Метрическая концепция геометрии пространства-времени

Yuri A. Rylov

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site: $http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Изначально геометрия была наукой о свойствах геометрических объектов и их взаимном расположении. Использование собственно евклидовой геометрии породило аксиоматическую концепцию геометрии, где геометрия рассматривалась как логическое построение. Существует метрическая концепция геометрии, где геометрия рассматривается как наука о свойствах геометрических объектов. Пространственно-временные геометрии в рамках метрической концепции образуют более мощное множество геометрий, чем множество геометрий в рамках аксиоматической концепции. Это важно при построении общей теории относительности.

Ключевые слова: метрическая концепция; аксиоматическая концепция; тахионный газ; темная материя

1 Введение

Концепция геометрии пространства-времени описывает взаимодействие понятий пространственно-временной геометрии. Иерархия понятий существенна в концепции. В геометрии пространства-времени имеются две концепции (1) аксиоматическая концепция и (2) метрическая концепция.

Геометрия возникла много лет назад как наука о форме геометрических объектов и их взаимном расположении в пространстве. Это была собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Любой геометрический объект в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть построен из блоков. Блоками являются отрезки прямой линии. Всякий геометрический объект $\mathcal{O}$ может быть заполнен множеством $\mathcal{S}$ прямолинейных отрезков L таким образом, что любая точка $\forall P \in \mathcal{O}$ принадлежит одному и только одному отрезку $L \in \mathcal{S}$. Отрезки L не имеют общих точек. Это свойство геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть использовано для построения любого геометрического объекта $\mathcal{O}$ евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Свойства прямолинейных отрезков могут быть сформулированы как некоторые утверждения St_1. Правила перемещения прямолинейных отрезков тоже могут быть сформулированы как некоторые утверждения St_2. Используя эти утверждения St_1 и St_2, можно сформулировать правила построения любого геометрического объекта в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Рассматривая $St = St_1 \wedge St_2$ как базовые утверждения (аксиомы) геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, можно получить правила построения любого геометрического объекта как логическое следствие аксиом St и определения геометрического объекта. Эти правила могут быть сформулированы как некоторые утверждения. Множество этих утверждений образует собственно евклидову геометрию. $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Такой вид представления евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может быть квалифицирован как аксиоматическая концепция геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.

Евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ рассматривается формально, как логическое построение, основанное на множестве St евклидовых аксиом. Обычно не рассматривают причины, по которым логическое построение описывает евклидову геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Полагают, что любое логическое построение, содержащее аксиомы о простейших геометрических объектах таких как прямая линия, описывает некоторую геометрию $\mathcal{G}$, которая может отличаться от евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Симплектическая геометрия не имеет отношения к свойствам геометрических объектов. Тем не менее, она трактуется как некоторая разновидность геометрии, потому что она является логическим построением, которое близко к логическому построению евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.

Для построения обобщенной геометрии $\mathcal{G}$ используют другое множество $\mathcal{S}_{\mathrm{g}}$ аксиом $\mathcal{A}_{\mathrm{g}}$. Если аксиомы $\mathcal{S}_{\mathrm{g}}$ совместны, то получают обобщенную геометрию $\mathcal{G}$, которая является логическим построением в рамках аксиоматической концепции геометрии. Таким образом была построена геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ пространства-времени, известная как геометрия Минковского. Такое логическое построение возможно, потому что аксиомы, описывающие свойства прямых линий, практически одни и те же в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Однако, если свойства отрезков прямых линий в обобщенной геометрии $\mathcal{G}$ отличаются от свойств отрезков прямых линий в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, логическое построение геометрии $\mathcal{G}$ становится проблематичным. Представим себе, что прямолинейный отрезок L_{g} в $\mathcal{G}$ имеет вид полой трубки. В этом случае использование отрезков L_{g} в качестве строительных блоков для построения геометрических объектов становится невозможным. В микромире реальная геометрия пространства-времени дискретна, и отрезки прямой линии имеют форму полых трубок. В этом случае аксиоматическая концепция геометрии не может описывать реальную геометрию пространства-времени. Тогда нарушается связь между геометрией как логическим построением и геометрией как наукой о форме геометрических объектов. Это означает, что способности аксиоматической концепции при построении обобщенных геометрий оказываются ограниченными.

Кроме того построение геометрических объектов в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и в обобщенной геометрии $\mathcal{G}$, получаемое из $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в рамках аксиоматической концепции, требует доказательства многочисленных теорем. Другими словами, построение геометрического объекта в $\mathcal{G}$ требует повторения построения этого геометрического объекта в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Имеется другой способ построения геометрического объекта $\mathcal{O}$ в $\mathcal{G}$. Строится $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и после этого евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ деформируется в $\mathcal{G}$. При этой деформации геометрический объект $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ деформируется в геометрический объект $\mathcal{O}$ в $\mathcal{G}$. Процедура деформации геометрии $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ намного проще, чем построение $\mathcal{O}_{\mathrm{E}}$ и $\mathcal{O}$ из строительных блоков (что означает доказательство теорем). Такая процедура построения геометрических объектов используется в метрической концепции геометрии, и она очень проста.

Дело в том, что евклидова геометрия может быть полностью описана в терминах ее метрики $\rho\left(P,Q\right)$. Здесь величина $\rho\left(P,Q\right)$ есть расстояние между $\forall P,Q\in\Omega$. Здесь Ω есть множество точек, на котором задана евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Вместо ρ удобно использовать мировую функцию $\sigma\left(P,Q\right)=\frac{1}{2}\rho^{2}\left(P,Q\right)$. Мировая функция вещественна даже в геометрии Минковского, где расстояние ρ мнимо для пространствнноподобных интервалов.

2 Метрическая концепция евклидовой геометрии

Идея метрической концепции не нова [1]. К сожалению, дистатнтная геометрия Блюменталя [1] не является монистической концепцией, когда геометрия полностью описывается в терминах расстояния и только в терминах расстояния. Блюменталю не удалось построить монистическую концепцию геометрии, хотя монизм очень важен для построения метрической концепции.

В метрической концепции мировая функция σ обобщенной геометрии определяется как однозначная функция

$$\sigma:\quad\Omega\times\Omega\rightarrow\mathbb{R},\quad\sigma\left(P,Q\right)=\sigma\left(Q,P\right),\quad\sigma\left(P,P\right)=0,\quad\forall P,Q\in\Omega\qquad(1)$$

Здесь Ω есть множество точек, где задана геометрия.i В евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ мировая функция σ_{E} имеет определенные свойства, которые могут описываться дополнительными ограничениями.

Евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ формулируется в терминах мировой функции и только мировой функции σ_{E} следующим образом. Геометрический вектор (g-вектор) $\mathbf{PQ}=\{P,Q\}$ определяется как упорядоченное множество из двух точек $P,Q\in\Omega$. Термин геометрический вектор используется для того, чтобы отличать его от линвектора u, который определяется как элемент линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$, которое используется в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, и $u\in\mathcal{L}_n$. В $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ линвектор и g-вектор могут совпадать. Однако после деформации евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ они, вообще говоря, не совпадают.

Два g-вектора $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$ эквивалентны ($\mathbf{PQ}\mathrm{eqv}\mathbf{RS}$), если их длины равны и они параллельны ($\mathbf{PQ}\upuparrows\mathbf{RS}$)

$$(\mathbf{PQ}\upuparrows\mathbf{RS}):\quad (\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})=|\mathbf{PQ}|\cdot|\mathbf{RS}| \tag{2}$$

Здесь $(\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})$ есть скалярное произведение двух g-векторов $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$, определяемое в терминах мировой функции в виде

$$(\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})=\sigma(P,S)+\sigma(Q,R)-\sigma(P,R)-\sigma(Q,S) \tag{3}$$

Длина $|\mathbf{PQ}|$ g-вектора $\mathbf{PQ}$ определяется соотношением

$$|\mathbf{PQ}|=\sqrt{2\sigma(P,Q)} \tag{4}$$

Здесь σ есть мировая функция евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Таким образом, g-векторы $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{RS}$ эквивалентны, если

$$(\mathbf{PQ}\mathrm{eqv}\mathbf{RS}):\quad (\mathbf{PQ}.\mathbf{RS})=|\mathbf{PQ}|\cdot|\mathbf{RS}|\wedge|\mathbf{PQ}|=|\mathbf{RS}| \tag{5}$$

Скалярное произведение двух g-векторов определяется с помощью (3). Эквивалентность двух g-векторов определяется посредством (5).

n g-векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2,...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ линейно зависимы, если и только если определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}_n)=\det||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||,\quad i,k=1,2,...n,\quad \mathcal{P}_n\equiv\{P_0,P_2,...P_n\} \tag{6}$$

обращается в нуль

$$F_n(\mathcal{P}_n)=0 \tag{7}$$

Соотношения (4), (5), (7) являются общегеометрическими соотношениями. Они верны в любой обобщенной геометрии $\mathcal{G}$, получаемой в результате деформации $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Деформация евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ в обобщенную геометрию $\mathcal{G}$ получается заменой $\sigma_{\mathrm{E}}\to\sigma$ в соотношениях (4), (5), (7). Здесь σ_{E} есть мировая функция евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, и σ есть мировая функция обобщенной геометрии $\mathcal{G}$.

Специальные соотношения n-мерной собственно евклидовой геометрии имеют вид [2]:

I. Определение метрической размерности:

$$\exists\mathcal{P}_n\equiv\{P_0,P_1,...P_n\}\subset\Omega,\qquad F_n(\mathcal{P}_n)\neq0,\qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right)=0,\qquad k>n \tag{8}$$

где $F_n(\mathcal{P}_n)$ есть определитель Грама n-ого порядка (6). Геометрические векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i=1,2,...n$ являются базисными g-векторами прямолинейной системы координат K_n с началом координат в точке P_0. Ковариантные координаты $x_i(P)$ точки P в системе координат K_n определяются соотношением

$$x_i(P)=(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}),\qquad i=1,2,...n \tag{9}$$

Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}_n)$ и $g^{ik}(\mathcal{P}_n)$, $i,k=1,2,...n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n}g^{ik}(\mathcal{P}_n)\,g_{lk}(\mathcal{P}_n)=\delta_l^i,\qquad g_{il}(\mathcal{P}_n)=(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l),\qquad i,l=1,2,...n \tag{10}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma_{\mathrm{E}}(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}_n)(x_i(P) - x_i(Q))(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P,Q \in \Omega \tag{11}$$

где координаты $x_i(P)$, $x_i(Q)$, $i = 1, 2, ...n$ точек P и Q являются координатами соответственно g-векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ в системе координат K_n.

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения g_k

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{12}$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{13}$$

рассматриваемая как уравнения для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ...n$ имеет одно и только одно решение. Условия I – IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства, которое определяется соотношениями (8). Условия I – IV являются необходимыми и достаточными условиями того факта, что мировая функция является мировой функцией n-мерной евклидовой геометрии.

В рамках метрической концепции обобщенная геометрия получается заменой мировой функции евклидовой геометрии σ_{E} на мировую функцию σ обобщенной геометрии $\mathcal{G}$ в соотношениях (4), (5), (7). Такая замена в специальных соотношениях евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ не производится, потому что эти соотношения описывают свойства мировой функции σ_{E} евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Пока нет установившегося названия обобщенной геометрии $\mathcal{G}$, получаемой в рамках метрической концепции. Используются названия Т-геометрия (трубчатая геометрия) и физическая геометрия. Здесь я буду использовать название физическая геометрия.

3 Определение геометрических объектов

Геометрический объект $\mathcal{O} \subset \Omega$ – это некоторое подмножество точек на множестве точек Ω, где определена геометрия. В физической геометрии геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается каркасно-оболочным методом. Это означает, что любой геометрический объект $\mathcal{O}$ рассматривается как множество объединений и пересечений элементарных геометрических объектов (ЭГО).

Конечное множество $\mathcal{P}_n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\} \subset \Omega$ параметров оболочечной функции $f_{\mathcal{P}_n}$ является каркасом элементарного геометрического объекта (ЭГО) $\mathcal{E} \subset \Omega$. Множество $\mathcal{E} \subset \Omega$ точек, образующих границу ЭГО называется оболочкой его каркаса $\mathcal{P}_n$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}_n}$

$$f_{\mathcal{P}_n}: \qquad \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \tag{14}$$

определяющая границу ЭГО является функцией бегущей точки $R \in \Omega$ и параметров $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. Оболочная функция $f_{\mathcal{P}_n}$ есть алгебраическая функция от s аргументов $w = \{w_1, w_2, ...w_s\}$, $s = (n+2)(n+1)/2$. Каждый из аргументов $w_k = \sigma(Q_k, L_k)$ является мировой функцией σ двух точек $Q_k, L_k \in \{R, \mathcal{P}_n\}$, принадлежащих или к каркасу $\mathcal{P}_n$, или совпадающих с бегущей точкой R. Таким образом, граница $\mathcal{E}$ любого элементарного геометрического объекта определяется его каркасом $\mathcal{P}_n$ и его оболочной функцией $f_{\mathcal{P}_n}$. Граница $\mathcal{E}$ геометрического объекта $\mathcal{O}$ представляет собой множество нулей оболочной функции

$$\mathcal{E} = \{R | f_{\mathcal{P}_n}(R) = 0\} \tag{15}$$

Оболочка $\mathcal{E}$ представляет собой границу множества точек $\mathcal{O}$, образующих геометрический объект.

Характерными точками ЭГО являются точки каркаса $\mathcal{P}_n \equiv \{P_0, P_1, ..., P_n\}$. Простейшим примером ЭГО является отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ прямой линии между точками P_0 и P_1. Он определяется соотношением

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \{R | f_{P_0P_1}(R) = 0\}, \tag{16}$$

$$f_{P_0P_1}(R) = \sqrt{2\sigma(P_0, R)} + \sqrt{2\sigma(R, P_1)} - \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \tag{17}$$

Множество точек $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, определяемое (16), (17) является отрезком прямой линии в любой физической геометрии. В пространстве-времени это, вообще говоря, трехмерная поверхность. В пространственно-временной геометрии Минковского $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ вырождается в одномерную линию для времениподобного g-вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, но он остается трехмерной поверхностью для пространственноподобного g-вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Физическая геометрия формулируется без использования системы координат. Это важно в случае, когда физическое тело перемещается из области пространства-времени с геометрией $\mathcal{G}_1$ в область пространства-времени с геометрией $\mathcal{G}_2$. Геометрический объект есть геометрический образ физического тела. Геометрический объект $\mathcal{O}$ описывается своим каркасом $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и своей оболочной функцией $f_{\mathcal{P}_n}$. Все точки каркаса жестко связаны в том смысле, что расстояния между точками каркаса одни и те же в любой физической геометрии

$$\sigma_1(P_i, P_k) = \sigma_2(P_i, P_k), \quad i, k = 0, 1, ...n$$

где σ_1 есть мировая функция в геометрии $\mathcal{G}_1$ и σ_2 есть мировая функция в геометрии $\mathcal{G}_2$. Оболочная функция (14) как функция аргументов w_s одна и та же в геометриях $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, хотя значения некоторых аргументов w_s различны в геометриях $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$

Риманова геометрия, которая используется как наиболее общая геометрия в аксиоматической концепции, не может быть описана без ссылки на систему координат. Это дефект аксиоматической концепции по сравнению с метрической концепцией. Нельзя опознать один и тот же геометрический объект в различных геометриях пространства-времени, если он описывается в аксиоматической концепции. Это тоже дефект аксиоматической концепции. Множество физических геометрий пространства-времени является более мощным, чем множество римановых геометрий пространства-времени. Это тоже дефект аксиоматической концепции при ее использовании в качестве геометрии пространства-времени.

В общей теории относительности, где геометрия пространства-времени определяется распределением вещества, для описания пространства-времени следует использовать метрическую концепцию геометрии. Использование метрической концепции приводит к невозможности образования черных дыр [3]. Причиной такой невозможности является наведенная антигравитация, возникающая в случае, когда вещество становится очень плотным [4].

В пространственно-временной геометрии Минковского существование тахионов зависит от концепции геометрии пространства-времени. В аксиоматической концепции существование тахионов считается невозможным. В метрической концепции мировые линии тахионов вихляют с бесконечной амплитудой, и обнаружение отдельного тахиона не возможно. Однако тахионный газ образует темную материю, и влияние его гравитационного поля может быть обнаружено [5, 6]. Метрическая концепция геометрии пространства-времени легко решает проблему темной материи, которую не удается решить в рамках аксиоматической концепции.

4 Предпочтение аксиоматической концепции. Социальные причины этого предпочтения

Аксиоматиеская концепция геометрии пространства-времени существует много лет. Метрическая концепция геометрии пространства-времени существует около двадцати лет. Научное сообщество не воспринимает метрическую концепцию, хотя никто не может ничего возразить против нее. Что является причиной такого поведения? Научное сообщество легко воспринимает очень экзотические новые идеи, *при условии, что при этом не нужно пересматривать* *существующую концепцию.* Однако, если говорится о новой концепции, которая требует пересмотра существующей концепции, то научное сообщество просто не рассматривает новую концепцию. Переход к новой концепции особенно труден, если новая концепция использует новый математический формализм. В истории науки имеются примеры такого перехода к новой концепции. Например, переход от Аристотелевой концепции механики к Ньютоновой концепции механики продолжался почти сто лет, потому что научное сообщество не воспринимало понятие инерции. Работы Больцмана об обосновании аксиоматической термодинамики не воспринимались, потому что нужно было пересматривать законы термодинамики, которые были точными в термодинамике и которые выполнялись только в среднем в работах Больцмана.

Концепция динамики частиц, где статистический ансамбль рассматривается как базовый объект динамики, позволяет описывать квантовые частицы как классические стохастические частицы [7]. В этой классической концепции динамики квантовых частиц квантовые принципы не используются, и нет необходимости рассматривать квантовые принципы как первые законы природы. Например, нет необходимости квантовать гравитационное поле. Тем не менее, проблема квантования гравитационного поля рассматривается как одна из главных проблем теоретической физики.

Я думаю, что нежелание научного сообщества рассматривать новые концепции обусловлена нежеланием пересматривать существующую концепцию.

Список литературы

[1] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[2] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, *iss. 12, 733-760, (2002)*, (see also *ArXiv: math.MG/0103002*).

[3] Yu. A. Rylov, General relativity extended to non-Riemannian space-time geometry. *e-print* /0910.3582v7

[4] Yu. A. Rylov, Induced antigravitation in the extended general relativity. *Gravitation and Cosmology, Vol.* ***18****, No. 2, pp. 107–112,(2012).*

[5] Ю.А.Рылов, Тахионный газ как кандидат на темную материю, *Вестник РУДН сер. Математика, Информатика, Физака* (2013), вып. 2 стр.159-173

[6] Yu. A. Rylov, Dynamic equations for tachyon gas, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 133(10), 3683- 3695, (2013).

[7] Yu.A.Rylov, Logical reloading. What is it and what is a profit from it? *Int. J. Theor. Phys.*DOI: 10.1007/s10773.014.2039 .3