Модельная концепция квантовых явлений: логическая структура и методы исследования

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, 119526, Москва, пр. Вернадского 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/~rylov/yrylov.htm*
or mirror Web site:
http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm

Аннотация

Показано, что возможно построить модельную концепцию квантовых явлений (МККЯ), которая относится к аксиоматической концепции квантовых явлений (АККЯ), т.е. традиционной квантовой механике, примерно так же, как статистическая физика относится к термодинамике. Такая возможность основывается на новой концепции геометрии, позволяющей построить детерминированную пространственно-временну́ю геометрию, в которой движение свободных частиц является изначально стохастическим. Геометрию пространства-времени можно выбрать такой, что статистическое описание случайного движения частиц совпадет с квантовым описанием. Переход от АККЯ к МККЯ есть результат исправления некоторых ошибок в основаниях АККЯ. Методы МККЯ в исследовании квантовых явлений оказываются более тонкими и эффективными. Например, исследование свободного уравнения Дирака в рамках МККЯ приводит к выводу, что дираковская частица – это ротатор, т.е. две частицы, вращающиеся вокруг общего центра инерции. В рамках МККЯ удается обнаружить силовое поле, ответственное за рождение пар, что невозможно в рамках АККЯ.

1 Введение

Изучение нового класса физических явлений иногда осуществляется в два этапа. Сначала возникает более простая аксиоматическая концепция, основанная на простых эмпирических соображениях. Затем аксиоматическая концепция заменяется более разработанной модельной теорией, где аксиомы начальной стадии получаются как свойства модели. По этой схеме развивалась теория тепловых явлений. Сначала возникла термодинамика (аксиоматическая концепция тепловых явлений, или АКТЯ), затем – статистическая физика (модельная концепция тепловых явлений, или МКТЯ). При этом аксиомы термодинамики (свойства теплорода) были получены как свойства хаотического движения молекул.

Современная квантовая теория представляет собой первую (аксиоматическую) стадию в развитии физики микромира. Мы классифицируем ее как аксиоматическую концепцию квантовых явлений (АККЯ). Формальные признаки аксиоматичности – существование принципов квантовой механики. Возникновение следующей (модельной) стадии, где принципы квантовой механики будут следствием модели и будут верны лишь при определенных условиях, представляется неизбежным. Модель привлекательна тем, что использует более тонкие и эффективные методы исследования. Кроме того она дает пределы применимости аксиоматической концепции. Это можно видеть на примере взаимоотношений статистической физики и термодинамики.

Главное различие между аксиоматической и модельной стадиями состоит в математических методах, используемых при исследовании и описании. Методы аксиоматической концепции более жестки и грубы. Они могут быть изменены только изменением аксиоматики. Это осуществляется главным образом с помощью введения дополнительных предположений. Математические методы модельной концепции более гибки и адекватны, потому что параметрами модели обычно являются числа и функции, которые можно легко изменять.

Представим себе, что мы не знаем методов статистической физики и пытаемся исследовать природу анизотропии кристалла, используя только методы термодинамики. Используя экспериментальные данные мы можем рассчитать термодинамические потенциалы и описать макроскопические свойства кристалла, но мы едва ли сможем рассчитать что-либо теоретически. Для описания другого кристалла мы будем вынуждены снова использовать экспериментальные данные. В то же время с помощью методов статистической физики мы могли объяснить и теоретически рассчитать параметры анизотропии кристалла. В данном случае методы модельной концепции оказываются более эффективными. Следует ожидать, что они будут более эффективными и при других обстоятельствах.

Нечто похожее можно наблюдать в теории элементарных частиц, когда теоретики используют жесткие и грубые методы аксиоматической концепции (квантовой теории), которые не позволяют создать совершенную теорию. Есть надежда, что математические методы модельной концепции квантовых явлений (МККЯ) окажутся более эффективными, потому что МККЯ не использует жестких принципов квантовой теории. Вместо квантовых принципов МККЯ использует параметры геометрии пространства-времени, которые можно легко менять.

Мы будем рассматривать современную квантовую теорию как аксиоматическую концепцию квантовых явлений (АККЯ). Логическая структура АККЯ отличается от логической структуры МККЯ и других хорошо обоснованных концепций. Например, мы сравним логическую структуру АККЯ с логической структурой такой физической концепции как специальная теория относительности. Теория относительности появилась в начале XX века как решение проблемы больших скоростей, когда движение частицы со скоростью близкой к скорости света не может быть правильно описано в рамках классической нерелятивистской физики. Создание специальной теории относительности было результатом изменения фундаментального принципа физики. Была изменена модель пространства-времени. Ньютонова модель пространства-времени с двумя независимыми инвариантными расстояниями между двумя событиями (временны́м и пространственным интервалами) была заменена геометрией пространства-времени с одним пространственно-временны́м интервалом между двумя событиями. Такое решение проблемы больших скоростей было достаточно фундаментальным, и сценарий развития специальной теории относительности был классическим в том смысле, что он напоминал сценарий развития классической (ньютоновой) физики. Последняя развивалась в соответствии с лозунгом Ньютона "Hypotheses non fingo" (Не измышлять гипотез). Логические структуры специальной теории относительности и АККЯ представлены на рис. 1, где овалы изображают экспериментальные данные, а прямоугольники изображают утверждения концепции.

АККЯ возникла как решение проблемы дискретности атомных спектров. Эта проблема возникла в начале XX века. Как стал ясно в дальнейшем, эта проблема является частным случаем более общей проблемы о движении частиц малой массы. Эксперименты показывали, что частицы малой массы движутся стохастически, и эта стохастичность зависит от массы частицы. В классической физике (релятивистской и нерелятивистской) движение свободной частицы определяется только геометрией пространства-времени. Это свойство следовало сохранить в модифицированной теории. Следовало придумать такую геометрию пространства-времени, где свободные частицы двигались бы стохастически, и эта стохастичность зависела бы от массы частицы. (По определению, геометрия есть произвольное множество точек с заданным на нем расстоянием между любыми двумя точками.) Следует заметить, что геометрический характер свободного движения частицы и зависимость от массы частицы совместимы только в том случае, когда масса частицы является геометрической характеристикой (геометризация массы). В классической (релятивистской и нерелятивистской) физике масса частицы не геометризуется, и геометризация массы есть совершенно новое свойство геометрии пространства-времени. Пространственно-временны́е геометрии с такими необычными свойствами (стохастичность свободного движения и геометризация массы) были неизвестны в начале XX века. (они были неизвестны вплоть до конца XX столетия). Кроме того в то время проблема движения частиц малой массы воспринималась скорее как проблема дискретности атомных спектров.

В начале XX века проблема частиц малой массы не могла быть решена на фундаментальном уровне (изменением геометрии пространства-времени).

Проблема была решена на втором (после фундаментального) уровне с помощью введения квантовых принципов, которые заменили некоторые следствия истинной геометрии пространства-времени см. рис. 1b). Модель пространства-времени осталась ньтоновой (нерелятивистской), однако, логические и математические следствия этой модели, которые касались квантовых явлений (движение частиц малой массы) были заблокированы. Вместо них были использовны следствия квантовых принципов. Такое логическое построение, когда следствия неправильного фундаментального утверждения заменяются правильными следствиями правильного фундаментального утверждения, мы будем называть компенсирующей концепцией. Компенсирующая концепция содержит одновременно оба утверждения: неправильное фундаментальное утверждение и правильные следствия правильного фундаментального утверждения. Причины по которым в компенсирующей концепции отсутствует некоторое правильное фундаментальное утверждение, могут быть различными. Эти причины не важны. Однако, важным является то, что отсутствие правильного фундаментального утверждения не позволяет получить все его следствия. Можно получить только некоторые из них, тогда как другие следствия фундаментального утверждения остаются неизвестными.

Эти неизвестные следствия оказываются нужными, когда мы рассматриваем новый круг физических явлений. Мы можем угадать неизвестные следствия отсутствующего правильного фундаментального утверждения в том случае, когда это следствие расположено на верхнем уровне утверждений концепции, т.е. тогда, когда это следствие близко́ к экспериментальным данным. Однако в этом случае оно далеко от фундаментального утверждения (на самом нижнем уровне) и далеко от квантовых принципов (на втором уровне)(см. рис. 1b). Если нам удалось угадать неизвестное следствие и объяснить некоторые экспериментальные данные, то угаданное утверждение воспринимается как нечто, не имеющее отношения к квантовым принципам. Это новое дополнительное предположение (гипотеза), которое необходимо для объяснения экспериментальных данных. Чем больше новых экспериментальных данных мы имеем, тем больше мы нуждаемся в новых гипотезах. Таким образом, мы можем развивать компенсирующую концепцию только изобретая новые гипотезы, расположенные на верхнем уровне вблизи экспериментальных данных. Обнаружение следствий, расположенных вблизи фундаментального уровня, затруднительно из-за того, что фундаментальное утверждение неизвестно, и нельзя вывести его следствия логически. В то же время очень трудно угадать эти следствия, используя экспериментальную информацию, потому что они связаны с экспериментальными данными длинной логической цепью.

Чем дальше от фундаментального уровня находятся новые гипотезы, тем меньше предсказательность физической концепции в отношении новых экспериментальных данных. Чем ближе новые гипотезы к экспериментальным данным, тем легче их угадать. Таким образом, если правильное фундаментальное утверждение неизвестно, развитие компенсирующей концепции осуществляется таким образом, что число дополнительных гипотез возрастает, в то время как предсказательность концепции в отношении новых физических явлений падает. Чтобы увеличить предсказательность концепции, необходимо найти правильное фундаментальное утверждение. Новые экспериментальные данные не могут помочь в этом поиске, потому что, как правило, логические цепи, связывающие правильное фундаментальное утверждение с экспериментальными данными слишком длинны. Можно получить это фундаментальное утверждение только логическим путем, используя все множество экспериментальных данных.

Изучая историю развития квантовой теории в применении к релятивистским явлениям и теории элементарных частиц, мы обнаруживаем характерные черты компенсирующей концепции. Число дополнительных гипотез возрастает, тогда как предсказательность концепции в отношении новых физических явлений уменьшается. Кроме того имеются дополнительные обстоятельства, обусловленные длительной работой с компенсирующей концепцией (АККЯ). Эти обстоятельства препятствуют переходу от АККЯ к МККЯ. Как правило, современные исследователи, имеющие дело с релятивистской квантовой теорией, оценивают новые гипотезы следующим образом. Если новая гипотеза объясняет некоторые новые экспериментальные данные, то эта гипотеза заслуживает того, чтобы ее принять и изучить. Если же автор новой гипотезы не может указать какой-нибудь новый эксперимент, который объясняется его новой гипотезой, то такая гипотеза не заслуживает изучения. Такой подход к проверке новой гипотезы оправдан только в рамках компенсирующей концепции, где все новые гипотезы расположены вблизи верхнего уровня, и логическая цепь между гипотезой и экспериментальными данными коротка. Однако, такой подход к проверке гипотезы неадекватен, если выдвигется фундаментальное утверждение, расположенное на самом нижнем уровне. В этом случае логическая цепь между фундаментальным утверждением и экспериментальными данными очень длинна. Чтобы объяснить экспериментальные данные и проверить всю цепь, нужно развить методы исследования и математический формализм, соответствующий новому фундаментальному утверждению. Все это очень трудно, и чтобы проверить новую гипотезу, претендующую на роль фундаментального утверждения следует использовать главным образом такой аргумент как отсутствие других дополнительных гипотез. Другим критерием фундаментального утверждения является тот факт, что оно вводится вместо неправильного фундаментального утверждения, а не в дополнение к нему. Например, если геометрия пространства-времени рассматривается как фундаментальное утверждение физической концепции, то переход от АККЯ к МККЯ должен сопровождаться главным образом изменением геометрии пространства-времени. В этом случае следует говорить скорее об исправлении ошибки в основании физической концепции. Разумеется, в конце концов объяснение экспериментальных данных и предсказание результатов экспериментов является окончательным критерием правильности фундаментального утверждения. Однако, это объяснение всех экспериментальных данных может появиться только после долгой разработки математического аппарата, соответствующего новому фундаментальному утверждению.

В соответствии с МККЯ квантовые явления есть результат стохастического поведения микрочастиц. Статистическое описание этого случайного движения приводит к описанию квантовых явлений. Это – очень старая идея, и она представляется разумной после того, как тепловые явления были объяснены хаотическим движением молекул. Было много попыток реализовать эту идею, но все они оказались неудачными. В результате возникло скептическое отношение к этой идее. В настоящее время большинство физиков верят, что принципы квантовой теории правильно описывают причину физических явлений в микромире, и физические явления в микромире имеют квантовую природу.

Логическая связь между АККЯ и МККЯ представлена на рис. 2. Логические связи в МККЯ проблемные с точки зрения АККЯ, обозначены символом "?". Как можно видеть из этой схемы есть три препятствия на пути создания МККЯ: (1) неадекватная пространственно-временна́я геометрия, которая описывает движение частиц в микромире как детерминированное, хотя эксперименты показывают, что это движение на самом деле случайно, (2) неадекватное статистическое описание, когда частицы и античастицы рассматриваются как объекты статистического описания, тогда как объектами статистического описания являются мировые линии, которые являются первичными физическими объектами в релятивистской теории, (3) интегрирование динамических уравнений для идеальной жидкости, которое необходимо для преобразования волновой функции и спина, из фундаментальных объектов, какими они являются в квантовой теории, в метод описания идеальной жидкости, т.е. в атрибуты описания физических объектов.

Модельная концепция квантовых явлений (МККЯ) может быть создана только после преодоления этих трех препятствий. Каждое из этих препятствий представляет собой трудную проблему. Кроме того, необходимо еще осознать, что эти препятствия имеются на пути создания МККЯ. Для преодоления первого препятствия необходимо было создать новую концепцию геометрии (Т-геометрию), которая содержит такие геометрии пространства-времени, где движение частиц случайно.

Правильная геометрия пространства-времени представляет собой такую геометрию, где движение микрочастиц является изначально стохастическим, притом что сама по себе геометрия случайной не является (т.е. интервалы между событиями в такой геометрии являются детерминированными, а не случайными). Чтобы построить такую геометрию (Т-геометрию), нужно выйти за рамки римановой геометрии, которая является наиболее общей современной геометрией, пригодной для описания пространства-времени. Правильная геометрия абсолютного пространства-времени, являясь плоской однородной и изотропной, отличается от геометрии Минковского лишь поправкой, содержащей квантовую постоянную $\hbar$. Это поправка существенна только для малых интервалов, т.е. лишь в микромире. Формально введение этой поправки эквивалентно введению некоторой фундаментальной длины, но эта длина поперечная (толщина мировых линий).

Статистическое описание случайного движения частиц, порожденного пространственно-временно́й геометрией, приводит к квантовой механике (квантовая постоянная $\hbar$ появляется в теории через геометрию), подобно тому как статистическое описание случайного движения молекул приводит к термодинамике. Существенное различие между этими двумя статистическими описаниями в том, что в случае тепловой стохастичности случайная и регулярная составляющие скорости являются нерелятивистскими, тогда как в случае геометрической стохастичности случайная составляющая скорости всегда является релятивистской, хотя регулярная составляющая может быть нерелятивистской. В результате даже нерелятивистская квантовая механика оказывается скрыто релятивистской теорией.

Есть существенное различие между релятивистским и нерелятивистским статистическими описаниями. Оно состоит в том, что нерелятивистское статистическое описание может быть вероятностным, т.е. оно может производиться в терминах теории вероятностей, тогда как *релятивистское статистическое описание в терминах теории вероятностей производиться не может.* Дело здесь не в релятивистской инвариантности соответствующих уравнений, а в том, что физические объекты, подлежащие статистическому описанию различны в релятивистской и нерелятивистской теориях.

В нерелятивистской теории физическим объектом является частица, т.е. точечный (нуль-мерный) объект в трехмерном пространстве, а мировая линия частицы в пространстве-времени есть история этого точечного объекта. Иначе говоря, частица первична, а ее мировая линия вторична. В последовательной релятивистской теории ситуация обратная. Физическим объектом является мировая линия, т.е. одномерная линия, тогда как частица и античастица являются производными объектами (пересечениями мировой линии с поверхностью t =const). Иначе говоря, в последовательной релятивистской теории мировая линия первична, тогда как частица и античастица вторичны. Для мировой линии, рассматриваемой как первичный физический объект, будет использоваться термин "эмлон" (это прочтение аббревиатуры МЛ).

Различие в выборе первичного объекта обусловлено различным отношением к существованию абсолютной одновременности в релятивистской и нерелятивистской физике. Статистическое описание должно быть описанием первичных физических объектов. Основой такого описания является плотность объектов в пространстве (для частиц) или в пространстве-времени (для эмлонов). Плотность $\rho\left(\mathbf{x}\right)$ частиц в точке $\mathbf{x}$ определяется соотношением

$$dN=\rho(\mathbf{x})dV \tag{1.1}$$

где dN есть число частиц в 3-объеме dV. Плотность частиц определяется как коэффициент пропорциональности межу dN и dV. Плотность $j^k(x)$ эмлонов определяется соотношением

$$dN=j^k\left(x\right)dS_k, \tag{1.2}$$

где dN есть поток мировых линий (эмлонов) через трехмерную площадку dS_k в пространстве-времени в окрестности точки x. $j^k(x)$ есть коэффициент пропорциональности между dN и dS_k в окрестности точки x. Величина $\rho(\mathbf{x})$ является 3-скаляром и может служить основой для введения понятия плотности вероятности, тогда как 4-вектор j^k не является неотрицательной величиной и не может служить основой для введения плотности вероятности, которая обязательно неотрицательна.

Бытует представление, что термины "вероятностный" и "статистический" являются синонимами. Это заблуждение, потому что вероятностное описание есть описание, основанное на использовании теории вероятностей, тогда как статистическое описание есть описание, имеющее дело с многими одинаковыми или почти одинаковыми объектами. Такой набор многих одинаковых объектов принято называть статистическим ансамблем. Статистическое описание без использования теории вероятностей вполне возможно, для этого нужно только изучать соответствующий статистический ансамбль, не пользуясь теорией вероятности. Мы будем рассматривать статистические ансамбли динамических или стохастических систем и существенно использовать то обстоятельство, что статистический ансамбль является динамической системой, если даже его элементы являются стохастическими системами. Использование статистического ансамбля как некоторого средства для расчета статистических средних не является обязательным. Такой подход называется динамической концепцией статистического описания (ДКСО). Он пригоден в любом случае (релятивистском или нерелятивистском). Интерпретация ДКСО осуществляется в терминах идеальной жидкости и мировых линий ее частиц.

Построение ДКСО есть результат преодоления второго препятствия. Между ДКСО и аксиоматической концепцией квантовых явлений (АККЯ), т.е. традиционной квантовой механикой, имеется связь. Чтобы получить эту связь нужно было получать получить фундаментальные объекты АККЯ (волновую функцию и спин) как атрибуты идеальной жидкости, которая появляется в ДКСО.

Связь между флюидом и уравнением Шредингера известна со времени появления квантовой механики [1, 2]. В последующие годы многие авторы исследовали эту связь, известную как гидродинамическая интерпретация квантовой механики [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Однако, в конечном счете эта интерпретация была основана на волновой функции как основном объекте динамики. Нельзя было выйти за рамки принципов квантовой механики, потому что связь между гидродинамической интерпретацией и квантовой механикой была односторонняя. Можно было получить потенциальное течение флюида из динамического уравнения для волновой функции (уравнения Шредингера), но как получить обратный переход от динамического уравнения для флюида к динамическому уравнению для волновой функции было не известно. Другими словами, мы не знали как описать завихренное течение флюида в терминах волновой функции. В терминах волновой функции мы умели описывать только потенциальное течение флюида.

Чтобы описать произвольное течение флюида в терминах волновой функции, нужно было проинтегрировать традиционные динамические уравнения для флюида (уравнения Эйлера). В самом деле, уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=0 \tag{1.3}$$

может быть приведено к гидродинамическим уравнениям для плотности ρ и скорости $\mathbf{v}$, некоторого квантового флюида. Подставляя $\psi=\sqrt{\rho}\exp(i\hbar\varphi)$ в (1.3) и разделяя вещественную и мнимую части, мы получаем выражения для временны́х производных $\partial_0\rho$ и $\partial_0\varphi$.Чтобы получить выражение для временно́й производной $\partial_0\mathbf{v}$ скорости $\mathbf{v}=\frac{\hbar}{m}\nabla\varphi$, нужно дифференцировать динамическое уравнение для $\partial_0\varphi$, образуя комбинацию $\partial_0\mathbf{v}=\nabla\left(\frac{\hbar}{m}\partial_0\varphi\right)$. Обратный переход от гидродинамических уравнений к динамическому уравнению для волновой функции требует общего интегрирования гидродинамических уравнений. Это интегрирование достаточно просто в случае потенциального течения, но это довольно сложная математическая проблема в общем случае, когда результат интегрирования должен содержать три произвольные функции трех аргументов. Без этого интегрирования нельзя получить описания флюида в терминах волновой функции, и нельзя манипулировать динамическими уравнениями, преобразуя их от представления в терминах ρ, $\mathbf{v}$ к представлению в терминах волновой функции и обратно. Это проблема оставалась нерешенной многие годы. Она была решена в конце восьмидесятых годов XIX века, и первое применение этого интегрирования можно найти в [12].

Статистический ансамбль дискретных динамических или стохастических систем есть непрерывная динамическая система, т.е. некоторая идеальная жидкость. Интегрирование гидродинамических уравнений позволяет показать, что волновая функция и спин суть атрибуты способа описания идеальной жидкости [13]. Это было преодоление третьего препятствия. Другими словами, волновая функция появляется как свойство некоторой модели (а не как фундаментальный объект, чьи свойства определяются аксиоматикой).

При некоторых условиях потенциальное течение флюида в статистическом ансамбле описывается уравнением Шредингера [14, 15]. Таким образом, можно связать МККЯ с традиционным квантовым описанием и показать, что в нерелятивистском случае описание в терминах МККЯ согласуется с описанием в терминах традиционной квантовой механики.

Заметим, что упомянутые выше препятствия преодолевались в порядке, отличном от того, в котором они перечислены выше. Понадобилось около тридцати лет, чтобы преодолеть первое препятствие и создать Т-геометрию. В первой работе [16] была получена система дифференциальных уравнений для мировой функции риманова пространства. Эти уравнения не содержали метрического тензора. Они содержали только мировую функцию и ее производные по обоим аргументам. Эти уравнения ставили следующий вопрос. Пусть мировая функция не удовлетворяет этим уравнениям. Что тогда? Мы получим не-риманову геометрию, или не будет никакой геометрии? Тогда мы не могли ответить на этот вопрос, потому что мы, как и все исследователи, считали, что прямая должна быть одномерным геометрическим объектом (кривой) в любой геометрии. Только тридцать лет спустя нам удалось найти ответ на этот вопрос и построить не-риманову геометрию (Т-геометрию) [17]. Это оказалось возможным, потому что нам удалось осознать, что прямая может быть не-одномерным объектом (поверхностью). Более того это оказалось общим случаем геометрии, тогда как риманова геометрия с одномерными прямыми (геодезическими) оказалась частным (вырожденным) случаем. Идею неодномерной прямой подала теория струн.

Второе препятствие было преодолено первым [18, 19, 21, 20]. Третье препятствие было преодолено только в конце восьмидесятых годов двадцатого века. Первое препятствие было преодолено последним [22].

Следует отметить, что все препятствия преодолевались на строго логической основе, т.е. для их преодоления использовались логические построения, основанные на уже известных принципах классической физики. Новые гипотезы или принципы не использовались, что совсем не характерно для физики микромира, развивавшейся в двадцатом веке. Иначе говоря, возможность получения МККЯ была заложена в принципах классической физики. Нужно было только логически последовательно использовать их. К сожалению, именно это оказалось камнем преткновения.

В двух следующих разделах мы рассмотрим модификацию теории квантовых явлений, порожденную преодолением вышеупомянутых препятствий. Последний раздел содержит анализ методов МККЯ и сравнение их с методами АККЯ.

2 Геометрия

Имеется два разных подхода к геометрии: математический и физический. При математическом подходе геометрия есть построение, основанное на системе аксиом о свойствах точек и прямых. Практически любая система аксиом, содержащая понятия точки и прямой, может быть названа геометрией. Известный математик Феликс Клейн [23] считал, что построение на множестве точек заслуживает названия геометрии только в том случае, если все точки имеют одинаковые свойства (однородная геометрия). Согласно Феликсу Клейну римановы геометрии не являются геометриями. Как правило, римановы геометрии неоднородны, и их точки имеют разные свойства. По Клейну их следовало называть "римановыми географиями" или "римановыми топографиями". Как называть римановы геометрии – это во многом дело вкуса и привычки. Однако, Феликс Клейн был совершенно прав в том отношении, что предлагал различать между евклидовой и римановой геометриями. Дело в том, что принцип построения евклидовой геометрии совсем иной, чем принцип построения римановой геометрии. Евклидова геометрия строится на основе аксиом, тогда как риманова геометрия строится как деформация евклидовой геометрии.

При физическом подходе геометрия есть наука о взаимном расположении точек или геометрических объектов в пространстве, или событий в пространстве-времени. Взаимное расположение описывается метрикой ρ (расстояние между двумя точками), или мировой функцией $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$ [24]. Обладают ли все точки одинаковыми свойствами и каким аксиомам удовлетворяет метрика, является второстепенным вопросом.

Риманова геометрия получается как результат деформации собственно евклидовой геометрии, когда бесконечно малый евклидов интервал ds_{E}^2 заменяется на риманов интервал $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$. Такая замена представляет собой деформацию евклидова пространства. Такой подход к геометрии, когда геометрия получается как результат деформации собственно евклидовой геометрии мы будем называть физическим подходом к геометрии, а полученную геометрию будем называть физической геометрией. Физическая геометрия не имеет собственной аксиоматики. Она использует "деформированную" евклидову аксиоматику. Физическая геометрия описывает взаимное расположение точек в пространстве или событий в пространстве-времени. Оно описывается заданием расстояния между любыми двумя точками. Метрика ρ есть единственная характеристика физической геометрии. Мировая функция $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$ более удобна для описания физической геометрии, потому что она вещественна даже для пространства-времени, где $\rho = \sqrt{2\sigma}$ может быть мнимым.

Построение любой физической геометрии определяется *принципом деформации* [25]. Он работает следующим образом. Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть описана σ-имманентно, т.е. в терминах и только в терминах мировой функции σ_{E}. [17, 26]. Это означает, что все геометрические объекты $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ могут быть описаны в σ-имманентном виде $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Соотношения между геометрическими объектами описываются некоторыми σ-имманентными соотношениями $\mathcal{R}_{\mathrm{E}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Любая физическая геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{A}}$ может быть получена из собственно евклидовой геометрии с помощью деформации, когда евклидова мировая функция σ_{E} заменяется некоторой другой мировой функцией σ_{A} во всех определениях евклидовых геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и во всех евклидовых соотношениях $\mathcal{R}_{\mathrm{E}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ между ними. В результате возникает следующая замена.

$$\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}) \to \mathcal{O}_{\mathrm{A}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{A}}), \qquad \mathcal{R}_{\mathrm{E}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}}) \to \mathcal{R}_{\mathrm{A}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{A}})$$

Множество всех геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{A}}$ и всех соотношений $\mathcal{R}_{\mathrm{A}}$ между ними образует физическую геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{A}}$, описываемую мировой функцией σ_{A}. Индекс "E" в соотношениях физической геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{A}}$ означает, что аксиоматика собственно евклидовой геометрии используется для построения геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{E}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$ и соотношений между ними $\mathcal{R}_{\mathrm{E}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{E}})$. Одна и та же аксиоматика используется для всех геометрических объектов $\mathcal{O}_{\mathrm{A}} = \mathcal{O}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{A}})$ и соотношений между ними $\mathcal{R}_{\mathrm{A}} = \mathcal{R}_{\mathrm{E}}(\sigma_{\mathrm{A}})$ в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{A}}$. Однако, теперь эта аксиоматика имеет другой вид из-за деформации $\sigma_{\mathrm{E}} \to \sigma_{\mathrm{A}}$. Это означает, что собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ есть базовая геометрия для всех физических геометрий $\mathcal{G}$, получаемых с помощью деформации собственно евклидовой геометрии. Если базовая геометрия фиксирована (именно этот случай будет рассматриваться дальше), геометрия на произвольном множестве Ω точек называется Т-геометрией (трубчатой геометрией). Т-геометрия определяется [17, 26] заданием мировой функции σ:

$$\sigma: \quad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}, \qquad \sigma\left(P,P\right)=0, \qquad \forall P\in\Omega \tag{2.1}$$

Вообще говоря, никаких других ограничений не накладывается, хотя можно наложить любые дополнительные ограничения, чтобы получить специальный класс Т-геометрий. Т-геометрия симметрична, если дополнительно

$$\sigma\left(P,Q\right)=\sigma\left(Q,P\right), \qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{2.2}$$

Последовательное использование *одного только принципа деформации* позволяет получить любую физическую геометрию (Т-геометрию), которая автоматически оказывается столь же непротиворечивой как и положенная в ее основу евклидова геометрия. Римановы геометрии образуют специальный класс Т-геометрий, выделяемый ограничением на мировую функцию

$$\sigma_{\mathrm{R}}\left(x,x'\right)=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_{[xx']}}\sqrt{g_{ik}dx^{i}dx^{k}}\right)^{2} \tag{2.3}$$

где σ_{R} есть мировая функция риманова пространства, и $\mathcal{L}_{[xx']}$ означает сегмент геодезической между точками x и x'. Риманова геометрия определяется размерностью n и $n\left(n+1\right)/2$ функциями g_{ik} одной точки x, тогда как класс всех возможных Т-геометрий является существенно более мощным, т.к. он определяется одной функцией σ двух точек x и x'.

Вообще говоря, принцип деформации позволяет получать такие геометрии, где роль прямых выполняют неодномерные поверхности (трубки). Реальная пространственно-временна́я геометрия именно такая. Однако, создатели римановой геометрии полагали, что геометрия с трубками вместо прямых невозможна. Ограничение (2.3) на римановы геометрии вводится именно для того, чтобы запретить деформации, переводящие одномерные евклидовы прямые в многомерные трубки. Однако, в неоднородной физической геометрии подавить трубчатый характер прямых полностью не удается. В римановой геометрии это удается сделать только ценой отказа от последовательного применения принципа деформации и применения дополнительных средств для построения геометрии. В результате риманова геометрия оказалась не совсем последовательным построением, что проявляется, в частности, в отсутствии абсолютного параллелизма, тогда как в любой физической геометрии, построенной в соответствии с принципом деформации имеет место абсолютный параллелизм (см. детали в [25]).

Трубчатый характер времениподобных прямых в реальном пространстве-времени порождает стохастичность движения свободных частиц в таком пространстве, потому что прямая (трубка) $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, проходящая через точки P_0 и P_1

определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \left\{R|\overrightarrow{P_0P_1}||\overrightarrow{P_0R}\right\} = \{R|S_{P_0P_1R} = 0\} \tag{2.4}$$

где $\overrightarrow{P_0P_1}||\overrightarrow{P_0R}$ означает, что векторы $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_0R}$ коллинеарны. В собственно евклидовом пространстве векторы $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_0R}$ линейно зависимы (коллинеарны), если и только если определитель Грама второго порядка $F_2(P_0, P_1, R)$ обращается в нуль.

$$\overrightarrow{P_0P_1}||\overrightarrow{P_0R}: \qquad F_2(P_0, P_1, R) = \left| \begin{array}{cc} \left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0P_1}\right) & \left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0R}\right) \\ \left(\overrightarrow{P_0R}.\overrightarrow{P_0P_1}\right) & \left(\overrightarrow{P_0R}.\overrightarrow{P_0R}\right) \end{array} \right| = 0 \tag{2.5}$$

Здесь $\left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0R}\right)$ означает скалярное произведение двух векторов $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_0R}$, которое определено соотношением

$$\left(\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0R}\right) \equiv \sigma(P_0, P_1) + \sigma(P_0, R) - \sigma(P_1, R) \tag{2.6}$$

Соотношения (2.5), (2.6) выражают условие коллинеарности через мировую функцию σ собственно евклидова пространства. Иными словами, коллинеарность векторов $\overrightarrow{P_0P_1}$, $\overrightarrow{P_0R}$ определяется σ-имманентно. По определению это соотношение может быть использовано в произвольной Т-геометрии, т.е. для любой мировой функции σ. $S_{P_0P_1R}$ есть площадь евклидова треугольника с вершинами в точках P_0, P_1, R. Она связана с определителем Грама соотношением

$$F_2(P_0, P_1, R) = (2S_{P_0P_1R})^2 \tag{2.7}$$

Таким образом, два соотношения (2.4) содержат два эквивалентных условия коллинеарности.

Следует заметить, что обычно понятие линейной зависимости (коллинеарности) вводится в рамках линейного пространства. Для введения линейного пространства необходимо выполнение ряда условий (заданная размерность, непрерывность, система координат и т.д.). Неожиданно оказывается, что все эти ограничения не являются необходимыми. Понятие линейной зависимости может быть введено на любом множестве точек, на котором задана мировая функция (метрика). Понятие линейной зависимости может быть введено независимо от того, можно ли ввести линейное пространство на этом множестве. Понятие линейной зависимости (коллинеарности) отражает некоторое очень общее геометрическое свойство, имеющее только косвенное отношение к линейному пространству.

В соответствии с этим определением трубка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ есть множество таких точек R, что векторы $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_0R}$ коллинеарны. Трубчатый характер прямой (толстая прямая) означает, что имеется много направлений $\overrightarrow{P_0R}$, параллельных вектору $\overrightarrow{P_0P_1}$. С другой стороны движение свободной частицы в кривом пространстве-времени описывается уравнением геодезической

$$d\dot{x}^i = -\Gamma^i_{kl}\dot{x}^k dx^l, \qquad dx^l = \dot{x}^i d\tau \tag{2.8}$$

где Γ_{kl}^i есть символ Кристоффеля. Уравнение (2.8) описывает параллельный перенос вектора скорости $\dot{x}^i$ частицы вдоль направления $dx^i = \dot{x}^i d\tau$, определяемого вектором скорости $\dot{x}^i$. Если имеется много векторов, параллельных вектору скорости $\dot{x}^i$, то параллельный перенос (2.8) оказывается неоднозначным, и мировая линия частицы становится случайной.

Плоское однородное и изотропное пространство-время описывается мировой функцией [22]

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{M}} + D\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right), \qquad D\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right) = \frac{\hbar}{2bc} \geq 10^{-21}\mathrm{cm}^2 \quad \text{для} \quad \sigma_{\mathrm{M}} > \frac{\hbar}{2bc} \tag{2.9}$$

где σ_{M} есть мировая функция пространства Минковского, c есть скорость света. Функция дисторсии $D\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right)$ описывает характер квантовой стохастичности. В пространстве с ненулевой дисторсией $D\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right)$ масса частицы геометризуется [22] и $b \leq 10^{-17}\mathrm{g/cm}$ есть постоянная, описывающая связь между геометрической массой μ и обычной массой m частицы с помощью соотношения $m = b\mu$. Вид функции дисторсии $D\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right)$ определяется требованием, что стохастичность, порождаемая дисторсией, есть квантовая стохастичность, т.е. статистическое описание движения свободных стохастических частиц эквивалентно квантовому описанию в терминах уравнения Шредингера [22].

3 Статистическое описание

Пусть статистический ансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ детерминированных классических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ описывается действием $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)\right]}$, где P суть параметры, описывающие частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ (например, масса, заряд). Пусть под влиянием некоторого случайного агента детерминированная частица $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ превращается в стохастическую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]}$ для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ приводится к действию $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]}$ для некоторого множества $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ тождественных взаимодействующих детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Действие $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]}$ как функционал от $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ имеет вид $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P_{\mathrm{eff}})\right]}$, где параметры P_{eff} суть параметры P детерминированной частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, усредненные по статистическому ансамблю, и это усреднение описывает взаимодействие частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в множестве $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$. Это означает, что

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]} = \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)\right]} = \mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P_{\mathrm{eff}})\right]} \tag{3.1}$$

Другими словами, стохастичность частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ в ансамбле $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ заменяется взаимодействием частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в $\mathcal{S}_{\mathrm{red}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$, и это взаимодействие описывается заменой

$$P \rightarrow P_{\mathrm{eff}} \tag{3.2}$$

в действии $\mathcal{A}_{\mathcal{E}_{\mathrm{d}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}(P)\right]}$.

Действие для статистического ансамбля свободных детерминированных частиц имеет вид

$$\mathcal{A}\left[x\right] = -\int mc\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}d\xi_0 d\vec{\xi}, \qquad \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\xi_0} \tag{3.3}$$

где $x = \{x^i\}$, $i = 0,1,2,3$ есть функция переменных $\xi = \left\{\xi_0, \vec{\xi}\right\} = \{\xi_i\}$, $i = 0,1,2,3$.

Для свободной частицы единственным параметром является ее масса m и замена (3.2) в нерелятивистском случае имеет вид

$$m \to m_{\text{eff}} = m\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{2c^2} + \frac{\hbar}{2mc^2}\nabla\mathbf{u}\right) \tag{3.4}$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ есть среднее значение стохастической составляющей скорости. Квантовая постоянная $\hbar$ появляется здесь как постоянная связи, описывающая взаимодействие между регулярной и стохастической составляющими движения частицы. Скорость $\mathbf{u}$ считается новой зависимой переменной и динамическое уравнение для нее находится в результате вариации действия по $\mathbf{u}$. При этом $\mathbf{u}$ предполагается малой по сравнению со скоростью света c. В релятивистском случае замена (3.2) принимает вид

$$m^2 \to m_{\text{eff}}^2 = m^2\left(1 + u_l u^l + \lambda \partial_l u^l\right), \qquad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \tag{3.5}$$

где $u^l = \{u^0, \mathbf{u}\}$. Тогда действие (3.3) преобразуется к виду

$$\mathcal{A}[x, \kappa] = -\int mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}d\xi_0 d\vec{\xi}, \qquad K = \sqrt{1 + \frac{\hbar^2}{m^2c^2}\left(\kappa^l\kappa_l + \partial_l\kappa^l\right)} \tag{3.6}$$

где $x = \{x^i\}$, $i = 0,1,2,3$ есть функция переменных $\xi = \left\{\xi_0, \vec{\xi}\right\} = \{\xi_i\}$, $i = 0,1,2,3$. Переменные $\kappa = \{\kappa^i\}$, $i = 0,1,2,3$ суть функции от x. Переменные κ^l связаны с переменными u^l с помощью соотношения

$$u^l = \frac{\hbar}{m}\kappa^l, \qquad l = 0,1,2,3 \tag{3.7}$$

С одной стороны действие (3.6) описывает множество частиц взаимодействующих между собой через самосогласованное векторное поле κ^l. С другой стороны, действие (3.6) описывает некоторый квантовый флюид, причем потенциальное течение этого флюида описывается одно-компонентной волновой функцией ψ, удовлетворяющей уравнению Клейна-Гордона [29, 28].

В общем случае течение флюида описывается двух-компонентной волновой функцией, удовлетворяющей уравнению [28]

$$-\hbar^2\partial_k\partial^k\psi - \left(m^2c^2 + \frac{\hbar^2}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\right)\psi = \hbar^2\frac{\partial_l\left(\rho\partial^l s_\alpha\right)}{2\rho}\left(\sigma_\alpha - s_\alpha\right)\psi \tag{3.8}$$

где 3-вектор $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3,\}$ определяется соотношениями

$$\psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}, \qquad \psi^* = \left(\psi_1^*, \psi_2^*\right), \qquad \rho = \psi^*\psi, \qquad s_\alpha = \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{3.9}$$

а $\vec{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ суть матрицы Паули.

С физической точки зрения процедура квантования (3.5), когда масса m заменяется ее средним значением m_{eff}, выглядит очень естественной. В самом деле, значение массы m_{eff} зависит от состояния стохастической составляющей скорости. Стохастическая составляющая имеет бесконечное число степеней свободы, и рассмотрение влияния среднего значения u^l на регулярную составляющую скорости частицы оказывается очень сложным. Оно описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, хотя в отсутствие этого влияния регулярное движение частицы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. С физической точки зрения такая интерпретация квантования выглядит более естественной, чем традиционная интерпретация в терминах волновой функции и операторов.

Волновая функция и спин появляются здесь как способ описания идеального флюида [13], т.е. как атрибуты флюида. Иначе говоря, первичными являются статистическое описание и гидродинамическая интерпретация волновой функции и квантовых явлений. Иерархия понятий изображена на рис.2. Заметим, что переход от АККЯ к МККЯ оказался возможным только после решения такой чисто математической проблемы как интегрирование полной системы динамических уравнений для идеальной жидкости. Систематическое использование этого интегрирования для описания квантовых явлений началось в 1995 году [14, 30].

4 Методы и возможности МККЯ

Сформулируем первое различие между АККЯ и МККЯ. Как всякая статистическая теория МККЯ содержит два сорта исследуемых объектов: стохастическую систему $\mathcal{S}_{\text{st}}$ и среднестатистические систему $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$, тогда как АККЯ исследует только один сорт объектов: так называемую квантовую систему $\mathcal{S}_{\text{q}}$. Системы $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$ и $\mathcal{S}_{\text{q}}$ суть непрерывные динамические системы. Для них существуют динамические уравнения и они практически всегда совпадают. Система $\mathcal{S}_{\text{st}}$ есть дискретная стохастическая система, для которой не существует динамических уравнений.

Динамическая система $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$ появляется как результат статистического описания системы $\mathcal{S}_{\text{st}}$ (рассмотрение статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$). Среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$ есть статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$, нормированный на одну систему, и $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$ как непрерывная динамическая система имеет практически все свойства статистического ансамбля.

Нормирование на одну систему возможно, потому что свойства статистического ансамбля $\mathcal{E}[N, \mathcal{S}_{\text{st}}]$ не зависят от числа N элементов в нем, если оно достаточно велико. Тогда можно формально положить $N = 1$, и $\mathcal{E}[N, \mathcal{S}_{\text{st}}]$ превратится в $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$. При этом $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$ остается непрерывной динамической системой и сохраняет все свойства статистического ансамбля $\mathcal{E}[\infty, \mathcal{S}_{\text{st}}]$ [27].

Два вида измерений в МККЯ (S-измерение и M-измерение) есть другая сторона существования двух сортов объектов $\mathcal{S}_{\rm st}$ и $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$. Отдельное измерение ($S$-измерение) производится над отдельной стохастической системой $\mathcal{S}_{\rm st}$. Результат S-измерения случайный. Это означает, что результат S-измерения, вообще говоря, не воспроизводится в других S-измерениях, производимых над другими системами $\mathcal{S}_{\rm st}$, приготовленными тем же способом. S-измерение всегда приводит к одному определенному значению R' измеряемой величины $\mathcal{R}$. Этот результат не влияет на волновую функцию ψ, потому что волновая функция описывает состояние среднестатистической системы $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$ и не имеет отношения к $\mathcal{S}_{\rm st}$.

Массовое измерение (M-измерение) производится над многими отдельными стохастическими системами $\mathcal{S}_{\rm st}$, образующими $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$. M-измерение есть множество из многих S-измерений, проводимых над разными элементами статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ или системы $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$. M-измерение величины $\mathcal{R}$ всегда приводит к распределению $F\left(R'\right)$ возможных значений R', потому что S-измерения в различных элементах системы $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$ дают, вообще говоря, разные результаты. Результатом M-измерения всегда является распределение. Это верно даже в том случае, когда все отдельные измерения, составляющие M-измерение, дают один и тот же результат. В последнем случае распределение описывается δ-функцией. Распределение $F\left(R'\right)$ воспроизводимо. Оно воспроизводится в других M-измерениях, проводимых над системой в том же состоянии ψ.

Таким образом, S-измерение, вообще говоря, невоспроизводимо и всегда дает определенный результат. M-измерение воспроизводимо и, вообще говоря не дает определенного результата (а только распределение результатов). Тем не менее формально M-измерение величины $\mathcal{R}$ может рассматриваться как однократный акт измерения распределения величины R', которое производится над динамичсеской системой $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$.

Теория предсказывает только результат M-измерения, который сводится к воспроизводимому распределению. Результат S-измерения случаен. Он не может быть предсказан, за исключением того случая, когда измеряемая система является элементом статистического ансамбля, находящегося в таком состоянии, где распределение измеряемой величины является δ-функцией. В этом случае результат S-измерения может быть предсказан, поскольку он однозначно определяется распределением, которое представляет собой результат M-измерения и может быть предсказано теорией.

Возможно ли, что M-измерение величины $\mathcal{R}$ в состоянии ψ приведет к определенному результату R'? Да, это возможно, если M-измерение сопровождается отбором только тех S-измерений, образующих M-измерение, которые дают результат R'. Такое измерение называется селективным M-измерением, (или SM-измерением). SM-измерение имеет свойства S-измерения (определенный результат R') и свойства M-измерения (оно производится в $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$, а не в $\mathcal{S}_{\rm st}$, и влияет на состояние системы $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$). SM-измерение сопровождается селекцией, и вопрос о его воспроизводимости не имеет смысла, потому что воспроизводимость зависит от вида селекции, которая определеяет результат SM-измерения.

В АККЯ имеется только один тип объектов – квантовые системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ и только один тип измерений (Q-измерение). Q-измерение является по существу M-измерением, потому что оно всегда дает распределение измеряемой величины $\mathcal{R}$. Все предсказания в АККЯ так же как и в МККЯ относятся только к результатам M-измерения. В АККЯ имеется только один объект и только один вид измерения. В АККЯ не различают между S-измерением и M-измерением. В АККЯ среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ рассматривается как индивидуальная квантовая система $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$, а отдельное измерение над $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ рассматривается как измерение со свойствами обоих измерений (M-измерения и S-измерения).

В классической физике отдельная физическая система рассматривается как дискретная динамическая система, тогда как непрерывная динамическая система описывает статистический ансамбль отдельных физических систем. В АККЯ вопрос, почему непрерывная динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ описывает отдельный физический объект (например, отдельную частицу) обычно не ставится. Если все же такой вопрос возникает, то на него обычно отвечают, что квантовая система есть особый вид физической системы, которая отличается от классической системы и состояние которой описывается такой таинственной величиной как волновая функция, или что-нибудь в этом духе. Факт, что волновая функция есть способ описания статистического ансамбля практически не известен.

В АККЯ имеется только один объект, и для описания отдельного измерения используется SM-измерение (а не S-измерение), потому что S-измерение невозможно в рамках АККЯ. SM-измерение производится над динамической системой $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ и влияет на волновую функцию, описывающую состояние системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$. S-измерение производится над системой $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Оно не влияет на волновую функцию, описывающую состояние системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Характер влияния на волновую функцию есть главное формальное различие между S-измерением и SM-измерением. Замена S-измерения SM-измерением в АККЯ приводит к таким парадоксам как парадокс кота Шредингера и парадокс Эйнштейна - Подольского - Розена, которые основаны на вере, что отдельное измерение может изменить волновую функцию. Парадоксы устраняются, если принять во внимание, что отдельное измерение есть S-измерение, которое не меняет волновой функции. См. подробное обсуждение в [27].

Некоторые свойства системы $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ появляются как результат свойств отдельной системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Другие свойства появляются в результате статистического усреднения. Последние интерпретируются как коллективные свойства. Например, в статистической физике (МКТЯ) температура является коллективным свойством, потому что одна молекула не имеет температуры. Только коллектив молекул имеет температуру в статистической физике. В термодинамике (АКТЯ) нет понятия коллективного свойства, и температура есть свойство любого количества вещества (одна молекула, или даже пол-молекулы). В МККЯ волновая функция ψ есть коллективная величина, которая описывает состояние системы $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Если мы говорим, что отдельная стохастическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ находится в состоянии ψ, то это означает только, что система $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является элементом статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, чье состояние описывается волновой функцией ψ. В МККЯ спин частицы может быть свойством отдельной частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, и может быть коллективным свойством системы $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. В разных случаях результаты различны.

В случае динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$, описываемой уравнением Паули, спин электрона является коллективным свойством [14]. Это означает, в частности, что динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$, описываемая уравнением Шредингера, и динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$ состоят из одинаковых индивидуальных систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Различие между $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$ описывается типом течения квантового флюида. В случае $\mathcal{S}_{\mathrm{S}}$ течение флюида потенциальное, тогда как в случае $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$ течение флюида завихренное. Иными словами, в $\mathcal{S}_{\mathrm{P}}$ спин электрона обусловлен коллективным свойством (завихренное течение). В данном случае спин электрона есть результат завихренности потока флюида. (Напомним, что статистический ансамбль есть флюидоподобная динамическая система).

В случае динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемой уравнением Дирака, спин электрона есть свойство отдельной стохастической частицы [31]. В этом случае расквантизация уравнения Дирака, т.е. определение классического аналога $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ показывает, что $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$ есть динамическая система, имеющая десять степеней свободы. Это может быть интерпретировано как две связанные релятивистские частицы, вращающиеся вокруг общего центра инерции. Угловой момент этого вращения обусловливает спин частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dcl}}$. Таким образом, в случае дираковского электрона $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ спин есть свойство отдельной стохастической системы.

В АККЯ нет никаких коллективных свойств, потому что есть только один объект: квантовая система $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$. Постановка вопроса, является ли спин частицы коллективным свойством, бессмысленно в рамках АККЯ. Важно ли для исследований различие между индивидуальными и коллективными свойствами? Иногда это не имеет значения, но иногда это бывает важным. Мы можем исследовать этот вопрос на примере понятия температуры в статистической физике. Коллективные свойства температуры не важны, если мы имеем дело только с их средними значениями. Если же мы имеем дело с флуктуациями температуры и флуктуациями других величин, коллективность свойства температуры становится важной. В любом случае метод исследований в МККЯ более гибок и эффективен, чем метод исследований в АККЯ.

Вообще, МККЯ как всякая модельная концепция обладает *более гибкими и адекватными методами исследования*. Например, замена (3.5) по существу реализует процедуру квантования, т.е. переход от классического описания к квантовому. Представим себе, что квантование (3.5) не является полностью правильным, и требуется немного его подправить. В рамках МККЯ нужно только изменить вид выражения (3.5). Как осуществить подобную модификацию в рамках АККЯ не ясно, потому что АККЯ тесно связана с линейностью динамических уравнений в терминах волновой функции. Нельзя представить себе квантовую механику, нелинейную в терминах волновой функции, потому что в этом случае нарушаются принципы квантовой механики.

Гидродинамическую интерпретацию, имеющую долгую историю, [1, 2] следует отнести к методам исследования. Но в рамках АККЯ гидродинамическая интерпретация вторична, как это следует рис.2. В рамках МККЯ гидродинамическая интерпретация первична и может рассматриваться как более эффективный метод исследования. В АККЯ переход к квазиклассическому приближению осуществляется с помощью перехода к пределу $\hbar \to 0$ с некоторыми дополнительными условиями. В МККЯ этот переход осуществляется с помощью динамической расквантизации [31], которая представляет собой релятивистскую динамическую процедуру. При динамической расквантизации отбрасываются поперечные составляющие $\partial_{\perp k} = \partial_k - j_k j^l \left(j_s j^s\right)^{-1} \partial_l$ производной ∂_k, т.е. составляющие ортогональные потоку 4-вектора j^k. После этого преобразования динамические уравнения содержат производные только в направлении вектора j^k. Такая система уравнений в частных производных приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате динамической расквантизации система уравнений в частных производных приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Другими словами, статистический ансамбль стохастических систем превращается в статистический ансамбль динамических систем. В результате непрерывная динамическая система может быть интерпретирована в терминах дискретной динамической системы (с конечным числом степеней свободы). В нерелятивистском случае динамическая расквантизация эквивалентна $\hbar \to 0$. В релятивистском случае квантовая постоянная $\hbar$ остается в дискретной динамической системе в качестве параметра [31]. Это позволяет получить более детальную интерпретацию.

Этот метод был использован для исследования динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемой уравнением Дирака [31]. Оказалось, что классическим аналогом дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ является ротатор (а не отдельная частица), т.е. две частицы, вращающиеся вокруг их общего центра инерции. Это непринужденно объясняет угловой и магнитный моменты дираковской частицы. Динамические переменные, описывающие вращение содержат квантовую постоянную $\hbar$. Если $\hbar \to 0$, то степени свободы, связанные с вращением подавляются. Радиус ротатора стремится к 0, и вместо ротатора мы получаем точечную частицу со спином и магнитным моментом. Результат с $\hbar \to 0$ согласуется с результатами, полученными в рамках АККЯ. Более точный результат ротатора, когда $\hbar \neq 0$, не может быть получен методами АККЯ. Эти методы слишком грубы. Кроме того выясняется (совершенно неожиданно), что внутренние (вращательные) степени свободы динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ описываются нерелятивистским способом [31, 30, 32]. Исследование динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ было произведено без каких-либо дополнительных предположений. Она была исследована релятивистски ковариантными методами просто как динамическая система. Эти результаты не могут быть получены в рамках традиционной квантовой механики (АККЯ).

Методы МККЯ суть последовательно релятивистские методы. В то время как АККЯ использует для описания релятивистских квантовых явлений программу объединения нерелятивистского формализма квантовой механики с принципами теории относительности. К сожалению эта программу не удалось успешно осуществить. В всяком случае последние пятьдесят лет с ее помощью безуспешно пытались построить релятивистскую квантовую теорию поля и создать теорию элементарных частиц. Успешное объединение формализма нерелятивистской квантовой механики с принципами теории относительности представляется невозможным.

В качестве другого примера применения методов МККЯ рассмотрим проблему рождения пар, которая является центральной проблемой физики высоких энергий. АККЯ ничего не может сказать о механизме рождения пар и об агентах, ответственных за этот процесс, тогда как МККЯ может сказать по этому поводу нечто содержательное. МККЯ возлагает ответственность за рождение пар на κ-поле (3.7), которое связано со стохастической составляющей движения частицы. В МККЯ эффект рождения пар учитывается на описательном (до-динамическом) уровне, т.е. рождение пар учитывается при рассмотрении эмлонов как первичных физических объектов. В АККЯ рождение пар учитывается только на динамическом уровне, т.е. с помощью динамических уравнений. В АККЯ частицы могут рождаться не только парами. Число рожденных частиц зависит от вида соответствующего члена в лагранжиане. В МККЯ частицы рождаются только парами частица - античастица. Этот факт задается на описательном (концептуальном) уровне и не может быть изменен на динамическом уровне (с помощью выбора лагранжиана). Все это говорит о том, что причина рождения пар различна в МККЯ и АККЯ.

Представим себе, что мировая линия частицы поворачивает вспять по времени. В зависимости от ситуации, такой поворот описывает или рождение или аннигиляцию пары. κ-поле создает условия для такого поворота и рождения пары. Дело в том, что при таком повороте во времени мировая линия становится пространственноподобной ($p^2 = m^2 < 0$) в окрестности точки поворота. Если запретить мировой линии быть пространственноподобной рождение пары становится невозможным. Возможность такого изменения массы частицы, при котором она становится мнимой, довольно редкое свойство среди силовых полей. Например, электромагнитное поле любой напряженности не может изменить массу частицы и, следовательно, породить пару. Рождение пар есть прерогатива κ-поля. В соответствии с соотношением (3.5) выражение, содержащее κ-поле, входит в квадрат эффективной массы как множитель. Если этот множитель отрицателен, масса становится мнимой, и рождение (аннигиляция) пары становится возможным [28].

Более того рождение пар получаемое в АККЯ при каноническом квантовании нелинейного релятивистского поля, на самом деле не происходит. Это было показано при каноническом квантовании нелинейного комплексного скалярного поля [33], описываемого плотностью лагранжиана

$$L =: \varphi_i^* \varphi^i - m^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{2} \varphi^* \varphi^* \varphi \varphi : \tag{4.1}$$

$$\varphi = \varphi(x), \qquad \varphi_i \equiv \partial_i\varphi, \qquad \varphi^i \equiv \partial^i\varphi, \qquad x = (t, x).$$

При каноническом квантовании поля (4.1) использовалась WL-схема квантования, когда первичным физическим объектом считается эмлон (т.е. мировая линия, рассматриваемая как первичный физический объект. В WL-схеме каноническое квантование производится без наложения дополнительного ограничения

$$[u, P_0]_- = -i\hbar\frac{\partial u}{\partial x^0}, \qquad E = P^0 = \int T^{00}d\mathbf{x} \tag{4.2}$$

где [...]_ означает коммутатор, и T^{ik} есть тензор энергии-импульса. Условие (4.2) отождествляет энергию с оператором временно́й эволюции (гамильтонианом). Такое отождествление возможно в случае, когда имеются или только одни частицы, или только одни античастицы. Оно возможно также тогда, когда частицы и античастицы рассматриваются как различные физические объекты (а не атрибуты эмлона). В WL-схеме квантования число первичных физических объектов (эмлонов) сохраняется, и квантование производится без использования теории возмущений). При таком квантовании нет рождения пар, что согласуется с требованиями к полю, способному порождать пары.

Тогда возникает вопрос. Почему возникает рождение пар при квантовании по PA-схеме [34, 35, 36, 37], когда частица и античастица рассматриваются как первичные объекты? Ответ такой. Каноническое квантование (по WL-схеме) возможно без наложения ограничения (4.2). Это означает, что ограничение (4.2) есть дополнительное условие, и следует проверить его совместность с динамическими уравнениями. К сожалению, никто это не проверял, полагая, что (4.2) есть необходимое условие вторичного квантования и нет необходимости проверять его совместность с динамическими уравнениями. Эта проверка была произведена в [33]. Оказалось, что (4.2) совместимо с динамическими уравнениями, только при условии $\lambda = 0$, т.е. для линейного поля. В случае нелинейного поля $\lambda \neq 0$ наложение условия (4.2) приводит к переопределенности задачи. В переопределенной (и, следовательно, внутренне противоречивой) задаче можно получить практически любой желаемый результат. Авторы работ [34, 35, 36, 37] хотели получить рождение пар, и они получили его.

Эти примеры показывают, что МККЯ и ее гибкие методы исследования могут быть полезны при исследовании свойств явлений микромира.

Таким образом МККЯ достигла первых успехов, но не в том смысле, что она объяснила какие-то новые эксперименты, которые не могли быть объясненными раньше. МККЯ использует более тонкие и эффективные методы исследования (рассмотрение двух объектов $\mathcal{S}_{\rm st}$ и $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$, гидродинамическая интерпретация релятивистских процессов [29, 28], динамическая квантизация и динамическая расквантизация [31]), которые не могут быть использованы в АККЯ из-за ее аксиоматического характера. Различия между методами МККЯ и АККЯ представлены на следующей схеме

АККЯ	МККЯ
Объединение нерелятивистского формализма квантовой механики с принципами СТО	Последовательное релятивистское описание на всех этапах
1. Используются дополнительные гипотезы (КМ принципы)	1. *Не используется никаких дополнительных гипотез*
2. Один вид измерений, поскольку используется только один среднестатистический объект $\langle\mathcal{S}\rangle$, называемый квантовой системой	2. Два вида измерений, т.к. рассматриваются два вида объектов индивидуальный $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и среднестатистический $\langle\mathcal{S}\rangle$
3. Квантование: процедура на концептуальном уровне $\mathbf{p} \to -i\hbar\nabla \quad \text{etc.}$	3. Динамическая квантизация: релятивистская процедура на динамическом уровне $m^2 \to m_{\text{eff}}^2 = m^2 + \frac{\hbar^2}{c^2}\left(\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right)$
4. Переход к классическому приближению: процедура на концептуальном уровне $\hbar \to 0 \qquad \psi \to (\mathbf{x}, \mathbf{p})$	4. Динамическая расквантизация: релятивистская процедура на динамическом уровне $\partial^k \to \frac{j^k j^l}{j_s j^s}\partial_l$
5. Интерпретация в терминах волновой функции ψ	5. Интерпретация в терминах среднестатистических мировых линий (эмлонов) $\frac{dx^i}{d\tau} = j^i(x)$, $j^k = -\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial^k\psi - \partial^k\psi^*\cdot\psi\right)$

МККЯ – существенно более гибкая концепция, чем АККЯ, поскольку все в МККЯ определяется геометрией пространства-времени, а множество всех возможных геометрий описывается функцией от двух аргументов. Это большой резерв для поправок и модификаций МККЯ. В то же время возможные модификации ограничены изменением мировой функции, и возможные модификации не затрагивают структуру МККЯ, которая основана на нескольких принципах, логически связанных между собой.

Наоборот, АККЯ ограничена набором жестких правил, рассматриваемых как принципы, хотя между ними нет никакой логической связи. Единственным основанием для применения квантовых принципов является тот факт, что они очень хорошо объясняют нерелятивистские квантовые явления. Они объясняют также релятивистские квантовые эффекты, когда их можно рассматривать как малые поправки к нерелятивистским явлениям. АККЯ не удается объяснить существенно релятивистские квантовые явления (например, рождение пар). Возможность модификации АККЯ связана главным образом с применением дополнительных принципов и предположений, которые изменяют структуру АККЯ. Возможность динамической модификации (рассмотрение новых динамических систем) также имеется, но в каждом конкретном случае нужно использовать какие-то новые идеи. Сама по себе АККЯ не дает оснований для таких идей.

МККЯ позволяет получать новый физический объект без дополнительных предположений. Достаточно устранить ограничения, налагаемые на мировую функцию. Мировая функция (2.9), определяющая структуру микромира, есть только первое грубое приближение. В случае необходимости выражение (2.9) может быть модифицировано так, чтобы учесть влияние распределения материи в пространстве-времени (кривизна) и существование новых метрических полей (несимметричность мировой функции) [38, 39].

Несимметричная мировая функция описывает пространство-время, где прошлое и будущее геометрически неравноправны. В рамках римановой геометрии это невозможно себе представить. Разложение симметричной мировой функции $\sigma\left(x,x'\right)$ по степеням $\eta^i = x^i - x'^i$ имеет вид

$$\sigma\left(x,x'\right) = \frac{1}{2} g_{ik}\left(x'\right)\eta^i\eta^k + \frac{1}{6}\sigma_{ikl}\left(x'\right)\eta^i\eta^k\eta^l + ... \tag{4.3}$$

где метрический тензор $g_{ik}\left(x'\right)$ описывает гравитационное поле, а $\sigma_{ikl}\left(x'\right)$ выражается через производные метрического тензора $g_{ik}\left(x'\right)$. Для несимметричной мировой функции то же разложение имеет вид [38, 39]

$$\sigma\left(x,x'\right) = \sigma_i\left(x'\right)\eta^i + \frac{1}{2}\sigma_{ik}\left(x'\right)\eta^i\eta^k + \frac{1}{6}\sigma_{ikl}\left(x'\right)\eta^i\eta^k\eta^l + ... \tag{4.4}$$

где три коэффициента $\sigma_i\left(x'\right)$, $\sigma_{ik}\left(x'\right)$ и $\sigma_{ikl}\left(x'\right)$ независимы, причем каждый из них связан с некоторым метрическим (геометрическим) полем. Коэффициент $\sigma_i\left(x'\right)$ описывает "векторное поле", которое сильно и эффективно на малых пространственно-временны́х интервалах. Коэффициент $\sigma_{ik}\left(x'\right)$ описывает поле тензора второго ранга (гравитационное поле), которое сильно и эффективно на средних пространственно-временны́х интервалах. Наконец, $\sigma_{ikl}\left(x'\right)$ связано с полем тензора третьего ранга, которое сильно на больших пространственно-временны́х интервалах. Возможно, что это поле как-то связано с астрофизической проблемой темной материи, когда движение звезд и галактик не удается объяснить действием одного только гравитационного поля.

При построении МККЯ *не использовалось никаких новых гипотез.* Напротив, гибкость и тонкость методов МККЯ связаны с отбрасыванием необоснованных ограничений и исправлением ошибок в подходе к геометрии и статистическому описанию. Другими словами, МККЯ удовлетворяет критерию Ньютона: "Hypotheses non fingo." (Гипотез не измышляю). *Только выбор правильной пространственно-временно́й геометрии определяет свойства физических явлений микромира.* Этот выбор придется сделать в любом случае, но он может быть правильным, или не очень.

Список литературы

[1] E. Madelung, Quanten theorie in hydrodynamischer Form. *Z.Phys.* **40,** 322-326, (1926).

[2] L. de Broglie, Sur la possibilité de relier les phénomenes d'interference et de diffraction é la théorie des quanta de lumiere. *Comptes Rendus* **183**, 447-448, (1926).

[3] D. Bohm, *Phys.Rev.* **85,** 166, 180, (1952).

[4] T. Takabayasi, *Progr. Theor. Phys.*, **8**, 143, (1952).

[5] T. Takabayasi, *Progr. Theor. Phys.*, **9**, 187, (1953).

[6] L. Janosssy and M.Ziegler, *Acta Phys. Hung.*, **16**, 37, (1963).

[7] L. Janosssy and M.Ziegler, *Acta Phys. Hung.*, **16**, 345, (1964).

[8] M. Husar and M. Ziegler-Naray, *Acta Phys. Acad. Scien. Hung.*, **26**, 223, (1969).

[9] F.J. Belinfante, *A Survey of Hidden-Variables Theories*, (Pergamon, Oxford, 1973) and references therein.

[10] D. Bohm and B.J. Hiley, *Phys. Rep.* **172**, 93, (1989)and references therein.

[11] P. Holland, *The Quantum Theory of Motion*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993) and references therein.

[12] Yu. A. Rylov, The equation for isentropic motion of inviscid fluid in terms of wave function *J. Math. Phys.* **30**, 2516-2520, (1989).

[13] Yu. A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid, *J. Math. Phys.* **40**, 256-278, (1999).

[14] Yu. A. Rylov, Pauli's electron as a dynamic system *Found. Phys.* **25**, No.7, 1055-1086, (1995).

[15] Yu. A. Rylov, Hamilton variational principle for statistical ensemble of deterministic systems and its application for ensemble of stochastic systems. *Rus. J. Math. Phys.*, **9**, iss. 3, 335-348, (2002), (Available at http:// arXiv.org/abs /math-ph/0011017.

[16] Ю. А. Рылов, О возможности описания риманова пространства в терминах конечного интервала, *Известия Высших Учебных Заведений.* вып. 3(28), 131-142, (1962).

[17] Yu. A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876-2890, (1990).

[18] Yu. A.Rylov, Quantum Mechanics as a theory of relativistic Brownian motion. *Ann. Phys. (Leipzig).* **27**, 1-11, (1971).

[19] Yu. A. Rylov, On quantization of non-linear relativistic field without recourse to perturbation theory. *Int. J. Theor. Phys.* **6**, 181-204, (1972).

[20] Yu. A. Rylov, Quantum mechanics as relativistic statistics.I: The two-particle case. *Int. J. Theor. Phys.* **8**, 65-83, (1973).

[21] Yu. A. Rylov, Quantum mechanics as relativistic statistics.II: The case of two interacting particles. *Int. J. Theor. Phys.* **8**, 123-139, (1973).

[22] Yu. A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092-2098, (1991).

[23] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung die Mathematik im 19. Jahrhundert* teil 1, Berlin, Springer 1926.

[24] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory,* North-Holland, Amsterdam, 1960.

[25] Yu. A. Rylov, Problem of parallelism in geometry and physics. (Available at http:// arXiv.org/abs /math.GM/0210413).

[26] Yu. A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (Available at http:// arXiv.org/abs /math.MG/0103002).

[27] Yu. A. Rylov, Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them. (Available at http:// arXiv.org/abs /physics/0210003).

[28] Yu. A. Rylov, Classical description of pair production. (In preparation, available at http:// arXiv.org/abs /physics/0301020).

[29] Yu. A. Rylov, Quantum mechanics as a dynamic construction. *Found. Phys.* **28**, No.2, 245-271, (1998).

[30] Yu. A. Rylov, Dirac equation in terms of hydrodynamic variables, *Advances Appl. Clifford Algebras* **5**, No. 1, 1-40.

[31] Yu. A. Rylov, Dynamic disquantization of Dirac equation, (Available at http:// arXiv.org/abs /quant-ph/0104060).

[32] Yu. A. Rylov, Anderson's absolute objects and constant timelike vector hidden in Dirac matrices. (Available at http:// arXiv.org/abs /quant-ph/0112091).

[33] Yu.A. Rylov, Pair production problem and canonical quantization of nonlinear scalar field in terms of world lines. (Available at http:// arXiv.org/abs /hep-th/0106169).

[34] J. Glimm and A. Jaffe, *Phys. Rev.* **176**, 1945, (1968).

[35] J. Glimm and A. Jaffe, *Ann. Math.* **91**, 362, (1970).

[36] J. Glimm and A. Jaffe, *Acta Math.* **125**, 203, (1970).

[37] J. Glimm and A. Jaffe, *J. Math. Phys.* **13**, 1568, (1972).

[38] Yu. A. Rylov, The Euclidean geometry deformations and capacities of their application to microcosm space-time geometry. (Available at http://arXiv.org/abs /physics/0206017).

[39] Yu. A. Rylov, Asymmetric nondegenerate geometry. (Available at http://arXiv.org/abs /math.MG/0205061).