Метрическое пространство: классификация конечных подпространств вместо ограничений на метрику

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
117526, Москва, пр. Вернадского 101-1

УДК 514.13
Ключевые слова: метрика, мировая функция, трубка

Metric Space: Classification of Finite Subspaces instead of Constraints on Metric

Yuri A. Rylov

Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
101-1, Vernadskii Ave., Moscow, 117526, Russia

Abstract

Предлагается новый метод исследования метрического пространства, основанный на классификации его конечных подпространств. Он позволяет извлечь из метрики зашифрованную в ней информацию о свойствах метрического пространства и описывать геометрию в терминах одной только метрики. Предлагаемый метод позволяет отказаться от ограничений, налагаемых обычно на метрику (аксиома треугольника и неотрицательность квадрата метрики) и использовать метрическое пространство для описания пространства-времени и других геометрий с индефинитной метрикой.

1 Введение

Пусть $M = \{\rho, \Omega\}$ есть метрическое пространство, где Ω есть множество точек, а ρ есть метрика, т.е.

$$\rho : \quad \Omega \times \Omega \to [0, \infty) \subset \mathbb{R} \tag{1.1}$$

$$\rho(P, P) = 0, \qquad \rho(P, Q) = \rho(Q, P), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{1.2}$$

$$\rho(P,Q) \geq 0, \qquad \rho(P,Q) = 0, \quad \text{если и только если } P = Q, \qquad \forall P,Q \in \Omega \quad (1.3)$$

$$\rho(P,Q) + \rho(Q,R) \geq \rho(P,R), \qquad \forall P,Q,R \in \Omega \quad (1.4)$$

Определение 1.1 *Метрическим подпространством $M' = \{\rho', \Omega'\}$ метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$ называется любое подмножество $\Omega' \subset \Omega$ точек метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$, снабженное той же метрикой ρ', являющейся сужением $\rho|_{\Omega' \times \Omega'}$ на множество $\Omega'^2 = \Omega' \times \Omega'$ отображения (1.1).*

Легко видеть, что метрическое подпространство $M' = \{\rho', \Omega'\}$ является метрическим пространством.

Определение 1.2 *Метрическое пространство $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\rho, \mathcal{P}^n\}$ называется конечным если оно состоит из конечного числа точек $\mathcal{P}^n \equiv \{P_i\}$, $i = 0, 1, \ldots n$.*

Определение 1.3 *Конечное метрическое пространство $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\rho, \mathcal{P}^n\}$ называется ориентированным $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)}$, если задан порядок его точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \ldots P_n\}$.*

Определение 1.4 *Ориентированное конечное подпространство $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)}$ метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$, называется мультивектором и обозначается посредством $\overrightarrow{M_n(\mathcal{P}^n)} \equiv \overrightarrow{\mathcal{P}^n} \equiv \overrightarrow{\{P_0, P_1, \ldots P_n\}}$*

Определение 1.5 *Описание называется σ-имманентным, если оно не содержит ссылок на объекты и понятия отличные от подпространств метрического пространства и его метрики.*

σ-имманентность описания означает, что оно имманентно метрическому пространству и производится в терминах его метрики и подпространств. Приставка "σ" ассоциируется с мировой функцией σ, которая связана с метрикой с помощью соотношения $\sigma = \rho^2/2$. Название "мировая функция" было предложено Сингом [1], который ввел ее для описания риманова пространства и широко использовал для описания геометрии пространства-времени. Использование мировой функции σ вместо метрики ρ иногда оказывается более удобным.

Кратчайшая (линия), соединяющая две произвольные точки $P, Q \in \Omega$, есть основной геометрический объект [2], который обычно строится в метрическом пространстве $\{\rho, \Omega\}$. Из отрезков кратчайшей можно сконструировать угол, треугольник и различные многоугольники. Построение двумерных и трехмерных плоскостей в метрическом пространстве проблематично. Во всяком случае неизвестно, как можно было бы сделать это для произвольного метрического пространства, используя кратчайшую как главный геометрический объект. Это дает повод считать, что метрическая геометрия, т.е. геометрия, порождаемая метрическим пространством, является менее содержательной, чем геометрия евклидова пространства, где такие объекты как двумерная и трехмерная плоскости строятся без всяких проблем. На самом деле это не так. В рамках метрической геометрии можно построить почти все геометрические объекты, какие можно построить в евклидовой геометрии, включая n-мерные плоскости. Нужно только использовать более эффективный метод описния метрического пространства, чем метод, основанный на использовании кратчайшей.

Пусть $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\} \subset \Omega$, есть множество из $n+1$ точек $P_i \in \Omega$, $(n = 1, 2, \ldots)$ в D-мерном евклидовом пространстве $\Omega = \mathbb{R}^D$, $(D > n)$. Пусть ρ есть евклидова метрика в $\mathbb{R}^D$. Рассмотрим $(n+1)$-эдр с вершинами в точках $\mathcal{P}^n$. Его объем $S_n(\mathcal{P}^n)$ может быть представлен в σ-имманентной форме

$$S_n(\mathcal{P}^n) = \frac{1}{n!}\sqrt{F_n\left(\mathcal{P}^n\right)}, \tag{1.5}$$

$$F_n\left(\mathcal{P}^n\right) = \det\left|\left|\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right)\right|\right|, \qquad P_0, P_i, P_k \in \Omega, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{1.6}$$

$$\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right) \equiv \Gamma\left(P_0, P_i, P_k\right) \equiv \sigma\left(P_0, P_i\right) + \sigma\left(P_0, P_k\right) - \sigma\left(P_i, P_k\right), \qquad i, k = 1, 2, ...n. \tag{1.7}$$

$$\sigma(P, Q) \equiv \frac{1}{2}\rho^2(P, Q), \qquad \forall P, Q \in \Omega, \tag{1.8}$$

где $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$ суть n векторов евклидова пространства. Если эти n векторов линейно независимы, то объем $S_n(\mathcal{P}^n)$ $(n+1)$-эдра отличен от нуля. Если они линейно зависимы, то $S_n(\mathcal{P}^n) = 0$. В силу (1.5)-(1.8) условие обращения в нуль $F_n\left(\mathcal{P}^n\right)$ является σ-имманентным критерием линейной зависимости векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Значение σ-имманентной функции $F_n\left(\mathcal{P}^n\right)$ точек $\mathcal{P}^n$ может служить критерием "линейной независимости векторов" даже в том случае, когда нельзя ввести линейное векторное пространство и определить через него понятие линейной независимости. Это показывает, что понятие линейной независимости есть на самом деле нечто более фундаментальное, чем просто атрибут линейного векторного пространства. По существу, величина $F_n\left(\mathcal{P}^n\right)$ есть характеристика $(n+1)$-точечного метрического пространства $M_n = \{\rho, \mathcal{P}^n\}$, возникающая при отождествлении величины $\sqrt{F_n\left(\mathcal{P}^n\right)}$ с длиной $|M_n| \equiv |\mathcal{P}^n|$ конечного метрического пространства $M_n = \{\rho, \mathcal{P}^n\}$.

Пусть n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $(i = 1, 2, \ldots n)$ линейно независимы. Тогда $F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \neq 0$. Построим линейную оболочку векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, состоящую из векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$. Тогда $n+2$ векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $(i = 1, 2, \ldots n)$, $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ линейно зависимы, и точка R удовлетворяет σ-имманентному соотношению $F_{n+1}\left(\mathcal{P}^n, R\right) = 0$. Множество $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n) = \{R | F_{n+1}\left(\mathcal{P}^n, R\right) = 0\}$ точек R представляет собой n-мерную плоскость, проходящую через $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$. Поскольку это соотношение σ-имманентно, то оно определяет некоторое множество точек $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) = \{R | F_{n+1}\left(\mathcal{P}^n, R\right) = 0\} \subset \Omega$ в любом метрическом пространстве $M = \{\rho, \Omega\}$. Это множество $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, называемое трубкой n-ого порядка, является аналогом n-мерной плоскости евклидова пространства. $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$, определяющих трубку, будем называть базисными точками трубки, или ее $(n+1)$-точечным σ-базисом. Трубка n-ого порядка может рассматриваться как естественный геометрический объект (ЕГО) метрического пространства, определяемый $(n+1)$-

точечным метрическим подпространством $\{\rho, \mathcal{P}^n\}$. Трубка n-ого порядка является σ-имманентным геометрическим объектом.

Таким образом, в метрическом пространстве всегда существует подпространство, являющееся аналогом n-мерной евклидовой плоскости, однако линейные операции над векторами можно определить не всегда. Причина такого различия состоит в том, что трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ имеют структуру, отличную от соответствующих плоскостей $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$ евклидова пространства. Пусть $\mathcal{Q}^n \subset \mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, $(F_n(\mathcal{Q}^n) \neq 0)$ есть другой $(n+1)$-точечный σ-базис, принадлежащий плоскости $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$. Тогда $\mathcal{L}(\mathcal{Q}^n) = \mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$. В произвольном метрическом пространстве это не так и, вообще говоря, $\mathcal{T}(\mathcal{Q}^n) \neq \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$. В частности, если говорить о трубке первого порядка, то в евклидовом пространстве любые две различные точки прямой определяют эту прямую. В метрическом пространстве две базисные точки в большинстве случаев (например, для риманова пространства, рассматриваемого как метрическое пространство) определяют трубку, совпадающую с кратчайшей. Тогда две любые различные точки кратчайшей являются базисными точками этой кратчайшей и определяют ее. Возможны, однако, случаи, когда это не так. Тогда две различные точки, отличные от базисных, тоже определяют трубку, но, вообще говоря, – другую. Что касается трубок второго порядка (аналогов двумерной евклидовой плоскости), то в этом случае неравенство $\mathcal{T}(\mathcal{Q}^2) \neq \mathcal{T}(\mathcal{P}^2)$ является скорее правилом, чем исключением. Например, это верно для риманова пространства, рассматриваемого как метрическое.

Возможность описания метрического пространства в терминах одной только кратчайшей ограничена, хотя проявив достаточно изобретательности, можно осуществить такое описание для двумерных метрических пространств. Например, А.Д. Александров показал, что внутренняя геометрия двумерных границ трехмерных выпуклых тел может быть представлена в σ-имманентном виде [3]. По-видимому, если не вводить понятия трубок порядка выше первого, то решить аналогичную задачу для трехмерных границ четырехмерных тел очень трудно.

σ-имманентная концепция описания метрического пространства может быть сформулирована как классификация всех возможных $(n+1)$-точечных метрических подпространств $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\rho, \mathcal{P}^n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, где $\mathcal{P}^n \subset \Omega$, есть множество из $n+1$ точек $P_i \in \Omega$, $(i = 0, 1, \ldots n)$. Каждому $M_n(\mathcal{P}^n)$ приписывается число $|M_n(\mathcal{P}^n)| = |\mathcal{P}^n| = n!S_n(\mathcal{P}^n) = \sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}$, называемое длиной.

Математически классификация конечных метрических подпространств сводится к тому, что метрическое пространство $\{\rho, \Omega\}$ снабжается рядом σ-имманентных отображений

$$F_n: \quad \Omega^{n+1} \to \mathbb{R}, \qquad \Omega^{n+1} = \bigotimes_{k=1}^{n+1} \Omega, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.9}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ определяется соотношениями (1.6)-(1.8). Как видно из (1.6), (1.7) в случае $n = 1$ $F_1(P, Q) = 2\sigma(P, Q) = \rho^2(P, Q)$.

Далее будет показано, что классификация конечных метрических подпространств, осуществляемая с помощью ряда отображений (1.9), позволяет извлечь информацию о свойствах метрического пространства, зашифрованную в его метрике. При этом оказывается, что метрическая геометрия (т.е. геометрия порождаемая метрическим пространством) не менее содержательна, чем евклидова геометрия. Это означает, в частности, что евклидова геометрия может быть сформулирована в σ-имманентном виде. Более того в σ-имманентной форме может быть сформулирована геометрия любого подмножества точек собственно евклидова пространства. Иначе говоря, метрическая геометрия, построенная на базе метрики, нечувствительна к непрерывности или дискретности пространства.

Наглядно ситуацию с построением метрической геометрии можно представлять себе следующим образом. В D-мерном евклидовом пространстве $E_D = \{\rho, \Omega\}$, $\Omega = \mathbb{R}^D$ n-мерная плоскость $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, $n = 1, 2, \ldots D$, проходящая через точки $\mathcal{P}^n$, образующие $(n+1)$-точечный σ-базис ($F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0$), описывается как множество точек R, удовлетворяющих σ-имманентному уравнению $F_{n+1}(\mathcal{P}^n, R) = 0$. n-мерная плоскость $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, $(n = 1, 2, \ldots D)$ определяется только метрикой, и является ЕГО для евклидова пространства E_D. Метрическое пространство можно представлять себе как результат деформации D-мерного евклидова пространства E_D с достаточно большим D. Под деформацией понимается изменение расстояний между точками E_D, сопровождаемое отбрасыванием некоторого множества U точек, принадлежащих E_D. При такой деформации ЕГО деформируются, превращаясь в множества точек более сложной формы, однако они продолжают оставаться атрибутами метрического пространства, так как они σ-имманентны и определяются только метрикой.

При построении метрической геометрии ограничения (1.3), (1.4) на метрику ρ никак не используются. Они нужны для простроения кратчайшей, когда требуется построить линию наименьшей длины. Они могут быть отброшены, когда геометрические объекты строятся на основе классификации конечных метрических подпространств $\{\rho, \mathcal{P}^n\}$. В этом случае, заменяя метрику на мировую функцию $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$, мы получаем вместо обычного метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$ более общее метрическое пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$, которое мы будем называть σ-пространством. Геометрию, порожденную σ-пространством, будем называть Т-геометрией. Т-геометрия представляет собой обобщение метрической геометрии на случай индефинитной метрики. Т-геометрия может быть использована для описания пространства-времени.

При описанной выше деформации евклидова пространства евклидовы прямые превращаются в полые трубки. (Вообще говоря, возможен случай, когда прямые просто искривляются оставаясь линиями, но это очень специальный вид деформации). Полые трубки являются общим случаем, так как одно уравнение, определяющее трубку, описывает, вообще говоря, поверхность. Отсюда и название Т-геометрия, или трубчатая геометрия. С точки зрения Т-геометрии метрическая геометрия есть вырожденная геометрия, т.е. такая геометрия, где трубки вырождаются в линии (кратчайшие). Т-геометрия представляет собой естественную (невырожденную, вообще говоря) геометрию, т.е. геометрию более общего вида, чем обычная метрическая геометрия. Сильным аргументом в пользу T-геометрии является то обстоятельство, что на ее основе можно построить модель пространства-времени, где квантовые эффекты объясняются как простые T-геометрические эффекты, а квантовая постоянная является атрибутом пространства-времени [4].

Во втором разделе даны определения основных объектов σ-пространства. Третий раздел посвящен формулировке и доказательству теоремы о том, что евклидова геометрия может быть описана в терминах одной только метрики. В четвертом разделе обсуждается роль аксиомы треугольника.

2 σ-пространство и его свойства.

Определение 2.1 *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть непустое множество Ω точек P с заданной на $\Omega \times \Omega$ вещественной функцией σ*

$$\sigma: \quad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(P,P) = 0, \qquad \sigma(P,Q) = \sigma(Q,P) \qquad \forall P,Q \in \Omega. \quad (2.1)$$

Функция σ называется мировой функцией или σ-функцией.

Определение 2.2 . *Непустое подмножество $\Omega' \subset \Omega$ точек σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ с мировой функцией $\sigma' = \sigma|_{\Omega' \times \Omega'}$, являющейся сужением σ на $\Omega' \times \Omega'$ называется σ-подпространством $V' = \{\sigma', \Omega'\}$ σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$.*

В дальнейшем мировая функция $\sigma' = \sigma|_{\Omega' \times \Omega'}$, являющаяся сужением σ будет обозначаться посредством σ. Любое σ-подпространство является σ-пространством.

Определение 2.3 . *σ-пространство $V' = \{\sigma', \Omega'\}$ называется изометрически вложимым в σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$, если существует такой мономорфизм $f: \Omega' \to \Omega$, что $\sigma'(P,Q) = \sigma(f(P), f(Q)), \quad \forall P, \forall Q \in \Omega', \quad f(P), f(Q) \in \Omega$,*

Любое σ-подпространство V' σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ изометрически вложимо в него.

Определение 2.4 . *Два σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ и $V' = \{\sigma', \Omega'\}$ называются изометричными (эквивалентными), если V изометрически вложимо в V', и V' изометрически вложимо в V.*

Определение 2.5 . *Конечным σ-пространством $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\sigma, \mathcal{P}^n\}$ порядка n называется σ-пространство, состоящее из $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$.*

Определение 2.6 . *Длиной (объемом) конечного σ-пространства $M_n(\mathcal{P}^n)$ порядка n называется число $\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}$, где $F_n(\mathcal{P}^n)$ определяется соотношением (1.6)-(1.8).*

Если множество точек $\mathcal{P}^n$ конечного σ-пространства $M_n(\mathcal{P}^n)$ упорядочено, то такое конечное σ-пространство $M_n(\mathcal{P}^n)$ будем называть мультивектором. Практически будут рассматриваться только мультивекторы, являющиеся σ-подпространствами одного и того же σ-пространства и описываемые одной и той же мировой функцией. В этом случае можно опустить упоминание о мировой функции в определении мультивектора и определить его так

Определение 2.7 . *Мультивектором $\overrightarrow{P_0P_1...P_n}$ порядка n в σ-пространстве V называется упорядоченное множество $\{P_l\}$, $\quad l=0,1,\ldots n$ из $n+1$ точек $P_0, P_1, ..., P_n$. Точка P_0 есть начало мультивектора $\overrightarrow{P_0P_1...P_n}$*

Будем использовать для мультивектора $\overrightarrow{P_0P_1...P_n}$ обозначение $\overrightarrow{P_0P_1...P_n} \equiv \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1...\mathbf{P}_n \equiv \overrightarrow{\mathcal{P}^n}$.

Определение 2.8 . *Вектором $\mathbf{PQ}$ в σ-пространстве V называется мультивектор первого порядка, т.е. упорядоченное множество $\{P,Q\}$ из двух точек P,Q. Точка P есть начало, а Q - конец вектора.*

Определение 2.9 . *Скалярным σ-произведением $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, имеющих общее начало, называется вещественное число*

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) \equiv \Gamma(P_0,P_1,P_2) \equiv \sigma(P_0,P_1) + \sigma(P_0,P_2) - \sigma(P_1,P_2), \tag{2.2}$$

$$P_0, P_1, P_2 \in \Omega$$

В тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, вместо термина "скалярное σ-произведение" будет использоваться термин "скалярное произведение".

Определение 2.10 . *В соответствии с определением 2.7 длиной $\mid \mathbf{PQ} \mid$ вектора $\mathbf{PQ}$ называется число*

$$\mid \mathbf{PQ} \mid = \sqrt{2\sigma(P,Q)} = \begin{cases} \mid \sqrt{(\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ})} \mid, & (\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ}) \geq 0 \\ i \mid \sqrt{(\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ})} \mid, & (\mathbf{PQ}.\mathbf{PQ}) < 0 \end{cases} \qquad P,Q \in \Omega \tag{2.3}$$

Определение 2.11 . *Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ параллельны или антипараллельны, если выполнены соответственно соотношения*

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) = \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid \cdot \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 \mid \tag{2.4}$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) = - \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid \cdot \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 \mid \tag{2.5}$$

Определение 2.12 . *Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ коллинеарны, если они параллельны или антипараллельны, т.е.*

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2: \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2)^2 = \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid^2 \cdot \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 \mid^2 \tag{2.6}$$

Определение 2.13 . *Скалярным σ-произведением $(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})$ двух мультивекторов $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ порядка n, имеющих общее начало $P_0 = Q_0$ называется число*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = \det \|\Gamma(P_0, P_i, Q_k)\|, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{2.7}$$

Определение 2.14 . *В согласии с определением 2.7 длиной $|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|$ мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ называется число*

$$|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| = \left\{ \begin{array}{ll} \mid \sqrt{(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n})} \mid = |\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}|, & (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) \geq 0 \\ i \mid \sqrt{(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n})} \mid = i|\sqrt{F_n(\mathcal{P}^n)}|, & (\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{P}^n}) < 0 \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{\mathcal{P}^n} \subset \Omega \tag{2.8}$$

где величина $F_n(\mathcal{P}^n)$ определяется сотношениями (1.6)- (1.8)

Определение 2.15 . *Два мультивектора n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$, имеющие общее начало, коллинеарны $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \parallel \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$, если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})^2 = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}|^2 \tag{2.9}$$

Определение 2.16 . *Два коллинеарных мультивектора n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ имеют одинаковую ориентацию $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ (параллельны), если*

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}| \tag{2.10}$$

Они имеют противоположную ориентацию $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ (антипараллельны), если

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \cdot |\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}| \tag{2.11}$$

Пример 2.1. Рассмотрим D-мерное точечное собственно евклидово пространство. Его можно рассматривать как метрическое пространство $E_D = \{\rho, \mathbb{R}^D\}$ или как σ-пространство $E_D = \{\sigma, \mathbb{R}^D\}$, причем $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$ задаются соотношениями

$$\sigma(P, Q) = \sigma(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{D} g_{ik}(x^i - y^i)(x^k - y^k), \qquad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.12}$$

где $x = \{x^i\}$ и $y = \{y^i\}$, $(i = 1, 2, \ldots D)$ - контравариантные координаты точек P и Q соответственно в некоторой прямолинейной системе координат K. Здесь $g_{ik} = \text{const}$, $(i, k = 1, 2, \ldots D)$ - метрический тензор, $\det ||g_{ik}|| \neq 0$. Собственные значения матрицы g_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots D$ метрического тензора положительны, так что $\sum_{i,k=1}^{D} g_{ik}x^i x^k = 0$, если и только если $x = 0$. Данные выше определения вектора, его длины, скалярного произведения двух векторов и соотношений коллинеарности согласуются с употреблением этих понятий для евклидова пространства. В самом деле, длина вектора $\mathbf{PQ}$ в евклидовом пространстве есть

$$| \mathbf{PQ} |= \sqrt{g_{ik}(x^i - y^i)(x^k - y^k)} = \sqrt{2\sigma(P,Q)} \tag{2.13}$$

что согласуется с (2.3).

В собственно евклидовом пространстве по теореме косинусов для двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$

$$| \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 |^2 = | \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 |^2 = | \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 |^2 + | \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 |^2 - 2(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) \tag{2.14}$$

Отсюда следует

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) = \frac{1}{2}\{| \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 |^2 + | \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 |^2 - | \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 |^2\} \tag{2.15}$$

что согласуется с (2.2), если учесть (2.3).

В собственно евклидовом пространстве векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ паралллельны или антипараллельны, если косинус угла ϑ между ними равен соответственно 1 или -1. Поскольку

$$\cos\vartheta = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2) \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 \mid^{-1} \cdot \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid^{-1}, \tag{2.16}$$

получаем согласие с определениями (2.4), (2.5).

В собственно евклидовом пространстве мультивектор $\mathbf{m}$ n-ого порядка определяется как внешнее (косое) произведение векторов

$$\mathbf{m} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge ... \wedge \mathbf{e}_n \qquad \mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.17}$$

Скалярное произведение двух мультивекторов n-ого порядка $\mathbf{m}$ и $\mathbf{q}$

$$\mathbf{q} = \bigwedge_{i=1}^{i=n} \mathbf{k}_i, \qquad \mathbf{k}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_i \qquad i = 1, 2, ...n \tag{2.18}$$

определяется с помощью соотношения

$$(\mathbf{m}.\mathbf{q}) = \det \|(\mathbf{e}_i.\mathbf{k}_l)\| = \det \|(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_l)\| = \det \|\Gamma(P_0, P_i, Q_l)\|, \qquad i, l = 1, 2, ...n \tag{2.19}$$

что согласуется с соотношением (2.7)

Различие между определением 2.7 мультивектора и его традиционным определением (2.17) в том, что первое не использует операций сложения и умножения векторов, которые не определены в σ-пространстве, тогда как традиционное определение (2.17) апеллирует к понятию многообразия и линейного пространства, где эти операции определены.

В принципе сложение векторов и умножение вектора на число можно определить в σ-пространстве $V = \{\sigma, \Omega\}$ следующим образом. Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ есть сумма векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, если $\exists R \in \Omega$ такая, что

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) + (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}), \qquad \forall Q \in \Omega. \tag{2.20}$$

Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ есть результат умножения $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ на вещественное число: $a\ \mathbf{P}_0\mathbf{R} = a\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, если $\exists R \in \Omega$ такая, что

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = a\,(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{Q})\,, \qquad \forall Q \in \Omega \tag{2.21}$$

Однако, такие определения не эффективны, поскольку в общем случае не существует точки R, удовлетворяющей соотношениям (2.20), (2.21). В случае собственно евклидова пространства, когда точка R, удовлетворяющая (2.20), (2.21), существует, операции сложения векторов (2.20) и умножения вектора на число (2.21) совпадают с традиционным определением этих операций в евклидовом пространстве.

Операция перестановки точек мультивектора может быть эффективно определена в σ-пространстве. Рассмотрим два мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = \overrightarrow{P_0P_1P_2...P_n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(1\leftrightarrow 2)}} = \overrightarrow{P_0P_2P_1P_3P_4...P_n}$ n-ого порядка ($n \geq 2$), отличающиеся порядком точек P_1 и P_2. Тогда

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = \det \parallel \Gamma(P_0, P_i, Q_k) \parallel, \qquad i,k = 1,2,...n, \qquad \forall \mathcal{Q}^n \subset \Omega, \tag{2.22}$$

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(1\leftrightarrow 2)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = \det \parallel \Gamma(P_0, P'_i, Q_k) \parallel, \qquad i,k = 1,2,...n, \qquad n \geq 2, \qquad \forall \mathcal{Q}^n \subset \Omega. \tag{2.23}$$

Здесь упорядоченное множество точек $\{P'_i\}$ $\quad i = 1,2,...n$ получается из упорядоченного множества точек $\{P_i\}$ $\quad i = 1,2,...n$ перестановкой точек P_1 и P_2. Это означает, что определитель (2.23) получается из определителя (2.22) перестановкой первой и второй строк. Отсюда следует, что

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(1\leftrightarrow 2)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}), \qquad n \geq 2, \qquad \forall \mathcal{Q}^n \subset \Omega. \tag{2.24}$$

Поскольку $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$ есть произвольный мультивектор, то соотношение (2.24) можно записать в виде

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = -\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(1\leftrightarrow 2)}}, \qquad n \geq 2. \tag{2.25}$$

Оно может интерпретироваться в том смысле, что перестановка любых двух точек P_i и P_k $\quad i,k = 1,2,...n$, ($n \geq 2$) (кроме начала P_0) в мультивекторе $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ приводит к изменению его знака. При этом отрицательный знак мультивектора означает, по определению, что

$$(-\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}) = -(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}), \qquad \forall \mathcal{Q}^n \subset \Omega. \tag{2.26}$$

Перестановка точек P_0 и P_1 в мультивекторе $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$, ($n \geq 2$) превращает его в мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow 1)}}$, имеющий начало в точке P_1. Строго говоря, мультивекторы $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ и $\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow 1)}}$ нельзя сравнивать в точке P_0. Однако, они имеют общие точки $P_2, P_3, ...P_n$ и можно сравнивать их в этих точках, образуя скалярное произведение с мультивектором $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$, имеющим начало, например, в точке P_2 ($Q_2 = P_2$)

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})_{P_2} = \det \|\Gamma\,(P_2, P_i, Q_k)\|\,, \qquad i,k = 0,1,3,4,...n, \qquad n \geq 2, \tag{2.27}$$

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow 1)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})_{P_2} = \det \parallel \Gamma(P_2, P_i', Q_k) \parallel, \qquad i,k = 0,1,3,4,...n, \qquad n \geq 2, \quad (2.28)$$

где $P_0' = P_1$, $P_1' = P_0$, $P_i' = P_i$, $\quad i = 3,4,...n$, а индекс P_2 показывает, что точка P_2 рассматривается как начало мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n}$. Сравнение правых частей равенств (2.27) и (2.28) показывает, что

$$(\overrightarrow{\mathcal{P}^n}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})_{P_2} = -(\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow 1)}}.\overrightarrow{\mathcal{Q}^n})_{P_2}, \qquad n \geq 2.$$

Тот же результат будет получен, если в качестве начала выбрать любую из точек $P_i \quad i = 3,4,...n$. Это означает, что соотношение (2.25) верно для перестановки любых двух точек мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$, и можно записать

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(i\leftrightarrow k)}} = -\overrightarrow{\mathcal{P}^n}, \qquad i,k = 0,1,...n, \qquad i \neq k, \qquad n \geq 2. \qquad (2.29)$$

Таким образом, изменение знака мультивектора порядка $n \geq 2$ (умножение на число $a = -1$) всегда может быть определено как нечетная перестановка точек.

Для вектора (мультивектора первого порядка) умножение (2.21) на число $a = -1$ определяется прямо как перестановка начала и конца вектора с помощью соотношений

$$-\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_0,$$

что по определению означает, что

$$(-\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = -(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}) = -\sigma(P_0,P_1) - \sigma(P_0,Q) + \sigma(P_1,Q), \qquad \forall Q \in \Omega,$$

$$(-\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{Q}) = (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_0.\mathbf{P}_1\mathbf{Q}) = \sigma(P_1,P_0) + \sigma(P_1,Q) - \sigma(P_0,Q), \qquad \forall Q \in \Omega.$$

Таким образом, умножение любого мультивектора на число $a = \pm 1$ всегда можно определить в σ-пространстве как результат перестановки точек, образующих мультивектор.

В собственно евклидовом пространстве, где мультивектор определяется в виде

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n} = \bigwedge_{i=1}^{i=n} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i \qquad (2.30)$$

он антисимметричен относительно перестановки любых двух индексов $i,k = 0,1,...n, \qquad i \neq k$. Для индексов $i,k = 1,2,...n$, это следует из свойств операции внешнего умножения.

Для перестановки точек $P_0 \leftrightarrow P_1$ имеем

$$\overrightarrow{\mathcal{P}^n_{(0\leftrightarrow 1)}} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_0 \bigwedge_{i=2}^{i=n} \mathbf{P}_1\mathbf{P}_i = -\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \bigwedge_{i=2}^{i=n} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) =$$

$$-\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \bigwedge_{i=2}^{i=n} \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i = -\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \qquad (2.31)$$

Аналогичный результат получается для перестановки точек $P_0 \leftrightarrow P_i, \quad i = 1,2,...n$. Итак, мультивектор в σ-пространстве есть геометрический объект антисимметричный относительно перестановки любой пары точек.

Определение 2.17 . *$n+1$ точек $\mathcal{P}^n$, $P_i \in \Omega$ $\quad (i=0,1,..n)$ образуют $(n+1)$-точечный σ-базис трубки в σ-пространстве, если мультивектор $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$ имеет ненулевую длину*

$$|\overrightarrow{\mathcal{P}^n}|^2 \equiv F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0. \tag{2.32}$$

Проиллюстрируем это определение базиса трубки на примере D-мерного собственно евклидова пространства. Пусть задано n векторов $\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1,2,\dots n$ в D-мерном собственно евклидовом пространстве ($n \leq D$). В этом случае (1.6) есть определитель Грама

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det \parallel (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) \parallel = (n! S_n(\mathcal{P}^n))^2, \qquad i,k = 1,2,\dots n \tag{2.33}$$

а S_n есть объем $(n+1)$-эдра с вершинами в точках $\mathcal{P}^n$. Обращение в нуль этого определителя есть необходимое и достаточное условие линейной независимости векторов $\mathbf{e}_i$, $\quad (i=1,2,\dots n)$ в собственно евклидовом пространстве.

Если условие (2.32) выполнено, то n векторов $\mathbf{e}_i$ линейно независимы и могут служить в качестве базиса в n-мерной плоскости $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, проходящей через точки $\mathcal{P}^n$. В частности, если в качестве системы координатных векторов для выражения (2.12) использованы векторы $\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $\quad (i=1,2,\dots D)$ $\quad (D+1)$-точечного σ-базиса трубки $\mathcal{P}^D$, то, как легко проверить с помощью (2.2) и (2.12)

$$(\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) = g_{ik}(\mathcal{P}^D) = \Gamma(P_0, P_i, P_k), \qquad i,k = 1,2,\dots D \tag{2.34}$$

Определение 2.18 . *Трубкой $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ n-ого порядка (n=0,1,...), образованной $(n+1)$-точечным σ-базисом трубки $\mathcal{P}^n \subset \Omega$ (или мультивектором n-ого порядка $\overrightarrow{\mathcal{P}^n} \subset \Omega$), называется множество точек $P \in \Omega$*

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \equiv \mathcal{T}_{\mathcal{P}^n} = \{P \mid F_{n+1}(P, \mathcal{P}^n) = 0\}, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0. \tag{2.35}$$

Соотношение (2.35) может быть записано также в терминах мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{P}^n}$

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) = \left\{ P_{n+1} \middle| |\overrightarrow{\mathcal{P}^{n+1}}| = 0 \right\}, \qquad |\overrightarrow{\mathcal{P}^n}| \neq 0. \tag{2.36}$$

Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ представляет собой естественный геометрический объект (ЕГО) n-ого порядка, т.е. множество точек, определяемое геометрией и параметрами: $n+1$ точками $\mathcal{P}^n$. Набор всех возможных ЕГО представляет набор σ-имманентных геометрическмх объектов на множестве Ω. Каждый ЕГО содержит по крайней мере базисные точки $\mathcal{P}^n$.

Определение 2.19 . *Сечением $\mathcal{S}_{n;P}$ трубки $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ в точке $P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ называется множество $\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n))$ точек, принадлежащих трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$*

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \{P' \mid \bigwedge_{l=0}^{l=n} \sigma(P_l, P') = \sigma(P_l, P)\}, \qquad P, P' \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n). \tag{2.37}$$

В собственно евклидовом пространстве трубка n-ого порядка есть n-мерная плоскость, содержащая точки $\mathcal{P}^n$, а ее сечение $\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n))$ в точке P состоит из одной этой точки P.

Наиболее интересны и важны трубки нулевого и первого порядка. Для F_1 получаем из (1.6) и (2.2)

$$F_1(P_0, P_1) = 2\sigma(P_0, P_1)$$

Тогда

$$\mathcal{T}(P_0) \equiv \mathcal{T}_{P_0} = \{P \mid \sigma(P_0, P) = 0\}, \tag{2.38}$$

В собственно евклидовом пространстве трубка нулевого порядка $\mathcal{T}_{P_0} = \{P_0\}$ состоит из одной точки P_0, и ее сечение $\mathcal{S}_{0;P_0}(\mathcal{T}_{p_0}) = \{P_0\}$ тоже состоит из одной точки P_0. Однако в псевдо-евклидовом пространстве, каким является пространство-время в специальной теории относительности, $\mathcal{T}_{P_0}$ есть световой конус с вершиной в точке P_0, и его сечение

$$\mathcal{S}_{0;P}(\mathcal{T}(P_0)) = \{P' \mid \sigma(P_0, P') = 0 \wedge \sigma(P_0, P') = \sigma(P_0, P)\} = \mathcal{T}_{P_0}$$

совпадает со световым конусом.

В описании трубок первого порядка удобно использовать то обстоятельство, что функция $F_2(\mathcal{P}^2)$ может быть представлена в виде произведения

$$F_2(P_0, P_1, P_2) = S_+(P_0, P_1, P_2)S_2(P_0, P_1, P_2)S_2(P_1, P_2, P_0)S_2(P_2, P_0, P_1) \tag{2.39}$$

где

$$S_+(P_0, P_1, P_2) = S(P_0, P_1) + S(P_1, P_2) + S(P_0, P_2) \tag{2.40}$$

$$S_2(P_0, P_1, P_2) = S(P_0, P_1) + S(P_1, P_2) - S(P_0, P_2) \tag{2.41}$$

где $S = \sqrt{2\sigma}$. S_+ обращается в нуль лишь в том случае, если обращается в нуль каждое слагаемое в (2.40). Тогда никакие две точки не образуют σ-базиса, и трубка не определена. Трубку $\mathcal{T}(\mathcal{P}^2)$ можно представить как состоящую из частей, и каждый из сомножителей в (2.39) (кроме S_+) ответственен за одну из ее частей.

Положим

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \mathcal{T}_{[P_1P_0]} = \{P \mid S_2(P_0, P, P_1) = 0\} \tag{2.42}$$

$$\mathcal{T}_{P_0[P_1} = \mathcal{T}_{P_1]P_0} = \{P \mid S_2(P_0, P_1, P) = 0\} \tag{2.43}$$

Будем называть $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ сегментом трубки между точками P_0, P_1, а $\mathcal{T}_{P_0[P_1}$ лучом трубки, выходящим из P_1 в направлении от точки P_0.

Из (2.39), (2.42), (2.43) очевидно, что

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \mathcal{T}_{P_0]P_1} \bigcup \mathcal{T}_{[P_0P_1]} \bigcup \mathcal{T}_{P_0[P_1} \tag{2.44}$$

Поскольку соотношение (2.6) эквивалентно уравнению $F_2(\mathcal{P}^2) = F_2(P_2, \mathcal{P}^1) = 0$, то трубка первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ может быть также определена как множество точек P таких, что $\mathbf{P}_0\mathbf{P} \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$

$$\mathcal{T}_{P_0P_1} = \{P \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \parallel \mathbf{P}_0\mathbf{P}\} \tag{2.45}$$

а для лучей трубки могут быть использованы определения

$$\mathcal{T}_{P_0[P_1} = \{P \mid \mathbf{P}_1\mathbf{P} \uparrow\downarrow \mathbf{P}_1\mathbf{P}_0\} \tag{2.46}$$

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1} = \{P \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P} \uparrow\uparrow \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\} \tag{2.47}$$

Определение 2.20 . *Ориентированным сегментом $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ трубки первого порядка, образованной вектором $\overrightarrow{P_0P_1} \subset \Omega$ ненулевой длины, называется совокупность $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \mathcal{T}_{[P_0P_1]}\}$ вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$ и сегмента $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, образованного этим вектором. Длиной ориентированного сегмента $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ называется величина*

$$|\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}| = |\overrightarrow{P_0P_1}| = \sqrt{2\sigma(P_0,P_1)}. \tag{2.48}$$

Скалярным σ-произведением $(\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}.\overrightarrow{P_0Q})$ ориентированного сегмента $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ и вектора $\overrightarrow{P_0Q}$ называется число

$$(\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}.\overrightarrow{P_0Q}) = (\overrightarrow{P_0P_1}.\overrightarrow{P_0Q}) = \sigma(P_0,P_1) + \sigma(P_0,Q) - \sigma(P_1,Q), \qquad P_0,P_1,P,Q \in \Omega \tag{2.49}$$

Скалярным σ-произведением $(\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}.\overrightarrow{P_1Q})$ ориентированного сегмента $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}$ и вектора $\overrightarrow{P_1Q}$ называется число

$$(\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}}.\overrightarrow{P_1Q}) = -(\overrightarrow{P_1P_0}.\overrightarrow{P_1Q}) = -\sigma(P_0,P_1) - \sigma(P_1,Q) + \sigma(P_0,Q), \qquad P_0,P_1,P,Q \in \Omega. \tag{2.50}$$

Другими словами, $\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_0P_1]}} = -\overrightarrow{\mathcal{T}_{[P_1P_0]}}$.

При описании в терминах дифференциальной геометрии геодезическая в D-мерном римановом пространстве рассматривается как *особый вид кривой, обладающей следующими свойствами.*
(i) *Экстремальность.* Расстояние $(2\sigma)^{1/2}$, измеренное между двумя точками вдоль геодезической, является кратчайшим (экстремальным) по сравнению с расстоянием, измеренным вдоль других кривых.
(ii) *Определенность.* Любые две различные точки геодезической однозначно определяют геодезическую, проходящую через эти точки.
(iii) *Минимальность сечения* (одномерность). Всякое сечение геодезической состоит из одной точки.

При традиционном подходе свойство (ii) есть следствие свойства (i) (для достаточно малых областей пространства), однако, свойство (iii) есть свойство любой кривой (а не только геодезической).

В Т-геометрии геодезическая рассматривается как особый вид трубки, вырождающейся в линию. Тогда предполагается, что свойства (ii) и (iii) выполнены. Свойство (i) не определено, так как не определено понятие линии.

Попытаемся определить геодезическую как трубку, обладающую одновременно свойством определенности и минимальности сечения.

Определение 2.21 . *Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ обладает свойством определенности, если для любого $(n+1)$-точечного σ-базиса трубки $\mathcal{Q}^n \subset \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ (или для любого мультивектора $\overrightarrow{\mathcal{Q}^n} \subset \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ ненулевой длины) выполнено условие*

$$\mathcal{T}(\mathcal{Q}^n) = \mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \tag{2.51}$$

Определение 2.22 . *Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ обладает свойством минимальности сечения, если $\forall P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$*

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \{P\}, \qquad \forall P \in \mathcal{P}^n \tag{2.52}$$

Определение 2.23 . *σ-пространство экстремально на трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, если для $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ выполнены условия определенности и минимальности сечения.*

Определение 2.24 . *σ-пространство экстремально на множестве $\mathcal{T}$ трубок $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, если оно экстремально на каждой из трубок множества $\mathcal{T}$.*

Определение 2.25 . *σ-пространство экстремально в n-ом порядке, если оно экстремально на всех трубках $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$, n-ого порядка.*

Определение 2.26 . *Трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ называется геодезической трубкой $\mathcal{L}(\mathcal{P}^n)$, если σ-пространство экстремально на трубке $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$.*

3 Евклидово пространство как специальный случай σ-пространства.

Определение 3.1 . *n-мерное евклидово пространство E_n есть множество $\mathbb{R}^n$ всех упорядоченных множеств $x = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ из n вещественных чисел, на котором для $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$ задана вещественная функция σ:*

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(x_i - y_i)(x_k - y_k), \qquad g^{ik} = const, \qquad i,k = 1,2,\dots n \tag{3.1}$$

$$\det \parallel g_{ik} \parallel = (\det \parallel g^{ik} \parallel)^{-1} \neq 0 \tag{3.2}$$

Функция σ называется мировой функцией или просто σ-функцией. n-мерное евклидово пространство E_n является одновременно σ-пространством $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Замечание. Приведенное определение очевидным образом эквивалентно определению n-мерного евклидова пространства E_n как n-мерного линейного пространства $\mathbb{R}^n$ векторов $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ с заданным на нем скалярным произведением $(x.y)$ векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$(x.y) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} x_i y_k = \sigma(0,x) + \sigma(0,y) - \sigma(x,y), \qquad g^{ik} = \mathrm{const}, \qquad i,k = 1,2,\dots n \tag{3.3}$$

где σ задано соотношением (3.1).

Евклидово пространство $E_n = \{\sigma, \Omega\}$, $(\Omega = \mathbb{R}^n)$, рассматриваемое как σ-пространство, обладает следующими свойствами

$$\exists \mathcal{P}^n \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_{n+1}(\Omega^{n+2}) = 0, \tag{3.4}$$

$$\sigma(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)[\Gamma(P_0,P_i,P) - \Gamma(P_0,P_i,Q)]$$
$$\times[\Gamma(P_0,P_k,P) - \Gamma(P_0,P_k,Q)], \qquad \forall P,Q \in \Omega \tag{3.5}$$

$$\Gamma(P_0,P,Q) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\Gamma(P_0,P_i,P)\Gamma(P_0,P_k,Q), \qquad \forall P,Q \in \Omega, \tag{3.6}$$

где $\mathcal{P}^n$ есть некоторый $(n+1)$-точечный σ-базис в $\Omega = \mathbb{R}^n$ в смысле определения (2.32), т.е. $F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0$, а величины $\Gamma(P_0, P_k, P)$ определены соотношениями (2.2). При этом $(n+1)$-точечному σ-базису $\mathcal{P}^n$ соответствует базис из n векторов

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \qquad P_i \in \mathcal{P}^n, \qquad i = 1,2,\dots n \tag{3.7}$$

и

$$x_i = x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{e}_i) = \Gamma(P_0,P,P_i), \qquad i = 1,2,\dots n, \qquad \forall P \in \Omega \tag{3.8}$$

суть ковариантные координаты вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ в этом базисе. Величины

$$g_{ik} = g_{ik}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{e}_i.\mathbf{e}_k) = \Gamma(P_0,P_i,P_k), \qquad i,k = 1,2,\dots n \tag{3.9}$$

суть ковариантные компоненты метрического тензора в этом базисе $\mathcal{P}^n$. При этом так как $\mathcal{P}^n$ есть σ-базис трубки, то в силу (2.32), (2.33) выполнено условие

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det \parallel g_{ik}(\mathcal{P}^n) \parallel \neq 0, \qquad i,k = 1,2,\dots n \tag{3.10}$$

и можно определить контравариантные компоненты $g^{ik} = g^{ik}(\mathcal{P}^n)$ метрического тензора с помощью соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(\mathcal{P}^n) g^{kl}(\mathcal{P}^n) = \delta_i^l, \qquad i,l = 1,2,\dots n \tag{3.11}$$

Условия (3.5) и (3.6) эквивалентны, как это следует из (2.2).

Определение 3.2 . *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ имеет структуру n-мерного евклидова пространства на Ω, если существует такой $(n+1)$-точечный σ-базис трубки $\mathcal{P}^n \subset \Omega$, что для $\forall P$, $\forall Q \in \Omega$ выполнено условие (3.6)*

σ-пространство V, имеющее структуру n-мерного евклидова пространства, не обязательно евклидово, т.к. взаимно однозначного соответствия между точками $P \in \Omega$ и их координатами $x \in \mathbb{R}^n$ может не быть. Например, две точки P и P' могут иметь одинаковые координаты и отображаться в одну точку x евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Наконец, третье свойство евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$ означает, что соотношения

$$\Gamma(P_0, P_i, P) = x_i, \qquad x_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{3.12}$$

рассматриваемые как уравнения для $P \in \Omega = \mathbb{R}^n$, всегда имеют одно и только одно решение.

Заметим, что все три условия записаны в σ-имманентной форме и являются необходимыми свойствами евклидова пространства. В этой связи можно поставить вопрос о том, в какой мере эти три условия являются достаточными для того, чтобы σ-пространство $\{\sigma, \Omega\}$, было евклидовым пространством. Ответ дается теоремой.

Теорема 3.1 *Для того, чтобы σ-пространство $\{\sigma, \Omega\}$ было n-мерным евклидовым пространством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3.4), (3.5) и (3.12).*

Доказательство. Необходимость условий (3.4), (3.5) и (3.12) проверяется прямой подстановкой мировой функции σ для n-мерного евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{P}^n$ есть некоторый $(n+1)$-точечный σ-базис трубки в σ-пространстве $\{\sigma, \Omega\}$ и $P, Q \in \Omega$ – две произвольные точки. Введем их ковариантные координаты в $\mathcal{P}^n$ с помощью соотношений типа (3.8)

$$x_i = \Gamma(P_0, P_i, P), \qquad y_i = \Gamma(P_0, P_i, Q), \qquad i = 1, 2, \ldots n, \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{3.13}$$

После этого соотношение (3.6) переписывется в виде

$$(x.y) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} x_i y_k, \qquad g^{ik} = g^{ik}(\mathcal{P}^n)\mathrm{const}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{3.14}$$

В силу условия (3.12) каждой точке $P \in \Omega$ соответствует одна и только одна точка $x \in \mathbb{R}^n$ и наоборот. Иначе говоря, σ-пространство $\{\sigma, \Omega\}$ изометрично n-мерному евклидову пространству $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Следствие теоремы. n-мерное евклидово пространство и все его свойства могут быть описаны σ-имманентно (т.е. в терминах мировой функции). Иначе говоря, Т-геометрия достаточно богата и содержательна, чтобы заключать в себе евклидову геометрию в качестве частного случая, когда мировая функция ограничена σ-имманентным соотношением (3.5), или эквивалентным ему соотношением (3.6). Римановой геометрии тоже можно придать σ-имманентную форму [5], что можно интерпретировать в том смысле, что Т-геометрия содержит в себе риманову геометрию в качестве частного случая. Т-геометрия достаточно информативна, чтобы содержать в себе и другие геометрии. По-видимому, будет нелегко построить такую геометрию, которая бы не содержалась в Т-геометрии. Дело в том, что практически любая Т-геометрия может рассматриваться как результат деформации (изменения мировой функции) σ-подпространства евклидова пространства достаточно высокой размерности. При такой вариации содержательность геометрии не уменьшается, так как не уменьшается число трубок. Оно может только увеличиваться за счет того, что каждая из трубок евклидова пространства, определяемая сразу многими σ-базисами, расщепляется на несколько трубок.

Содержательность геометрии (т.е. количество геометрических объектов, утверждений и теорем) зависит не только от ее аксиом, но и от разработанности ее математического аппарата. Традиционно метрическая геомтрия рассматривается как мало содержательная (во всяком случае менее содержательная, чем евклидова) и всю ее содержательность обычно связывают с ограничениями (1.3), (1.4), которые являются существенными для построения кратчайшей и связанных с ней геометрических объектов. По существу, это означает, что содержательность метрической геометрии связывают с обслуживающим ее математическим аппаратом. При введении более эффективного математического аппарата, связанного с классификацией (1.4), содержательность геометрии возросла даже при отказе от ограничений (1.3), (1.4) на метрику.

В качестве достоинства Т-геометрии следует упомянуть о нечувствительности ее математического аппарата к непрерывности множества, на котором она задана. Представим себе, что в трехмерном евклидовом пространстве взяты 100 точек $\mathcal{P}^{99}$ и требуется изучить геометрию этого множества. Если делать это обычным способом, то нужно рассмотреть трехмерное евклидово пространство на множестве $\mathbb{R}^3$, ввести систему координат, удалить из него все точки кроме $\mathcal{P}^{99}$ и начать изучение множества $\mathcal{P}^{99}$, исходя из координат его точек, с точки зрения того, как $\mathcal{P}^{99}$ вложено в евклидово пространство. С точки зрения Т-геометрии изучать $\mathcal{P}^{99}$ нужно, наложив на метрику условие (3.5) и отказавшись от (3.12). Таким образом, подход Т-геометрии оказывается локальным в том смысле, что изучается геометрия множества $\mathcal{P}^{99}$, а не то, каким образом оно вложено в евклидово пространство.

Отказ от ограничений (3.12) приводит к тому, что отображение $\Omega \to \mathbb{R}^n$ перестает быть обратимым. В частности, возможен случай, когда σ-пространство $\{\sigma, \Omega\}$ оказывается σ-подпространством евклидова пространства E_n.

Определение 3.3 . *Евклидовым σ-пространством $E' = \{\sigma, \Omega'\}$ называется σ-пространство, изометрически вложимое в евклидово пространство. n-мерным евклидовым σ-пространством $E'_n = \{\sigma, \Omega'\}$ называется σ-пространство, изометрически вложимое в n-мерное евклидово пространство $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$, но не вложимое изометрически в $(n-1)$-мерное евклидово пространство $E_{n-1} = \{\sigma, \mathbb{R}^{n-1}\}$.*

n-мерное евклидово σ-пространство является σ-подпространством n-мерного евклидова пространства $E_n = \{\sigma, \mathbb{R}^n\}$.

Из определения трубки (2.35) и условия (3.4) следует, что n-мерное евклидово σ-пространство является трубкой n-ого порядка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) = \Omega$, порожденной любым $(n+1)$-точечным σ-базисом трубки $\mathcal{P}^n \subset \Omega$. При этом выполнено условие минимальности сечения трубки (2.52). Тогда имеет место теорема.

Теорема 3.2 . *Пусть $\mathcal{P}^n$ есть $(n+1)$-точечный σ-базис трубки в σ-пространстве $V\{\sigma, \Omega\}$. Тогда для того, чтобы трубка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ была n-мерным евклидовым σ-пространством, необходимо и достаточно, чтобы:*
(1) σ-пространство $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ имело структуру n-мерного евклидова пространства на $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$,
(2) сечение $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ было минимально в любой точке:

$$\mathcal{S}_{n;P}(\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)) = \{P\}, \qquad \forall P \in \mathcal{T}(\mathcal{P}^n).$$

4 Аксиома треугольника как условие вырожденности трубки первого порядка

Изучим ограничения, налагаемые на σ-пространство неравенством треугольника (1.4). Рассмотрим сегмент $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ трубки $\mathcal{T}_{P_0P_1}$, заключенный между базисными точками P_0, P_1. Он описывается уравнениями (2.41), (2.42). Для непрерывного σ-пространства это некоторая поверхность, содержащая точки P_0, P_1. При этом сама поверхность $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ и область вне ее описывается уравнением

$$S_2(P_0, R, P_1) \equiv \rho(P_0, R) + \rho(R, P_1) - \rho(P_0, P_1) \geq 0, \tag{4.1}$$

где R есть бегущая точка. Таким образом, на самой поверхности $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ и вне ее неравенство треугольника выполнено. Области внутри поверхности $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ соответствует неравенство $S_2(P_0, R, P_1) \leq 0$, что соответствует нарушению аксиомы треугольника. Другими словами, в метрическом пространстве сегмент $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ трубки первого порядка не может иметь внутренних точек, что означает вырождение трубки в линию или поверхность, не имеющую внутренних точек. В этом смысле метрическая геометрия (т.е. геометрия, порожденная метрическим пространством) есть вырожденная геометрия.

В том случае, когда все трубки $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ вырождаются в соответствующие базисные точки P_0, P_1, неравенство треугольника (1.4) принимает вид строгого неравенства

$$\rho(P_0, R) + \rho(R, P_1) > \rho(P_0, P_1), \qquad P_0 \neq R \neq P_1 \neq P_0, \qquad \forall P_0, P_1, R \in \Omega. \tag{4.2}$$

В этом случае естественно назвать метрическую геометрию (Т-геометрию) ультравырожденной.

Пример 4.1. Рассмотрим два разных σ-пространства (и две Т-геометрии) на единичном шаре

$$\Omega = \left\{\mathbf{x}\,\middle|\,|\mathbf{x}|^2 \leq 1\right\} \subset \mathbb{R}^3, \qquad \mathbf{x} = \left\{x^1, x^2, x^3\right\} \in \mathbb{R}^3, \qquad |\mathbf{x}|^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} \left(x^i\right)^2 \tag{4.3}$$

σ-пространство $V_E = \{\sigma_E, \Omega\}$ порождает собственно евклидову геометрию

$$\sigma_E: \quad \Omega \times \Omega \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}, \qquad \sigma_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega, \tag{4.4}$$

σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ порождает на том же самом множестве Ω Т-геометрию с помощью соотношений

$$\sigma: \quad \Omega \times \Omega \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}, \qquad \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 2\left(\arcsin\sqrt{\frac{\sigma_E(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{2}}\right)^2, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega \tag{4.5}$$

Одновременно с этими двумя σ-пространствами на шаре Ω рассматриваются их σ-подпространства $V_{Es} = \{\sigma_E, \Sigma\}$ и $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ на поверхности шара $\Sigma = \partial\Omega = \{\mathbf{x}\,||\mathbf{x}|^2 = 1\} \subset \Omega$. Поскольку Σ есть подмножество множества Ω, то Т-геометрии $V_{Es} = \{\sigma_E, \Sigma\}$ и $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ порождаются Т-геометриями T_E и T.

Обозначим трубки в σ-пространстве V_E с помощью символа $\mathcal{L}$, а трубки в σ-пространстве V посредством $\mathcal{T}$. Трубки первого порядка $\mathcal{L}_{AB} \subset \Omega$, $(A, B \in \Sigma)$ суть прямые линии в Ω и – две точки A, B в Σ. Другими словами, Т-геометрия V_E вырождена в первом порядке в Ω и ультравырождена в первом порядке в Σ. Трубки первого порядка $\mathcal{T}_{AB} \subset \Omega$, $(A, B \in \Sigma)$ суть невырожденные трубки в Ω. Они представляют собой поверхности, полученные в результате вращения окружности единичного радиуса, проходящей через точки $A, B \in \Sigma$, вокруг оси $\mathcal{L}_{AB}$. (см. Рис. 4.1). Эти трубки касаются сферы Σ вдоль окружностей максимального радиуса. Сегмент $\mathcal{T}_{[AB]}$ трубки между точками $A, B \in \Omega$ находится внутри шара Ω, тогда как остальная часть трубки $\mathcal{T}_{AB}$ находится вне внутренней части $\Omega\backslash\Sigma$ шара Ω. В результате в σ-пространстве $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ сегмент $\mathcal{T}_{[AB]}$ трубки $\mathcal{T}_{AB} \subset \Sigma$, $(A, B \in \Sigma)$ есть кратчайшая линия на поверхности сферы Σ, соединяющая точки $A, B \in \Sigma$. Остальная часть трубки $\mathcal{T}_{AB} \subset \Omega$ есть продолжение сегмента $\mathcal{T}_{[AB]} \subset \Sigma$. Иначе говоря, σ-пространство $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ порождает вырожденную в первом порядке Т-геометрию на Σ. Таким образом, Т-геометрия в $V = \{\sigma, \Omega\}$ невырождена в Ω и вырождена в Σ. Трубка второго порядка $\mathcal{T}_{ABC} \subset \Sigma$ состоит из трех точек $A, B, C \subset \Sigma$, и Т-геометрия в $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ есть ультравырожденная во втором порядке геометрия на Ω.

С другой стороны, Т-геометрия в $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ на сфере Σ может быть построена на основе евклидовой геометрии в $V_E = \{\sigma_E, \Omega\}$. Чтобы построить $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$ на основе $V_E = \{\sigma_E, \Omega\}$, нужно использовать экстремальные свойства геодезических.

Рассмотрим трубку второго порядка $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega$, $(A, B, C \in \Omega)$. Эта трубка есть двумерная плоскость, проходящая через точки $A, B, C \in \Omega$. В $V_{Es} =$

$\{\sigma_E, \Sigma\}$ трубка второго порядка $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Sigma$ имеет форму окружности, проходящей через точки $A, B, C \in \Sigma$.

Чтобы построить Т-геометрию в $V_s = \{\sigma, \Sigma\}$, нужно определить метрику $\rho(A,B) = \sqrt{2\sigma(A,B)}$, $A, B \in \Sigma$ на $\Sigma \times \Sigma$, следующим образом

$$\rho(A,B) = \inf_{C \in \Sigma, C \neq A, C \neq B} l_C(A,B), \qquad A, B \in \Sigma, \tag{4.6}$$

где $l_C(A,B) \subset [0,\infty)$ есть длина кривой $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Sigma$ между точками A, B. Упорядочим точки $R \in \mathcal{L}_{ABC} \subset \Sigma$ кривой $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Sigma$, решая уравнение

$$\rho_E(A,R)(1-\tau) = \rho_E(B,R)\tau, \qquad R \in \mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega, \qquad \tau \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

Решение этого уравнения определяет $R = R_{AB}(\tau, C) \in \mathcal{L}_{ABC} \subset \Sigma$ как функцию параметра $\tau \in [0,1]$ и точки $C \in \Sigma$. При этом $A = R_{AB}(0,C)$, $B = R_{AB}(1,C)$. Функция $R = R_{AB}(\tau, C)$ имеет две ветви $R = R_1(\tau, C)$ и $R = R_2(\tau, C)$. Нужно выбрать ветвь с меньшими значениями $\rho_E(A, R_{AB}(\tau, C))$ и определить $l_C(A,B)$ с помощью соотношения

$$l_C(A,B) = \int_0^1 \left[\frac{d\rho_E(R_{AB}(\tau,C), R_{AB}(\tau',C))}{d\tau'}\right]_{\tau'=\tau} d\tau \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в (4.6), получаем

$$\rho(A,B) = 2\arcsin\frac{S_E(A,B)}{2}, \qquad A, B \in \Sigma \tag{4.9}$$

что соответствует (4.5).

Этот пример показывает, что используя евклидову Т-геометрию внутри Ω, можно построить внутреннюю метрику (и Т-геометрию) на поверхности Σ шара Ω. Для построения геометрии на Σ, существенно используются экстремальные свойства геодезических (кратчайших) и трубки второго порядка $\mathcal{L}_{ABC} \subset \Omega$, которые порождают систему кривых на сфере Σ. Из этих кривых отбираются те, расстояния вдоль которых являются минимальными.

Повидимому, с надлежащими оговорками описанная процедура построения метрического пространства на поверхности шара при евклидовой геометрии внутри шара может быть обобщена на случай произвольного тела и произвольного метрического пространства внутри этого тела.

Таким образом, классификация конечных метрических подпространств, использующая ряд отображений (1.9), оказывается очень эффективным методом исследования метрического пространства, позволяющим описывать евклидову и риманову геометрии в терминах одной только метрики (мировой функции). Геометрии, построенные на основе этой классификации, не используют понятие непрерывности и оказываются нечувствительными к дискретности или непрерывности пространства. Понятие непрерывности может быть введено на основе метрики (мировой функции) путем надлежащей параметризации экстремальных трубок [5].

References

[1] J.L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960. (русс. пер. Дж.Л. Синг, *Общая теория относительности.* ИИЛ, Москва, 1963).

[2] А.Д. Александров, В.Н. Берестовский, И.Г. Николаев, Обобщенные римановы пространства. *УМН,* **41**, вып. 3, 1-44, (1986).

[3] А.Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.* ГИТТЛ. Москва, 1948.

[4] Yu.A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092, (1991).

[5] Yu.A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876, (1991).