Неадекватность формализма линейного векторного пространства при метрическом подходе к геометрии

Yuri A. Rylov

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site: $http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
УДК 514.13

Аннотация

Показано, что формализм линейного векторного пространства неадекватен при метрическом подходе к геометрии, когда геометрия полностью описывается в терминах функции расстояния d, или в терминах мировой функции $\sigma = d^2/2$. Операции линейного векторного пространства оказываются неоднозначными, если их все же ввести при метрическом подходе к геометрии.

Ключевые слова: метрический подход; принцип деформации; дискретная геометрия; мировая функция; геометрия с неопределенной размерностью

Имеется два подхода к геометрии: (1) физический подход и (2) геометрический подход. При физическом подходе к геометрии геометрия называется физической геометрией. Она рассматривается как наука о свойствах пространства или о свойствах пространства-времени. Физическая геометрия может формулироваться в бескоординатной форме. Главные объекты физической геометрии – точки (события) пространства-времени, расстояния между точками и геометрические объекты, построенные из точек. В частности, в физической геометрии вектор $\mathbf{PQ}$ есть упорядоченное множество $\{P,Q\}$ из двух точек $P,Q \in \Omega$, где Ω есть множество точек, на котором задана геометрия. Вектор $\mathbf{PQ}$ будем называть геометрическим вектором (g-вектором).

При математическом подходе геометрия рассматривается как абстрактное логическое построение, где вектор $u \in \mathcal{L}_n$ является элементом линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$. Будем называть математический подход к геометрии математической геометрией. В линейном векторном пространстве определены операции (сложение векторов, умножение вектора на вещественное число). Эти операции подчиняются аксиомам линейного векторного пространства. Вообще говоря, векторы $u \in \mathcal{L}_n$ не совпадают с g-векторами пространства-времени, и мы будем называть векторы $u \in \mathcal{L}_n$ линейными векторами (линвекторами). В собственно евклидовой геометрии и в некоторых других случаях линвекторы могут быть отождествлены с g-векторами. Тогда операции линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$ могут быть применены к g-векторам евклидовой геометрии и геометрии Минковского. В этом случае математическая геометрия совпадает с физической геометрией.

В линейном векторном пространстве (т.е. в математической геометрии) всегда можно ввести систему координат и разложить любой вектор на его составляющие вдоль базисных векторов системы координат. В физической геометрии такое разложение возможно не всегда.

Изначальный смысл геометрии был физический. Евклид представил свою геометрию как логическое построение. Он применил свою геометрию для описания свойств реального пространства, но систему координат и линейное векторное пространство он не использовал. Введение системы координат в евклидову геометрию было обусловлено потребностями классической механики. Это обстоятельство породило применение линейного векторного пространства в физической геометрии, т.е. в науке, описывающей свойства реального пространства.

Таким образом, математическая геометрия (т.е. логическое построение с его линейным векторным пространством) была использована для описания реального пространства. После этого стали считать, что линейное векторное пространство является атрибутом пространственно-временной геометрии. Сейчас общепринятая точка зрения содержит утверждение, что линейное векторное пространство может быть введено (может быть, локально) в любой геометрии пространства-времени и что геометрия пространства-времени является математической геометрией. В частности, симплектическая геометрия, которая не имеет ничего общего с геометрией пространства-времени, рассматривается тем не менее как геометрия (математическая), потому что ее формализм совпадает с формализмом евклидовой геометрии в ее координатном представлении (в симплектической геометрии можно ввести линейное векторное пространство).

В этой работе мы исследуем при каких условиях можно ввести линейное векторное пространство в геометрии пространства-времени. Или при каких условиях можно использовать математическую геометрию для описания пространства-времени?

Всякая обобщенная геометрия $\mathcal{G}$ является некоторым обобщением собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Нас интересуют только физические геометрии, которые годятся для описания геометрии пространства-времени. Физическая геометрия описывается в рамках метрического подхода к геометрии, когда множество Ω пространственно-временных точек (событий) полностью описывается функцией расстояния $d\left(P,Q\right)$, $P,Q\in\Omega$, или мировой функцией $\sigma=\frac{1}{2}d^{2}$. Расстояние d может быть мнимым для пространственноподобных расстояний между точками $P,Q\in\Omega$, тогда как мировая функция σ всегда вещественна.

Евклидова геометрия является вырожденной геометрией в том смысле, что обобщенная геометрия $\mathcal{G}$ может иметь такие свойства, которые отсутствуют в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Например, прямолинейный отрезок $\mathcal{T}_{[PQ]}$ между точками P, и Q может быть неодномерным в $\mathcal{G}$, хотя он всегда одномерен в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Кроме того, равенство двух векторов $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$ может быть многовариантным. Это означает, что в точке P имеется много векторов $\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PQ}'$, $\mathbf{PQ}''$,... которые эквивалентны вектору $\mathbf{RS}$ в точке R, но векторы $\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PQ}'$, $\mathbf{PQ}''$,...не эквивалентны между собой.

Способ обобщения геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ зависит от способа ее представления [1]. Поскольку обобщенная геометрия может быть дискретной, следует использовать обобщение только σ-представления геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, когда собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ рассматривается как физическая геометрия, т.е. она описывается в терминах и только в терминах евклидовой мировой функции σ_{E}. Это необходимо, потому что $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и дискретная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ имеют единственное общее понятие: расстояние.

Физическая геометрия $\mathcal{G}=\{\sigma,\Omega\}$ задается на произвольном точечном множестве Ω, где σ есть однозначная функция , определяемая как

$$\sigma:\quad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbb{R},\quad \sigma\left(P,Q\right)=\sigma\left(Q,P\right),\quad \sigma\left(P,P\right)=0,\quad \forall P,Q\in\Omega \tag{1}$$

Дискретная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ ограничена соотношением

$$\left|d\left(P,Q\right)\right|\equiv\left|\sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}\left(P,Q\right)}\right|\notin\left(0,\lambda_{0}\right),\quad \forall P,Q\in\Omega \tag{2}$$

где $\lambda_{0}>0$ есть элементарная длина, которая является параметром геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Ограничение (2) является ограничением на мировую функцию σ_{d} (а не на множество Ω, которое является произвольным множеством точек). В частности, дискретная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}=\{\sigma_{\mathrm{d}},\Omega_{\mathrm{M}}\}$ может быть задана на том же множестве точек Ω_{M}, где задана геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}=\{\sigma_{\mathrm{M}},\Omega_{\mathrm{M}}\}$. Геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ получается из $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ с помощью замены евклидовой мировой функции σ_{E} мировой функцией σ_{d} во всех определениях евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, представленных в терминах σ_{E}.

Условие (2) удовлетворяется, если σ_{d} взята, например, в виде

$$\sigma_{\mathrm{d}}=\sigma_{\mathrm{M}}+\frac{\lambda_{0}^{2}}{2}\mathrm{sgn}\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right) \tag{3}$$

где σ_{M} есть мировая функция геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ и

$$\operatorname{sgn}(x)=\left\{\begin{array}{lll}1 & \text{если} & x>1 \\ 0 & \text{если} & x=0 \\ -1 & \text{если} & x<1\end{array}\right. \tag{4}$$

Множество точек Ω_{d} то же самое, что и $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$.

В $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ используется формализм линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$. Вектор $u\in\mathcal{L}_n$ есть некоторая абстрактная величина, определяемая своими свойствами. В $\mathcal{L}_n$ определены операции сложения векторов и умножения вектора на вещественное число

$$(u+v)\in\mathcal{L}_n,\quad \text{если}\ \ u\in\mathcal{L}_n, v\in\mathcal{L}_n$$

$$au\in\mathcal{L}_n,\quad \text{если}\ \ u\in\mathcal{L}_n,\ \ a\in\mathbb{R}$$

В $\mathcal{L}_n$ всякий вектор существует в одном экземпляре. Эквивалентных векторов в $\mathcal{L}_n$ нет. В собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}=\{\sigma_{\mathrm{E}},\Omega_{\mathrm{E}}\}$ имеется много эквивалентных векторов, потому что в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ вектор $\mathbf{PQ}=\{P,Q\}$ есть упорядоченное множество из двух точек P и Q. Поскольку векторы в $\mathcal{L}_n$ и в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ имеют различные свойства, мы будем использовать для них различные названия. Вектор $u\in\mathcal{L}_n$ будем называть линейным вектором (линвектором), а вектор $\mathbf{PQ}\in\mathbf{\Omega}\times\mathbf{\Omega}$ будем называть геометрическим вектором (g-вектором).

Два g-вектора $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$ эквивалентны ($\mathbf{PQ}\mathrm{eqv}\mathbf{RS}$), если их длины равны и они параллельны ($\mathbf{PQ}\upuparrows\mathbf{RS}$)

$$(\mathbf{PQ}\upuparrows\mathbf{RS}):\quad (\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})=|\mathbf{PQ}|\cdot|\mathbf{RS}| \tag{5}$$

Здесь $(\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})$ есть скалярное произведение двух g-векторов $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$, записанное в терминах мировой функции в виде

$$(\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})=\sigma(P,S)+\sigma(Q,R)-\sigma(P,R)-\sigma(Q,S) \tag{6}$$

Длина $|\mathbf{PQ}|$ g-вектора $\mathbf{PQ}$ определяется соотношением

$$|\mathbf{PQ}|=\sqrt{2\sigma(P,Q)} \tag{7}$$

Итак, g-векторы $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$ эквивалентны, если

$$(\mathbf{PQ}\mathrm{eqv}\mathbf{RS}):\quad (\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})=|\mathbf{PQ}|\cdot|\mathbf{RS}|\wedge|\mathbf{PQ}|=|\mathbf{RS}| \tag{8}$$

Пусть $\Omega_{\mathbf{AB}}\subset\Omega\times\Omega$ является множеством всех g-векторов $\mathbf{CD}\in\Omega_{\mathbf{AB}}$, которые эквивалентны (равны) g-вектору $\mathbf{AB}$. В $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ все g-векторы, принадлежащие $\Omega_{\mathbf{AB}}$ эквивалентны между собой, и множество $\Omega_{\mathbf{AB}}$ является классом эквивалентности $[\mathbf{AB}]$ g-вектора $\mathbf{AB}$. Линвекторы пространства $\mathcal{L}_n$ могут быть поставлены в соответствие классам эквивалентности g-векторов множества $\Omega\times\Omega$. Операции в $\mathcal{L}_n$ могут быть использованы для построения геометрического формализма в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Отношения эквивалентности транзитивны в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, и это является причиной того, почему множество $\Omega_{\mathbf{AB}}$ g-векторов, эквивалентных g-вектору $\mathbf{AB}$, образует класс эквивалентности $[\mathbf{AB}]$.

В дискретной геометрии (3) отношение эквивалентности является интранзитивным, и множество $\Omega_{\mathbf{AB}}$ содержит g-векторы, которые не эквивалентны между собой. В этом случае эквивалентность двух g-векторов многовариантна, и множество $\Omega_{\mathbf{AB}}$ g-векторов, эквивалентных g-вектору $\mathbf{AB}$, не образует класса эквивалентности $[\mathbf{AB}]$.

Формально можно определить операцию сложения g-векторов в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, но она будет неоднозначна. В самом деле, сумма $\mathbf{AC}$ двух g-векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BC}$, когда конец одного из g-векторов является началом другого, определяется следующим образом

$$\mathbf{AB}+\mathbf{BC}=\mathbf{AC} \tag{9}$$

Сумма $\mathbf{AD}_1$ двух произвольных g-векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{CD}$ в точке A определяется следующим образом

$$\mathbf{AB}+\mathbf{CD}=\mathbf{AB}+\mathbf{BD}_1=\mathbf{AD}_1, \quad (\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{BD}_1) \tag{10}$$

Геометрический вектор $\mathbf{AD}_1$ определяется соотношением (10) неоднозначно, потому что g-вектор $\mathbf{BD}_1$ определяется неоднозначно соотношением эквивалентности $(\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{BD}_1)$.

Геометрический вектор $\mathbf{AC}=a\mathbf{AB}$, являющийся результатом умножения g-вектора $\mathbf{AB}$ на вещественное число a определяется соотношениями

$$a\mathbf{AB}=\mathbf{AC}, \quad |\mathbf{AC}|=a\,|\mathbf{AB}|\,, \quad (\mathbf{AB}.\mathbf{AC})=a\,|\mathbf{AB}|^2 \tag{11}$$

Результат умножения неоднозначен, потому что, вообще говоря, система из двух последних уравнений (11) имеет неединственное решение в $\mathcal{G}_\mathrm{d}$. В евклидовой геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{E}$ операции (10) и (11) определяются однозначно.

Таким образом, формализм линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$ является неадекватным в дискретной геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{d}$. Этот формализм неадекватен в любой физической геометрии, где отношение эквивалентности двух g-векторов интранзитивно. Например, в римановой геометрии, представленной в виде физической геометрии, отношение эквивалентности двух g-векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{CD}$, вообще говоря, многовариантно. Но отношение эквивалентности одновариантно, если начала g-векторов A и C совпадают $(A=C)$. Это свойство хорошо известно, как отсутствие ферн-параллелизма в римановой геометрии. Обычно пытаются подавить многовариантность с помощью дополнительного ограничения, порожденного параллельным переносом. Но многовариантность отношения эквивалентности является естественным свойством римановой геометрии, и вряд ли разумно искусственно подавлять многовариантность.

Теперь о терминологии. Некоторые математики утверждают, что отношение эквивалентности транзитивно по определению, и нельзя использовать термин "отношение эквивалентности"для соотношения, определяемого формулами (8). Они говорят: "Следует использовать другой термин, термин отношение эквивалентности занят." Последуем этому совету и используем термин "интр-эквивалентность" для соотношения между g-векторами, определенного с помощью (8). Тогда в геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{E}$, которая является частным случаем физической геометрии, интр-эквивалентность превращается в транзитивную эквивалентность. Это означает, что эквивалентность (транзитивная) является частным случаем интр-эквивалентности. Поскольку "интр-эквивалентность" является более общим понятием, чем эквивалентность (транзитивная), то следует поменять термины. Следует использовать более короткий термин "эквивалентность" в общем случае, когда отношение эквивалентности, вообще говоря, интранзитивно, а длинный термин "транзитивная эквивалентность" следует использовать в том частном случае, когда эквивалентность транзитивна. Требование, что отношение эквивалентности транзитивно по определению обусловлено тем фактом, что раньше математики имели дело только с транзитивным отношением эквивалентности. Они полагали, что эквивалентность не может быть интранзитивной.

Однако, определение эквивалентности g-векторов в виде (8) верно в любой физической геометрии и, в частности, в дискретной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_\mathrm{d}=\{\sigma_\mathrm{d},\Omega_\mathrm{M}\}$, где мировая функция (3) задана на многообразии Минковского Ω_M. Дискретная геометрия $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ описывает реальную геометрию пространства-времени в микромире лучше, чем риманова геометрия. Но дискретная геометрия не может быть построена на основе формализма линейного векторного пространства. Дискретная геометрия $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ (и другие физические геометрии) строятся с помощью принципа деформации [3]. Дискретная геометрия получается как деформация евклидовой геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{E}=\{\sigma_\mathrm{E},\Omega\}$. Это означает, что мировая функция σ_E заменяется во всех определениях геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{E}$, записанных в терминах евклидовой мировой функции σ_E, мировой функцией дискретной геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{d}$. Эти определения являются определениями геометрических объектов и общегеометрических понятий.

Например, в $\mathcal{G}_\mathrm{E}$ определение отрезка прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ между точками P_0 и P_1 имеет вид

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]}=\left\{R|\sqrt{2\sigma(P_0,R)}+\sqrt{2\sigma(R,P_1)}-\sqrt{2\sigma(P_0,P_1)}=0\right\} \tag{12}$$

где $\sigma = \sigma_{\mathrm{E}}$. В $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ отрезок прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ описывается тем же самым соотношением (12), но теперь $\sigma = \sigma_{\mathrm{d}}$. Принцип деформации позволяет опознать один и тот же геометрический объект в различных геометриях (при разных мировых функциях). Это важно в геометрии пространства-времени, где разные области имеют различные геометрии, которые описываются разными мировыми функциями. Например, Блюменталь [4] строил дистантную геометрию, используя метрический поход. Он не пользовался принципом деформации, и он мог построить кривую только как непрерывное отображение $[0,1] \to \Omega$. Такое построение кривой не может быть использовано в дискретной геометрии. Кроме того, он использовал понятие отображения, которое не определено при последовательном метрическом подходе, когда геометрия описывается в терминах расстояния и только в терминах расстояния.

В евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ имеются общегеометрические понятия, которые формулируются в терминах σ_{E}. Кроме того, имеются соотношения, описывающие специальные свойства евклидовой мировой функции σ_{E}. Такие понятия как эквивалентность g-векторов, скалярное произведение g-векторов, линейная зависимость g-векторов являются общегеометрическими понятиями, которые формулируются в терминах мировой функции σ_{E}. Эти понятия формулируются в том же виде в дискретной геометрии после замены σ_{E} на σ_{d}. Однако такие понятия как размерность геометрии и система координат содержат специальные свойства евклидовой мировой функции σ_{E}. Они не могут использоваться в дискретной геометрии и другой физической геометрии. Например, в дискретной геометрии (3) размерность как максимальное число линейно независимых векторов не может быть введена.

Геометрия без определенной размерности выглядит несколько неожиданно, потому что размерность и систему координат рассматривают как аксиоматические величины. Построение римановой геометрии начинается с введения многообразия и системы координат определенной размерности на нем. Никто не обсуждает вопрос, возможно ли введение системы координат определенной размерности. Метрический подход и принцип деформации позволяют бескоординатную формулировку геометрии. Это достоинство метрического подхода, который, к сожалению, обычно не применяется при исследовании геометрии пространства-времени. В результате дискретная геометрия пространства-времени не рассматривалась. Случай, когда ограничение на дискретность (2) рассматривается как ограничение на свойства точечного множества Ω приводит к геометрии на решетке, которую едва ли можно рассматривать как полноценную дискретную геометрию, особенно в применении к геометрии пространства-времени.

Сформулируем общегеометрические свойства евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Скалярное произведение двух g-векторов определяется соотношением(6). Эквивалентность двух g-векторов определяется соотношением (8).

n g-векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, ...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ являются линейно зависимыми, если определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}_n) = \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||, \quad i,k = 1,2,...n, \quad \mathcal{P}_n \equiv \{P_0, P_2, ...P_n\} \tag{13}$$

обращается в нуль

$$F_n(\mathcal{P}_n) = 0 \tag{14}$$

Специальные соотношения n-мерной евклидовой геометрии имеют вид [2]:

I. Определение метрической размерности:

$$\exists \mathcal{P}_n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}_n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{15}$$

где $F_n(\mathcal{P}_n)$ есть определитель Грама (13) n-ого порядка. Геометрические векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1,2,...n$ являются базисными g-векторами прямолинейной системы координат K_n с началом в точке P_0. Ковариантные координаты точки P в системе координат K_n определяются соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1,2,...n \tag{16}$$

Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}_n)$ и $g^{ik}(\mathcal{P}_n)$, $i,k = 1,2,...n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}_n)\, g_{lk}(\mathcal{P}_n) = \delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}_n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i,l = 1,2,...n \tag{17}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma_{\mathrm{E}}(P,Q)=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{i,k=n}g^{ik}(\mathcal{P}_n)(x_i(P)-x_i(Q))(x_k(P)-x_k(Q)),\qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{18}$$

где координаты $x_i(P)$, $x_i(Q)$, $i=1,2,...n$ точек P и Q являются соответственно ковариантными координатами g-векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ в системе координат K.

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения g_k

$$g_k>0,\qquad k=1,2,...,n \tag{19}$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P})=y_i\in\mathbb{R},\qquad i=1,2,...n \tag{20}$$

рассматриваемая как уравнения для определения точки P как функции координат $y=\{y_i\}$, $i=1,2,...n$ имеет всегда одно и только одно решение. Условия I – IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства, которая определяется соотношениями (15).

Специальные соотношения собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ могут не выполняться в других физических геометриях. В некоторых случаях эти соотношения могут выполняться частично. Например, метрическая размерность может быть определена локально. Вместо ограничения (15) используется условие

$$\forall P_0\in\delta\Omega,\quad \exists\mathcal{P}_n\equiv\{P_0,P_1,...P_n\}\subset\delta\Omega,\quad F_n(\mathcal{P}_n)\neq 0,\quad F_k(\mathcal{P}_k)=0,\quad k>n \tag{21}$$

где $\delta\Omega$ есть бесконечно малая область $\delta\Omega\subset\Omega$, и все каркасы $\mathcal{P}_n$ содержат только бесконечно близкие точки. Условия (21) определяют метрическую размерность для локально плоской (римановой) геометрии.

Применение дискретной геометрии для описания геометрии пространства-времени развивалось с начала девяностых годов двадцатого века [5]-[16]. В результате удалось создать единый формализм для описания непрерывной и дискретной геометрии пространства-времени.

Рассмотрение физической геометрии [2] важно для ее приложения к геометрии пространства-времени, которая оказалась в микромире дискретной геометрией. Элементарная длина λ_0, являющаяся параметром пространственно-временной геометрии, связана с квантовой постоянной $\hbar$. Этот факт позволяет объяснить движение квантовых частиц как стохастическое движение классических частиц в дискретной геометрии пространства-времени [16]. Это позволяет объяснить движение квантовых частиц как движение классических частиц в дискретной геометрии пространства-времени [16]. Это движение оказывается стохастическим. Это особенно неожиданно в применении к тахионам. Оказывается, что тахионы могут существовать, но мировая линия тахиона вихляет с бесконечной амплитудой. Из-за этого вихляния отдельный тахион не может быть обнаружен, тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационном полю. Существование тахионного газа может решить космологическую проблему темной материи [17]. Использование не-римановой геометрии для описания космоса позволяет расширить общую теорию относительности на более широкий класс геометрий пространства-времени.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, Different conceptions of Euclidean geometry and their application to the space-time geometry *ArXiv: 0709.2755v4*

[2] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, *iss. 12, 733-760, (2002)*, (смотри также *ArXiv: math.MG/0103002*).

[3] Yu. A.Rylov, Non-Euclidean method of the generalized geometry construction and its application to space-time geometry. in *Pure and Applied Differential geometry* pp.238-246. eds. Franki Dillen and Ignace Van de Woestyne. Shaker Verlag, Aachen, 2007. Смотри также *ArXiv:* /Math.GM/0702552

[4] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[5] Yu.A.Rylov, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, 2092-2098, (1991).

[6] Yu.A.Rylov, Принцип деформации как основа физической геометрии и его применение в геометрии пространства-времени. *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике* **2**, 69-96, (2004). Смотри также ArXiv: /physics/0411103

[7] Yu.A.Rylov, New crisis in geometry? *ArXiv:* /math.GM/0503261

[8] Yu.A.Rylov, Deformation principle and further geometrization of physics. *ArXiv:* /0704.3003

[9] Yu.A.Rylov, Discrimination of particle masses in multivariant space-time geometry. *ArXiv:* /0712.1335

[10] Yu. A.Rylov, Multivariance as a crucial property of microcosm *Concepts of Physics* **6**, iss.1, 89 -117, (2009). ISSN1897-2357. Смотри также ArXiv: /0806.1716.

[11] Yu. A.Rylov, Some subtleties of Riemannian geometry *ArXiv:* /0812.2833

[12] Yu.A.Rylov, General relativity extended to non-Riemannian space-time geometry. *ArXiv:* /0910.3582v7

[13] Yu.A.Rylov, Induced antigravitation in the extended general relativity . *Gravitation and Cosmology*, Vol. **18**, No. 2, pp. 107–112,(2012).

[14] Yu.A.Rylov, Discriminating properties of compactification in discrete uniform isotropic space-time. *ArXiv:* /0809.2516v2

[15] Yu.A.Rylov, Геометризация физики в микромире: дискретнное пространство-время и теория относительности (обзор) *Гиперкомплексные числа в геометрии и физике* **8**, iss. 2 (16), pp.88-117 (2011). Смотри также *ArXiv:* /1006.1254v2

[16] Yu.A.Rylov, Discrete space-time geometry and skeleton conception of particle dynamics. *Int. J. Theor Phys.* **51**, Issue 6, pp. 1847-1865 (2012), смотри также *ArXiv: 1110.3399v1*

[17] Yu. A.Rylov, Dynamic equations for tachyon gas. представлена в *Int. J. Theor. Phys.*