Логическая перезагрузка. Что это такое и какая от нее польза?

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site: $http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Логическая перезагрузка – это замена базовых утверждений концепции эквивалентными утверждениями той же концепции. Логическая перезагрузка не меняет концепции, но она изменяет математический формализм и изменяет результат обобщения концепции. В работе рассматриваются два примера логической перезагрузки. (1) обобщение динамики детерминированных частиц на случай динамики стохастических частиц. В результате возникает объединенный формализм для описания частиц всех видов. Этот формализм позволяет непринужденно объяснить квантовую динамику в терминах динамики классических частиц. В частности, было обнаружено κ-поле, ответственное за рождение пар. (2) Обобщение собственно евклидовой геометрии, которое содержит такие геометрии пространства-времени, где свободные частицы движутся стохастически. В результате возникает такая концепция динамики элементарных частиц, где можно исследовать устройство элементарных частиц, а не только систематизировать элементарные частицы, приписывая им квантовые числа. Кроме того, удается распространить общую теорию относительности на не-риманову геометрию пространства-времени.

1 Введение

Логическая перезагрузка есть логическая операция. Она представляет собой замену базовых утверждений концепции другими эквивалентными базовыми утверждениями. Логическая перезагрузка не меняет концепции, потому что новые базовые понятия эквивалентны старым базовым понятиям.

Рассмотрим логическое построение $\mathcal{C}$, которое содержит базовые утверждения (аксиомы) $a = \{a_1, a_2, ...a_n\}$ и множество $c = \{c_1, c_2, ...\} = \operatorname{cor}\{a\}$ следствий аксиом a. Тогда логическое построение есть $\mathcal{C} = \{a, c\}$. Пусть то же самое логическое построение $\mathcal{C}$ можно сформулировать в виде $\mathcal{C} = \{A, C\}$, где $A = \{A_1, A_2, ...A_k\}$ есть другое множество аксиом построения $\mathcal{C}$ и $C = \{C_1, C_2, ...\} = \operatorname{cor}\{A\}$ есть множество следствий аксиом A. Очевидно, что логические построения $\{a, c\}$ и $\{A, C\}$ будут эквивалентными. Замена аксиом a аксиомами A называется логической перезагрузкой. Логическая презагрузка является логической операцией, которая не меняет логического построения $\mathcal{C}$. Однако, обобщение $\mathcal{C}_{\text{gen}}$ логического построения $\mathcal{C}$ зависит, вообще говоря, от выбора аксиом, потому что $\mathcal{C}'_{\text{gen}} = \{a_{\text{gen}}, \operatorname{cor}(a_{\text{gen}})\}$ и $\mathcal{C}''_{\text{gen}} = \{A_{\text{gen}}, \operatorname{cor}(A_{\text{gen}})\}$ суть, вообще говоря, разные логические построения. Обобщение аксиом a должно быть таким, чтобы новые аксиомы a_{gen} были непротиворечивы. Чем больше число n аксиом, тем труднее устранить противоречия между ними. Если логическое построение может быть сделано монистическим, и в нем имеется только одно базовое понятие или величина, то проблема противоречивости не возникает. Таким образом, логическая перезагрузка является очень простым способом видоизменения концепции, которая после обобщения приводит к фундаментальному изменению существующей концепции.

Здесь мы рассмотрим два примера логической перезагрузки, приводящей к фундаментальному изменению существующей концепции: (1) логическую перезагрузку в динамике детерминированных частиц и (2) логическую перезагрузку в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\text{E}}$. В первом случае удается построить единый формализм для динамики детерминированных, стохастических и квантовых частиц. Оказывается, что квантовые частицы являются стохастическими частицами, которые могут описываться методами классической динамики. Оказывается, что квантовые принципы не являются первыми физическими принципами. Кроме того, единый формализм позволяет осуществить более детальное описание квантовых явлений. В частности, оказывается, что элементарные частицы порождают силовое поле (κ-поле), ответственное за рождение пар. Единый метод позволяет исследовать устройство элементарных частиц, а не только приписывать разные квантовые числа различным элементарным частицам, как это делает современная теория элементарных частиц.

Во втором случае после логической перезагрузки в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\text{E}}$ удается построить множество $\mathcal{S}_{\text{ph}}$ физических геометрий пространства-времени, которое содержит, в частности, дискретные геометрии пространства-времени. Римановы геометрии образуют только малую часть множества $\mathcal{S}_{\text{ph}}$. Расширение ОТО на множество $\mathcal{S}_{\text{ph}}$ физических геометрий пространства-времени приводит к заключению, что черные дыры не могут образовываться из-за индуцированной антигравитации [1, 2]. Дискретная геометрия пространства-времени непринужденно объясняет, почему свободное движение элементарных частиц стохастично.

Кажется совершенно неожиданным, что такая простая модификация собственно евклидовой геометрии как логическая перезагрузка может привести к таким фундаментальным изменениям современной теории в микромире и в космосе. Следует подчеркнуть, что такие результаты получаются только при последовательном применении первых физических принципов (квантовые принципы не являются первыми физическими принципами) и при исправлении ошибок в их применении. Дополнительные гипотезы использовать не следует.

2 Логическая перезагрузка в динамике детерминированных частиц

Традиционно в динамике детерминированных частиц отдельная частица рассматривается как базовый объект динамики. В нерелятивистском случае динамические уравнения для отдельной частицы имеют вид

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{x}\right) \tag{2.1}$$

где m есть масса частицы и $\mathbf{F}$ есть силовое поле в пространстве, где движется частица. Множество, состоящее из многих тождественных независимых частиц, известно как статистический ансамбль. Если число частиц бесконечно, статистический ансамбль может рассматриваться как сплошная среда (газ). Динамические уравнения для статистического ансамбля имеют вид

$$\frac{d\mathbf{v}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right)}{dt} = \frac{1}{m}\mathbf{F}\left(t, \mathbf{x}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right)\right), \quad \frac{d\mathbf{x}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right)}{dt} = \mathbf{v}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right) \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{\xi}$ есть лагранжева координата, маркирующая частицы чистого статистического ансамбля. Таким образом, чистый статистический ансамбль детерминированных частиц может описываться в терминах обыкновенных дифференциальных уравнений. Статистический ансамбль, где имеется только одна частица в бесконечно малом объеме называется чистым статистическим ансамблем. Он описывается динамическими уравнениями (2.2). Смесь нескольких чистых статистических ансамблей образует смешанный статистический ансамбль, который описывается другими динамическими уравнениями. Для краткости мы будем использовать термин "статистический ансамбль" или термин "ансамбль" вместо термина "чистый статистический ансамбль". В представлении Эйлера уравнения (2.2) принимают вид

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v} = \frac{1}{m}\mathbf{F}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho\mathbf{v}\right) = 0 \tag{2.3}$$

где $\rho = mn$ есть плотность газа, и n есть концентрация частиц.

Сравнивая уравнения (2.1) и (2.2) можно заключить, что уравнения (2.2) могут быть получены из (2.1) и наоборот, уравнения (2.1) могут быть получены из (2.2). Это означает, что статистический ансамбль детерминированных частиц может рассматриваться как базовый объект динамики детерминированных частиц. В этом случае динамические уравнения (2.1) для отдельной частицы являются следствием (частным случаем) динамических уравнений (2.2) для чистого статистического ансамбля.

Для отдельной стохастической (недетерминированной) частицы не существует динамических уравнений, но они существуют для чистого статистического ансамбля стохастических частиц. Они имеют вид

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p + \frac{1}{m}\mathbf{F}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho\mathbf{v}\right) = 0 \tag{2.4}$$

где $p = p\left(t, \mathbf{x}\right)$ есть давление в сплошной среде (чистом статистическом ансамбле стохастических частиц). Вид функции $p\left(t, \mathbf{x}\right)$ зависит от характера стохастичности.

Уравнения (2.4) не могут быть, вообще говоря, приведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Это означает, что для отельной стохастической частицы динамических уравнений не существует.

Таким образом, если базовым элементом динамики частиц является чистый статистический ансамбль, то динамика частиц описывается динамическими уравнениями (2.4). Динамические уравнения для детерминированных частиц и для стохастических отличаются только видом функции $p(t,\mathbf{x})$, которая исчезает в случае детерминированных частиц. В результате получается единый формализм для описания детерминированных и стохастических частиц. Используя этот формализм, можно показать, что квантовые частицы являются стохастическими частицами, которые могут описываться этим единым формализмом. Можно выяснить, что такое волновая функция и откуда она появляется.

3 Квантовые частицы как стохастические частицы

Рассмотрим статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ описываемых действием

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\mathbf{x},\mathbf{u}] = \int\int_{V_\xi} \left\{ \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} - V(\mathbf{x}) \right\} \rho_0(\boldsymbol{\xi})\, dt d\boldsymbol{\xi}, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{3.1}$$

Переменная $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ описывает регулярную составляющую движения частиц. Переменная $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ описывает среднее значение стохастической составляющей скорости, $\hbar$ есть квантовая постоянная. $V(\mathbf{x})$ есть потенциал некоторого силового поля. Второй член в (3.1) описывает кинетическую энергию стохастической составляющей скорости. Третий член описывает взаимодействие между стохастической составляющей $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ и регулярной составляющей $\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$. Оператор

$$\boldsymbol{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \tag{3.2}$$

определен в пространстве координат $\mathbf{x}$. Формально действие (3.1) может рассматриваться как множество детерминированных частиц, движущихся во внешнем поле $V(\mathbf{x})$ и взаимодействующих между собой через некоторое силовое поле $\mathbf{u}$. Частицы маркируются параметрами $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Динамические уравнения для переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$ получаются в результате вариации действия (3.1) соответственно по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$.

Действие (3.1) описывает поток некоторой идеальной жидкости, и оно может описываться в терминах волновой функции, потому что волновая функция является способом описания идеальной жидкости [3].

После надлежащей замены переменных действие (3.1) приводится к виду [4]

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] \;=\; & \int \left\{ \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi \right. \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{8m}\rho\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\boldsymbol{\nabla}s_\alpha - V(x)\rho \right\} \mathrm{d}^4x \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $\psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}$ есть двухкомпонентная комплексная волновая функция, и

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad s_\alpha = \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{3.4}$$

где σ_α есть 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

В случае, когда волновая функция ψ однокомпонентна, например, $\psi = \left\{ {\psi_1 \atop 0} \right\}$, величины $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ постоянны ($s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 1$), действие (3.3) превращается в

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi - V(x)\,\psi^*\psi \right\} \mathrm{d}^4x \tag{3.6}$$

Динамическое уравнение, порождаемое действием (3.6), представляет собой уравнение Шредингера

$$i\hbar\partial_0\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi - V(x)\,\psi = 0 \tag{3.7}$$

Динамическое уравнение, порождаемое действием (3.3) имеет вид

$$i\hbar\partial_0\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi + \frac{\hbar^2}{8m}\boldsymbol{\nabla}^2 s_\alpha\cdot(s_\alpha - 2\sigma_\alpha)\,\psi - \frac{\hbar^2}{4m}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\sigma_\alpha\psi - V(x)\,\psi = 0 \tag{3.8}$$

Оно описывает завихренное течение жидкости статистического ансамбля, тогда как уравнение Шредингера (3.7) описывает потенциальное течение [5].

Переход от переменных $\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ в действии (3.1) к волновой функции ψ в действии (3.3) не является алгебраическим. Он включает в себя интегрирование динамических уравнений, порожденных действием (3.1). Три произвольные функции $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi}) = \{g^1(\boldsymbol{\xi}), g^2(\boldsymbol{\xi}), g^3(\boldsymbol{\xi})\}$ появляются в результате этого интегрирования. Волновая функция строится из этих функций $\mathbf{g}(\boldsymbol{\xi})$. Процесс этой замены переменных не прост. Он описан в [4]. Но здесь я не буду входить в детали этой замены переменных. Это будет сделано для релятивистского случая в разделе 5. Последствием этого факта является то, что квантовые частицы – это просто стохастические частицы, которые можно описывать без использования квантовых принципов. Это очень важно, потому что это обстоятельство уменьшает число физических сущностей в динамике частиц.

С одной стороны, логическая перезагрузка – это очевидная логическая процедура, которая не использует никаких дополнительных предположений или гипотез. С другой стороны, логическая перезагрузка изменяет основы физической концепции, переставляя физические понятия и меняя их относительное значение. В частности, единый формализм для описания детерминированных, стохастических и квантовых частиц позволяет объяснить квантовые принципы и квантовые сущности в терминах классических понятий.

4 Релятивистские стохастические частицы

Движение точечной релятивистской стохастической частицы описывается действием

$$\mathcal{A}[x,\kappa] = \int \left\{ -mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} - \frac{e}{c}A_k\dot{x}^k \right\} d^4\xi, \quad d^4\xi = d\xi_0 d\boldsymbol{\xi} \tag{4.1}$$

$$K = \sqrt{1+\lambda^2\left(\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right)}, \qquad \lambda = \frac{\hbar}{mc}, \quad \tau = \boldsymbol{\xi}_0 \tag{4.2}$$

Здесь $x = \{x^i(\xi_0,\boldsymbol{\xi})\}$, $i = 0,1,2,3$ зависимые переменные, описывающие регулярную составляющую движения частицы. Переменные $\xi = \{\xi_0,\boldsymbol{\xi}\} = \{\xi_k\}$, $k = 0,1,2,3$ являются независимыми переменными, маркирующими частицы статистического ансамбля, и $\dot{x}^i \equiv dx^i/d\xi_0$. Величины $\kappa^l = \left\{\kappa^l(x)\right\}$, $l = 0,1,2,3$ являются зависимыми переменными, описывающими стохастическую составляющую движения частицы, $A_k = \{A_k(x)\}$, $k = 0,1,2,3$ есть потенциал внешнего электромагнитного поля. Заметим, что действие (3.1) для нерелятивистской стохастической частицы получается из (4.1), (4.2) в случае, когда $\lambda^2\left(\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right) \ll 1$ и $|\kappa_0| \ll |\boldsymbol{\kappa}| = |m\mathbf{u}/\hbar|$.

Будем называть динамическую систему, описываемую действием (4.1), (4.2) как $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$, потому что потенциальное течение жидкости ансамбля $\mathcal{S}_{\mathrm{KG}}$ описывается уравнением Клейна-Гордона [6]. Мы представим здесь это преобразование к виду Клейна-Гордона. Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование по латинским индексам $(0 \div 3)$ а по греческим индексам $(1 \div 3)$.

Динамические уравнения, порожденные действием (4.1), (4.2) являются уравнениями гидродинамического типа. Чтобы представить эти уравнения в терминах волновой функции, нужно проинтегрировать их в общем виде. Проблема общего интегрирования четырех гидродинамических уравнений

$$\partial_0\rho + \boldsymbol{\nabla}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{4.3}$$

$$\partial_0\mathbf{v} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p, \qquad p = p(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho) \tag{4.4}$$

кажется безнадежной. Она действительно безнадежна, если систему уравнений Эйлера (4.3), (4.4) рассматривать как полную систему динамических уравнений. На самом деле, уравнения Эйлера (4.3), (4.4) не образуют полную систему динамических уравнений, потому что они не описывают движение частиц жидкости вдоль их траекторий. Чтобы получить полную систему динамических уравнений, следует добавить к ним так называемые условия Лина [7]

$$\partial_0\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{4.5}$$

где $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t,\mathbf{x}) = \{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ суть три независимых интеграла динамических уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t,\mathbf{x}),$$

описывающих движение частиц жидкости в заданном поле скоростей.

Семь уравнений (4.3) – (4.5) образуют полную систему динамических уравнений, тогда как четыре уравнения Эйлера (4.3), (4.4) образуют только замкнутую подсистему полной системы уравнений. Волновая функция выражается через гидродинамические потенциалы $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, известные также как потенциалы Клебша [8, 9]. В общем случае произвольного течения в трехмерном пространстве комплексная волновая функция ψ имеет две комплексных составляющих ψ_1, ψ_2 (или четыре независимых вещественных составляющих)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} e^{i\varphi} u_1 (\boldsymbol{\xi}) \\ \sqrt{\rho} e^{i\varphi} u_2 (\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}, \qquad |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1 \tag{4.6}$$

Невозможно получить общее решение системы уравнений Эйлера (4.3), (4.4), но можно частично проинтегрировать полную систему уравнений (4.3) – (4.5), уменьшив ее порядок до четырех динамических уравнений для волновой функции (4.6). Практически это означает, что интегрируются динамические уравнения (4.5), где функция $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ определяется неявно уравнениями (4.3), (4.4). Такое интегрирование и уменьшение порядка полной системы динамических уравнений оказывается возможным, потому что система (4.3) – (4.5) имеет группу симметрии, связанную с преобразованиями потенциалов Клебша

$$\xi_\alpha \rightarrow \tilde{\xi}_\alpha = \tilde{\xi}_\alpha (\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \qquad \frac{\partial \left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3 \right)}{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \neq 0 \tag{4.7}$$

5 Преобразование действия к описанию в терминах волновой функции

Будем рассматривать переменные $\xi = \xi(x)$ в (4.1) как зависимые переменные, а переменные x как независимые переменные. Пусть якобиан

$$J = \frac{\partial (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det ||\xi_{i,k}||, \qquad \xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k}, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3 \tag{5.1}$$

рассматривается как полилинейная функция от $\xi_{i,k}$. Тогда

$$d^4\xi = J d^4 x, \qquad \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\xi_0} \equiv \frac{\partial (x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J^{-1} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \tag{5.2}$$

После преобразования к зависимым переменным ξ действие (4.1) принимает вид

$$\mathcal{A}[\xi, \kappa] = \int \left\{ -mcK \sqrt{g_{ik} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}} - \frac{e}{c} A_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right\} d^4 x, \tag{5.3}$$

$$K = \sqrt{1 + \lambda^2 (\kappa_l \kappa^l + \partial_l \kappa^l)}, \qquad \lambda = \frac{\hbar}{mc}, \tag{5.4}$$

Теперь переменные ξ и κ рассматриваются как функции независимых переменных x.

Введем новые переменные

$$j^k = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{5.5}$$

с помощью множителей Лагранжа p_k

$$\mathcal{A}\left[\xi, \kappa, j, p\right] = \int \left\{ -mcK\sqrt{g_{ik}j^i j^k} - \frac{e}{c}A_k j^k + p_k \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} - j^k \right) \right\} d^4 x, \tag{5.6}$$

Вариация по ξ_i дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \xi_i} = -\partial_l \left(p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \right) = 0, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{5.7}$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}} \right) \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} \xi_{k,l} \equiv J \delta^i_k, \quad \partial_l \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \qquad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{5.9}$$

можно проверить прямой подстановкой, что общее решение линейных уравнений (5.7) имеет вид

$$p_k = b_0 \left(\partial_k \varphi + g^\alpha \left(\boldsymbol{\xi} \right) \partial_k \xi_\alpha \right), \qquad k = 0,1,2,3 \tag{5.10}$$

где $b_0 \neq 0$ есть постоянная, $g^\alpha \left(\boldsymbol{\xi} \right), \ \ \alpha = 1,2,3$ суть произвольные функции переменных $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, и φ есть динамическая переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной. Подставим (5.10) в (5.6). Член вида $\partial J / \partial \xi_{0,k} \partial_k \varphi$ приводится к якобиану и не дает вклада в динамические уравнения. Члены вида $\xi_{\alpha,k} \partial J / \partial \xi_{0,k}$ обращаются в нуль в силу тождеств (5.9). Получаем

$$\mathcal{A}\left[\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa, j\right] = \int \left\{ -mcK\sqrt{g_{ik}j^i j^k} - j^k \pi_k \right\} d^4 x, \tag{5.11}$$

где величины π_k определяются соотношениями

$$\pi_k = b_0 \left(\partial_k \varphi + g^\alpha \left(\boldsymbol{\xi} \right) \partial_k \xi_\alpha \right) + \frac{e}{c} A_k, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{5.12}$$

Интегрирование (5.7) в виде (5.10) есть именно то интегрирование, которое позволяет ввести волновую функцию. Заметим что коэффициенты в системе уравнений (5.7) при производных от p_k построены из миноров якобиана (5.1). Именно это обстоятельство позволяет произвести формальное общее интегрирование.

Вариация (5.11) по κ^l дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \kappa^l} = -\frac{\lambda^2 mc \sqrt{g_{ik}j^i j^k}}{K} \kappa_l + \partial_l \frac{\lambda^2 mc \sqrt{g_{ik}j^i j^k}}{2K} = 0, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \tag{5.13}$$

Это может быть записано в виде

$$\kappa_l = \partial_l \kappa = \frac{1}{2}\partial_l \ln \rho, \qquad e^{2\kappa} = \frac{\rho}{\rho_0} \equiv \frac{\sqrt{j_s j^s}}{\rho_0 K}, \quad \rho = \frac{\sqrt{j_s j^s}}{K} \tag{5.14}$$

где переменная κ есть потенциал κ-поля κ_i и $\rho_0 = \text{const}$ есть постоянная интегрирования. Подставляя (5.4) в (5.14), получаем динамическое уравнение для κ

$$\hbar^2 \left(\partial_l \kappa \cdot \partial^l \kappa + \partial_l \partial^l \kappa\right) = m^2 c^2 \frac{e^{-4\kappa} j_s j^s}{\rho_0^2} - m^2 c^2 \tag{5.15}$$

Вариация (5.11) по j^k дает

$$\pi_k = -\frac{mcK j_k}{\sqrt{g_{ls} j^l j^s}} \tag{5.16}$$

или

$$\pi_k g^{kl} \pi_l = m^2 c^2 K^2 \tag{5.17}$$

Подставляя $\sqrt{j_s j^s}/K$ из второго уравнения (5.14) в (5.16), получаем

$$j_k = -\frac{\rho_0}{mc} e^{2\kappa} \pi_k, \tag{5.18}$$

Теперь исключим переменные j^k из действия (5.11), используя соотношения (5.18) и (5.14). Получаем

$$\mathcal{A}[\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa] = \int \rho_0 e^{2\kappa} \left\{-m^2 c^2 K^2 + \pi^k \pi_k\right\} d^4 x, \tag{5.19}$$

где π_k определяется соотношением (5.12). Используя выражение (4.2) для K, первый член действия (5.19) может быть преобразован следующим образом.

$$\begin{aligned} -m^2 c^2 e^{2\kappa} K^2 &= -m^2 c^2 e^{2\kappa} \left(1 + \lambda^2 \left(\partial_l \kappa \partial^l \kappa + \partial_l \partial^l \kappa\right)\right) \\ &= -m^2 c^2 e^{2\kappa} + \hbar^2 e^{2\kappa} \partial_l \kappa \partial^l \kappa - \frac{\hbar^2}{2} \partial_l \partial^l e^{2\kappa} \end{aligned}$$

Примем во внимание, что последний член имеет вид дивергенции. Он не дает вклада в динамические уравнения и может быть опущен. Опуская этот член, получаем

$$\mathcal{A}[\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa] = \int \rho_0 e^{2\kappa} \left\{-m^2 c^2 + \hbar^2 \partial_l \kappa \partial^l \kappa + \pi^k \pi_k\right\} d^4 x, \tag{5.20}$$

Здесь π_k определяется соотношением (5.12), где постоянная интегрирования b_0 выбрана в виде $b_0 = \hbar$

$$\pi_k = \hbar \left(\partial_k \varphi + g^\alpha (\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\alpha\right) + \frac{e}{c} A_k, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{5.21}$$

Вместо динамических переменных $\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa$ введем n-компонентную комплексную функцию

$$\psi = \{\psi_\alpha\} = \left\{\sqrt{\rho} e^{i\varphi} w_\alpha (\boldsymbol{\xi})\right\} = \left\{\sqrt{\rho_0} e^{\kappa + i\varphi} w_\alpha (\boldsymbol{\xi})\right\}, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots n \tag{5.22}$$

Здесь w_α суть функции только $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, имеющие следующие свойства

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} w_\alpha^* w_\alpha = 1, \qquad -\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(w_\alpha^*\frac{\partial w_\alpha}{\partial\xi_\beta} - \frac{\partial w_\alpha^*}{\partial\xi_\beta}w_\alpha\right) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}) \tag{5.23}$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Число n компонентов волновой функции ψ зависит от функций $g^\beta(\boldsymbol{\xi})$. Число n выбирается таким образом, чтобы уравнения (5.23) имели решение. Тогда получаем

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\psi_\alpha^*\psi_\alpha = \rho = \rho_0 e^{2\kappa}, \qquad \partial_l\kappa = \frac{\partial_l(\psi^*\psi)}{2\psi^*\psi} \tag{5.24}$$

$$\pi_k = -\frac{i\hbar(\psi^*\partial_k\psi - \partial_k\psi^*\cdot\psi)}{2\psi^*\psi} + \frac{e}{c}A_k, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{5.25}$$

Подставляя соотношения (5.24), (5.25) в (5.20), получаем действие, записанное в терминах волновой функции ψ

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = & \int\left\{\left[\frac{i\hbar(\psi^*\partial_k\psi - \partial_k\psi^*\cdot\psi)}{2\psi^*\psi} - \frac{e}{c}A_k\right]\left[\frac{i\hbar\left(\psi^*\partial^k\psi - \partial^k\psi^*\cdot\psi\right)}{2\psi^*\psi} - \frac{e}{c}A^k\right]\right.\\ & \left. + \hbar^2\frac{\partial_l(\psi^*\psi)\,\partial^l(\psi^*\psi)}{4(\psi^*\psi)^2} - m^2c^2\right\}\psi^*\psi d^4x\end{aligned} \tag{5.26}$$

Используем тождество

$$\begin{aligned}& \frac{(\psi^*\partial_l\psi - \partial_l\psi^*\cdot\psi)\left(\psi^*\partial^l\psi - \partial^l\psi^*\cdot\psi\right)}{4\psi^*\psi} + \partial_l\psi^*\partial^l\psi \\ \equiv\ & \frac{\partial_l(\psi^*\psi)\,\partial^l(\psi^*\psi)}{4\psi^*\psi} + \frac{g^{ls}}{2}\psi^*\psi\sum_{\alpha,\beta=1}^{\alpha,\beta=n}Q_{\alpha\beta,l}^*Q_{\alpha\beta,s}\end{aligned} \tag{5.27}$$

где

$$Q_{\alpha\beta,l} = \frac{1}{\psi^*\psi}\begin{vmatrix}\psi_\alpha & \psi_\beta\\ \partial_l\psi_\alpha & \partial_l\psi_\beta\end{vmatrix}, \qquad Q_{\alpha\beta,l}^* = \frac{1}{\psi^*\psi}\begin{vmatrix}\psi_\alpha^* & \psi_\beta^*\\ \partial_l\psi_\alpha^* & \partial_l\psi_\beta^*\end{vmatrix} \tag{5.28}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = & \int\left\{\left(i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right)\psi^*\left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k\right)\psi - m^2c^2\psi^*\psi\right.\\ & \left. + \frac{\hbar^2}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\alpha,\beta=n}g^{ls}Q_{\alpha\beta,l}Q_{\alpha\beta,s}^*\psi^*\psi\right\}d^4x\end{aligned} \tag{5.29}$$

Рассмотрим случай потенциального течения, когда $g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) = 0$. В этом случае $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, и функция ψ имеет только одну составляющую. Из (5.28) следует, что $Q_{\alpha\beta,l} = 0$. Тогда получаем вместо (5.29)

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = \int\left\{\left(i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right)\psi^*\left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k\right)\psi - m^2c^2\psi^*\psi\right\}d^4x \tag{5.30}$$

Вариация действия (5.30) по ψ^* порождает уравнение Клейна-Гордона

$$\left(-i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right)\left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k\right)\psi - m^2c^2\psi = 0 \tag{5.31}$$

Таким образом, описание в терминах уравнения Клейна-Гордона есть частный случай описания стохастических частиц с помощью действия (4.1), (4.2).

В случае, когда течение флюида завихренное, и волновая функция ψ двухкомпонентна, тождество (5.27) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\psi^*\partial_l\psi - \partial_l\psi^*\cdot\psi\right)\left(\psi^*\partial^l\psi - \partial^l\psi^*\cdot\psi\right)}{4\rho} - \frac{\left(\partial_l\rho\right)\left(\partial^l\rho\right)}{4\rho} \\ \equiv\ & -\partial_l\psi^*\partial^l\psi + \frac{1}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\rho \end{aligned} \tag{5.32}$$

где 3-вектор $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3,\}$ определяется соотношениями

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad s_\alpha = \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{5.33}$$

$$\psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}, \qquad \psi^* = \left(\psi_1^*, \psi_2^*\right), \tag{5.34}$$

и матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ имеют вид (3.5) Заметим, что 3-векторы $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ являются векторами в пространстве V_ξ потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Они преобразуются как векторы при преобразованиях (4.7)

Вообще говоря, преобразования потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$ и преобразования координат $\mathbf{x}$ независимы. Однако действие (5.26) не содержит каких-либо ссылок на потенциалы Клебша $\boldsymbol{\xi}$ и преобразования (4.7) переменных $\boldsymbol{\xi}$. Если рассматривать только линейные преобразования пространственных координат $\mathbf{x}$

$$x^\alpha \to \tilde{x}^\alpha = b^\alpha + \omega^\alpha_{.\beta}x^\beta, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{5.35}$$

ничто не мешает нам сопровождать каждое преобразование (5.35) аналогичным преобразованием

$$\xi_\alpha \to \tilde{\xi}_\alpha = b^\alpha + \omega^\alpha_{.\beta}\xi_\beta, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{5.36}$$

потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$. Формулы для преобразования векторов и спиноров в V_x не содержат явно координат $\mathbf{x}$, и можно рассматривать векторы и спиноры в V_ξ как векторы и спиноры в V_x, при условии, что мы рассматриваем линейные преобразования (5.35), (5.36) всегда вместе.

Используя тождество (5.32), получаем из (5.26)

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*] = \int\left\{\left(i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right)\psi^*\left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k\right)\psi - m^2c^2\rho - \frac{\hbar^2}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\rho\right\}d^4x \tag{5.37}$$

Динамические уравнения, порожденные действием (5.37), имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(-i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right)\left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k\right)\psi - \left(m^2c^2 + \frac{\hbar^2}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\right)\psi \\ =\ & -\hbar^2\frac{\partial_l\left(\rho\partial^l s_\alpha\right)}{2\rho}\left(\sigma_\alpha - s_\alpha\right)\psi \end{aligned} \tag{5.38}$$

Градиент единичного 3-вектора $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ описывает вихревую составляющую течения жидкости. Если $\mathbf{s} = \text{const}$, динамическое уравнение (5.38) превращается в традиционное уравнение Клейна-Гордона (5.31).

6 Несколько тождественных релятивистских частиц

Рассмотрим N тождественных релятивистских стохастических частиц, не имеющих электрического заряда. Они описываются действием

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[X,\kappa,A] = \sum_{A=1}^{A=N} \int\limits_{V_{\boldsymbol{\xi}}} L_{(A)}\left(x_{(A)}(\tau,\boldsymbol{\xi})\right) d\tau d\boldsymbol{\xi} \tag{6.1}$$

$$X = \left\{x_{(1)}, x_{(2)}, ...x_{(N)}\right\}, \quad x_{(A)} = \left\{x_{(A)}^0, x_{(A)}^1, x_{(A)}^2, x_{(A)}^3\right\}, \quad A = 1,2,...N \tag{6.2}$$

Здесь индекс в скобках означает номер частицы.

$$L_{(A)}\left(x_{(A)}(\tau,\boldsymbol{\xi})\right) = -M_{(A)}\left(x_{(A)}\right) c\sqrt{g_{ik}\dot{x}_{(A)}^i \dot{x}_{(A)}^k}, \quad A = 1,2,...N \tag{6.3}$$

$$\dot{x}_{(A)}^i = \frac{dx_{(A)}^i}{d\tau}, \quad x_{(A)} = x_{(A)}(\tau,\boldsymbol{\xi}) \tag{6.4}$$

$$M_{(A)} = M_{(A)}\left(x_{(A)}\right) = \sqrt{m^2 + \left(\frac{\hbar}{c}\right)^2 \left(g_{kl}\kappa^k(x_A)\kappa^l(x_A) + \frac{\partial}{\partial x_{(A)}^k}\kappa^k(x_A)\right)}, \quad A = 1,2,...N \tag{6.5}$$

$M_{(A)}$ есть эффективная масса A-ой частицы, а m есть ее обычная масса.

Описывая эти частицы в терминах волновой функции, получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\psi,\psi^*] = \sum_{A=1}^{A=N} \int\limits_{V_{x_{(A)}}} L_{(A)}(\psi(X), \psi^*(X))\, d^4x_{(A)} \tag{6.6}$$

$$L_{(A)}(\psi(X), \psi^*(X)) = \frac{\partial\psi^*}{\partial x_{(A)}^k} g^{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x_{(A)}^i} - m^2c^2\psi^*\psi \tag{6.7}$$

Динамические уравнения имеют вид

$$g^{ik}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_{(A)}^i \partial x_{(A)}^k} + m^2c^2\psi = 0, \quad A = 1,2,...N \tag{6.8}$$

Решение имеет вид

$$\psi(X) = \prod_{A=1}^{A=N} \psi_{(A)}\left(x_{(A)}\right) \tag{6.9}$$

где $\psi_{(A)}\left(x_{(A)}\right)$ есть волновая функция A-ой частицы. Она удовлетворяет уравнению

$$g^{ik}\frac{\partial^2\psi_{(A)}(x)}{\partial x^i \partial x^k} + m^2c^2\psi_{(A)}(x) = 0, \quad A = 1,2,...N \tag{6.10}$$

После симметризации получаем

$$\psi(X)=\sum_{\substack{\text{permutations}\\ x_{(A)}\longleftrightarrow x_{(B)}}}\prod_{A=1}^{A=N}\psi_{(A)}\left(x_{(A)}\right)\tag{6.11}$$

Знак суммы означает суммирование по всем перестановкам аргументов $x_{(A)}$. Все частицы, описываемые соотношениями (6.11), (6.10) рассматриваются как невзаимодействующие. При таком описании κ-поле $\kappa\left(x_{(A)}\right)$ в (6.1) - (6.3) рассматривается как внутреннее поле A-ой частицы. Это поле рассматривается как атрибут волновой функции $\psi_{(A)}$. Волновая функция $\psi_{(A)}$ "поглощает" κ-поле $\kappa\left(x_{(A)}\right)$.

На самом деле, действие (6.1) - (6.5) описывает тождественные стохастические частицы, взаимодействующие через κ-поле, которое является обычным силовым полем. Заряженная частица имеет кулоновское электрическое поле, которое деформируется с движением частицы. Это кулоновское поле является внешним электромагнитным полем для других заряженных частиц. Оно действует на другие заряженные частицы. В результате возникает электромагнитное взаимодействие между заряженными частицами.

Таким же образом, всякая частица порождает κ-поле, которое является внешним полем κ-полем для других частиц. Внешнее κ-поле изменяет массу частицы. Это изменение массы частицы может быть столь большим, что мировая линия частицы изменит свое направление во времени. Этот поворот мировой линии во времени может интерпретироваться как рождение пары частица-античастица или аннигиляция пары [10]. Таким образом, κ-поле является силовым полем, ответственным за рождение пар.

Динамическое уравнение для κ-поля отдельной частицы имеет вид

$$\left(m^2c^2+\hbar^2 g^{kl}\frac{\partial^2}{\partial x^k\partial x^l}\right)e^{\kappa}=\frac{m^2c^2 j_s j^s}{\exp(3\kappa)}\tag{6.12}$$

где κ есть потенциал κ-поля $\kappa_l=g_{kl}\kappa^l=\partial_l\kappa$ и j^k есть 4-ток частиц. κ-поле покоящейся частицы имеет вид

$$e^{\kappa}=\begin{cases}\sqrt[4]{j_s j^s}, & \text{если } r<r_0\\ \sqrt[4]{j_s j^s}\frac{e^{-r/\lambda}}{r}, & \text{если } r>r_0\end{cases}\tag{6.13}$$

где r_0 ($r_0\ll\lambda=\frac{\hbar}{mc}$) есть радиус области пространства, где расположена частица. В области, где частиц нет ($j^s=0$), e^{κ} удовлетворяет линейному уравнению

$$\left(m^2c^2+\hbar^2 g^{kl}\partial_k\partial_l\right)e^{\kappa}=0\tag{6.14}$$

Полное выражение для κ-поля, порожденного N тождественными частицами, имеет вид

$$\kappa(X)=\frac{1}{2}\sum_{A=1}^{A=N}\log\frac{m\sqrt{j_{(A)s}\left(x_{(A)}\right)j^s_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}}{M_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}\tag{6.15}$$

$$X=\left\{x_{(1)},x_{(2)},...x_{(N)}\right\},\quad x_{(A)}=\left\{x^0_{(A)},x^1_{(A)},x^2_{(A)},x^3_{(A)}\right\},\quad A=1,2,...N\tag{6.16}$$

где $j^k_{(A)}$ есть 4-ток, порожденный A-ой частицей. Выражение (6.15) для κ симметрично относительно перестановок любых аргументов $x_{(A)}$ и $x_{(B)}$. В соответствии с (6.5) эффективная масса $M_{(A)}$ в (6.15) зависит от величины $\kappa\left(x_{(A)}\right)$ и ее производных. Динамические уравнения для 4-скорости A-ой частицы $v^k_{(A)}$ и для κ-поля получаются из действия (6.1) – (6.5). Они имеют вид

$$v^k_{(A)}\frac{\partial v_{(A)i}}{\partial x^k_{(A)}}+\left(v^k_{(A)}v_{(A)i}-\delta^k_i v_{(A)s}v^s_{(A)}\right)\frac{\partial}{\partial x^k_{(A)}}\left(\log K_{(A)}\left(x_{(A)}\right)\right)=0,\quad A=1,2,...N$$

или

$$\begin{aligned}&v^k_{(A)}\frac{\partial v_{(A)i}}{\partial x^k_{(A)}}+\left(v^k_{(A)}v_{(A)i}-\delta^k_i v_{(A)s}v^s_{(A)}\right)\\ &\times\frac{\partial}{\partial x^k_{(A)}}\log\sqrt{\left(1+\lambda^2 w^{-1}\left(x_{(A)}\right)g^{ls}\frac{\partial^2 w\left(x_{(A)}\right)}{\partial x^l_{(A)}\partial x^s_{(A)}}\right)}=0,\quad A=1,2,...N\end{aligned}\tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}&\prod_{B=1}^{B=N}\left(\left(1+\lambda^2 g^{kl}\frac{\partial^2}{\partial x^k_{(B)}\partial x^l_{(B)}}\right)w\left(x_B\right)\right)\\ =\;&w^{-4}\left(x_{(A)}\right)\prod_{B=1}^{B=N}\left(j_{(B)s}\left(x_{(B)}\right)j^s_{(B)}\left(x_{(B)}\right)w\left(x_{(B)}\right)\right),\quad A=1,2,...N\end{aligned}\tag{6.18}$$

где

$$v^k_{(A)}\left(x_{(A)}\right)=\frac{j^k_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}{\sqrt{j_{(A)s}\left(x_{(A)}\right)j^s_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}},\quad w\left(x_{(A)}\right)=e^{\kappa\left(x_{(A)}\right)},\quad A=1,2,...N\tag{6.19}$$

N динамических уравнений (6.18) довольно необычны. Дифференциальная часть их одна и та же. Она состоит из дифференциальных частей уравнения Клейна-Гордона. Однако, часть, описывающая взаимодействие различных частиц, отличается от традиционного представления о взаимодействии частиц.

Если записать любое из $L_{(A)}$, определенное формулой (6.3) в терминах мировых функций, то получится (6.6), (6.7) вместо (6.1) - (6.5). Взаимодействие частиц между собой через κ-поле не возникнет. Отсутствие взаимодействия связано с тем фактом, что волновая функция получается из рассмотрения отдельной частицы. При введении волновой функции производится интегрирование уравнения (5.13) в виде (5.14). Это интегрирование порождает величину ρ_0, которая является абсолютной постоянной. При рассмотрении многих частиц в виде (6.1) - (6.5) подобное интегрирование порождает N величин $\rho_{(A)}$, которые являются относительными постоянными в том смысле, что $\partial\rho_{0(A)}/\partial x^i_{(A)}=0$. Однако, $\rho_{0(A)}$ может зависеть от $x_{(B)}$ $B\neq A$. Эта зависимость от координат других частиц порождает взаимодействие частиц через κ-поле.

Тензор энергии-импульса T^{ik} имеет вид

$$T^{ik}=\sum_{A=1}^{A=N}M_{(A)}\left(x_{(A)}\right)c\left(\begin{array}{c}\frac{\dot x^i_{(A)}\dot x^k_{(A)}}{\sqrt{\dot x^s_{(A)}\dot x_{(A)s}}}\\ +\left(\frac{\hbar}{c}\right)^2\frac{\sqrt{\dot x^s_{(A)}\dot x_{(A)s}}\left(\kappa^i(x_A)\kappa^k(x_A)+\frac12\frac{\partial}{\partial x_{(A)i}}\kappa^k(x_A)+\frac12\frac{\partial}{\partial x_{(A)k}}\kappa^i(x_A)\right)}{M^2_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}\end{array}\right)\tag{6.20}$$

Первый член описывает энергию-импульс самой частицы, тогда как второй член описывает энергию-импульс κ-поля. Вблизи точки возврата мировой линии $M_{(A)}\left(x_{(A)}\right) \rightarrow 0$ и первый член исчезает. Наоборот, второй член возрастает, и вся энергия концентрируется в κ-поле.

В квантовой теории поля κ-поле включено в волновую функцию, и исследователи не знают о существовании κ-поля. Причина рождения пар является тайной для исследователей. Тем не менее принято считать, что практически любой нелинейный член, добавленный к уравнению Клейна-Гордона может рождать пары [11, 12, 13, 14]. К сожалению, это не так, потому что силовое поле, порождающее пары должно иметь очень специальный вид. Оно должно изменять эффективную массу частицы. Оно должно появляться под радикалом в выражении для эффективной массы (6.5) как κ-поле, потому что в момент рождения пары, эффективная масса обращается в ноль, и составляющая p_0 канонического 4-импульса p_k меняет свой знак.

Почему исследователи верят в нелинейные уравнения как причину рождения пар? Ответ довольно неожиданный. Имеется ошибка в процедуре вторичного квантования релятивистского скалярного поля. Следствия этой ошибки имитируют рождение пар.

Частицы рождаются в виде пары частица-античастица. Причиной этого является то, что частица и античастица не являются независимыми динамическими объектами. Они являются двумя разными состояниями эмлона. Термин "эмлон" представляет собой прочтение аббревиатуры МЛ для мировой линии. В динамике релятивистских частиц мировая линия (эмлон) является главным объектом динамики. Частица и античастица являются двумя различными состояниями эмлона. Эти два состояния отличаются одно от другого знаком составляющей p_0 канонического 4-импульса p_k. Но энергия $E = |p_0|$ положительна в обоих случаях: частица и античастица. Гамильтониан H определяемый как величина, канонически сопряженная времени x^0, не совпадает с энергией E определяемой как интеграл от составляющей T^{00} тензора энергии-импульса. Они могут совпадать (точнее $E = -H$) только в случае, когда нет рождения пар. Вообще говоря, E и H являются различными величинами уже в релятивистской классической механике [15].

При традиционном вторичном квантовании [11, 12, 13, 14] частица и античастица рассматриваются как независимые динамические объекты. В этом случае энергия E и гамильтониан H совпадают, вакуумное состояние нестационарно для нелинейного уравнения и оператор ψ содержит операторы рождения и операторы уничтожения. В этом случае решить проблему рассеяния можно только пертурбативными методами.

При правильной постановке проблемы вторичного квантования [16] эмлон рассматривается как главный объект динамики. Частицы и античастицы рассматриваются как различные состояния эмлона. В этом случае энергияE и гамильтониан H являются различными величинами. Оператор ψ содержит только операторы уничтожения, а оператор ψ^* содержит только операторы рождения. В этом случае вакуумное состояние стационарно для нелинейного уравнения, и проблема рассеяния может быть решена точно без использования пертурбативных методов. Оказывается, что в этом случае пары не рождаются для нелинейного члена в виде полинома. Это естественно, потому что поглощенное волновой функцией κ-поле не берется в расчет.

Но почему рождение пар появляется в традиционном случае? При традиционном методе вторичного квантования главный динамический объект: эмлон разбивается на части: частицы и античастицы. После решения проблемы динамики нужно объединить части целого объекта: эмлона. Однако из-за пертурбативных методов решения точное объединение не удается. Остатки этого приблизительного объединения образуют рожденные пары. Вообще говоря, традиционный подход к вторичному квантованию не последователен. Используя непоследовательные методы исследования и некоторую изобретательность можно получить любой результат, какой нужно.

Действие (6.1) - (6.5) содержит временные производные κ-поля. Это означает, что κ-поле образует динамическую систему, которая может существовать без источника и может удаляться от источника. Этот пример показывает, что такая простая логическая процедура как логическая перезагрузка изменяет подход к исследованию динамики элементарных частиц. Оказывается, что простая точечная частица порождает силовое поле κ, которое ответственно за рождение пар и за изменение эффективной массы частицы. Будучи абстрактным построением, квантовая теория не определяет такой элемент устройства элементарной частицы как κ-поле.

При квантовом подходе к теории элементарных частиц есть необходимость в объединении квантовых принципов с принципами теории относительности. Объединение этих принципов приводит к квантовой теории поля. Логическая перезагрузка в динамике частиц устраняет эту необходимость, потому что динамика релятивистских стохастических частиц автоматически описывает все свойства элементарных частиц, включая проблему рождения пар.

7 Частица, описываемая уравнением Дирака

Дираковская частица (фермион), описываемая уравнением Дирака не имеет внутренней структуры, если она описывается в рамках квантовой теории. При традиционном подходе фермион - это точечная частица, у которой масса, спин, заряд и магнитный момент являются квантовыми числами, которые приписываются дираковской частице. После логической перезагрузки в динамике частицы уравнение Дирака рассматривается как динамическое уравнение для статистического ансамбля стохастических частиц [17, 18, 19, 20].

После надлежащей замены переменных [19] действие для дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ принимает вид

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}}: \qquad \mathcal{A}_D[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}] = \int \mathcal{L} d^4x, \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{cl}} + \mathcal{L}_{\mathrm{q1}} + \mathcal{L}_{\mathrm{q2}} \tag{7.1}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{cl}} = -m\rho - \hbar j^i \partial_i \varphi - \frac{\hbar j^l}{2\left(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \xi^\alpha \partial_l \xi^\beta z^\gamma, \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{7.2}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q1}} = 2m\rho \sin^2\left(\frac{\kappa}{2}\right) - \frac{\hbar}{2} S^l \partial_l \kappa, \tag{7.3}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{q2}} = \frac{\hbar(\rho + j_0)}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial^\alpha \frac{j^\beta}{(j^0+\rho)} \xi^\gamma - \frac{\hbar}{2(\rho+j_0)} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\partial^0 j^\beta\right) j^\alpha \xi^\gamma \tag{7.4}$$

Лагранжиан есть функция от 4-вектора j^l, скаляра φ, псевдоскаляра κ, и единичного псевдовектора $\boldsymbol{\xi}$, который связан с 4-псевдовектором спина S^l с помощью соотношений

$$\xi^\alpha = \rho^{-1}\left[S^\alpha - \frac{j^\alpha S^0}{(j^0+\rho)}\right], \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \rho \equiv \sqrt{j^l j_l} \tag{7.5}$$

$$S^0 = \mathbf{j}\boldsymbol{\xi}, \qquad S^\alpha = \rho\xi^\alpha + \frac{(\mathbf{j}\boldsymbol{\xi})j^\alpha}{\rho + j^0}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{7.6}$$

Произведем динамическую расквантизацию, когда все производные ∂_l проектируются на направление 4-тока j^k

$$\partial_l \to \frac{j_l j^k}{j_s j^s}\partial_k \tag{7.7}$$

В результате динамической расквантизации статистический ансамбль $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ стохастических дираковских частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{Dst}}$ превращается в статистический ансамбль $\mathcal{S}_{\mathrm{Dqu}}$ детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$. Действие для $\mathcal{S}_{\mathrm{Dqu}}$ имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\boldsymbol{\xi}]d\boldsymbol{\tau}, \qquad \mathbf{d}\boldsymbol{\tau} = d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \tag{7.8}$$

где действие для $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ имеет вид [19]

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{Dcl}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int \left\{-\kappa_0 m\sqrt{\dot{x}^i\dot{x}_i} + \hbar\frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} + \hbar\frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}+\dot{x}^0)}\right\}d\tau_0 \tag{7.9}$$

где $\dot{\mathbf{x}} \equiv d\mathbf{x}/d\tau_0$ и $\mathbf{z}$ есть постоянный 3-вектор, $\kappa_0 = \pm 1$. Детерминированная динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ имеет 10 степеней свободы. Шесть трансляционных степеней свободы описываются переменными $\mathbf{x}$, а четыре вращательных степени свободы описываются переменными $\boldsymbol{\xi}$. Вращательные степени свободы описываются нерелятивистски, хотя все операции, ведущие от первоначального действия к соотношению (7.8), являются релятивистски ковариантными, включая (7.7). Мировая линия классической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ является винтовой линией с времениподобной осью.

Винтообразная форма мировой линии дираковской частицы непринужденно объясняет существования спина частицы и магнитного момента как результата вращения при движении по винтовой линии. Квантовый подход не может объяснить такое устройство дираковской частицы. Таким образом, возникший после логической перезагрузки в динамике частицы, статистический подход позволяет исследовать устройство элементарных частиц. Это удивительно, как логическая перезагрузка производит существенные изменения в существующей теории, только переставляя фундаментальные утверждения теории.

8 Мобильность границы между динамикой частицы и геометрией пространства-времени

Движение частицы происходит в пространстве-времени, и свойства пространства-времени существенны при описании движения частицы. Граница между свойствами пространства-времени и свойствами законов движения (динамики) является неопределенной. Можно выбрать простые свойства геометрии пространства-времени и получить сложные законы динамики. Наоборот, можно выбрать простую динамику (свободное движение частицы) и получить сложную геометрию пространства-времени. Можно получить промежуточную версию, когда динамика и геометрия пространства-времени не очень просты. Исторически граница между физикой и геометрией пространства-времени двигалась в сторону геометрии пространства-времени. Этот процесс можно квалифицировать как геометризацию физики: (1) законы сохранения как следствия симметрии геометрии пространства-времени, (2) специальная теория относительности, (3) Общая теория относительности, (4) пятимерная геометрия Калуцы-Клейна, где движение заряженной частицы в заданных электромагнитном и гравитационном полях описывается как свободное движение в геометрии Калуцы-Клейна [21]. В двадцатом веке геометризация физики прекратилась, потому что мы знали только малую часть возможных геометрий пространства-времени. Римановы геометрии рассматривались как наиболее общий вид возможных геометрий пространства-времени. На самом деле, римановы геометрии являются лишь малой частью возможных геометрий пространства-времени. Наиболее общая геометрия пространства-времени полностью описывается в терминах мировой функции и только в терминах мировой функции. Такая геометрия называется физической геометрией [22].

В классической физике, гравитационное и электромагнитное поля являются единственными возможными силовыми полями, и представление Калуцы-Клейна реализует полную геометризацию физики. Но эта геометризация не полна в микромире, где существенны квантовые эффекты. Кроме того, риманова геометрия, которая используется в описании Калуцы-Клейна, довольно сложна. Риманова геометрия основана на нескольких базовых понятиях: (1) понятия топологии, (2) понятия локальной геометрии такие как размерность, система координат, метрический тензор и параллельный перенос. Работа с понятиями римановой геометрии не проще, чем работа с многочисленными понятиями динамики. В результате предпочитают работать с привычными понятиями динамики.

9 Логическая перезагрузка в геометрии пространства-времени

Если мы хотим реализовать геометризацию физики в микромире, то нужно использовать все возможные геометрии пространства-времени, включая дискретные геометрии пространства-времени. Любая геометрия пространства-времени получается как некоторое обобщение собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Описывая $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, традиционно используют представление, где базовыми понятиями являются (1) топологические понятия и (2) понятия локальной геометрии. Такое представление геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ будем называть векторным представлением (или V-представлением), потому что оно существенно использует линейное векторное пространство. Риманова геометрия и собственно евклидова геометрия являются непрерывными геометриями. Они имеют только одну геометрическую величину, общую с дискретной геометрией пространства-времени. Этой величиной является расстояние. Если мы хотим получить дискретную геометрию пространства-времени как обобщение $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, то следует представить $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в терминах расстояния ρ_{E} и только в терминах расстояния. Это возможно [22]. Такое представление геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является результатом логической перезагрузки, когда все базовые понятия V-представления: понятия топологии и понятия локальной геометрии выражаются через расстояние ρ_{E} и только через расстояние ρ_{E}. Вместо расстояния можно использовать мировую функцию $\sigma_{\mathrm{E}}=\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{E}}^2$, потому что мировая функция всегда вещественна для геометрии пространства-времени. После такой логической перезагрузки собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ превращается в монистическую концепцию, где все геометрические величины и понятия выражаются через единственную базовую величину: мировую функцию σ_{E}. Такое представление геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ называется σ-представлением геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Заменяя σ_{E} мировой функцией σ геометрии пространства-времени $\mathcal{G}$ во всех определениях геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, получаем геометрию пространства-времени $\mathcal{G}$ из $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Геометрию, которая полностью описывается мировой функцией будем называть физической геометрией. Такая процедура замены σ_{E} мировой функцией σ может быть интерпретирована как деформация собственно евклидовой геометрии [23, 24].

Например, в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ отрезок $\mathcal{T}_{[PQ]}$ прямой линии между точками P и Q в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ определяется как множество точек R, удовлетворяющих уравнению

$$\mathcal{T}_{[PQ]}=\left\{R|\sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}\left(P,R\right)}+\sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}\left(R,Q\right)}=\sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}\left(P,Q\right)}\right\},\quad \rho_{\mathrm{E}}=\sqrt{2\sigma_{\mathrm{E}}} \tag{9.1}$$

В геометрии пространства-времени $\mathcal{G}$ отрезок прямой линии определяется тем же соотношением

$$\mathcal{T}_{[PQ]}=\left\{R|\sqrt{2\sigma\left(P,R\right)}+\sqrt{2\sigma\left(R,Q\right)}=\sqrt{2\sigma\left(P,Q\right)}\right\} \tag{9.2}$$

но мировая функция σ отличается от σ_{E}. Вообще говоря, отрезок $\mathcal{T}_{[PQ]}$ в $\mathcal{G}=\{\sigma,\Omega\}$ не является одномерным множеством точек, тогда как $\mathcal{T}_{[PQ]}$ в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}=\{\sigma_{\mathrm{E}},\Omega\}$ является одномерным множеством точек. Математически это означает, что в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}=\{\sigma_{\mathrm{E}},\Omega\}$ любое сечение $\mathcal{S}\left(S,\mathcal{T}_{[PQ]}\right)$ отрезка $\mathcal{T}_{[PQ]}$ в точке $S\in\mathcal{T}_{[PQ]}$ состоит только из одной точки S,

$$\mathcal{S}\left(S,\mathcal{T}_{[PQ]}\right)=\left\{R|\sigma_{\mathrm{E}}\left(P,R\right)=\sigma_{\mathrm{E}}\left(P,S\right)\wedge\sigma_{\mathrm{E}}\left(Q,R\right)=\sigma_{\mathrm{E}}\left(Q,S\right)\right\}=\left\{S\right\},\quad S\in\mathcal{T}_{[PQ]} \tag{9.3}$$

тогда как в $\mathcal{G}=\{\sigma,\Omega\}$ то же самое сечение отрезка $\mathcal{T}_{[PQ]}$ в точке $S\in\mathcal{T}_{[PQ]}$ состоит, вообще, говоря из многих точек

$$\mathcal{S}\left(S,\mathcal{T}_{[PQ]}\right)=\left\{R|\sigma\left(P,R\right)=\sigma\left(P,S\right)\wedge\sigma\left(Q,R\right)=\sigma\left(Q,S\right)\right\}\subset\mathcal{T}_{[PQ]},\quad S\in\mathcal{T}_{[PQ]} \tag{9.4}$$

Здесь $\mathcal{S}\left(S,\mathcal{T}_{[PQ]}\right)$ есть сечение отрезка $\mathcal{T}_{[PQ]}$ в точке S. С одной стороны одно уравнение (9.2) в n-мерном пространстве описывает, вообще говоря, $(n-1)$-мерную поверхность, и это естественно. С другой стороны, отрезок (9.2) является отрезком прямой линии в геометрии пространства-времени $\mathcal{G}$, и это кажется несколько странным, почему этот отрезок не является одномерным. Отрезок $\mathcal{T}_{[PQ]}$ является одномерным в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}=\{\sigma_{\mathrm{E}},\Omega\}$. Кажется, что $\mathcal{T}_{[PQ]}$ должен быть тоже одномерным в любой геометрии пространства-времени. Но такой подход возможен только тогда, когда отрезок прямой линии $\mathcal{T}_{[PQ]}$ в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ рассматривается как базовый объект геометрии пространства-времени. Однако, если мировая функция является базовым объектом в геометрии пространства-времени, отрезок прямой линии $\mathcal{T}_{[PQ]}$ в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является производным объектом, который следует определять соотношением (9.1). Вообще говоря, отрезок прямой линии $\mathcal{T}_{[PQ]}$ не является одномерным. Но почему он является одномерным в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}} = \{\sigma_{\mathrm{E}}, \Omega\}$? Он является одномерным в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в силу специальных свойств мировой функции σ_{E}. Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является вырожденной геометрией, и различные геометрические объекты в произвольной геометрии пространства-времени могут совпадать в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.

Рассмотрим этот эффект на примере кругового цилиндра. В $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ он определяется своей осью и точкой P на его поверхности. Пусть F_1, F_2 суть две точки на оси кругового цилиндра. Цилиндр $Cl_{PF_1F_2}$ определяется как множество точек R

$$Cl_{PF_1F_2} = \{R | S_{F_1F_2R} = S_{F_1F_2P}\} \tag{9.5}$$

где $S_{F_1F_2R}$ есть площадь треугольника с вершинами в точках F_1, F_2, R. Площадь рассчитывается через длины сторон треугольника с помощью формулы Герона. Площади $S_{F_1F_2R}$ и $S_{F_1F_2P}$ выражаются через мировые функции между соответствующими точками. Пусть $\mathcal{T}_{[F_1F_2]}$ является прямолинейным отрезком между точками F_1, F_2, а точка $F_3 \in \mathcal{T}_{[F_1F_2]}$. Пусть $F_3 \neq F_1$, Тогда в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ форма кругового цилиндра зависит только от оси $\mathcal{T}_{[F_1F_2]}$, но не от выбора точек на этой оси, и

$$Cl_{PF_1F_2} = Cl_{PF_1F_3}, \qquad F_3 \in \mathcal{T}_{[F_1F_2]} \tag{9.6}$$

Однако, в произвольной геометрии пространства-времени $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$, вообще говоря, $Cl_{PF_1F_2} \neq Cl_{PF_1F_3}$, и в $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ имеется много цилиндров, соответствующих круговому цилиндру в собственно евклидовой геометрии. С точки зрения V-представления это интерпретируется как расщепление евклидова цилиндра в $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$. С точки зрения σ-представления тот факт, что формы цилиндров $Cl_{PF_1F_2}$ и $Cl_{PF_1F_3}$ различны, вообще говоря, представляется естественным. С этой точки зрения уравнение (9.6) означает вырождение цилиндров в евклидовой геометрии. Интерпретация соотношения (9.6) как вырождения является более корректной геометрической интерпретацией, потому что она не использует такие внешние структуры как линейное векторное пространство.

К сожалению, вырожденный характер $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ едва ли воспринимается математиками. Например Блюменталь построил дистантную геометрию [25], где расстояние было базовой величиной, как в физической геометрии. К сожалению, он не использовал принцип деформации. Он рассматривал кривую (и, в частности, прямую линию) как одномерное множество точек. Он был вынужден определять кривую как непрерывное отображение числового интервала $(0, 1)$ на множество точек дистантной геометрии. В результате его дистантная геометрия оказалась непоследовательной в том смысле, что дистантная геометрия содержит базовые понятия, которые содержат не только понятие расстояния.

При описании геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ σ-представление может квалифицировать как метрический подход к геометрии. При метрическом подходе построение геометрических объектов в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ не использует размерности геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ или системы координат. При метрическом подходе размерность геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и система координат не являются базовыми объектами геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Они определяются в терминах мировой функции σ_{E} геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и только в терминах σ_{E}. Определение (9.1) отрезка прямой линии $\mathcal{T}_{[PQ]}$ является примером определения геометрического объекта в терминах мировой функции. Построение геометрических объектов в терминах только мировой функции необходимо для отождествления одного и того же физического тела в различных геометриях пространства-времени.

Физические геометрии пространства-времени, вообще говоря, многовариантны. Многовариантность геометрии означает, что в точке C имеется много векторов $\mathbf{CD}$, $\mathbf{CD}'$, $\mathbf{CD}''$,... которые эквивалентны вектору $\mathbf{AB}$ в точке A, но векторы $\mathbf{CD}$, $\mathbf{CD}'$, $\mathbf{CD}''$,... не эквивалентны между собой. Такая ситуация имеет место в физических геометриях. Это связано с интранзитивностью отношения эквивалентности. В собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ отношение эквивалентности определяется следующим образом. Вектор $\mathbf{CD}$ эквивалентен вектору $\mathbf{AB}$ ($\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{AB}$)

$$(\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{AB}): \quad (\mathbf{CD}.\mathbf{AB}) = |\mathbf{CD}| \cdot |\mathbf{AB}| \wedge |\mathbf{CD}| = |\mathbf{AB}| \tag{9.7}$$

$$(\mathbf{CD}.\mathbf{AB}) = \sigma(C,B) + \sigma(D,A) - \sigma(C,A) - \sigma(D,B) \tag{9.8}$$

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{2\sigma(A,B)} \tag{9.9}$$

где $\sigma = \sigma_{\mathrm{E}}$. Разумеется, в любой физической геометрии эквивалентность двух векторов также определяется уравнениями (9.7) – (9.9). В $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в точке C имеется один и только один вектор $\mathbf{CD}$, который эквивалентен вектору $\mathbf{AB}$. Но в произвольной физической геометрии $\mathcal{G}$ имеется много векторов $\mathbf{CD}$, $\mathbf{CD}'$, $\mathbf{CD}''$,... которые эквивалентны вектору $\mathbf{AB}$. Векторы $\mathbf{CD}$, $\mathbf{CD}'$, $\mathbf{CD}''$,.. могут быть не эквивалентны между собой. Это означает, что отношение эквивалентности интранзитивно в $\mathcal{G}$, и геометрия $\mathcal{G}$ является неаксиоматизируемой, потому что в любой аксиоматизируемой геометрии отношение эквивалентности транзитивно.

Большинству математиков физические геометрии не нравятся, потому что они неаксиоматизируемы, и в физических геометриях нет теорем, которые используются при построении собственно евклидовой геометрии. Некоторые математики утверждают даже, что неаксиоматизируемые геометрии не существуют. Такой подход связан с тем фактом, что собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ была единственной геометрией, которая изучалась в течение последних двух тысяч лет. Изучение геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ состоит из доказательства многочисленных теорем. В результате многие исследователи полагают, что эти теоремы образуют содержание геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Они не могут представить себе евклидову геометрию без теорем. На самом деле теоремы являются атрибутами *построения евклидовой геометрии*, а не атрибутами самой евклидовой геометрии. Содержание евклидовой геометрии состоит из множества утверждений геометрии $\mathcal{P}_{\mathrm{E}}$. В физической геометрии $\mathcal{G}$ геометрические утверждения $\mathcal{P}$ получаются из евклидовых утверждений $\mathcal{P}_{\mathrm{E}}$ с помощью деформации, и доказывать теоремы нет необходимости.

Однако, это право математиков не рассматривать неаксиоматизируемые геометрии, потому что они имеют право изучать только часть возможных геометрий пространства-времени. Но физики не имеют такой возможности. Если геометрия пространства-времени зависит от распределения материи в пространстве-времени, то исследуя геометрию пространства-времени, физики должны рассматривать все возможные (физические) геометрии пространства-времени. Они не имеют права сказать: "Мы будем рассматривать только римановы геометрии пространства-времени, потому что только они исследованы в достаточной степени." Рассмотрение всех возможных геометрий пространства-времени (а не только римановых) приводит к расширенной общей теории относительности, где отсутствуют черные дыры из-за наведенной антигравитации [1, 2].

Заметим, что даже геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$ многовариантна относительно пространственноподобных векторов. Например, в $\mathcal{G}_{\rm M}$ векторы с координатами $\{r_1, r_1\cos\phi_1, r_1\sin\phi_1, z\}$ и $\{r_2, r_2\cos\phi_2, r_2\sin\phi_2, z\}$ эквивалентны пространственноподобному вектору $(0,0,0,z)$ при произвольных значениях величин r_1, r_2, ϕ_1, ϕ_2, но они, вообще говоря, не эквивалентны между собой. В результате могут существовать частицы (тахионы), имеющие протранственноподобную мировую линию. Но мировая линия тахиона вихляет с бесконечной амплитудой, и отдельных тахион нельзя обнаружить (но он существует). Тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационному полю. Тахионный газ является лучшим кандидатом на темную материю [26]. Разумеется, это обстоятельство не исключает других частиц темной материи. Однако существование только тахионного газа непринужденно объясняет феномен темной материи.

Дискретная геометрия пространства-времени многовариантна. Эта многовариантность порождает вихляние мировых линий элементарных частиц, которое означает стохастичность. Кроме того, дискретная геометрия пространства-времени формулируется в бескоординатном виде. Математики не могут построить риманову геометрию в бескоординатном виде.

10 Неадекватность операций линейного векторного пространства в многовариантной геометрии

Геометрический вектор (g-вектор) $\mathbf{AB}$ определяется как упорядоченное множество $\mathbf{AB} = \{A, B\}$ из двух точек $A, B \in \Omega$. Здесь Ω есть множество точек (событий) пространства-времени, где задана геометрия. Мы используем термин g-вектор (вектор), потому что есть еще линейные векторы (линвекторы) u, которые определяются как элементы линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$. Линвекторы $u \in \mathcal{L}_n$ являются абстрактными величинами, чьи свойства определяются системой аксиом. Практически, операции суммирования линвекторов и умножения линвектора определяются в $\mathcal{L}_n$. При некоторых условиях операции над линвекторами могут быть применены к g-векторам.

Линвекторы и g-векторы имеют различные свойства. Каждый линвектор существует в одном экземпляре, тогда как имеется много g-векторов $\mathbf{CD}$, которые эквивалентны g-вектору $\mathbf{AB}$. Геометрический вектор $\mathbf{CD}$ эквивалентен (равен) g-вектору $\mathbf{AB}$ ($\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{AB}$), если выполнены условия (9.7) – (9.9). Определение (9.7) – (9.9) эквивалентности двух g-векторов зависит только от мировой функции. Оно не зависит ни от размерности, ни от системы координат. Определение (9.7) – (9.9) эквивалентности двух g-векторов может быть использовано в любой физической геометрии.

Пусть $S_{\mathbf{AB}}$ есть множество g-векторов $\mathbf{CD}$, которые эквивалентны g-вектору $\mathbf{AB}$.

Если отношение эквивалентности транзитивно, то множество $S_{\mathbf{AB}}$ образует класс эквивалентности[$\mathbf{AB}$] g-вектора $\mathbf{AB}$. Он содержит только g-векторы, эквивалентные между собой. В этом случае всякому классу эквивалентности [$\mathbf{AB}$] может быть сопоставлен некоторый линвектор $u \in \mathcal{L}_n$, и это соответствие будет один к одному, потому что класс эквивалентности существует только в одном экземпляре. Если отношение эквивалентности интранзитивно и множество $S_{\mathbf{AB}}$ не образует класса эквивалентности, то нельзя установить соотношение между линвекторами и g-векторами, потому что множество $S_{\mathbf{AB}}$ содержит неэквивалентные g-векторы. В результате операции линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$ будут неадекватны в многовариантной геометрии, где отношение эквивалентности интранзитивно.

Формально можно ввести суммирование g-векторов в многовариантной геометрии, но это суммирование будет многозначным. Можно ввести сумму g-векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{CD}$, если $B = C$.

$$\mathbf{AB} + \mathbf{BD} = \mathbf{AD} \tag{10.1}$$

Однако, пусть нужно просуммировать g-векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{CD}$, при $B \neq C$. Пусть g-вектор $\mathbf{PQ} = \mathbf{AB} + \mathbf{CD}$, где точка P задана и точка Q должна быть определена. Получаем

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{PF} + \mathbf{FQ} \tag{10.2}$$

где точки F и Q определяются из соотношений

$$(\mathbf{PF}\mathrm{eqv}\mathbf{AB}) \wedge (\mathbf{FQ}\mathrm{eqv}\mathbf{CD}) \tag{10.3}$$

В многовариантной геометрии уравнения (10.3) имеют много решений для точек F и Q. В результате операция суммирования оказывается многозначной. В одновариантной геометрии соотношения (10.3) имеют единственное решение для точек F и Q, и суммирование (10.2) определяется однозначно. Умножение g-вектора на число и разложение g-вектора также оказываются многозначными в многовариантной геометрии.

11 σ-представление собственно евклидовой геометрии

В σ-представлении геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ имеется два вида соотношений: (1) общегеометрические соотношения и (2) специальные соотношения. Общегеометрические соотношения представляют собой соотношения, которые записываются только в терминах мировых функций. Общегеометрические соотношения верны для любой физической геометрии. Общегеометрические соотношения описывают свойства линейного векторного пространства без ссылки на него.

Первым общегеометрическим соотношением является определение скалярного произведения двух g-векторов (9.8). Определение эквивалентности двух g-векторов (9.7) – (9.9) также является общегеометрическим соотношением.

Линейная зависимость n g-векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, ...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ определяется соотношением

$$F_n\left(\mathcal{P}_n\right) = 0, \quad F_n\left(\mathcal{P}_n\right) \equiv \det\left|\left|(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)\right|\right|, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{11.1}$$

где $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и $F_n(\mathcal{P}_n)$ есть определитель Грама. Обращение в нуль определителя Грама является необходимым и достаточным условием линейной зависимости n g-векторов. Условие линейной зависимости относят обычно к свойствам линейного векторного пространства. Это кажется бессмысленным, если нельзя ввести линейного векторного пространства. Тем не менее соотношение (11.1) записанное как общегеометрическое соотношение описывает некоторые общегеометрические свойства g-векторов, которые в собственно евклидовой геометрии преобразуются в свойство линейной зависимости. В частности, размерность собственно евклидовой геометрии определяется в терминах мировой функции с помощью соотношений типа (11.1) как максимальное число линейно независимых g-векторов, которое возможно в евклидовом пространстве. Это обстоятельство кажется несколько неожиданным, потому что в традиционном представлении (векторное представление) [27]) евклидовой геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{E}$ размерность геометрии постулируется в начале построения геометрии.

Например, построение римановой геометрии традиционно начинается с определения многообразия, его размерности и системы координат на нем. Это означает, что система координат рассматривается как базовый объект римановой геометрии, хотя система координат является только способом описания, который может быть изменен многими способами.

12 Специфические свойства n-мерного евклидова пространства

Наряду с общегеометрическими свойствами, связанными главным образом со свойствами линейного векторного пространства, имеются специальные геометрические соотношения, описывающие свойства мировой функции. Например имеются соотношения, которые являются необходимыми и достаточными условиями того обстоятельства, что мировая функция σ_E является мировой функцией n-мерного евклидова пространства. Они имеют вид [22]:

I. Определение размерности:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{12.1}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама n-ого порядка (11.1). Геометрические векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$ являются базисными g-векторами в прямолинейной системе координат K_n с началом в точке P_0. Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, ...n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\, g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i, l = 1, 2, ...n \tag{12.2}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{12.3}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma_\mathrm{E}(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\,(x_i(P) - x_i(Q))\,(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{12.4}$$

где координаты $x_i(P)$, $x_i(Q)$, $i = 1, 2, ...n$ точек P и Q суть ковариантные координаты соответственно g-векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ в системе координат K_n. Ковариантные координаты определены соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1, 2, ...n \tag{12.5}$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения g_k

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{12.6}$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{12.7}$$

рассматриваемая как уравнения для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ...n$ имеет всегда одно и только одно решение. Условия I – IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства, которое определяется соотношениями (12.1).

Все соотношения I – IV записаны в терминах мировой функции. Они представляют собой ограничения на вид мировой функции собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\rm E}$. Ограничения (12.1), определяющие размерность через вид мировой функции, выглядят довольно неожиданно. Они содержат массу ограничений, налагаемых на мировую функцию собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\rm E}$, и они необходимы. При традиционном подходе к геометрии вместо многочисленных ограничений (12.1) используется простое предположение: "Пусть размерность евклидова пространства равна n."

При векторном представлении собственно евклидовой геометрии, которая основывается на использовании линейного векторного пространства, размерность рассматривается как изначальное свойство линейного векторного пространства и как изначальное свойство собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\rm E}$. Ситуация, когда размерность геометрии различна в разных точках пространства Ω, или когда она является неопределенной, не рассматривается. При векторном представлении евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\rm E}$ не различают между общегеометрическими соотношениями и специальными соотношениями геометрии.

При метрическом подходе к геометрии, когда пространство-время описывается в терминах только расстояния ρ или в терминах только мировой функции $\sigma = \rho^2/2$, любая модификация геометрии пространства-времени выглядит очень просто. Для получения модификации геометрии заменяют мировую функцию и получают модифицированную геометрию, описываемую новой мировой функцией. Если геометрия описывается с помощью нескольких фундаментальных понятий, всякая модификация требует модификации всех фундаментальных понятий. Эта модификация различных фундаментальных понятий должна быть согласована, чтобы модифицированная геометрия была непротиворечивой. Чем больше число фундаментальных понятий, тем труднее согласование между модифицированными понятиями. Монистическая концепция геометрии, когда имеется только одна фундаментальная величина, является наилучшей концепцией, потому что отсутствует проблема согласования различных базовых модифицированных понятий. С этой точки зрения метрический подход к геометрии пространства-времени является наилучшим подходом. Он дает наиболее общее описание геометрии пространства-времени.

Таким образом, логическая перезагрузка в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ позволяет без проблем построить максимальное число различных геометрий пространства-времени.

13 Каркасная концепция динамики элементарных частиц

При квантовом подходе рассматриваются только точечные частицы, и бесполезно обсуждать структуру частиц. В рамках этого подхода существуют составные частицы, состоящие из нескольких точечных частиц. Например, протон и другие адроны состоят из кварков, связанных глюонами. Кварки никогда не наблюдались отдельною Они могут находиться только внутри адронов. Другими словами, кварки наблюдаются как элементы структуры протона (или адрона). Их нельзя извлечь из протона или других адронов. По этой причине было бы более естественно рассматривать кварки как элементы адронной структуры. К сожалению, квантовая теория не может рассматривать структуру элементарных частиц. Она может рассматривать только точечные частицы и агрегации из точечных частиц. Математический аппарат квантовой теории поля не способен описывать композитные элементарные частицы. Он может описывать только агрегации точечных частиц. Такое свойство квантовой теории обусловлено тем фактом, что пространство-время непрерывно в квантовой теории поля, и делимость геометрических объектов неограничена.

В дискретной геометрии пространства-времени, где имеется минимальная элементарная длина, делимость геометрических объектов ограничена. В такой ситуации возможная структура геометрических объектов кажется очень естественной. Статистический подход к анализу уравнения Дирака показывает [17, 19, 20], Что мировая линия ассоциирующаяся с дираковской частицей является винтовой линией с времениподобной осью. Вращательные степени свободы описываются нерелятивистски, и нельзя решить определенно, происходит ли вращение со сверхсветовой скоростью или нет. Дираковская частица может описываться как ротатор. В дискретной геометрии пространства-времени винтовая линия может быть получена, если дираковская частица не является точечной и ее каркас состоит более чем из двух точек [28]. В этом случае разумно говорить о структуре дираковской частицы.

Всякий геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ в пространстве-времени описывается его каркасом $\mathcal{P}_n$ и оболочкой каркаса. Каркас $\mathcal{P}_n$ представляет собой множество из $n+1$ пространственно-временных точек

$$\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$$

Жестко связанных между собой. то означает, что расстояния между точками

$$\mu_{ik} = \sqrt{2\sigma\left(P_i, P_k\right)}, \quad i, k = 0, 1, ..n \tag{13.1}$$

не изменяются при любом перемещении геометрического объекта $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$. Оболочка каркаса описывается как множество точек R, которые являются нулями некоторой функции от расстояний между точками $\{\mathcal{P}_n, R\}$. Смотри детали в [29]. Примерами геометрических объектов являются отрезок прямой $\mathcal{T}_{[PQ]}$ (9.2) и круговой цилиндр $Cl_{PF_1F_2}$, определенный формулой (9.5).

Предполагается, что любое физическое тело имеет форму геометрического объекта. Не всякое подмножество точек пространства-времени является геометрическим объектом. Следя за движением каркаса $\mathcal{P}_n$ физического тела (элементарной частицы) можно следить за движением физического тела. Расстояния (13.1) содержат всю геометрическую информацию о положении геометрического объекта за исключением его ориентации. Ориентация геометрического объекта $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ описывается его каркасом $\mathcal{P}_n$. Геометрический вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является ведущим вектором, который определяет движение физического тела в пространстве-времени. Длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ ведущего g-вектора определяет длину звена мировой цепи $\mathcal{C}$, которая описывает движение каркаса частицы $\mathcal{P}_n$ в пространстве-времени.

Мировая цепь $\mathcal{C}$ связанных каркасов определяется соотношением

$$\mathcal{C} = \bigcup_{s=-\infty}^{s=+\infty} \mathcal{P}_n^{(s)} \tag{13.2}$$

Каркасы $\mathcal{P}_n^{(s)}$ мировой цепи связаны в том смысле, что точка P_1 каркаса является точкой P_0 смежного каркаса. Это означает

$$P_1^{(s)} = P_0^{(s+1)}, \qquad s = ...0, 1, ... \tag{13.3}$$

Геометрический вектор $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)} = \mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_0^{(s+1)}$ является ведущим g-вектором, который определяет направление мировой цепи.

Если движение частицы свободное, то смежные каркасы эквивалентны

$$\mathcal{P}_n^{(s)}\mathrm{eqv}\mathcal{P}_n^{(s+1)}: \qquad \mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)}\mathrm{eqv}\mathbf{P}_i^{(s+1)}\mathbf{P}_k^{(s+1)}, \qquad i,k = 0,1,...n, \qquad s = ..0,1,.. \tag{13.4}$$

Если частица описывается каркасом $\mathcal{P}_n^{(s)}$, то мировая цепь (13.4) имеет $n(n+1)/2$ инвариантов(13.1).

Главное предположение каркасной концепции динамики элементарных частиц утверждает, что динамика элементарных частиц может быть полностью геометризована. Это означает, что движение любой элементарной частицы может быть представлено как свободное движение *в правильной геометрии* пространства-времени. Уравнения(13.4) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \sigma\left(P_i^{(s+1)}, P_k^{(s)}\right) + \sigma\left(P_k^{(s+1)}, P_i^{(s)}\right) - \sigma\left(P_i^{(s+1)}, P_i^{(s)}\right) - \sigma\left(P_k^{(s+1)}, P_k^{(s)}\right) \\ = \; & 2\sigma\left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)}\right), \quad i,k = 0,1,...n, \quad s \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{13.5}$$

$$\sigma\left(P_i^{(s+1)}, P_k^{(s+1)}\right) = \sigma\left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)}\right), \quad i,k = 0,1,...n, \quad s \in \mathbb{N} \tag{13.6}$$

$$P_0^{(s+1)} = P_1^{(s)}, \quad s \in \mathbb{N} \tag{13.7}$$

Уравнения (13.7) образуют D тривиальных динамических уравнений, где D есть координатная размерность геометрии пространства-времени (число координат, описывающих точки пространства-времени). Число динамических переменных (координат точек $P_1, P_2, ...P_n$) равно nD. Число нетривиальных динамических уравнений (13.5), (13.6) равно $n(n+1)$. Оно может не совпадать, вообще говоря, с nD. Все параметры частицы могут быть геометризованы и выражены через $n(n+1)/2$ величин μ_{ik}, определяемых соотношением (13.1). В частности, в случае точечной частицы, где $n = 1$, единственная величина $\mu = \mu_{01}$ связана с массой частицы m с помощью соотношения

$$m = b\mu \tag{13.8}$$

где b есть некоторая универсальная постоянная.

Динамические уравнения (13.4) описывают движение свободной частицы в правильной геометрии пространства-времени. Эти динамические уравнения могут быть записаны в произвольной геометрии пространства-времени. Однако тогда появляются дополнительные силовые поля.

Запишем уравнения (13.5), (13.6) в геометрии пространства-времени Минковского. Получим

$$\sigma(P,Q) = \sigma_{\mathrm{M}}(P,Q) + d(P,Q) \tag{13.9}$$

где $\sigma_{\mathrm{M}}(P,Q)$ есть мировая функция пространственно-временной геометрии Минковского. Величина $d(P,Q)$ определяет некоторое силовое поле, действующее на частицу в геометрии Минковского. Вместо (13.5), (13.6) получаем

$$\begin{aligned} &\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_i^{(s+1)}, P_k^{(s)}\right) + \sigma_{\mathrm{M}}\left(P_k^{(s+1)}, P_i^{(s)}\right) - \sigma_{\mathrm{M}}\left(P_i^{(s+1)}, P_i^{(s)}\right) - \sigma_{\mathrm{M}}\left(P_k^{(s+1)}, P_k^{(s)}\right) \\ =\ &2\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)}\right) + 2d\left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)}\right) + w\left(P_i^{(s+1)}, P_k^{(s+1)}, P_i^{(s)}, P_k^{(s)}\right), \end{aligned} \tag{13.10}$$

$$i,k = 0,1,...n, \quad s \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_i^{(s+1)}, P_k^{(s+1)}\right) - \sigma_{\mathrm{M}}\left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)}\right) \\ =\ &-d\left(P_i^{(s+1)}, P_k^{(s+1)}\right) + d\left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)}\right), \quad i,k = 0,1,...n, \quad s \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{13.11}$$

где

$$P_0^{(s+1)} = P_1^{(s)}, \quad i,k = 0,1,...n, \quad s \in \mathbb{N} \tag{13.12}$$

$$\begin{aligned} w\left(P_i^{(s+1)}, P_k^{(s+1)}, P_i^{(s)}, P_k^{(s)}\right) &= -d\left(P_i^{(s+1)}, P_k^{(s)}\right) - d\left(P_k^{(s+1)}, P_i^{(s)}\right) + d\left(P_i^{(s+1)}, P_i^{(s)}\right) \\ +d\left(P_k^{(s+1)}, P_k^{(s)}\right), \quad i,k &= 0,1,...n, \quad s \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{13.13}$$

Динамические уравнения (13.10) описывают движение частицы (ее каркаса) в силовом поле w.

В простейшем случае точечной частицы, когда ее каркас состоит из двух точек, динамические уравнения (13.10), (13.11) имеют вид

$$\left|\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}}^2 - \left|\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}^2 = 2d\left(P_0^{(s)}, P_1^{(s)}\right) - 2d\left(P_1^{(s)}, P_1^{(s+1)}\right) \tag{13.14}$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}.\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}\right)_{\mathrm{M}} - \left|\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}^2 \\
&= 3d\left(P_0^{(s+1)}, P_0^{(s)}\right) + d\left(P_1^{(s+1)}, P_1^{(s)}\right) - d\left(P_0^{(s+1)}, P_1^{(s)}\right) - d\left(P_1^{(s+1)}, P_0^{(s)}\right)
\end{aligned} \tag{13.15}
$$

где используется, что $P_1^{(s)} = P_0^{(s+1)}$.

В случае, когда ведущий вектор $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}$ является времениподобным, можно ввести угол $\phi_{01}^{(s)}$ между векторами $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}$ и $\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}$ в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Определим

$$
\cosh\phi_{01}^{(s)} = \frac{\left(\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}.\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}\right)_{\mathrm{M}}}{\left|\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}\left|\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}}} \tag{13.16}
$$

С помощью уравнения (13.16) получаем из (13.15)

$$
\begin{aligned}
&\cosh\phi_{01}^{(s)} - \frac{\left|\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}}{\left|\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}}} \\
&= \frac{3d\left(P_0^{(s+1)}, P_0^{(s)}\right) + d\left(P_1^{(s+1)}, P_1^{(s)}\right) - d\left(P_0^{(s+1)}, P_1^{(s)}\right) - d\left(P_1^{(s+1)}, P_0^{(s)}\right)}{\left|\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}}\left|\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}}
\end{aligned} \tag{13.17}
$$

Если $|d| \ll \left|\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}$, то из (13.17) следует

$$
\begin{aligned}
&1 + 2\sinh^2\frac{\phi_{01}^{(s)}}{2} - 1 - \frac{\left(d\left(P_0^{(s)}, P_1^{(s)}\right) - d\left(P_1^{(s)}, P_1^{(s+1)}\right)\right)}{\left|\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}}^2} \\
&= \frac{3d\left(P_0^{(s+1)}, P_0^{(s)}\right) + d\left(P_1^{(s+1)}, P_1^{(s)}\right) - d\left(P_0^{(s+1)}, P_1^{(s)}\right) - d\left(P_1^{(s+1)}, P_0^{(s)}\right)}{\left|\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}\right|_{\mathrm{M}}\left|\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}}
\end{aligned}
$$

Тогда в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ уравнение (13.17) имеет вид

$$
\sinh\frac{\phi_{01}^{(s)}}{2} = \frac{\sqrt{4d\left(P_0^{(s+1)}, P_0^{(s)}\right) - d\left(P_0^{(s+1)}, P_1^{(s)}\right) - d\left(P_1^{(s+1)}, P_0^{(s)}\right)}}{\sqrt{2}\left|\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{\left|\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}\right|_{\mathrm{M}}^2}\right) \tag{13.18}
$$

Таким образом, если поле $d = 0$, то угол между смежными звеньями $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}$ и $\mathbf{P}_0^{(s+1)}\mathbf{P}_1^{(s+1)}$ обращается в нуль. Если d малая величина, то смежное звено располагается на конусе с углом ϕ_{01} при вершине, который определяется соотношением (13.18).

Вообще, силовое поле в правой части равенства(13.18) зависит от трех точек даже в простейшем случае точечной частицы, описываемой двумя точками каркаса.

В пределе непрерывной геометрии это соответствует случаю, когда динамические уравнения содержат векторное силовое поле F_k и производные $\partial_i F_k$ от F_k. В частности, движение частицы в гравитационном поле, описываемом потенциалом Ньютона V имеет вид [30]

$$\begin{aligned} & \dot{v}_\parallel^2 \left(1+\frac{v_\parallel^2}{c^2-2V-\mathbf{v}^2}\right) - 2\dot{v}_\parallel \left(|\boldsymbol{\nabla} V| - \frac{(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla} V)\, v_\parallel}{c^2-2V-\mathbf{v}^2}\right) + \left\langle \dot{\mathbf{v}}_\perp^2 \right\rangle \\ = & -\frac{(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla} V)^2 + (\mathbf{v}_\perp \dot{\mathbf{v}}_\perp)^2}{c^2-2V-\mathbf{v}^2} - \frac{1}{c^2} v^\alpha v^\beta \partial_\alpha \partial_\beta V \end{aligned} \qquad (13.19)$$

В нерелятивистском случае, когда $\mathbf{v}^2 \ll c^2$ из (13.19) следует, что

$$\dot{v}_\parallel = |\boldsymbol{\nabla} V| \pm \sqrt{|\boldsymbol{\nabla} V|^2 - \langle \dot{\mathbf{v}}_\perp^2 \rangle}, \quad \left\langle \dot{\mathbf{v}}_\parallel \right\rangle = \boldsymbol{\nabla} V \qquad (13.20)$$

где $\dot{\mathbf{v}}_\parallel$ и $\dot{\mathbf{v}}_\perp$ суть компоненты ускорения $\dot{\mathbf{v}}$, которые соответственно параллельны и перпендикулярны к $\boldsymbol{\nabla} V$. Символ $\langle . \rangle$ означает усреднение В релятивистском случае $\dot{\mathbf{v}}$ зависит от $v^\alpha v^\beta \partial_\alpha \partial_\beta V$. Этот пример показывает, что каркасная концепция динамики имеет больше возможностей для описания динамики.

Логическая перезагрузка в динамике частиц и евклидовой геометрии позволяет построить такую концепцию динамики частиц, которая существенно отличается от традиционной концепции динамики частиц, созданной Лагранжем и Эйлером.

14 Непостижимая эффективность логической перезагрузки

Два рассмотренных примера логической перезагрузки демонстрируют непостижимую эффективность этой очень простой процедуры. Простая замена детерминированной частицы статистическим ансамблем детерминированных частиц позволяет создать единый формализм для описания детерминированных и стохастических частиц. Оказывается, что квантовые частицы являются стохастическими частицами. Квантовая механика обосновывается как динамика статистических ансамблей стохастических частиц.

Не возникает проблемы объединения квантовых принципов с принципами теории относительности. Рождение пар описывается в терминах статистического ансамбля. Неожиданно обнаруживается κ-поле, ответственное за рождение пар.

Рассматривая конечный результат, можно утверждать, что переход к единому формализму для описания произвольных частиц осуществляется как логическая перезагрузка в концепции классической динамики детерминированных частиц. Этот переход сопровождается изменением математического формализма. Статистический ансамбль рассматривается как динамическая система, состоящая из бесконечного числа независимых тождественных частиц. В результате статистический ансамбль рассматривается как сплошная среда. Такое рассмотрение отличается от случая, когда статистический ансамбль описывается функцией распределения в фазовом пространстве. При переходе к описанию в терминах волновой функции используется интегрирование трех уравнений (4.5), описывающих движение частицы в заданном поле скоростей. Скорости в (4.5) задаются неявно уравнениями (4.3) (4.4). Такой способ интегрирования выглядит довольно неожиданно. Новый математический формализм порождает некоторые трудности в его восприятии. В результате ключевые точки логической перезагрузки оказываются связанными с деталями математического формализма. В этом случае появляется квантовый принцип линейности. Кроме того, в концепции движения стохастических частиц нет такой проблемы, как объединение принципов квантовой механики с принципами теории относительности. Достаточно рассмотреть релятивистский лагранжиан для статистического ансамбля, для того, чтобы получить "это объединение". Но наиболее важной чертой статистического описания стохастических частиц является то, что эта концепция приводит к структурному подходу к теории элементарных частиц. Квантовые принципы не позволяют получить структурный подход к элементарным частицам, потому что квантовая механика реализует слишком грубую аппроксимацию. Квантовые принципы не позволяют получить κ-поле, которое ответственно за рождение пар. Обнаружение κ-поля является первым шагом к структурному подходу. Квантовые принципы не позволяют получить винтообразную форму мировой линии электрона и объяснить появление спина и магнитного момента.

Маделунг [5] и Бом [31] использовали гидродинамику для описания квантовых явлений, но они стартовали с уравнения Шредингера и квантовых принципов. Они рассматривали потенциальное течение "квантового флюида". Они не могли выйти за квантовые принципы и не могли получить квантовую механику как частный случай более общего описания.

Главной причиной появления статистического обоснования квантовой механики было рассмотрение статистического ансамбля как динамической системы. В нерелятивистском описании стохастических частиц обычно используются статистические ансамбли, но они описываются с помощью функции распределения $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$, которая описывает распределение в фазовом пространстве координат и импульсов. При таком описании статистический ансамбль не является динамической системой. Такое описание не является релятивистским описанием, потому что понятие фазового пространства не является релятивистским понятием. Нерелятивистская квантовая механика является релятивистской концепцией, потому что нерелятивистским является только среднее движение стохастических частиц. Стохастическая составляющая скорости частицы может быть релятивистской, и статистический ансамбль следует описывать релятивистски. С практической точки зрения описание статистического ансамбля как динамической системы означает, что *понятие вероятности не используется в описании статистического ансамбля.*

Релятивистский подход к описанию статистического ансамбля был осуществлен в работах [32, 33, 34] без логической перезагрузки. Статистический ансамбль стохастических частиц описывался как динамическая система (сплошная среда). В результате было получено статистическое обоснование квантовой механики в виде статистического описания стохастических частиц.

Что касается логической перезагрузки, то она подводит итог ситуации: переход к единому формализму динамики детерминированных и стохастических частиц производится на фундаментальном уровне, и он производится в рамках доброй старой классической динамики. Этот переход осуществляется с помощью простой логической перезагрузки. *Никаких дополнительных гипотез не используется при таком переходе.* Тем не менее результат такой простой процедуры впечатляющий. Обычно принято считать, что квантовые принципы являются первыми физическими принципами природы, и трудно принять ту точку зрения, когда квантовые принципы являются вторичными принципами, порожденными статистическим описанием движения стохастических частиц.

После перехода к статистическому обоснованию квантовой механики возникает проблема. Почему свободные элементарные частицы движутся стохастически? Ответом на этот вопрос является дискретная геометрия пространства-времени в микромире. Идея дискретной геометрии пространства-времени – старая идея. К сожалению, мы не знаем, как описывать дискретную геометрию. Считают, что дискретная геометрия – это геометрия на решетке. Идея физической геометрии, известной как дистантная геометрия [35, 25] тоже очень стара. Однако математический аспект дистантной геометрии не был разработан надлежащим образом. Не было известно, как следовало использовать расстояние для построения геометрических объектов и геометрических соотношений. Пытались использовать методы дифференциальной геометрии, но они оказались неэффективными, потому что методы дифференциальной геометрии пригодны только для непрерывных геометрий. Дистантная геометрия не чувствительна к непрерывности. Она может быть использована как для непрерывных, так и для дискретных геометрий. В результате методы дифференциальной геометрии не эффективны в применении к дистантной геометрии.

Всякая геометрия строится как обобщение собственно евклидовой геометрии. Евклидова геометрия имеет два независимых аспекта: (1) геометрия как наука о форме геометрических объектов и их взаимном расположении (физическая геометрия) и (2) геометрия как логическое построение (математическая геометрия). Эти два аспекта независимы. При описании пространства-времени используется физическая геометрия, которая полностью описывается единственной величиной – расстоянием. В этом случае не важно, представляет ли собой геометрия логическое построение. Евклидова геометрия является и математической геометрией, и физической геометрией одновременно. Строя евклидову геометрию как логическое построение (математическую геометрию), получаем геометрию как науку о свойствах геометрических объектов (физическую геометрию). Работая в течение двух тысяч лет только с евклидовой геометрией, исследователи не различают между двумя независимыми аспектами геометрии. Все это время был известен только евклидов (логический) метод построения геометрии. Он использовался для построения любой геометрии, потому что метод построения физической геометрии не был известен. Независимость двух аспектов геометрии тоже не была известна.

Ситуация существенно изменилась, когда был получен прямой метод построения физической геометрии (принцип деформации [23]). Собственно евклидова геометрия представляется в виде физической геометрии (логическая перезагрузка), т.е. все соотношения и геометрические объекты евклидовой геометрии описываются в терминах евклидовой мировой функции σ_{E} (или в терминах евклидова расстояния). После этого евклидова мировая функция σ_{E} заменяется мировой функцией σ физической геометрии $\mathcal{G}$. В результате получаются все соотношения геометрии $\mathcal{G}$. При этом не важно, может ли геометрия $\mathcal{G}$ рассматриваться как логическое построение.

Представление евклидовой геометрии в терминах одной величины – мировой функции представляет собой логическую перезагрузку в формулировке евклидовой геометрии. Евклидова геометрия становится монистической концепцией, которая может быть преобразована в любую физическую геометрию с помощью простой замены мировой функции. Всякая физическая геометрия (кроме евклидовой) может быть получена с помощью принципа деформации.

В результате число возможных геометрий пространства-времени (а они все являются физическими геометриями) возрастает. Геометрия пространства-времени в микромире оказывается многовариантной и дискретной. Такая геометрия пространства-времени объясняет стохастическое движение свободных элементарных частиц. Появление неримановых геометрий пространства-времени приводит к расширению общей теории относительности на неримановы геометрии пространства-времени. В расширенной ОТО появляется индуцированная антигравитация, которая препятствует образованию черных дыр [1, 2].

Рассмотрение дискретной геометрии пространства-времени позволяет произвести геометризацию физики и построить каркасную концепцию элементарных частиц [29]. Каркасная концепция (КК) реализует структурный подход к теории элементарных частиц. Например, обнаружение κ-поля является проявлением структурного подхода. Этот подход основан на использовании физических принципов и использовании минимального числа фундаментальных понятий, тогда как стандартная модель (СМ) элементарных частиц основана эмпирическом подходе и использовании экспериментальных данных. Взаимоотношение каркасной концепции со стандартной моделью напоминает взаимоотношение атомной физики с периодической системой химических элементов. Эти две концепции (КК и СМ) не противоречат одна другой. Это только две разные точки зрения на теорию элементарных частиц. Например, с точки зрения каркасной концепции кварки являются просто элементами адронной структуры, тогда как с точки зрения стандартной модели кварки являются элементарными частицами.

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, General relativity extended to non-Riemannian space-time geometry. *e-print /0910.3582v7*

[2] Yu. A. Rylov, Induced antigravitation in the extended general relativity. *Gravitation and Cosmology*, Vol. **18**, No. 2, pp. 107–112, (2012). DOI: 10.1134/S0202289312020089

[3] Yu.A.Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.* **40**, No.1, 256-278, (1999).

[4] Yu. A. Rylov, Uniform formalism for description of dynamic quantum and stochastic systems. *e-print /physics/0603237v6*

[5] E. Madelung, *Z.Phys.* **40** (1926) 322.

[6] Yu.A.Rylov, Quantum mechanics as a dynamic construction. *Found. Phys.* **28**, No.2, 245-271, (1998).

[7] C.C. Lin, *Proc. International School of Physics "Enrico Fermi".* Course XXI, Liquid Helium , New York, Academic. 1963, pp. 93-146.

[8] A. Clebsch, *J. reine angew. Math.* **54** , 293, (1857).

[9] A. Clebsch, *J. reine angew. Math.* **56** , 1, (1859).

[10] Yu.A.Rylov, Classical description of pair production. *e-print /physics/0301020.*

[11] J. Glimm and A. Jaffe, *Phys. Rev.* **176** (1968) 1945.

[12] J. Glimm and A. Jaffe, *Ann. Math.* **91** (1970) 362.

[13] J. Glimm and A. Jaffe, *Acta Math.* **125** (1970) 203.

[14] J. Glimm and A. Jaffe, *J. Math. Phys.* **13** (1972) 1568.Liquid Helium , New York, Academic. 1963, pp. 93-146.

[15] Yu.A. Rylov, О связи между вектором энергии-импульса и каноническим импульсом в релятивистской механике. *Теор. и Мат. физика*, **2**, 333-337 (1970).

[16] Yu.A. Rylov, On quantization of non-linear relativistic field without recourse to perturbation theory. *Int. J. Theor. Phys.* **6**, *181-204, (1972).*

[17] Yu.A. Rylov, Dirac equation in terms of hydrodynamic variables , *Advances Appl. Clifford Algebras.* **5**, No. 1, 1-40, (1995)

[18] Yu.A. Rylov, Statistical ensemble technique in application to description of the electron. *Advances Appl. Clifford Algebras* **7**(S), *216-228, (1997).*

[19] Yu. A. Rylov, Is the Dirac particle composite? *e-print /physics/0410045.*

[20] Yu. A. Rylov, Is the Dirac particle completely relativistic? *e-print /physics/0412032.*

[21] Ю.С.Владимиров, *Геометродинамика*, гл. 8, Москва, Бином, 2005

[22] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), see also *e-print /math.MG/0103002.*

[23] Yu. A.Rylov, Deformation principle and further geometrization of physics. *e-print* /0704.3003

[24] Yu.A. Rylov, Non-Euclidean method of the generalized geometry construction and its application to space-time geometry in *Pure and Applied Differential geometry* pp.238-246. eds. Franki Dillen and Ignace Van de Woestyne. Shaker Verlag, Aachen, 2007. Смотри также *e-print Math.GM/0702552*

[25] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953

[26] Yu. A. Rylov, Dynamic equations for tachyon gas, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 133(10), 3683- 3695, (2013),. doi:10.1007/s10773-013-1674-4

[27] Yu. A. Rylov, Different conceptions of Euclidean geometry and their application to the space-time geometry. *e-print /0709.2755v4*

[28] Yu. A.Rylov, Discrimination of particle masses in multivariant space-time geometry. *e-print /0712.1335.*

[29] Yu. A.Rylov, Discrete space-time geometry and skeleton conception of particle dynamics. *Int. J. Theor. Phys.* **51**, *Issue 6 (2012), 1847-1865, (2012).* Смотри также *e-print* /1110.3399v1

[30] Ю.А.Рылов, Геометризация физики в микромире: дискретная геометрия и теория относительности (обзор) *Гиперкомплексные числа в физике и геометрии* **8**, i*ss. 2 (16,) pp.88-117 (2011).* Смотри также *e-print /1006.1254v2*

[31] D.Bohm, *Phys. Rev.* **85**, (1952), 166, 180

[32] Yu.A.Rylov, Quantum Mechanics as a theory of relativistic Brownian motion". *Ann. Phys. (Leipzig).* **27**, *1-11, (1971).*

[33] Yu.A.Rylov, Quantum mechanics as relativistic statistics.I: The two-particle case. *Int. J. Theor. Phys.* **8**, *65-83.*

[34] Yu.A.Rylov, Quantum mechanics as relativistic statistics.II: The case of two interacting particles. *Int. J. Theor. Phys.* **8**, *123-139.*

[35] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928).