

Метрический подход к геометрии и дискретная геометрия пространства-времени

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru

Web site: [http : //rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm](http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm)
or mirror Web site: [http : //gasdyn – ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm](http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm)

Аннотация

Метрический подход к геометрии позволяет построить физическую геометрию, т.е. геометрию, которая полностью описывается в терминах функции расстояния ρ , или в терминах мировой функции $\sigma = 0.5\rho^2$. Дискретная геометрия является специальным видом физической геометрии, когда существует элементарная длина λ_0 и все расстояния больше, чем элементарная длина. Дискретная геометрия получается как обобщение собственно евклидовой геометрии. Чтобы осуществить такое обобщение, нужно произвести логическую перезагрузку описания евклидовой геометрии. Это означает, что евклидова геометрия начинает описываться в терминах мировой функции и только в терминах мировой функции. Такое описание содержит общегеометрические соотношения, которые верны во всех физических геометриях, и специальные соотношения, описывающие свойства евклидовой мировой функции. Заменяя евклидову мировую функцию σ_E мировой функцией σ_d дискретной геометрии во всех общегеометрических соотношениях, и игнорируя специальные соотношения, получаем общегеометрические соотношения для дискретной геометрии. Поскольку вид мировой функции σ_d предполагается известным, то специальные соотношения для дискретной геометрии не нужны.

Ключевые слова: элементарная длина; дискретная геометрия пространства-времени; мировая функция; логическая перезагрузка; геометризация параметров частицы; каркасная концепция динамики частиц.

1 Введение

Собственно евклидова геометрия, так же как и геометрия Минковского являются непрерывными геометриями. Они описываются методами дифференциальной геометрии. Однако существуют дискретные геометрии, где расстояния между любыми

двумя точками пространства-времени больше, чем некоторая элементарная длина λ_0 . Если характерные размеры задачи много больше, чем элементарная длина λ_0 , то можно положить $\lambda_0 = 0$ и рассматривать геометрию пространства-времени как непрерывную геометрию. Однако, в микромире, где характерные длины порядка λ_0 , следует рассматривать дискретную геометрию пространства-времени, потому что реальное пространство-время может быть дискретным, и такую возможность нужно исследовать.

При традиционном построении евклидовой геометрии используются такие понятия как многообразие, размерность, система координат, линейное пространство, которые могут использоваться только в непрерывных (дифференциальных) геометриях. Дискретная геометрия рассматривается как обобщение собственно евклидовой геометрии, потому что это единственная геометрия, непротиворечивость которой доказана. При построении дискретной геометрии как обобщения собственно евклидовой геометрии, нельзя использовать вышеупомянутые понятия. Единственное понятие, которое может быть использовано и в непрерывной геометрии и в дискретной это понятие расстояния ρ . Но расстояние ρ должно быть введено как фундаментальная величина. Но расстояние ρ нужно вводить как фундаментальную величину. В римановой геометрии расстояние ρ вводится как интеграл вдоль геодезической от бесконечно малого расстояния

$$ds = \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$$

Такой метод введения расстояния ρ неадекватен в дискретной геометрии, потому что в ней не используется бесконечно малое расстояние, которого нет в дискретной геометрии. Кроме того, в случае, когда имеется несколько геодезических, соединяющих две точки, возникает многозначное выражение для расстояния или мировой функции. Многозначная мировая функция недопустима в геометрии.

Чтобы построить дискретную геометрию, нужно представить собственно евклидову геометрию в терминах расстояния ρ (или в терминах мировой функции $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$) и использовать это представление для обобщения собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_E$ на случай дискретной геометрии $\mathcal{G}_d$. Представление геометрии в терминах мировой функции мы будем называть σ -имманентным представлением. σ -имманентное представление собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_E$ всегда возможно.

Функция расстояния ρ_d Дискретной геометрии $\mathcal{G}_d$ удовлетворяет условию

$$|\rho_d(P, Q)| \notin (0, \lambda_0), \quad \forall P, Q \in \Omega \quad (1.1)$$

где Ω есть множество точек, на котором задана геометрия $\mathcal{G}_d$ is given. Это означает, что в геометрии $\mathcal{G}_d$ нет расстояний, которые короче, чем элементарная длина λ_0 . Расстояние $\rho_d(P, Q) = 0$ допустимо. Это условие выполняется, если $P = Q$.

Заметим, что условие (1.1) есть ограничение на значения функции расстояния, а не на значения ее аргументов (точки Ω), хотя обычно рассматривают дискретную геометрию как геометрию на решетке. Верно, что геометрии на решетке являются дискретными геометриями (они удовлетворяют соотношению (1.1)), но они образуют специальный случай дискретных геометрий. По существу такая геометрия является дифференциальной геометрией, заданной на счетном множестве точек, где

расстояния те же самые, что и традиционной дифференциальной геометрии, заданной на континуальном множестве точек. Кроме того такая геометрия не может быть однородной и изотропной. Общий случай дискретной геометрии возникает, когда ограничения накладываются на допустимые значения мировой функции (функции расстояния).

Простейший случай дискретной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_d$ получается, если $\mathcal{G}_d = \{\Omega_M, \sigma_d\}$ задана на том же многообразии Ω_M , где задается геометрия Минковского $\mathcal{G}_M = \{\Omega_M, \sigma_M\}$. Мировая функция σ_d выбирается в виде

$$\sigma_d(P, Q) = \sigma_M(P, Q) + \frac{1}{2} \lambda_0^2 \text{sgn}(\sigma_M(P, Q)), \quad \forall P, Q \in \Omega_M \quad (1.2)$$

где σ_M есть мировая функция геометрии Минковского. Легко проверить, что $\rho_d = \sqrt{2\sigma_d}$, определенное соотношением (1.2) удовлетворяет ограничению (1.1). Такая дискретная геометрия однородна и изотропна так же, как и геометрия Минковского.

Кроме того в дискретной пространственно-временной геометрии (1.2) точечная частица не может описываться мировой линией, потому что любая мировая линия представляет собой предел ломаной линии, когда длины ее звеньев стремятся к нулю. Но в дискретной геометрии $\mathcal{G}_d$ нет бесконечно малых длин, и точечная частица описывается мировой цепью (ломаной линией) вместо непрерывной мировой линии. Описание состояния точечной частицы с помощью ее положения и импульса становится неадекватным, потому что в непрерывной геометрии пространства-времени 4-импульс p_k частицы описывается соотношением

$$p_k = g_{kl} \frac{dx^l}{d\tau} = g_{kl} \lim_{d\tau \rightarrow 0} \frac{x^l(\tau + d\tau) - x^l(\tau)}{d\tau} \quad (1.3)$$

где $x^l = x^l(\tau)$, $l = 0, 1, 2, 3$ есть уравнение мировой линии. Предел в формуле (1.3) не существует в $\mathcal{G}_d$, и 4-импульс p_k оказывается неопределенным (по крайней мере в таком виде). Вообще, математический формализм, основанный на исчислении бесконечно малых (дифференциальные уравнения) неадекватен в дискретной геометрии пространства-времени, где бесконечно малые расстояния отсутствуют.

2 Метрический поход к геометрии

Имеется другое обстоятельство, препятствующее построению дискретной геометрии. Собственно евклидова геометрия является аксиоматизируемой геометрией. Это означает, что все утверждения собственно евклидовой геометрии могут быть выведены из системы, состоящей из нескольких аксиом (базовых утверждений геометрии). Обычно аксиоматизируемость рассматривается как имманентное свойство любой геометрии. Считается, что еаксиоматизируемых геометрий не существует. Причина такой веры довольно проста. В течение двух тысяч лет мы знали только одну геометрию – собственно евклидову геометрию, которая аксиоматизируема. Все дифференциальные геометрии, построенные как обобщение собственно евклидовой геометрии, также аксиоматизируемы. Не было известно ни одной геометрии, построенной методом, отличным от евклидова метода выведения геометрии из некоторой системы аксиом.

Все дифференциальные геометрии строятся с помощью этого метода. Математики полагают, что любая геометрия является логическим построением. Такая дисциплина как симплектическая геометрия используется в динамике, а не для описания свойств геометрических объектов. Тем не менее она называется геометрией, потому что ее структура напоминает структуру евклидовой геометрии.

На самом деле любая геометрия исследует форму и взаимное расположение геометрических объектов в пространстве или в пространстве-времени. Это свойство является изначальным свойством геометрии. Однако, в течение двух тысяч лет используется только евклидов метод построения геометрии, и в результате аксиоматизируемость геометрии рассматривается как имманентное свойство любой геометрии, тогда как описание геометрических объектов рассматривается как вторичное свойство дисциплины, называемой геометрией.

Вообще-то, существует метрический подход к геометрии, когда геометрия рассматривается как наука, исследующая форму и взаимное расположение геометрических объектов. Такая геометрия называется метрической (метрическим пространством), если она использует аксиому треугольника. Если аксиома треугольника не используется, то геометрия называется дистантной геометрией [1, 2]. Предполагается, что дистантная геометрия $\mathcal{G}_{ds} = \{\sigma, \Omega\}$ полностью описывается мировой функцией $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$

$$\sigma : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \quad \forall P, Q \in \Omega \quad (2.1)$$

$$\rho(P, Q) \geq 0, \quad \forall P, Q \in \Omega, \quad \rho(P, Q) = \sqrt{2\sigma(P, Q)} \quad (2.2)$$

где Ω есть множество точек, на котором задана геометрия. Мировая функция σ используется вместо функция расстояния ρ , потому что в геометрии Минковского расстояние ρ может быть или положительным, или чисто мнимым, тогда как $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$ всегда вещественна.

При метрическом подходе геометрия может быть построена на любом множестве точек (а не обязательно на многообразии) без использования координат. В метрическом пространстве функция расстояния ρ удовлетворяет дополнительному ограничению

$$\rho(P, Q) + \rho(P, R) \geq \rho(Q, R), \quad \forall P, Q, R \in \Omega \quad (2.3)$$

Условие (2.3) известно как аксиома треугольника. Эта аксиома позволяет ввести прямую линию в метрическом пространстве как кратчайшую линию между двумя точками. В дистантной геометрии, где ограничение (2.3) отсутствует не удастся ввести прямую линию в терминах функции расстояния ρ . Блюменталь [2] ввел кривую как непрерывное отображение $(0, 1) \rightarrow \Omega$. Непрерывное отображение представляет собой операцию, которая не может быть выражена в терминах функции расстояния. В результате чисто метрический подход к геометрии, когда геометрия полностью описывается в терминах функции расстояния ρ , не удался. Причина этой неудачи в том, что Блюменталь полагал, что прямая линия не имеет толщины, тогда как в действительности в дистантной геометрии прямая линия представляет собой полую трубку. На самом деле, дистантная геометрия является неаксиоматизируемой геометрией, которая не может быть построена евклидовым методом.

Что лежит в основе евклидова метода построения геометрии? Попробуем выйти из этого метода. Расстояние нельзя воспринимать непосредственно. Можно воспри-

нимать физические тела. Геометрический объект является абстракцией пространственно-временных свойств физического тела. физическое тело эволюционируя в пространстве-времени, может переходить из одной области пространства-времени с пространственно-временной геометрией $\{\sigma_1, \Omega_1\}$ в другую область пространства-времени с геометрией $\{\sigma_2, \Omega_2\}$. Мы должны иметь возможность узнавать и идентифицировать один и тот же объект в различных геометриях пространства-времени. Для того, чтобы это было возможно, каждый геометрический объект должен описываться в терминах функции расстояния ρ и только в терминах ρ . Любой геометрический объект описывается его каркасом и его оболочкой. Мы рассмотрим простые примеры геометрических объектов. (Общее определение геометрического объекта будет дано позже).

Простейшим геометрическим объектом является сфера $\mathcal{SP}_{P_0P_1}$, определяемая двумя точками P_0, P_1 (каркасом). Точка P_0 является центром сферы. P_1 есть некоторая точка на поверхности сферы. Точки $\{P_0, P_1\}$ образуют каркас сферы. Поверхность сферы (ее оболочка) представляет собой множество точек

$$\mathcal{SP}_{P_0P_1} = \{R | \rho(P_0, R) = \rho(P_0, P_1)\}, \quad \rho = \sqrt{2}\sigma \quad (2.4)$$

Сфера является полым геометрическим объектом в том смысле, что имеются внутренние точки сферы, которые не принадлежат поверхности сферы (оболочке).

Другим примером простого геометрического объекта является эллипсоид $\mathcal{EL}_{F_1F_2P}$, определяемый тремя точками F_1, F_2, P . Точки F_1, F_2 являются фокусами эллипсоида, а точка P есть некоторая точка на поверхности эллипсоида

$$\mathcal{EL}_{F_1F_2P} = \{R | \rho(F_1, R) + \rho(F_2, R) = \rho(F_1, P) + \rho(F_2, P)\}, \quad \rho = \sqrt{2}\sigma \quad (2.5)$$

Если $F_1 \neq P \wedge F_2 \neq P$, эллипсоид $\mathcal{EL}_{F_1F_2P}$ является полым геометрическим объектом.

Если $F_1 = P \vee F_2 = P$, то эллипсоид вырождается в отрезок прямой линии $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} \equiv \mathcal{EL}_{P_0P_1P_1} = \mathcal{EL}_{P_0P_1P_0} = \{R | \rho(P_0, R) + \rho(P_1, R) = \rho(P_0, P_1)\} \quad (2.6)$$

Вырожденный эллипсоид $\mathcal{EL}_{P_0P_1P_1}$ является по определению прямолинейным отрезком $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. Это название используется потому, что в собственно евклидовой геометрии вырожденный эллипсоид является отрезком прямой линии. В других геометриях геометрический объект (2.6) может быть полым геометрическим объектом. Это означает, что он не является одномерным множеством точек как в собственно евклидовой геометрии, но мы тем не менее будем называть его прямолинейным отрезком.

Отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ определяется двумя точками. Все точки $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ являются точками оболочки, которая состоит только из граничных точек. В собственно евклидовой геометрии он не является полым геометрическим объектом, потому что он не имеет внутренних точек.

Является ли прямолинейный отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ полым геометрическим объектом в других дистантных геометриях? Это зависит от ограничений (2.2), (2.3). Если они выполнены, отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ будет сплошным (не полым). Если дистантная геометрия не удовлетворяет аксиоме треугольника (2.3), отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ может быть полым. Другими словами, отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ может быть полый трубкой.

Почему отрезок является сплошным, если выполняется условие аксиомы треугольника (2.3)? Рассмотрим замкнутую поверхность $\mathcal{S}$, определенную соотношением

$$\mathcal{S} : \quad S_{P_0P_1}(R) = 0, \quad S_{P_0P_1}(R) = \rho(P_0, R) + \rho(P_1, R) - \rho(P_0, P_1) \quad (2.7)$$

Внутренние точки R' (точки внутри замкнутой поверхности $\mathcal{S}$) удовлетворяют соотношению $S_{P_0 P_1}(R') < 0$. Внешние точки R'' удовлетворяют соотношению $S_{P_0 P_1}(R'') > 0$. Если аксиома треугольника выполняется, оно может быть записано в виде

$$\rho(P_0, R) + \rho(P_1, R) \geq \rho(P_0, P_1), \quad \forall P_1, P_2, R \in \Omega \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что $S_{P_0 P_1}(R') \geq 0$, $\forall R' \in \Omega$. Это означает, что поверхность $\mathcal{S}$, совпадающая с сегментом $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$, не может содержать внутренних точек.

Почему это так важно, является ли отрезок $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ полым? Геометрия представляет собой построение геометрических объектов и исследование их свойств. В собственно евклидовой геометрии все геометрические объекты строятся из блоков (точек и отрезков прямой). Блоки должны быть сплошными (не полыми) геометрическими объектами. Отрезок $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ определяется двумя точками, и он является сплошным в собственно евклидовой геометрии. Он может использоваться как строительный блок при построении геометрических объектов. Например, в собственно евклидовой геометрии куб может быть заполнен прямолинейными отрезками, помещенными параллельно ребру куба и расположенными таким образом, что каждая точка куба принадлежит одному и только одному отрезку. Такая ситуация невозможна, если блоки являются полыми геометрическими объектами. Если блоки представляют собой полые трубки, то нельзя заполнить ими куб таким образом, чтобы каждая точка куба принадлежала одной и только одной трубке. Это означает, что куб не может быть построен из полых блоков. То же самое относится к любому геометрическому объекту.

Евклидов метод построения геометрических объектов основан на возможности построения геометрических объектов из блоков. Имеется конечное число правил, описывающих свойства блоков. Имеется конечное число правил, описывающих комбинации блоков при построении геометрических объектов. Евклид сформулировал эти правила в виде аксиом логического построения. Таким образом, аксиоматика собственно евклидовой геометрии описывает процедуру построения геометрических объектов из блоков. Если отрезок $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ сплошной, то дистантная геометрия является аксиоматизируемой геометрией, потому что она может быть реализована как геометрия, где любой геометрический объект может быть построен из блоков, т.е. с помощью метода Евклида.

Если блоки полые, они не могут быть использованы для построения геометрических объектов. В этом случае дистантная геометрия становится неаксиоматизируемой, потому что в этом случае нельзя использовать евклидов метод для построения геометрических объектов. Формально отрезок $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ является полым, если отношение эквивалентности интранзитивно. Если отношение эквивалентности транзитивно, отрезок $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ может быть сплошным.

Строительный блок $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ является направленным объектом, направление которого описывается вектором $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 = \overrightarrow{P_0 P_1} = \{P_0, P_1\}$, который представляет собой упорядоченное множество из двух точек. Точка P_0 является началом вектора, точка P_1 является концом вектора. Всякий вектор $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ описывается его длиной

$$|\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1| = \rho(P_0, P_1) = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \quad (2.9)$$

Векторы являются направленными величинами, и взаимоотношение двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ описывается углом φ между ними. В собственно евклидовой геометрии имеется множество векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, которые образуют угол $\varphi \neq 0$ с вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Однако, в собственно евклидовой геометрии имеется только один вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в точке Q_0 с фиксированной длиной $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$, который образует с вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ угол $\varphi = 0$. По определению такой вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ называется вектором, параллельным $(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)$ вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Вместо угла φ взаимоотношение двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ может быть описано скалярным произведением $(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)$ этих векторов, определяемым соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \cos \varphi \quad (2.10)$$

В собственно евклидовой геометрии определение скалярного произведения может быть выражено в терминах мировой функции

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) \quad (2.11)$$

Поскольку определение скалярного произведения произведено в терминах мировой функции, это определение может быть использовано в любой дистантной геометрии. Тогда условие параллельности векторов получается из (2.10) при $\varphi = 0$. Оно записывается в виде

$$(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) : \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \quad (2.12)$$

В собственно евклидовой геометрии все векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}''_1$, параллельные вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, параллельны между собой. Такая ситуация довольно специфична. Она связана с вырожденным характером собственно евклидовой геометрии. В дистантной геометрии векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}'_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}''_1$, которые параллельны вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, вообще говоря не параллельны между собой. Это обстоятельство порождает пустотелость отрезков прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. Она зависит от свойств мировой функции σ , которая полностью описывает дистантную геометрию.

В собственно евклидовой геометрии два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ эквивалентны по определению, если они параллельны $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ и их длины равны $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \text{eqv} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) : \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \quad (2.13)$$

Это определение эквивалентности (равенства) двух векторов вместе с определениями (2.9), (2.11) формулирует эквивалентность двух векторов в терминах мировой функции и только в этих терминах. Оно не ссылается на размерность, систему координат и другие средства описания. Это определение эквивалентности двух векторов следует использовать в любой дистантной геометрии.

Существуют дистантные геометрии, где отрезки прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ являются полыми трубками, и определение (2.13), (2.11) оказывается интранзитивным, а дистантная геометрия оказывается аксиоматизируемой. Некоторые математики возражают, что определение (2.13), (2.11) не может использоваться как отношение эквивалентности,

потому что отношение эквивалентности транзитивно по определению. Они настаивают, что следует использовать другой термин для определения (2.13), (2.11), (например, обобщенная эквивалентность). Причина такого возражения заключается в том обстоятельстве, что математики все время имели дело с аксиоматизируемыми геометриями, которые представляли собой логические построения. В самом деле, если используется логическое построение, то можно выводить заключения только в том случае, когда отношение эквивалентности транзитивно, и из $a \sim b$ и $b \sim c$ следует, что $a \sim c$. Если отношение эквивалентности не обладает этим свойством, то нельзя выводить следствия теорем. Таким образом, если кто-то настаивает на транзитивности отношения эквивалентности, он настаивает на невозможности неаксиоматизируемых геометрий и, в частности, на невозможности дискретных геометрий пространства-времени, где отрезки прямой $\mathcal{T}_{[P_0 P_1]}$ являются полыми трубками. В результате дискретные геометрии оказываются неаксиоматизируемыми.

Транзитивность отношения эквивалентности была получена из нашего опыта работы с аксиоматизируемыми геометриями (евклидова геометрия и ее модификации). Мы не имеем права обобщать это свойство на все геометрии пространства-времени. Является ли реальная геометрия пространства-времени дискретной, это вопрос экспериментальных данных, а не математической схоластики. ругая проблема состоит в том, что мы умеем строить аксиоматизируемые геометрии и не умеем строить дискретные геометрии. В результате мы построили только геометрии на решетке, которые не являются полноценными геометриями. Как строить дискретные (неаксиоматизируемые) геометрии мы увидим чуть позже.

3 Описание геометрических объектов

Если дистантная геометрия включает индефинитные геометрии (подобные геометрии Минковского), то условие (2.2) должно быть опущено, и описание геометрии нужно производить в терминах мировой функции. Геометрию, полностью описываемую мировой функцией (2.1), будем называть физической геометрией.

Геометрический объект есть геометрический образ физического тела. Любой геометрический объект представляет собой некоторое подмножество точек пространства-времени. Однако геометрический объект – это не произвольное множество точек. В физической геометрии геометрический объект должен определяться таким образом, чтобы одинаковые геометрические объекты (которые являются образами одинаковых физических тел) могли быть опознаны в различных геометриях пространства-времени.

Определение 3.1: Геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n, \sigma}$ of the geometry $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ является подмножеством $g_{\mathcal{P}_n, \sigma} \subset \Omega$ точечного множества Ω . Этот геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n, \sigma}$ является множеством корней $R \in \Omega$ функции $F_{\mathcal{P}_n, \sigma}$

$$g_{\mathcal{P}_n, \sigma} = \{R | F_{\mathcal{P}_n, \sigma}(R) = 0\}, \quad F_{\mathcal{P}_n, \sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.1)$$

где $F_{\mathcal{P}_n, \sigma}$ зависит от точки R через мировые функции аргументов $\{\mathcal{P}_n, R\} = \{P_0, P_1, \dots, P_n, R\}$

$$F_{\mathcal{P}_n, \sigma} : F_{\mathcal{P}_n, \sigma}(R) = G_{\mathcal{P}_n, \sigma}(u_1, u_2, \dots, u_s), \quad s = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad (3.2)$$

$$u_l = \sigma(w_i, w_k), \quad i, k = 0, 1, \dots, n+1, \quad l = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad (3.3)$$

$$w_k = P_k \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad w_{n+1} = R \in \Omega \quad (3.4)$$

Здесь $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset \Omega$ суть $n+1$ точек, которые являются параметрами, определяющими геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n, \sigma}$

$$g_{\mathcal{P}_n, \sigma} = \{R | F_{\mathcal{P}_n, \sigma}(R) = 0\}, \quad R \in \Omega, \quad \mathcal{P}_n \in \Omega^{n+1} \quad (3.5)$$

$F_{\mathcal{P}_n, \sigma}(R) = G_{\mathcal{P}_n, \sigma}(u_1, u_2, \dots, u_s)$ есть произвольная функция от $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ аргументов u_k и от $n+1$ параметров $\mathcal{P}_n$. Множество $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \in \Omega^n$ параметров геометрического объекта мы будем называть каркасом геометрического объекта. Подмножество $g_{\mathcal{P}_n, \sigma} \subset \Omega$ будем называть оболочкой каркаса. Каркас является аналогом системы отсчета, жестко прикрепленной к физическому телу. Следя за движением каркаса, можно следить за движением физического тела. Когда частица рассматривается как геометрический объект, ее движение в пространстве-времени описывается движением каркаса $\mathcal{P}_n$. При таком походе (приближение твердого тела) форма оболочки не имеет значения.

Замечание: Произвольное подмножество Ω' точечного множества Ω , вообще говоря, не является геометрическим объектом. Предполагается, что физические тела могут иметь только форму геометрических объектов, потому что только в этом случае можно отождествлять одинаковые физические тела (геометрические объекты) в различных геометриях пространства-времени.

Существование одних и тех же геометрических объектов в разных областях пространства-времени, имеющих различную геометрию, поднимает вопрос об эквивалентности геометрических объектов в различных геометриях пространства-времени. Такой вопрос не возникал раньше, потому что не рассматривалась такая ситуация, когда физическое тело движется из одной области пространства-времени в другую область, имеющую другую геометрию. Вообще говоря, математический формализм традиционной геометрии пространства-времени (дифференциальной геометрии) не приспособлен для одновременного описания нескольких различных геометрий разных областей пространства-времени.

Мы можем воспринять геометрию пространства-времени только через движение физических тел, или через построение геометрических объектов, соответствующих этим физическим телам. Как следует из *определения 3.1* геометрического объекта, функция $G_{\mathcal{P}_n, \sigma}$ как функция ее аргументов $u_k, k = 1, 2, \dots, n(n+1)/2$ (мировых функций от различных точек) одна и та же во всех физических геометриях. Это означает, что геометрический объект $\mathcal{O}_1$ в геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ получается из того же геометрического объекта $\mathcal{O}_2$ в геометрии $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ с помощью замены $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ в определении этого геометрического объекта.

Определение 3.2: Геометрический объект $g_{\mathcal{P}'_n, \sigma'}$ ($\mathcal{P}'_n = \{P'_0, P'_1, \dots, P'_n\}$) в геометрии $\mathcal{G}' = \{\sigma', \Omega'\}$ и геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n, \sigma}$ ($\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$) в геометрии $\mathcal{G} =$

$\{\sigma, \Omega\}$ являются одинаковыми геометрическими объектами, если

$$\sigma' (P'_i, P'_k) = \sigma (P_i, P_k), \quad i, k = 0, 1, \dots, n \quad (3.6)$$

и функции $G'_{\mathcal{P}'_n, \sigma'}$ для $g_{P'_n, \sigma'}$ и $G_{\mathcal{P}_n, \sigma}$ для $g_{P_n, \sigma}$ в формуле (3.2) являются одними и теми же функциями своих аргументов $u_1, u_2, \dots, u_s$

$$G'_{\mathcal{P}'_n, \sigma'} (u_1, u_2, \dots, u_s) = G_{\mathcal{P}_n, \sigma} (u_1, u_2, \dots, u_s) \quad (3.7)$$

В этом случае

$$u_l \equiv \sigma (P_i, P_k) = u'_l \equiv \sigma' (P'_i, P'_k), \quad i, k = 0, 1, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, n(n+1)/2 \quad (3.8)$$

Функции $F'_{\mathcal{P}'_n, \sigma'}$ для $g_{P'_n, \sigma'}$ и $F_{\mathcal{P}_n, \sigma}$ для $g_{P_n, \sigma}$ в формуле (3.2) имеют одни и те же корни, если выполнено соотношение (3.7). В результате возникает однозначная связь между геометрическими объектами $g_{P'_n, \sigma'}$ and $g_{P_n, \sigma}$.

Поскольку физическая геометрия определяется построением ее геометрических объектов, то физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ может быть получена из некоторой стандартной геометрии $\mathcal{G}_{st} = \{\sigma_{st}, \Omega\}$ с помощью деформации стандартной геометрии $\mathcal{G}_{st}$. Деформация стандартной геометрии $\mathcal{G}_{st}$ осуществляется заменой $\sigma_{st} \rightarrow \sigma$ во всех определениях геометрических объектов в стандартной геометрии. Собственно евклидова геометрия является аксиоматизируемой геометрией. Она была построена как логическое построение с помощью евклидова метода. Одновременно собственно евклидова геометрия является физической геометрией. Она может использоваться как стандартная геометрия $\mathcal{G}_{st}$. Построение физической геометрии как деформации собственно евклидовой геометрии мы будем называть принципом деформации [3]. Большинство физических геометрий являются неаксиоматизируемыми геометриями. Они могут быть построены только с помощью принципа деформации.

4 Общегеометрические соотношения

Описывая физическую геометрию в терминах мировой функции, следует различать между общегеометрическими соотношениями и специфическими геометрическими соотношениями. Общегеометрические соотношения являются соотношениями линейного векторного пространства, записанными в терминах мировой функции. Общегеометрические соотношения верны для любой физической геометрии.

Первое общегеометрическое определение – это определение скалярного произведения двух векторов (2.11). Определение эквивалентности двух векторов (2.13) также является общегеометрическим соотношением.

Линейная зависимость n векторов $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_n$ определяется соотношением

$$F_n (\mathcal{P}_n) = 0, \quad F_n (\mathcal{P}_n) \equiv \det ||(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_i, \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_k)||, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

где $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ и $F_n (\mathcal{P}_n)$ есть определитель Грама. Обращение в нуль определителя Грама является необходимым и достаточным условием линейной зависимости n векторов. Условие линейной зависимости относится к свойствам линейного векторного пространства. Оно кажется довольно бессодержательным, если нельзя ввести

линейное пространство. Тем не менее соотношение (4.1), записанное как общегеометрическое соотношение, описывает некоторые общие геометрические свойства векторов, которые в собственно Евклидовой геометрии преобразуются в свойство линейной зависимости. В частности, размерность пространства в собственно евклидовой геометрии определяется в терминах мировой функции с помощью соотношений типа (4.1) как максимально возможное число линейно независимых векторов, которое возможно в евклидовом пространстве. Это обстоятельство кажется несколько неожиданным, потому что в традиционном представлении евклидовой геометрии размерность просто постулируется в самом начале построения геометрии.

Общегеометрические соотношения описывают или линейное векторное пространство, или определение геометрических объектов. Как мы видели определение геометрических объектов в виде общегеометрических соотношений (т.е. в терминах мировой функции) необходимо для распознавания одного и того же физического тела (и соответствующего геометрического объекта) в различных геометриях пространства-времени.

Общегеометрические соотношения параметризуются видом мировой функции. Изменяя вид мировой функции, мы получаем общегеометрические соотношения при новом значении параметра (новом виде мировой функции).

5 Специфические свойства n -мерного евклидова пространства

Наряду с общегеометрическими свойствами, описывающими главным образом определения линейного векторного пространства, имеются специфические геометрические определения, описывающие свойства мировой функции. Например, имеются соотношения, которые являются необходимыми и достаточными условиями того, что мировая функция σ является мировой функцией n -мерного евклидова пространства. Они имеют вид [4]:

I. Определение размерности:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \dots, P_n\} \subset \Omega, \quad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \quad F_k(\Omega^{k+1}) = 0, \quad k > n \quad (5.1)$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама n -ого порядка (4.1) Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ являются базисными векторами прямолинейной системы координат K_n с началом в точке P_0 . Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \quad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \quad i, l = 1, 2, \dots, n \quad (5.2)$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (5.3)$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) (x_i(P) - x_i(Q)) (x_k(P) - x_k(Q)), \quad \forall P, Q \in \Omega \quad (5.4)$$

где координаты $x_i(P)$, $x_i(Q)$, $i = 1, 2, \dots, n$ точек P и Q являются соответственно ковариантными координатами векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ в системе координат K . Ковариантные координаты определяются соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные значения g_k

$$g_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.6)$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.7)$$

рассматриваемая как уравнения для для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ всегда имеет одно и только одно решение. Условия I – IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства (5.1).

Все соотношения I – IV записаны в терминах мировой функции. Они являются ограничениями на вид мировой функции собственно евклидовой геометрии. Ограничения (5.1), определяющие размерность через вид мировой функции выглядят несколько неожиданно. Они содержат массу ограничений, налагаемых на мировую функцию собственно евклидовой геометрии, и они являются необходимыми. При традиционном подходе вместо многочисленных ограничений (5.1) используется очень простое предположение: "Пусть размерность евклидова пространства равна n ."

В векторном представлении собственно евклидовой геометрии, которое основывается на использовании линейного векторного пространства, размерность рассматривается как изначальное свойство евклидовой геометрии. Ситуация, когда размерность геометрии различна в разных точках пространства Ω , или когда она является неопределенной, не рассматривается. В векторном представлении евклидовой геометрии не различают общегеометрические соотношения от специфических соотношений геометрии.

Вместо ограничений (5.1) – (5.7) можно использовать явный вид мировой функции

$$\sigma_E(x, x') = \sum_{k=1}^{k=n} (x^k - x'^k)^2 \quad (5.8)$$

где $x^k, x'^k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$ суть декартовы координаты соответственно точек P и P' . Соотношение (5.8) удовлетворяет всем ограничениям (5.1) – (5.7). Оно использует понятия размерности и координат, как изначальные понятия геометрии. Используя мировую функцию только в явном виде, нельзя себе представить обобщенную геометрию без таких понятий как размерность и система координат, хотя эти понятия отражают только средства описания геометрии.

Вообще, после логической перезагрузки к σ -представлению (описанию в терминах мировой функции) собственно евклидова геометрия выглядит довольно неожиданно. Некоторые понятия выглядят очень просто в векторном представлении. Те же самые понятия выглядят сложными в σ -представлении и наоборот. В результате собственно евклидова геометрия в σ -представлении воспринимается с большим

трудом. В векторном представлении имеется несколько фундаментальных величин: размерность, система координат, линейная зависимость, тогда как в σ -представлении имеется только одна фундаментальная величина: мировая функция. Размерность, система координат, линейная зависимость являются производными величинами. Согласование между этими величинами достигается в любой геометрии, поскольку все они являются атрибутами мировой функции.

6 Эквивалентность физических геометрий

Обобщение общегеометрических соотношений (2.9) – (2.13) на случай дискретной геометрии $\mathcal{G}_d$ получается с помощью замены $\sigma_E \rightarrow \sigma_d$, где σ_d есть мировая функция дискретной геометрии $\mathcal{G}_d$. Мы должны быть готовы к тому, что свойства понятий и соотношений (2.6), (2.11) – (2.13), (4.1)) в $\mathcal{G}_d$ могут сильно отличаться от их свойств в $\mathcal{G}_E$. Однако у нас нет альтернативы этим соотношениям для определения этих геометрических величин в дискретной геометрии $\mathcal{G}_d$.

Определение 6.1: Физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ есть точечное множество Ω с однозначной функцией σ на нем

$$\sigma : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(P, P) = 0, \quad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \quad P, Q \in \Omega \quad (6.1)$$

Определение 6.2: Две физические геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ эквивалентны ($\mathcal{G}_1 \text{eqv} \mathcal{G}_2$), если множество точек $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \wedge \sigma_1(P, Q) = \sigma_2(P, Q), \forall P, Q \in \Omega_1$, или $\Omega_2 \subseteq \Omega_1 \wedge \sigma_2(P, Q) = \sigma_1(P, Q), \forall P, Q \in \Omega_2$

Замечание: Совпадение точечного множества Ω_1 и Ω_2 не является необходимым для эквивалентности геометрий $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. Если потребовать совпадения Ω_1 и Ω_2 в случае эквивалентности $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, то исключение одной точки P из точечного множества Ω_1 превращает геометрию $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ в геометрию $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_1, \Omega_1 \setminus P\}$, которая оказывается неэквивалентной геометрии $\mathcal{G}_1$. Такая ситуация кажется недопустимой, потому что геометрия на части $\omega \subset \Omega_1$ точечного множества Ω_1 оказывается неэквивалентной геометрии на всем точечном множестве Ω_1 .

В соответствии с определением геометрий $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$ на частях of Ω , $\omega_1 \subset \Omega$ и $\omega_2 \subset \Omega$ эквивалентны ($\mathcal{G}_1 \text{eqv} \mathcal{G}$), ($\mathcal{G}_2 \text{eqv} \mathcal{G}$) геометрии $\mathcal{G}$, тогда как геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$ не эквивалентны, вообще говоря, если $\omega_1 \not\subseteq \omega_2$ и $\omega_2 \not\subseteq \omega_1$. Таким образом, отношение эквивалентности, вообще говоря, интранзитивно. Геометрия пространства-времени может варьироваться в разных областях пространства-времени. Это означает, что физическое тело, описываемое геометрическим объектом, может эволюционировать таким образом, что оно оказывается в областях с различной геометрией пространства-времени.

Пространственно-временная геометрия Минковского же как и евклидова геометрия являются непрерывными геометриями. Это верно для обычной шкалы расстояний. Однако, нельзя быть уверенным, что геометрия пространства-времени непрерывна в микромире. Геометрия пространства-времени может оказаться дискретной в микромире. Мы рассмотрим дискретную геометрию и обсудим следствия предполагаемой дискретности.

7 Дискретность и ее проявления

Простейшая дискретная геометрия пространства-времени $\mathcal{G}_d$ описывается мировой функцией (1.2). Плотность точек в $\mathcal{G}_d$ по отношению к плотности точек в $\mathcal{G}_M$ описывается соотношением

$$\frac{d\sigma_M}{d\sigma_d} = \begin{cases} 0 & \text{если } |\sigma_d| < \frac{1}{2}\lambda_0^2 \\ 1 & \text{если } |\sigma_d| > \frac{1}{2}\lambda_0^2 \end{cases} \quad (7.1)$$

Если мировая функция имеет вид

$$\sigma_g = \sigma_M + \frac{\lambda_0^2}{2} \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sigma_M) & \text{если } |\sigma_M| > \sigma_0 \\ \frac{\sigma_M}{\sigma_0} & \text{если } |\sigma_M| \leq \sigma_0 \end{cases} \quad (7.2)$$

где $\sigma_0 = \text{const}$, $\sigma_0 \geq 0$, то относительная плотность точек имеет вид

$$\frac{d\sigma_M}{d\sigma_g} = \begin{cases} \frac{2\sigma_0}{2\sigma_0 + \lambda_0^2} & \text{если } |\sigma_g| < \sigma_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^2 \\ 1 & \text{если } |\sigma_g| > \sigma_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^2 \end{cases} \quad (7.3)$$

Если параметр $\sigma_0 \rightarrow 0$, то мировая функция $\sigma_g \rightarrow \sigma_d$ и плотность точек (7.3) стремится к плотности точек (7.1). Геометрия пространства-времени $\mathcal{G}_g$, описываемая мировой функцией σ_g является геометрией, которая дискретна только частично, потому что она является промежуточной между дискретной геометрией $\mathcal{G}_d$ и непрерывной геометрией $\mathcal{G}_M$. Мы будем называть геометрию $\mathcal{G}_g$ зернистой геометрией.

Отклонение дискретной геометрии пространства-времени от непрерывной геометрии Минковского порождает особые свойства геометрии, которые являются следствием невозможности ввести линейное векторное пространство.

Пусть $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является времениподобным вектором в $\mathcal{G}_d$ ($\sigma_d(P_0, P_1) > 0$). Попробуем определить вектор $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ в точке P_1 , который был бы эквивалентным вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ можно рассматривать как два смежных звена ломаной мировой линии, описывающей точечную частицу.

Допустим для простоты, что координаты точек имеют вид

$$P_0 = \{0, 0, 0, 0\}, \quad P_1 = \{\mu, 0, 0, 0\}, \quad P_2 = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \quad (7.4)$$

В этой системе координат мировая функция геометрии Минковского имеет вид

$$\sigma_M(x, x') = \frac{1}{2} \left((x^0 - x'^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 \right) \quad (7.5)$$

и σ_d определяется соотношением (1.2). Нам нужно определить координаты x точки P_1 из двух уравнений (2.13), которые могут быть записаны в виде

$$\sigma_d(P_0, P_1) = \sigma_d(P_1, P_2), \quad \sigma_d(P_0, P_2) = 4\sigma_d(P_0, P_1) \quad (7.6)$$

После подстановки мировой функции (1.2) получаем

$$\frac{1}{2} \left(((x^0 - \mu)^2 - \mathbf{x}^2) + \lambda_0^2 \right) = \frac{1}{2} (\mu^2 + \lambda_0^2) \quad (7.7)$$

$$\frac{1}{2} \left(((x^0)^2 - \mathbf{x}^2) + \lambda_0^2 \right) = 2 \left(((x^0 - \mu)^2 - \mathbf{x}^2) + \lambda_0^2 \right) \quad (7.8)$$

Решение этих двух уравнений имеет вид

$$x^0 = 2\mu + \frac{3}{2} \frac{\lambda_0^2}{\mu}, \quad \mathbf{x}^2 = 3\lambda_0^2 \left(1 + \frac{3\lambda_0^2}{4\mu^2} \right) \quad (7.9)$$

В результате точка P_2 имеет координаты

$$P_2 = \left\{ 2\mu + \frac{3}{2} \frac{\lambda_0^2}{\mu}, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta \right\}, \quad r = \lambda_0 \sqrt{3 + \frac{9}{4} \frac{\lambda_0^2}{\mu^2}} \quad (7.10)$$

где θ и φ произвольные числа. Таким образом пространственные координаты точки P_2 определяются с точностью до $\sqrt{3}\lambda_0$. В пределе $\lambda_0 \rightarrow 0$ точка P_2 определяется единственно. Два решения

$$P'_2 = \left\{ 2\mu + \frac{3}{2} \frac{\lambda_0^2}{\mu}, 0, 0, r \right\}, \quad P''_2 = \left\{ 2\mu + \frac{3}{2} \frac{\lambda_0^2}{\mu}, 0, 0, -r \right\}$$

разделены пространственным расстоянием $i|\mathbf{P}'_2\mathbf{P}''_2| = 2r \approx 2\sqrt{3}\lambda_0$ ($\lambda_0 \ll \mu$). Это максимальное расстояние между двумя решениями $\mathbf{P}'_2$ и $\mathbf{P}''_2$.

Если $\lambda_0 = 0$, то дискретная геометрия превращается в геометрию Минковского, и $P_2 = \{2\mu, 0, 0, 0\}$

$$x^0 = 2\mu, \quad x^1 = 0, \quad x^2 = 0, \quad x^3 = 0 \quad (7.11)$$

следует из одного уравнения $\mathbf{x}^2 = 0$. Это означает, что геометрия Минковского является вырожденной геометрией, потому что разные решения дискретной геометрии сливаются в одно решение геометрии Минковского.

Рассмотрим ту же самую проблему для пространственноподобных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, когда

$$P_0 = \{0, 0, 0, 0\}, \quad P_1 = \{0, l, 0, 0\}, \quad P_2 = \{ct, x, y, z\} \quad (7.12)$$

Мы имеем те же самые уравнения (7.6), но теперь мы имеем другое решение

$$x = 2l + \frac{3\lambda_0^2}{2l}, \quad c^2t^2 - y^2 - z^2 = r^2 = 3\lambda_0^2 + \frac{9}{4} \frac{\lambda_0^4}{l^2} \quad (7.13)$$

Точка P_2 имеет координаты

$$P_2 = \left\{ \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + r^2}, 2l + \frac{3\lambda_0^2}{2l}, a_2, a_3 \right\}, \quad r^2 = 3\lambda_0^2 \left(1 + \frac{3\lambda_0^2}{4l^2} \right) \quad (7.14)$$

где a_2 и a_3 являются произвольными величинами. Разница между двумя решениями P'_2 и P''_2

$$P'_2 = \left\{ \sqrt{a_2^2 + a_3^2 + r^2}, 2l + \frac{3\lambda_0^2}{2l}, a_2, a_3 \right\}, \quad P''_2 = \left\{ \sqrt{b_2^2 + b_3^2 + r^2}, 2l + \frac{3\lambda_0^2}{2l}, b_2, b_3 \right\}$$

может быть бесконечно большой

$$|\mathbf{P}'_2\mathbf{P}''_2| = \sqrt{2a_2b_2 + 2a_3b_3 - 2\sqrt{r^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{r^2 + b_2^2 + b_3^2} + 2r^2}$$

Это различие остается бесконечно большим, даже если $\lambda_0 \rightarrow 0$.

Итак, обе геометрии: дискретная геометрия и геометрия Минковского многовариантны относительно пространственноподобных векторов. Однако это обстоятельство остается незамеченным в традиционной релятивистской динамике частиц, потому что там $(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \overleftrightarrow{\text{eqv}} \mathbf{P}_0 \mathbf{P}'_1)$. Это означает интранзитивность отношения эквивалентности. Кроме того это означает, что дискретная геометрия неаксиоматизируема, потому что в любом логическом построении отношение эквивалентности транзитивно.

Транзитивность отношения эквивалентности в случае собственно евклидовой геометрии является следствием специфических условий (5.1) – (5.7). В случае произвольной физической геометрии они, вообще говоря, не выполняются.

Перенос вектора $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ в некоторую точку Q_0 ведет к некоторой неопределенности результат этого переноса, потому что в точке Q_0 имеется много векторов $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}'_1, \dots$, которые эквивалентны вектору $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$.

Сумма $\mathbf{Q}_0 \mathbf{S}$ двух векторов $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_1 \mathbf{S}$, когда конец одного вектора является началом другого, определяется точками Q_0 и S

$$\mathbf{Q}_0 \mathbf{S} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{S} \quad (7.15)$$

Сумма $\mathbf{Q}_0 \mathbf{S}$ двух векторов $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ в точке Q_0 определяется соотношениями

$$\mathbf{Q}_0 \mathbf{S} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{S}, \quad (\mathbf{Q}_1 \text{Seqv} \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1) \quad (7.16)$$

В дискретной геометрии сумма двух векторов, вообще говоря, не единственна из-за многовариантности отношения эквивалентности.

Результат умножения вектора $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1$ на вещественное число также неоднозначен. Результат $\mathbf{P}_0 \mathbf{S}$ такого умножения на число a определяется соотношениями

$$\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0 \mathbf{S} \wedge |\mathbf{P}_0 \mathbf{S}| = a |\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1| \quad (7.17)$$

или в терминах алгебраических уравнений

$$((\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{S}) = a |\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1|) \wedge |\mathbf{P}_0 \mathbf{S}| = a |\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1| \quad (7.18)$$

Таким образом, результаты суммирования векторов и умножения вектора на число в дискретной геометрии, вообще говоря, не единственны. Это означает, что нельзя ввести линейное векторное пространство в дискретную геометрию.

Пусть дискретная геометрия описывается n координатами. Пусть каркас $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ определяет n векторов $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, которые являются линейно независимыми в смысле

$$F_n(\mathcal{P}_n) = \det \|(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_k)\| \neq 0 \quad i, k = 1, 2, \dots, n \quad (7.19)$$

Можно единственным образом определить проекции вектора $\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1$ на векторы $\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ с помощью соотношений

$$\text{Pr}(\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1)_{\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_k} = \frac{(\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_k)}{|\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_k|} \quad (7.20)$$

Однако, нельзя восстановить вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, пользуясь его проекциями на векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, потому что суммирование составляющих вектора многовариантно. Таким образом, все операции в линейном векторном пространстве, вообще говоря, неоднозначны в дискретной геометрии.

Математический формализм непрерывной геометрии не пригоден для использования в дискретной геометрии, потому что он слишком специализирован и приспособлен для непрерывной (дифференциальной) геометрии. Это обстоятельство особенно важно при описании динамики элементарных частиц. Состояние частицы не может описываться ее положением и ее импульсом, потому что предел (1.3) не существует в дискретной геометрии. Кроме того, динамические уравнения не могут быть дифференциальными уравнениями.

8 Каркасная концепция динамики частиц

Элементарная частица является физическим телом. В дискретной геометрии пространства-времени положение физического тела определяется его каркасом $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$. Разумеется подобное описание положения физического тела можно осуществлять в любой геометрии пространства-времени. Каркас является аналогом системы отсчета, жестко скрепленной с частицей (физическим телом). Следя за движением каркаса, можно следить за перемещением физического тела. Направление перемещения каркаса описывается ведущим вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Движение каркаса описывается мировой цепью $\mathcal{C}$ связанных каркасов

$$\mathcal{C} = \bigcup_{s=-\infty}^{s=+\infty} \mathcal{P}_n^{(s)} \quad (8.1)$$

Каркасы $\mathcal{P}_n^{(s)}$ мировой цепи связаны в том смысле, что точка P_1 каркаса является точкой P_0 смежного каркаса. Это означает

$$P_1^{(s)} = P_0^{(s+1)}, \quad s = \dots, 0, 1, \dots \quad (8.2)$$

Вектор $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)} = \mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_0^{(s+1)}$ является ведущим вектором, который определяет направление мировой цепи.

Если движение частицы является свободным, то смежные каркасы эквивалентны

$$\mathcal{P}_n^{(s)} \text{ eqv } \mathcal{P}_n^{(s+1)} : \quad \mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)} \text{ eqv } \mathbf{P}_i^{(s+1)}\mathbf{P}_k^{(s+1)}, \quad i, k = 0, 1, \dots, n, \quad s = \dots, 0, 1, \dots \quad (8.3)$$

Если частица описывается каркасом $\mathcal{P}_n^{(s)}$, то мировая цепь (8.1) имеет $n(n+1)/2$ инвариантов

$$\mu_{ik} = \left| \mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)} \right|^2 = 2\sigma \left(P_i^{(s)}, P_k^{(s)} \right), \quad i, k = 0, 1, \dots, n, \quad s = \dots, 0, 1, \dots \quad (8.4)$$

которые постоянны вдоль всей мировой цепи.

Уравнения (8.3) образуют систему из $n(n+1)$ разностных уравнений для определения nD координат для n точек каркаса $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$, где D есть размерность

пространства-времени. Число динамических переменных, подлежащих определению отличается, вообще говоря, от числа динамических уравнений. Это главное различие между каркасной концепцией динамики частиц и традиционной концепцией динамики частиц, где число динамических переменных совпадает с числом динамических уравнений.

В случае точечной частицы, когда $n = 1$, $D = 4$, число уравнений $n_e = 2$, тогда как число переменных $n_v = 4$. Число уравнений меньше, чем число динамических переменных. В дискретной геометрии пространства-времени (1.2) положение смежного каркаса в мировой цепи не определяется однозначно. В результате мировая цепь вихляет. В нерелятивистском приближении статистическое описание случайных мировых цепей приводит к уравнению Шредингера [5], если элементарная длина λ_0 имеет вид

$$\lambda_0^2 = \frac{\hbar}{bc} \quad (8.5)$$

где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света, а b есть универсальная постоянная, связывающая массу m частицы с длиной μ звена мировой цепи

$$m = b\mu$$

Динамические уравнения (8.3) являются разностными уравнениями. На больших масштабах, когда можно $\lambda_0 = 0$, динамические уравнения (8.3) превращаются в дифференциальные динамические уравнения. В случае точечной частицы ($n = 1$) и пятимерной геометрии пространства-времени Калуцы-Клейна эти уравнения описывают движение заряженной частицы в заданном электромагнитном поле. На этом примере можно видеть, что геометрия пространства-времени "поглощает" электромагнитное поле. Это означает, что можно рассматривать только свободное движение частицы, имея в виду, что геометрия пространства-времени "поглощает" все силовые поля.

Динамические уравнения (8.3) реализуют каркасную концепцию динамики частиц в микромире. Каркасная концепция динамики частиц отличается от традиционной концепции динамики частиц в том отношении, что число динамических уравнений может отличаться от числа динамических переменных, подлежащих определению. В традиционной концепции динамики частиц число динамических уравнений (первого порядка) всегда совпадает с числом динамических переменных, подлежащих определению. В результате движение частицы (или среднестатистической частицы) оказывается детерминированным. В случае квантовых частиц, чье движение является стохастическим (недетерминированным), динамические уравнения пишутся для статистического ансамбля недетерминированных частиц (или для среднестатистической частицы).

В рамках традиционной концепции динамики можно получить динамические уравнения для среднестатистической частицы (т.е. статистического ансамбля, нормированного на одну частицу), но нет динамических уравнений для отдельной недетерминированной частицы. В каркасной концепции динамики частиц имеются динамические уравнения для отдельной частицы. Эти уравнения многозначны (многовариантны), но они существуют. В традиционной концепции динамики частицы можно получить динамические уравнения для среднестатистической частицы, которые представляют собой разновидность уравнений для жидкости (сплошной среды). Но

нельзя получить динамических уравнений для отдельной недетерминированной частицы [6].

Каркасная концепция динамики частиц осуществляет более детальное описание элементарной частицы. Можно надеяться получить некоторую информацию о структуре элементарной частицы.

Сейчас имеются только два примера применения каркасной концепции. Рассматривая компактификацию в 5-мерном пространстве Калуцы-Клейна и накладывая условие однозначности мировой функции, получаем, что электрический заряд стабильной элементарной частицы ограничен величиной элементарного электрического заряда [7]. Этот результат известен из экспериментов, но он не был объяснен теоретически, потому что в непрерывной геометрии пространства-времени мировую функцию не рассматривают как фундаментальную величину и не требуют ее однозначности.

Другой пример касается структуры дираковской частицы (фермиона). Рассмотрение в рамках каркасной концепции [8] показывает, что мировая цепь фермиона представляет собой винтовую линию (времениподобную или пространственноподобную) с времениподобной осью. Усредненная мировая цепь свободного фермиона представляет собой времениподобную прямую линию. Винтообразное движение каркаса порождает угловой момент (спин) и магнитный момент. Такой результат выглядит вполне разумным. В традиционной концепции динамики частиц спин и магнитный момент фермиона постулируются без ссылки на их структуру.

9 Заключительные замечания

Таким образом, предположение о дискретности геометрии пространства-времени представляется более естественным и разумным, чем предположение о квантовой природе физических явлений в микромире. Дискретность есть просто свойство пространства-времени, тогда как квантовые принципы предполагают введение новых сущностей.

Формализм дискретной геометрии очень прост. Он не содержит теорем со сложными доказательствами. Тем не менее дискретная геометрия и ее формализм воспринимаются с трудом. Дискретная геометрия не развивалась в двадцатом веке, хотя дискретное пространство-время было необходимо для описания физических явлений в микромире. Было достаточно вероятно, что пространство-время дискретно в микромире. Что было причиной пренебрежения дискретной геометрией? Мы попробуем ответить на этот важный вопрос.

Дискретная геометрия не развивалась потому, что она могла быть получена только как обобщение собственно евклидовой геометрии. Но почти все понятия и величины собственно евклидовой геометрии были по существу понятиями непрерывной геометрии. Они не могли быть использованы при построении дискретной геометрии. Только мировая функция (или расстояние) не использовали ссылку на непрерывность геометрии. Только бескоординатные выражения (2.9) – (2.13) базовых величин евклидовой геометрии в терминах мировой функции позволяли построить дискретную геометрию и другие физические геометрии.

Убежденность, что любая геометрия должна быть аксиоматизируемой, было вто-

рым препятствием на пути построения дискретной геометрии. Третьим препятствием был тот факт, что собственно евклидова геометрия является вырожденной геометрией. В частности, то, что собственно евклидова геометрия, будучи физической геометрией, была одновременно аксиоматизируемой геометрией, свидетельствует о ее вырожденности. Очень трудно построить общую концепцию, как обобщение вырожденной концепции, потому что некоторые различные величины общей концепции совпадают в вырожденной концепции. Разделить их оказывается очень трудной задачей. Например, физическая геометрия, вообще говоря, многовариантна. Одно-вариантная физическая геометрия является вырожденной геометрией. В физической геометрии прямолинейный отрезок (2.6), вообще говоря, является поверхностью (трубкой). В вырожденной физической геометрии (собственно евклидовой геометрии) прямолинейный отрезок является одномерным множеством. Как можно догадаться, что отрезок прямой – это, вообще говоря, поверхность? Кроме того, многовариантность и, следовательно интранзитивность отношения эквивалентности ведут к неаксиоматизируемости геометрии. Но в последние две тысячи лет мы изучали только аксиоматизируемые геометрии. Как можно было догадаться, что существуют неаксиоматизируемые геометрии? Прямой путь от евклидовой геометрии к физической геометрии был труден, и физическая геометрия была получена окольным путем.

Дж.Л.Синг [9, 10] ввел мировую функцию для описания римановой геометрии. Я был студентом и не знал работ Синга. Я тоже ввел мировую функцию для описания римановой геометрии в общей теории относительности. Мой подход несколько отличался от подхода Синга. В частности, я получил уравнение для мировой функции римановой геометрии [11], которое содержало только мировую функцию и ее производные

$$\frac{\partial \sigma(x, x')}{\partial x^i} G^{ik'}(x, x') \frac{\partial \sigma(x, x')}{\partial x'^k} = 2\sigma(x, x'), \quad G^{ik'}(x, x') G_{lk'}(x, x') = \delta_l^i, \quad (9.1)$$

где

$$G_{lk'}(x, x') \equiv \frac{\partial^2 \sigma(x, x')}{\partial x^l \partial x'^k}, \quad l, k = 0, 1, 2, 3$$

Это уравнение было получено как следствие определения мировой функции римановой геометрии как интеграла вдоль геодезической, соединяющей точки x и x' . Это уравнение содержит только мировую функцию и ее производные, но не содержит метрического тензора.

Это уравнение поставило вопрос. Пусть мировая функция не удовлетворяет этому уравнению. Будет ли мировая функция описывать нериманову геометрию или она не будет описывать никакой геометрии? Было очень трудно ответить на этот вопрос. С одной стороны, формализм, основанный на мировой функции, был более развитым формализмом, чем формализм, основанный на использовании метрического тензора, потому что геодезическая в терминах мировой функции описывается алгебраическим уравнением (2.6), тогда как та же самая геодезическая в терминах метрического тензора описывается дифференциальными уравнениями.

С другой стороны, геодезическая, описываемая уравнением (2.6) является одномерной только в римановой геометрии. А вообще, уравнение (2.6) в n -мерном пространстве описывает $(n - 1)$ -мерную поверхность. Я не знал, является ли поверхность обобщением геодезической в любой геометрии. Я был не уверен, потому что в

евклидовой геометрии отрезок прямой одномерен по определению. Я оставил вопрос нерешенным и вернулся к нему почти тридцать лет спустя, в начале девяностых годов.

Когда появилась струнная теория элементарных частиц, мне стало ясно, что частица может описываться мировой поверхностью (трубкой), а не только мировой линией. Поскольку мировая линия частицы ассоциируется с геодезической, я решил, что мировая трубка может описывать частицу. Это означало, что существуют геометрии пространства-времени, где прямые (геодезические) описываются мировыми трубками. Вопрос о возможности физических геометрий пространства-времени был окончательно решен, когда оказалось, что квантовое описание может быть следствием многовариантности пространства-времени. [5].

Список литературы

- [1] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen*, **100**, 75-113, (1928).
- [2] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953
- [3] .A.Rylov, Non-Euclidean method of the generalized geometry construction and its application to space-time geometry in *Pure and Applied Differential geometry* pp.238-246. eds. Franki Dillen and Ignace Van de Woestyne. Shaker Verlag, Aachen, 2007. See also *e-print Math.GM/0702552*
- [4] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002).
- [5] Yu.A.Rylov, Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, 2092-2098, (1991)
- [6] Yu. A. Rylov, Uniform formalism for description of dynamic, quantum and stochastic systems *e-print /physics/0603237v6*.
- [7] Yu. A. Rylov, Discriminating properties of compactification in discrete uniform isotropic space-time. *e-print 0809.2516v2*
- [8] Yu. A. Rylov, Geometrical dynamics: spin as a result of rotation with superluminal speed. *e-print 0801.1913*.
- [9] J.L. Synge, A characteristic function in Riemannian space and its applications to the solution of geodesic triangles. *Proc. London Math. Soc.* **32**, 241, (1931).
- [10] J.L.Synge, *Relativity: the General Theory*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1960.

- [11] Yu.A.Rylov, On a possibility of the Riemannian space description in terms of a finite interval. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Matematika. No.3(28), 131-142.* (1962). (in Russian).