существенные величины представляются в виде производных главного якобиана  $J$ . При работе с обобщенной функцией тока  $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ , оказываются полезными следующие тождества

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} \xi_{k,l} \equiv J \delta_k^i, \quad \partial_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \equiv 0, \quad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \equiv J^{-1} \left( \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \quad (2.5)$$

Смотри детали работы с якобианами и обобщенной функцией тока в [4].

*Пример. Применение функции тока для интегрирования уравнений, описывающих 2D стационарное течение несжимаемой жидкости.*

Динамические уравнения имеют вид

$$u_x + v_y = 0, \quad \partial_y (uv_x + vu_y) = \partial_x (uv_x + vv_y) \quad (2.6)$$

где  $u$  и  $v$  являются компонентами скорости соответственно вдоль  $x$ -оси и  $y$ -оси.

Вводя функцию тока  $\psi$  с помощью соотношений

$$u = -\psi_y, \quad v = \psi_x \quad (2.7)$$

мы тождественно удовлетворяем первому уравнению (2.6) и получаем для второго уравнения (2.6) соотношения

$$\begin{aligned} \psi_y \psi_{xyy} - \psi_x \psi_{yyy} &= -\psi_y \psi_{xxx} + \psi_x \psi_{xxy} \\ \psi_y (\psi_{xyy} + \psi_{xxx}) &= \psi_x (\psi_{xxy} + \psi_{yyy}) \end{aligned}$$

которые могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} = 0, \quad \omega \equiv \psi_{xx} + \psi_{yy} \quad (2.8)$$

где  $\omega$  представляет собой завихренность течения жидкости. Общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\omega = \psi_{xx} + \psi_{yy} = \Omega(\psi) \quad (2.9)$$

где  $\Omega$  есть произвольная функция от  $\psi$ .

Для потенциального течения  $\Omega(\psi) = 0$ , и мы получаем вместо (2.9)

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \quad (2.10)$$

Единственное решение уравнения (2.10) внутри замкнутой области 2D пространства получается, если задать значение  $\psi|_{\Sigma}$  функции тока  $\psi$  на границе  $\Sigma$  этой области. Дифференциальная структура уравнений (2.9) и (2.10) одинакова. Следует ожидать, что, задавая значение  $\psi|_{\Sigma}$  функции тока  $\psi$  на границе  $\Sigma$ , мы получим единственное решение уравнения (2.10). Однако, это не так, потому что неопределенная функция  $\Omega(\psi)$  не задана, и она не может быть определена из граничных условий, потому что природа функции  $\Omega(\psi)$  иная, чем природа граничных условий. Во-первых, если поток содержит замкнутые линии тока, которые не пересекают границу, то нельзя определить значения  $\Omega$  на этих линиях тока из граничных условий. Но для определения единственного решения значения  $\Omega$  на замкнутых линиях тока должны быть заданы. Во-вторых, граничные условия задаются произвольно. Функция  $\Omega$  не может быть задана произвольно. Для тех линий тока, которые пересекают границу более одного раза, значения завихренности  $\Omega$  на различных сегментах границы должны быть согласованы. Таким образом, неединственность решения, связанная с неопределенной функцией  $\Omega$  имеет иную природу, чем неединственность, связанная с недостаточностью граничных условий.

### 3 Получение гидродинамических уравнений из вариационного принципа

Мы используем вариационный принцип для получения гидродинамических уравнений (1.1), (1.2), (1.4). Функционал действия имеет вид

$$\mathcal{A}[\xi, j, p] = \int_{V_x} \left\{ \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho} - \rho E(\rho) - p_k \left( j^k - \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right) \right\} d^4x, \quad (3.1)$$

где  $p_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$  являются множителями Лагранжа, вводящими обозначение для 4-тока

$$j^k = \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

Заметим, что выражение для 4-тока (3.2) тождественно удовлетворяет первому уравнению (2.1), потому что выражение (3.2) может быть приведено к виду второго соотношения (2.1) при помощи замены переменных  $\boldsymbol{\xi}$

$$\tilde{\xi}_0 = \xi_0, \quad \tilde{\xi}_1 = \int \rho_0(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1, \quad \tilde{\xi}_2 = \xi_2, \quad \tilde{\xi}_3 = \xi_3$$

Тогда

$$\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \frac{\partial(\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}, \quad \tilde{\xi}_1 = \int \rho_0(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1$$

Кроме того, в соответствии с первым тождеством (2.4) соотношение (3.2) удовлетворяет условиям Лина (1.4).

Вариация действия (3.1) по  $p_k = \{p_0, \mathbf{p}\}$  дает соотношения (3.2). Другие динамические уравнения имеют вид

$$\delta\rho: \quad p_0 = -\frac{\mathbf{j}^2}{2\rho^2} - \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E(\rho)) = -\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho E) \quad (3.3)$$

$$\delta\mathbf{j}: \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \mathbf{v} \quad (3.4)$$

$$\delta\xi_l: \quad -\partial_s \left( \rho_0(\boldsymbol{\xi}) p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \right) + p_k \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_l}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \quad l = 0, 1, 2, 3 \quad (3.5)$$

Используя третье соотношение (2.4), получаем

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \left( \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\alpha} \xi_{\alpha,s} + \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \partial_s p_k \right) + p_k \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_l}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0 \quad (3.6)$$

Теперь, используя (2.5), получаем

$$-J^{-1} \left( \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \left( \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\alpha} \xi_{\alpha,s} + \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \partial_s p_k \right) + p_k \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_l}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0 \quad (3.7)$$

Используя первое соотношение (2.4), получаем

$$J^{-1} \left( \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \partial_s p_k = 0, \quad l = 0, 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

Имеются два разных способа работы с этим уравнением:

1. Исключение ОФТ  $\boldsymbol{\xi}$ , которое приводит к уравнениям Эйлера.
2. Интегрирование, которое приводит к появлению произвольных функций.

*Первый способ: исключение ОФТ*

Свертывая (3.8) с  $\xi_{l,i}$  и используя динамические уравнения (3.2), получаем

$$j^k \partial_i p_k - j^k \partial_k p_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (3.9)$$

Подставляя  $p_k$  и  $j^k$  из соотношений (3.3) и (3.4), получаем динамические уравнения Эйлера (1.1)

$$\partial_0 v^\alpha + (\mathbf{v} \nabla) v^\alpha = -\partial_\alpha \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E) = -\frac{1}{\rho} \partial_\alpha p, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad p = \rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho} \quad (3.10)$$

Уравнение непрерывности (1.2) является следствием уравнений (3.2) и тождества (2.1). Наконец, условия Лина (1.4) являются следствием первого тождества (2.4) и динамических уравнений (3.2).

*Второй способ: интегрирование уравнения для  $p_k$*

Рассмотрим уравнения (3.8) как линейные дифференциальные уравнения для  $p_k$ . Общее решение уравнений (3.8) имеет вид

$$p_k = (\partial_k \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\alpha), \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (3.11)$$

где  $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  являются произвольными функциями от  $\boldsymbol{\xi}$ , а  $\varphi = g^0(\xi_0)$  является новой переменной вместо фиктивной переменной  $\xi_0$ . Продифференцируем (3.11) и подставим полученные выражения

$$\partial_s p_k = (\partial_s \partial_k \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \partial_s \partial_k \xi_\alpha) + \frac{\partial g^\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\beta} \partial_k \xi_\alpha \partial_s \xi_\beta \quad (3.12)$$

в (3.8). Используя первое тождество (2.4), убеждаемся, что соотношения (3.12) тождественно удовлетворяют уравнениям (3.8).

Можно подставить (3.11) в действие (3.1), или ввести (3.11) при помощи множителей Лагранжа (результат будет один и тот же). Получаем новый функционал действия

$$\mathcal{A}[\xi, j] = \int_{V_x} \left\{ \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho} - \rho E(\rho) - j^k (\partial_k \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\alpha) \right\} d^4 x, \quad (3.13)$$

который содержит произвольные функции  $g(\boldsymbol{\xi})$ . Здесь

$$j^0 = \rho, \quad \mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \{j^1, j^2, j^3\} \quad (3.14)$$



Произвольные функции  $g(\boldsymbol{\xi})$  рассматриваются как фиксированные функции от  $\boldsymbol{\xi}$ . Член

$$p_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = (\partial_k \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\alpha) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = \frac{\partial(\varphi, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \quad (3.15)$$

опущен, потому что он не дает вклада в динамические уравнения.

Вариация действия (3.13) по  $\varphi$ ,  $\rho$  и  $j^\mu$  дает соответственно

$$\delta\varphi : \quad \partial_k j^k = 0 \quad (3.16)$$

$$\delta\rho : \quad \partial_0 \varphi + g^\beta(\boldsymbol{\xi}) \partial_0 \xi_\beta + \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho^2} + \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E(\rho)) = 0 \quad (3.17)$$

$$\delta j^\mu : \quad v^\mu \equiv \frac{j^\mu}{\rho} = \partial_\mu \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \partial_\mu \xi_\alpha \quad (3.18)$$

Вариация действия (3.13) по  $\xi_\alpha$  дает

$$\delta\xi_\alpha : \quad \rho \Omega^{\alpha\mu}(\boldsymbol{\xi}) (\partial_0 \xi_\alpha + (\mathbf{v}\nabla) \xi_\alpha) = 0, \quad (3.19)$$

где

$$\Omega^{\alpha\mu}(\boldsymbol{\xi}) = \left( \frac{\partial g^\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial g^\mu(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\alpha} \right) \quad (3.20)$$

а  $\mathbf{v}$  определяется соотношением (3.18)

Если  $\det \|\Omega^{\alpha\beta}\| \neq 0$ , то условия Лина

$$(\partial_0 \xi_\alpha + (\mathbf{v}\nabla) \xi_\alpha) = 0 \quad (3.21)$$

следуют из (3.19) Однако, матрица  $\Omega^{\alpha\beta}$  антисимметрична и

$$\det \|\Omega^{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} 0 & \Omega^{12} & \Omega^{13} \\ -\Omega^{12} & 0 & \Omega^{23} \\ -\Omega^{13} & -\Omega^{23} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (3.22)$$

Тогда из (3.19) следует

$$\partial_0 \xi_\alpha + (\mathbf{v}\nabla) \xi_\alpha = -\frac{\omega}{\rho_0(\boldsymbol{\xi})} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Omega^{\beta\gamma}(\boldsymbol{\xi}) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.23)$$

где  $\omega = \omega(t, \boldsymbol{\xi})$  является произвольной величиной, а  $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$  является весовой функцией из (3.2).

Полученное уравнение (3.23) содержит первоначальное динамическое уравнение (1.4) как частный случай. Для потенциального течения, когда  $\Omega^{\beta\gamma}(\boldsymbol{\xi}) = 0$ , уравнение (3.23) превращается в (1.4). В функционале действия (3.1) первоначальное соотношение (1.4) используется как дополнительное ограничение. По этой причине уравнение (3.23) не получается из функционала действия (3.1).

Завихренность  $\boldsymbol{\omega}_0 \equiv \nabla \times \mathbf{v}$  и  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_0$  получаются из (3.18) в виде

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \Omega^{\alpha\beta} \nabla \xi_\beta \times \nabla \xi_\alpha \quad (3.24)$$

$$\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_0 = \Omega^{\alpha\beta} \nabla \xi_\beta (\mathbf{v} \nabla) \xi_\alpha \quad (3.25)$$

Образуем разность между временной производной уравнения (3.18) и градиентом уравнения (3.17). Исключая  $\Omega^{a\mu}(\boldsymbol{\xi}) \partial_0 \xi_\alpha$  из полученных уравнений с помощью уравнений (3.19), получаем

$$\partial_0 \mathbf{v} + \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{\partial^2(\rho E)}{\partial \rho^2} \nabla \rho - \Omega^{\alpha\beta} \nabla \xi_\beta (\mathbf{v} \nabla) \xi_\alpha = 0 \quad (3.26)$$

Используя (3.25) и (3.24), получаем, что уравнение (3.26) приводится к

$$\partial_0 \mathbf{v} + \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{1}{\rho} \nabla (\rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \quad (3.27)$$

В силу тождества

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) \equiv \nabla \frac{\mathbf{v}^2}{2} - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \quad (3.28)$$

уравнение (3.27) эквивалентно уравнению (1.1).

Заметим, что уравнения Эйлера (1.1) получаются при любом виде произвольной функции  $\omega(t, \boldsymbol{\xi})$  в уравнениях (3.23), потому что уравнения (3.23) используются в виде (3.19), где вид  $\omega(t, \boldsymbol{\xi})$  не существен. Решение системы уравнений Эйлера (1.1), (1.2) в виде  $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  не зависит от вида неопределенной функции  $\omega(t, \boldsymbol{\xi})$ .

Если  $\omega(t, \boldsymbol{\xi}) \neq 0$ , динамические уравнения (3.23) описывают отклонение от условий Лина (1.4). Возникает маркировка линий тока, отличная от той, что описывается условиями Лина (1.4). Если течение потенциальное, и  $\boldsymbol{\Omega} = 0$ , то маркировка не зависит от  $\omega(t, \boldsymbol{\xi})$ .

Рассмотрим две разные маркировки  $\boldsymbol{\xi}$  and  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  одного и того же течения жидкости, описываемого переменными  $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ . Начальные условия предполагаются имеющими вид

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \rho(0, \mathbf{x}) = \rho_{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad (3.29)$$

$$\bar{\xi}_\alpha(0, \mathbf{x}) = (\bar{\xi}_\alpha)_{\text{in}}(\mathbf{x}) = x^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.30)$$

Тогда в соответствии с (3.18), (3.20)

$$g^\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{\text{in}}(\mathbf{x})) = g^\alpha(\mathbf{x}) = v_{\text{in}}^\alpha(\mathbf{x}), \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.31)$$

В соответствии с (3.23) динамические уравнения для маркировки  $\boldsymbol{\xi}$  и  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  имеют вид

$$\partial_0 \xi_\alpha + (\mathbf{v} \nabla) \xi_\alpha = 0 \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.32)$$

$$\partial_0 \bar{\xi}_\alpha + (\mathbf{v} \nabla) \bar{\xi}_\alpha = - \frac{\omega}{\rho_0(\bar{\boldsymbol{\xi}})} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Omega^{\beta\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.33)$$

где скорость  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  одна и та же в обоих уравнениях, а функция  $\Omega^{\beta\gamma}(\mathbf{x})$  определяется соотношением

$$\Omega^{a\mu}(\mathbf{x}) = \Omega^{a\mu}(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{\text{in}}(\mathbf{x})) = \left( \frac{\partial g^\alpha(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{\text{in}})}{\partial (\bar{\xi}_{\text{in}})_\mu} - \frac{\partial g^\mu(\bar{\boldsymbol{\xi}}_{\text{in}})}{\partial (\bar{\xi}_{\text{in}})_\alpha} \right) = \left( \frac{\partial v_{\text{in}}^\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^\mu} - \frac{\partial v_{\text{in}}^\mu(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha} \right) \quad (3.34)$$

Если скорость  $\mathbf{v}$  определяется соотношениями (3.18), то она удовлетворяет уравнениям Эйлера и ассоциируется с обобщенной функцией тока  $\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x})$ , эволюция которой описывается уравнениями (3.23)

Вообще говоря, эволюция величин  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  и  $\boldsymbol{\xi}$  различна, хотя они совпадают при  $t = 0$ . Пусть

$$\boldsymbol{\eta} = \bar{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi} \quad (3.35)$$

Из (3.32) и (3.33) следует, что рассогласование  $\boldsymbol{\eta}$  между  $\bar{\boldsymbol{\xi}}$  и  $\boldsymbol{\xi}$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} \partial_0 \eta_\alpha + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \nabla \eta_\alpha + \frac{\omega(t, \bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x}))}{\rho_0(\bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x}))} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Omega^{\beta\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x})) &= 0, \quad \eta_\alpha(0, \mathbf{x}) = 0, \\ \alpha &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, ассоциированная с уравнением (3.36), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dt}{1} &= \frac{dx^1}{v^1(t, \mathbf{x})} = \frac{dx^2}{v^2(t, \mathbf{x})} = \frac{dx^3}{v^3(t, \mathbf{x})} = \frac{\rho_0(\bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x})) d\eta_\alpha}{\omega(t, \bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x})) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Omega^{\beta\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x}))}, \\ \alpha &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений при начальных условиях  $\boldsymbol{\eta}(0, \mathbf{x}) = 0$  имеет вид

$$\eta_\mu(t, \mathbf{x}) = \int_0^t \frac{\omega(t, \bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x})) \varepsilon_{\mu\beta\gamma} \Omega^{\beta\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x}))}{\rho_0(\bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x}))} dt, \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (3.38)$$

Тогда

$$\xi_\mu(t, \mathbf{x}) = \bar{\xi}_\mu(t, \mathbf{x}) - \int_0^t \frac{\omega(t, \bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x})) \varepsilon_{\mu\beta\gamma} \Omega^{\beta\gamma}(\bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x}))}{\rho_0(\bar{\boldsymbol{\xi}}(t, \mathbf{x}))} dt, \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (3.39)$$

Таким образом, хотя решение  $\rho, \mathbf{v}$  задачи Коши для эйлеровой системы гидродинамических уравнений (1.1), (1.2) единственно, решение  $\rho, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$  задачи Коши для полной системы гидродинамических уравнений (1.1), (1.2), (3.23) не единственно. Причиной неединственности является рассмотрение перемешивания. Это рассмотрение является формальным. Оно не позволяет понять механизм влияния перемешивания. Тем не менее это влияние имеет место, и его следует рассмотреть более детально.

## 4 Двумерное завихренное течение невязкой баротропной жидкости в трехмерном пространстве.

Кажется, что для двумерного течения вместо определителя (3.22) мы имеем определитель

$$\left\| \begin{array}{cc} 0 & \Omega^{12} \\ -\Omega^{12} & 0 \end{array} \right\| = (\Omega^{12})^2 \quad (4.1)$$

который, вообще говоря в нуль не обращается. Тогда проблема неединственности маркировки устраняется, и решение задачи Коши для полной системы гидродинамических уравнений становится единственным.

На самом деле, мы можем контролировать решение только через начальные условия. Мы можем задать двумерные начальные условия, т.е.

$$\partial_3 \mathbf{v}_{\text{in}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \partial_3 \rho_{\text{in}}(\mathbf{x}) = 0, \quad v_{\text{in}}^3(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.2)$$

В этом случае

$$\Omega_{\text{in}}^{12}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial v_{\text{in}}^1(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_2} - \frac{\partial v_{\text{in}}^2(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_1}, \quad \Omega_{\text{in}}^{23}(\boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \Omega_{\text{in}}^{31}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (4.3)$$

Определитель

$$\det \|\Omega^{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} 0 & \Omega^{12} & 0 \\ -\Omega^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \quad (4.4)$$

и соотношения (3.23) принимают вид

$$\partial_0 \xi_1 + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \nabla \xi_1 = 0, \quad \partial_0 \xi_2 + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \nabla \xi_2 = 0 \quad (4.5)$$

$$\partial_0 \xi_3 + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \nabla \xi_3 = -\frac{\omega(t, \boldsymbol{\xi})}{\rho_0(\xi_1, \xi_2)} \Omega^{1,2}(\xi_1, \xi_2) \quad (4.6)$$

Не удастся контролировать неопределенную величину  $\omega(t, \boldsymbol{\xi})$ , которая может зависеть от  $x^3$ . Уравнение (4.6) порождает неединственное решение задачи Коши для завихренного течения в рамках полной системы гидродинамических уравнений. Течение с двумерными начальными условиями превращается в трехмерное завихренное течение.

## 5 Заключительные замечания

Решение задачи Коши для завихренного течения невязкой баротропной жидкости не единственно, если решаются семь динамических уравнений полной системы гидродинамических уравнений, которые включают описание формы линий тока и имеют семь зависимых переменных  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$ . Неединственность связана с тем обстоятельством, что начальные значения для переменных  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$  не контролируют эффект перемешивания.

Решение задачи Коши для завихренного течения невязкой баротропной жидкости единственно, если решаются только четыре уравнения эйлеровской системы и игнорируется форма линий тока. В этом случае динамические уравнения записываются для четырех зависимых переменных  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ .

Решение задачи Коши для потенциального течения невязкой баротропной жидкости единственно в обоих случаях: для семи уравнений полной системы гидродинамических уравнений и для системы из четырех уравнений Эйлера.

Эффект перемешивания, порождающий неединственное решение ассоциируется с эффектом турбулентности в следующих пунктах: (1) оба эффекта не контролируются начальными данными для переменных  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\xi$  гидродинамических уравнений в представлении Эйлера, (2) оба эффекта имеют место при завихренном течении и отсутствуют при потенциальном течении, (3) оба эффекта сильны при исчезающей вязкости. Мы допускаем, что перемешивание может быть связано с турбулентными явлениями, хотя мы пока не настаиваем на этом утверждении.

Если, на самом деле, окажется, что турбулентные явления связаны с перемешиванием и с формой линий тока, то становится понятным, почему многочисленные исследования гидродинамических уравнений, описывающих только плотность и скорость, но не форму линий тока, не привели к прогрессу. Исследователи просто искали турбулентность не в том месте, где она находится.

## Список литературы

- [1] A. Clebsch, Über eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54**, 293-312 (1857).
- [2] A. Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56**, 1-10, (1859).
- [3] C.C. Lin, Hydrodynamics of Helium II. *Proc. Int. Sch Phys.* Course XXI, pp. 93-146, New York, Academic, 1963.
- [4] Yu. A. Rylov, Hydrodynamic equations for incompressible inviscid fluid in terms of generalized stream function. *Int. J. Math. & Mat. Sci.* vol. **2004**, No. 11, 21 February 2004, pp. 541-570. (Available at <http://arXiv.org/abs/physics/0303065>).
- [5] R. Salmon, Hamilton fluid mechanics, *Ann. Rev. Fluid. Mech.* **20**, 225-256, 1988.

### CAPTIONS

Figure 1. Dashed lines show real trajectories of particles. The solid lines show trajectories of the mean particle motion.