Проблема рождения пар и каноническое квантование нелинейного скалярного поля в терминах мировых линий

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, 117526, Москва, пр. Вернадского 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru

Аннотация

Предлагается новая схема (WL-схема) квантования, использующая в качестве объектов квантования мировые линии. WL-схема квантования рассматривается применительно к нелинейному скалярному полю и сравнивается с традиционной PA-схемой квантования. В PA-схеме квантования объектом квантования оказываются частицы и античастицы, являющиеся фрагментами единого физического объекта – мировой линии (МЛ). Применение PA-схемы квантования к нелинейному полю приводит к таким трудностям как нестационарный вакуум, обязательное использование формализма теории возмущений, нормальноое упорядочение и выключение взаимодействия при $t \to \infty$ в проблеме рассеяния. Эти трудности являются следствием противоречивости PA-схемы. WL-схема свободна от них. Трудности PA-схемы связаны с проблемой воссоздания единой мировой линии из ее фрагментов (частиц и античастиц). В случае, когда частицы взаимодействуют между собой, такая реконструкция представляет собой очень сложную проблему. В новой WL-схеме квантования все эти проблемы просто не возникают, потому что мировая линия не фрагментируется. Формально в каноническом квантовании по PA-схеме фрагментация мировой линии является логическим следствием принудительного отождествления энергии с гамильтонианом. По существу такое отождествление не является необходимым. Оно приводит лишь к трудностям. Новая WL-схема квантования не использует подобного отождествления и способна обойти все эти проблемы. WL-схема может не использовать дополнительные (к нерелятивистской КМ) правила квантования, используемые в квантовой теории поля (нормальное упорядочение, формализм теории возмущений, перенормировки).

1 Введение

Проблема рождения пар является ключевой проблемой как релятивистской квантовой теории поля (КТП) так и в теории элементарных частиц. В настоящей работе исследуется вопрос, возможно ли описание рождения пар в рамках принципов обычной квантовой теории, т.е. без использования дополнительных правил КТП, таких как нормальное упорядочение, формализм теории возмущений, манипуляции с нестационарным вакуумом, перенормировки и выключение взаимодействия при решении проблемы рассеяния. Основной результат исследования таков. Возможно вторичное квантование нелинейного релятивистского скалярного поля с членом самодействия вида $\lambda\varphi^{*2}\varphi^2$ и его описание без помощи теории возмущений. Иными словами, удается преодолеть многие трудности релятивистской КТП, но проблема рождения пар остается нерешенной. Эта проблема оказывается существенно более сложной, чем принять думать [1]

Дело в том, что традиционное вторичное квантование релятивистского поля обычно сопровождается фрагментацией мировых линий на частицы и античастицы. Некоторые фрагменты мировой линии (МЛ) описывают частицы, а другие – античастицы. Описание процесса фрагментации довольно просто, тогда как описание обратного процесса (дефрагментации) более сложно, и описание дефрагментации оказывается несовершенным. В некоторых случаях рождение пар возникает как ошибка в описании процесса дефрагментации, а не как результат поворота мировой линии во времени.

Применение в КТП фрагментации мировой линии (формализм теории возмущений) тесно связано с отождествлением гамильтониана $p_0 \equiv -H$ с энергией E. Энергия определяется соотношением

$$E = P^0 = \int T^{00} d\mathbf{x} \tag{1.1}$$

где T^{ik} есть тензор энергии-импульса, тогда как $p_0 \equiv -H$ определяется как величина, канонически сопряженная времени. Вообще говоря, энергия E и гамильтониан H суть различные величины, но в нерелятивистском случае они совпадают для свободной частицы, т.е. $E = -H$, и поэтому принято считать, что это соотношение выполняется и в КТП, где оно принимает вид коммутационного соотношения

$$[u, P_k]_- = -i\hbar \frac{\partial u}{\partial x^k}, \tag{1.2}$$

[1] Предлагаемое здесь исследование было проведено довольно давно (до 1990 года) и послужило основанием для поиска альтернативного описания рождения пар, но нам не удалось его опубликовать, потому что редакторы физических журналов, куда представлялась работа, полагали, что нельзя публиковать работу, где вторичное квантование нелинейного поля не приводит к рождению пар, даже если процедура вторичного квантования полностью непротиворечива. Сейчас, когда появилась возможность альтернативного описания рождения пар [1], публикация этого исследования может быть полезна как аргумент в пользу альтернативного описания.

Здесь P_k есть оператор энергии-импульса, $[u, P_k]_-$ означает коммутатор, а u есть оператор произвольной динамической переменной. $\hbar$ есть постоянная Планка, которая в дальнейшем приравнивается к 1. Принято считать [2] что соотношение (1.2) необходимо для получения релятивистских перестановочных соотношений для операторов поля. Использование соотношения (1.2) является основанием для утверждения, что полевой оператор φ не может содержать одни только операторы уничтожения и что φ содержит как операторы рождения так и операторы уничтожения. Это порождает необходимость использования в релятивистской КТП методов теории возмущений.

Отбрасывая соотношение (1.2), можно получить такое вторичное квантование релятивистского поля, где оператор φ содержит только операторы уничтожения, а эрмитово сопряженный оператор φ^* содержит только операторы рождения. Коммутационные соотношения для операторов φ и φ^* могут быть определены без ссылки на соотношение (1.2). Они определяются из соображений релятивистской ковариантности и динамического уравнения для φ [4].

Было показано [3] что соотношение $E = -H$, (или $E = H$) выполняется в релятивистском случае, только если частицы и античастицы рассматриваются как независимые физические объекты (а не как различные состояния физического объекта МЛ, описываемого мировой линией). Таким образом, отождествление E и H (соотношение $E = -H$) означает фрагментацию МЛ на фрагменты, описывающие независимые физические объекты – частицы и античастицы. Идея использования мировой линии как физического объекта – это очень старая идея. Она восходит к Штюкельбергу [5] и Фейнману [6]. К сожалению, она развивалась несколько непоследовательно и источником этой непоследовательности является соотношение (1.2). Вообще говоря, энергия E и гамильтониан H определяются независимо, и нет никаких причин принудительно отождествлять их. Если они совпадают по каким-то причинам (например, в силу динамических уравнений), то они будут совпадать независимо от соотношения (1.2). Если же они не совпадают, то нет причины делать их равными.

Далее мы будем использовать и сравнивать две схемы канонического квантования. Традиционную схему квантования, использующую соотношение (1.2) мы будем называть PA-схемой. Схему квантования, которая не использует соотношение (1.2) и рассматривает мировую линию как физический объект мы будем называть WL-схемой. Вообще, мы будем использовать специальный термин "МЛ" (эмлон) или "WL" для мировой линии, рассматриваемой как физический объект.

Прежде чем рассматривать различные модификации канонического квантования следует понять различие между WL-описанием и PA-описанием на классическом уровне.

Пусть x^i суть координты точки пространства-времени в некоторой системе координат, и

$$\mathcal{L}: \qquad x^i = q^i(\tau), \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

есть непрерывная мировая линия, причем τ есть некоторый параметр, изменяющийся вдоль нее. Пусть $\mathcal{L}$ описывает историю частиц и античастиц, порожденных некоторым заданным внешним полем $f(q)$, способным порождать пары. Эмлон $\mathcal{L}$ описывается следующимии параметрами: масса m, и "заряд" e. Масса есть неотрицательная постоянная, описывающая взаимодействие с гравитационным полем. "Заряд" e есть постоянная, описывающая взаимодействие с электромагнитным полем. Ориентация $\boldsymbol{\varepsilon}$ это еще одна Лоренц инвариантная величина, описывающая состояние эмлона. Изменяя ориентацию $\boldsymbol{\varepsilon}$ (при фиксированных m и e), можно превращать частицу в античастицу и наоборот. Ориентация $\boldsymbol{\varepsilon}$ описывает одно из двух возможных направлений движения вдоль мировой линии. Если параметризация $\mathcal{P}$ эмлона $\mathcal{L}$ осуществляется с помощью параметра τ, то ориентация $\boldsymbol{\varepsilon}$ определяется компонентом ориентации ε при заданной параметризации $\mathcal{P}$. Компонент ε принимает значения ± 1. При преобразовании параметризации $\mathcal{P}$ мировой линии $\mathcal{L}$

$$\mathcal{P} \to \mathcal{P}', \qquad \tau \to \tau' = \tau'(\tau), \qquad \partial\tau'/\partial\tau \not\equiv 0 \tag{1.4}$$

компонент ориентации преобразуется по закону

$$\varepsilon \to \varepsilon' = \varepsilon \ \mathrm{sgn}\frac{\partial\tau'(\tau)}{\partial\tau}. \tag{1.5}$$

Для мировой линии $\mathcal{L}$ действие имеет вид

$$S[q] = \int\limits_{\min(\tau',\tau'')}^{\max(\tau',\tau'')} L d\tau, \tag{1.6}$$

$$L = -\sqrt{m^2c^2\dot{q}^i g_{ik}\dot{q}^k - \alpha f(q)} - \frac{\varepsilon e}{c}\dot{q}^i A_i(q), \qquad \dot{q}^i \equiv dq^i/d\tau, \tag{1.7}$$

где τ' и τ'' суть значения параметра τ на концах интервала интегрирования. α – неотрицательная постоянная. Здесь $f(q)$ есть заданное внешнее поле, способное повернуть мировую линию во временно́м направлении, т.е. оно может рождать и уничтожать пары частица-античастица. Дело в том, что лагранжиан (1.6) с $\alpha = 0$ допускает только времениподобные МЛ (1.3), ($\dot{q}^i\dot{q}_i > 0$ выполнено всюду). Введение члена $\alpha f(q)$ устраняет это ограничение. Способность порождать пары остается в пределе $\alpha \to +0$, когда действие (1.6) становится инвариантным относительно произвольного преобразования (1.4) параметризации (см. детали в [3]). Радикал в уравнении (1.7) предполагается неотрицательным. Действие (1.6), (1.7) инвариантно относительно произвольных преобразований координат. В пределе $\alpha \to +0$ оно становится также инвариантным относительно любого преобразования (1.4).

Электрический ток $J^i(x)$ и тензор энергии-импульса T^{ik} определяются как источники соответственно электромагнитного и гравитационного полей. В галилеевой системе координат, где g_{ik}= const и $A_i = 0$, они имеют вид

$$J^i(x) = -c\frac{\delta S}{\delta A_i(x)} = \varepsilon e \sum_l \frac{\dot{q}^i(\tau_l)}{|\dot{q}^0(\tau_l)|}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}(\tau)), \qquad i = 0,1,2,3 \tag{1.8}$$

$$T^{ik}(x) = -\frac{2c}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S}{\delta g_{ik}} = \sum_l \frac{mc^2\dot{q}^i(\tau_l)\dot{q}^k(\tau_l)}{\sqrt{\dot{q}^l(\tau_l)g_{lj}\dot{q}^j(\tau_j)}}\frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{q}(\tau_l))}{|\dot{q}^0(\tau_l)|} \qquad (1.9)$$

$$i,k = 0,1,2,3$$

где $\tau_l = \tau_l\left(x^0\right)$ суть корни уравнения

$$q^0(\tau_l) - x^0 = 0 \qquad (1.10)$$

и

$$g = \det||g_{ik}||, \qquad i,k = 0,1,...n.$$

Пересечение МЛ с плоскостью $x^0=$ const состоит из одной или нескольких точек. Каждой такой точке можно приписать канонический импульс p_i ($i = 0,1,2,3$), электрический заряд Q, энергию E и количество движения P_β ($\beta = 1,2,3$). Они определяются следующим образом

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = -\frac{mc\dot{q}_i}{\sqrt{\dot{q}^l g_{lk}\dot{q}^k}}, \qquad i = 0,1,2,3 \qquad (1.11)$$

$$Q = \int J^0(x)d\mathbf{x} = \varepsilon e\ \mathrm{sgn}(\dot{q}^0) = -\varepsilon e\ \mathrm{sgn}(p_0) \qquad (1.12)$$

$$P^0 = E = \int T^{00}d\mathbf{x} = \frac{mc\,|\dot{q}^0|}{\sqrt{\dot{q}^l g_{lk}\dot{q}^k}} = |p_0| \qquad (1.13)$$

$$P^\alpha = \int T^{0\alpha}d\mathbf{x} = \frac{mc\dot{q}^\alpha}{\sqrt{\dot{q}^l g_{lk}\dot{q}^k}}\mathrm{sgn}(\dot{q}^0) = -p^\alpha \mathrm{sgn}(p_0), \qquad \alpha = 1,2,3 \qquad (1.14)$$

Можно приписать два инварианта: $m = \sqrt{p_i p^i}$, $Q = \pm e$ любой точке пересечения эмлона $\mathcal{L}$ с плоскостью $x^0=$ const. Мы будем называть эти точки СМЛ (сокращение (СМЛ) термина "сечение мировой линии"). Существуют два сорта СМЛ: (m,e) и $(m,-e)$. Одно из них частица, а другое – античастица. Итак, СМЛ есть коллективное понятие по отношению к понятиям частица и античастица.

Состояние СМЛ описывается или динамическими переменными

$$x^\alpha, \varepsilon_p, p_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,3, \qquad (1.15)$$

или наблюдаемыми физическими переменными

$$x^\alpha, Q, P^\alpha, \qquad \alpha = 1,2,3 \qquad (1.16)$$

где ε_p принимает значения ± 1, которые помечают частицу и античастицу. Соотношения между динамическими переменными $x^\alpha, \varepsilon_p, p_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3$ и физическими переменными имеют вид

$$\varepsilon_p = \mathrm{sgn}(p_0), \qquad p_0 = \varepsilon_p E, \qquad P_\alpha = -\varepsilon_p p_\alpha, \qquad (1.17)$$

$$Q = -\varepsilon\varepsilon_p e, \qquad E = \left|\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}\right|,$$

Рассмотрим такие преобразования способа описания эмлона, которые не меняют сохраняющиеся величины Q, E, P_α.

$$I_\tau: \qquad \tau \to -\tau, \qquad x^i \to x^i, \qquad \varepsilon \to -\varepsilon, \qquad \varepsilon_p \to -\varepsilon_p,$$

$$p_\alpha \to -p_\alpha, \qquad Q \to Q, \qquad P_\alpha \to P_\alpha, \tag{1.18}$$

$$I_{ey}: \qquad \tau \to \tau, \qquad x^i \to -(x^i - 2y^i), \qquad e \to -e, \qquad \varepsilon_p \to -\varepsilon_p, \qquad \varepsilon \to \varepsilon,$$

$$p_\alpha \to -p_\alpha, \qquad Q \to Q, \qquad P_\alpha \to P_\alpha, \tag{1.19}$$

где $y = y^i$ есть параметр преобразования. Оба преобразования I_τ и I_{ey} меняют знак канонического импульса p_i, но не меняют вектора энергии-импульса P_i и заряда Q. Преобразование I_τ меняет параметризацию эмлона (параметр τ), но не меняет параметры (m, e) динамической системы МЛ. Наоборот, преобразование (1.19) не меняет параметризацию эмлона, но меняет параметры $(m, e) \to (m, -e)$ динамической системы МЛ, описываемой действием (1.6), (1.7) и ее состояние $(x, \varepsilon_p, p_\alpha) \to (-x + 2y, -\varepsilon_p, -p_\alpha)$.

Два эмлона (m, e) и $(m, -e)$ суть две различных динамических системы, тогда как $(x, \varepsilon_p, p_\alpha)$ и $(x, -\varepsilon_p, -p_\alpha)$ с теми же самыми (m, e) суть два различных состояния одной и той же динамической системы МЛ. Другими словами, преобразование (1.18) не меняет динамическую систему МЛ, описываемую действием (1.6), (1.7), тогда как преобразование (1.19) меняет саму динамическую систему МЛ.

Когда нет рождения пар и МЛ не делает зигзага во временно́м направлении, можно достичь совпадения векторов p_i и $-P_i$. В этом случае вектор энергии-импульса $-P_i$ канонически сопряжен вектору x^i. Если МЛ описывает рождение пар (см. Рис. 1), совпадения векторов p_i и $-P_i$ можно достичь с помощью преобразования (1.18), осуществленного только на тех отрезках МЛ, где p_i не совпадает с $-P_i$. Например, можно выбрать $\tau = x^0$, тогда $p_i = -P_i$ всюду, но параметр τ будет меняться немонотонно вдоль МЛ.

Описание, где $P_i = -p_i$ всюду, будем называть PA-описанием. Подход, использующий немонотонную параметризацию, будем называть PA-подходом (подход с точки зрения частиц и античастиц). Подход, где используется монотонная параметризация МЛ, будем называть WL-подходом (*МЛ*-подходом). Итак, WL-подход различает между каноническим импульсом и энергией-импульсом. PA-подход их не различает. Критерием PA-подхода является условие

$$p_i = -P_i, \qquad i = 0, 1, 2, 3, \tag{1.20}$$

что вектор энергии-импульса $-P_i$, определенный соотношениями (1.13), (1.14) является канонически сопряженным к x^i.

С точки зрения WL-подхода немонотонная параметризация МЛ является непоследовательной, поскольку немонотонная параметризация МЛ отсутствует в нерелятивистском описании. Наоборот, с точки зрения PA-подхода разделение понятий энергии-импульса P_i и канонического импульса p_i неудовлетворительно, поскольку такое разделение отсутствует в нерелятивистском описании.

С точки зрения идеи Штюкельберга – Фейнмана, что мировая линия есть физический объект, WL-подход является более последовательным, чем PA-подход.

Различие между этими двумя подходами проявляется только при рождении пар, т.е. только в квантовой теории поля (КТП). Каноническое квантование в КТП использует PA-подход, т.е. соотношение (1.20) предполагается выполненным всегда.

В КТП соотношение (1.20) принимает вид (1.2). С нерелятивистской точки зрения PA-подход более понятен, чем WL-подход. Однако, использование PA-подхода при квантовании взаимодействующих полей ведет к ряду трудностей. Главная трудность отсутствие стационарного вакуумного состояния.

В настоящей работе исследуется применение WL-подхода к квантованию бозонного поля. Во втором разделе демонстрируется эквивалентность WL-подхода и PA-подхода при квантовании свободного поля. В третьем разделе вводится понятие модели квантования. В четвертом разделе исследуется квантование нелинейного поля. Пятый раздел посвящен описанию нелинейного поля в терминах свободных полей. В шестом разделе исследуется проблема рассеяния без выключения взаимодействия при $t \to \infty$. В седьмом разделе рассматриваются некоторые особенности введения физических величин для нелинейного поля.

2 Квантование свободного скалярного поля

Рассмотрим заряженное скалярное поле φ в $(n+1)$-мерном постранстве-времени. $x^i = (x^0, \mathbf{x}) = (x^0, x^\alpha)$ суть галилеевы координаты. Латинские индексы принимают значения $0, 1, \dots n$, а греческие $1, 2, \dots n$. Как обычно по повторяющимся индексам производится суммирование. Оператор $\varphi(x) = \varphi(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_i \partial^i + m^2)\varphi = 0, \tag{2.1}$$

причем $\varphi^*(x)$ есть соответствующий эрмитово сопряженный оператор.

Удобно использовать переменные

$$b(\varepsilon_k, \mathbf{k}, t) = b(K, t) = i(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) \left[\frac{\sqrt{\beta(\mathbf{k})}}{2} \varphi(\mathbf{x}, t) + \frac{i\varepsilon_k}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})}} \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)] \right] d\mathbf{x} \tag{2.2}$$

$$K = \{\varepsilon_k, \mathbf{k}\}, \qquad \dot{\varphi} \equiv \partial\varphi/\partial t, \qquad d\mathbf{x} \equiv dx^1 dx^2 \dots dx^n,$$

где ε_k=sgn(k_0) описывает ориентацию.

$$k_0 = \varepsilon_k E(\mathbf{k}), \qquad E(\mathbf{k}) = \left| \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} \right|, \qquad \beta(\mathbf{k}) = 2E(\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{kx} = -k_\alpha x^\alpha = k^\alpha x^\alpha, \qquad k = (k_0, \mathbf{k}) \tag{2.3}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{kx}} \frac{b(K,t)}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})}} dK \tag{2.4}$$

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2} \sqrt{\beta(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{kx}} b(K,t) dK \tag{2.5}$$

где использовано обозначение

$$\int (.) dK \equiv \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \int (.) d\mathbf{k}, \qquad d\mathbf{k} = dk_1 dk_2 \ldots dk_n, \tag{2.6}$$

Динамическое уравнение (2.1) в терминах $b(K,t)$ записывается в виде

$$\dot{b}(K,t) = -i\varepsilon_k E(\mathbf{k}) b(K,t) \tag{2.7}$$

или

$$b(K,t) = e^{-i\varepsilon_k E(\mathbf{k})t} b(K), \qquad b(K) \equiv b(K,0) \tag{2.8}$$

Связь между $\varphi^*(\mathbf{x},t), \dot{\varphi}^*(\mathbf{x},t)$ и $b^*(K,t)$ получается в результате эрмитова сопряжения соотношений (2.2), (2.4), (2.5), (2.7), (2.8).

Определение 2.1. Схема квантования есть совокупность трех соотношений (1) динамического уравнения, (2) определения вакуумного вектора состояния, (3) коммутационного соотношения между операторами динамических переменных.

Используется представление Фока. В этом представлении имеется только один вакуумный вектор $|0\rangle$. Любое состояние Φ может быть получено как результат действия оператора на вакуумный вектор $|0\rangle$ некоторого оператора, сотсавленного из динамических переменных.

Схема квантования в терминах частиц и античастиц (PA-схема) определяется следующим образом

$$1: \qquad \dot{c}(\mathbf{k},t) = -iE(\mathbf{k})c(\mathbf{k},t), \qquad \dot{d}(\mathbf{k},t) = -iE(\mathbf{k})d(\mathbf{k},t) \tag{2.9}$$

$$2: \quad \begin{array}{lll} c(\mathbf{k})|0\rangle_{\mathrm{PA}} = 0, & d(\mathbf{k})|0\rangle_{\mathrm{PA}} = 0, & c(\mathbf{k}) = c(\mathbf{k},0) \\ {}_{\mathrm{PA}}\langle 0|c^*(\mathbf{k}) = 0, & {}_{\mathrm{PA}}\langle 0|d^*(\mathbf{k}) = 0, & d(\mathbf{k}) = d(\mathbf{k},0) \end{array} \tag{2.10}$$

$$\begin{array}{ll} 3a: & [c(\mathbf{k}), c^*(\mathbf{k}')]_- = [d(\mathbf{k}), d^*(\mathbf{k}')]_- = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ 3b: & [c(\mathbf{k}), c(\mathbf{k}')]_- = [d(\mathbf{k}), d(\mathbf{k}')]_- = [c(\mathbf{k}), d(\mathbf{k}')]_- = 0 \end{array} \tag{2.11}$$

где

$$c(\mathbf{k},t) = b(1,\mathbf{k},t), \qquad d(\mathbf{k},t) = b^*(-1,\mathbf{k},t) \tag{2.12}$$

и $|0\rangle_{\mathrm{PA}}$ есть вакуумный вектор.

Схема квантования в терминах МЛ (WL-схема) имеет вид

$$1 \quad : \qquad \dot{b}(K,t) = -i\varepsilon_k E(\mathbf{k}) b(K,t) \tag{2.13}$$

$$2 \quad : \qquad b(K)|0\rangle_{\mathrm{WL}} = 0, \qquad {}_{\mathrm{WL}}\langle 0|b^*(K) = 0 \tag{2.14}$$

$$\begin{array}{ll} 3a: & [b(K), b^*(K')]_- = \delta(K-K') \equiv \delta_{\varepsilon_k,\varepsilon_{k'}} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ 3b: & [b(K), b(K')]_- = 0 \end{array} \tag{2.15}$$

Подстановка (2.12) в соотношения (2.9) – (2.11) не приводит к соотношениям (2.13) – (2.15) из-за различия в определении вакуумного состояния, поскольку подстановка (2.12) в (2.10) дает

$$b(1,\mathbf{k})|0\rangle_{\mathrm{PA}} = 0, \qquad b^*(-1,\mathbf{k})|0\rangle_{\mathrm{PA}} = 0, \tag{2.16}$$

что отличается от вакуумного вектора, определенного соотношением (2.14).

Тем не менее обе схемы квантования эквивалентны, поскольку PA-схема может быть преобразована в WL-схему с помощью замены переменных

$$c(\mathbf{k},t) = b_{\mathrm{E}}(1,\mathbf{k},t), \qquad d(\mathbf{k},t) = b_{\mathrm{E}}(-1,\mathbf{k},-t). \tag{2.17}$$

Подстановка соотншений (2.17) в соотношения (2.9) – (2.11) приводит к уравнениям

$$\begin{array}{lll} 1 & : & \dot{b}_{\mathrm{E}}(K,t) = -i\varepsilon_k E(\mathbf{k}) b_{\mathrm{E}}(K,t) \\ 2 & : & b_{\mathrm{E}}(K)|0\rangle_{\mathrm{PA}} = 0, \qquad {}_{\mathrm{PA}}\langle 0|b_{\mathrm{E}}^*(K) = 0 \\ 3a & : & [b_{\mathrm{E}}(K), b_{\mathrm{E}}^*(K')]_- = \delta(K-K') \equiv \delta_{\varepsilon_k,\varepsilon_{k'}} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ 3b & : & [b_{\mathrm{E}}(K), b_{\mathrm{E}}(K')]_- = 0 \end{array} \tag{2.18}$$

Сравнивая (2.18) с (2.13)-(2.15), можно увидеть, что PA-схема отличается от WL-схемы только обозначениями. Схемы эквивалентны. Замена переменных (2.17), преобразующая PA-схему в WL-схему не единственна. Имеется столько же таких преобразований, сколько существует галилеевых систем координат.

Построим поле $\varphi_{\mathrm{E}}(\mathbf{x},t)$, выражая его через переменные $b_{\mathrm{E}}(K,t)$ с помощью соотношений (2.4), (2.5).

$$\varphi_{\mathrm{E}}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{i\mathbf{kx}} \frac{b_{\mathrm{E}}(K,t)}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})}} dK \tag{2.19}$$

Используя соотношения (2.12), (2.17), (2.2), (2.19), получаем

$$\varphi_{\mathrm{E}}(x) = \hat{\Pi}_+ \varphi(x) + \hat{\Pi}_- \hat{I}_0 \varphi^*(x), \qquad \hat{I}_0 \equiv \left. \hat{I}_y \right|_{y=0} \tag{2.20}$$

где $\hat{\Pi}_+, \hat{\Pi}_+, \hat{I}_y$ суть операторы, действующие на функции от x.

$$\hat{\Pi}_+ = \frac{1}{2\hat{E}}(\hat{E} + i\hat{\partial}_0), \qquad \hat{\Pi}_- = \frac{1}{2\hat{E}}(\hat{E} - i\hat{\partial}_0), \qquad \hat{E} \equiv |(m^2 + \partial_\alpha \partial^\alpha)^{1/2}| \tag{2.21}$$

$$\hat{E}\varphi(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int\int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} E(\mathbf{k})\varphi(t,\mathbf{x}')d\mathbf{k}d\mathbf{x}'$$

и $\hat{I}_y$ есть оператор отражения координат x^i по отношению к точке y^i.

$$\hat{I}_y\varphi(x) = \varphi(2y - x) \tag{2.22}$$

Если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет соотношению (2.1), то операторы $\hat{\Pi}_+$ и $\hat{\Pi}_-$ суть проекционные операторы, обладающие свойствами

$$\hat{\Pi}_+\hat{\Pi}_+\varphi = \hat{\Pi}_+\varphi, \qquad \hat{\Pi}_-\hat{\Pi}_-\varphi = \hat{\Pi}_-\varphi, \qquad \hat{\Pi}_+\hat{\Pi}_-\varphi = \hat{\Pi}_-\hat{\Pi}_+\varphi = 0,$$

$$(\hat{\Pi}_+ + \hat{\Pi}_-)\varphi = \varphi, \qquad \hat{\Pi}_+\hat{I}_y = \hat{I}_y\hat{\Pi}_-, \qquad (\hat{\Pi}_+\varphi)^* = \hat{\Pi}_-\varphi^* \tag{2.23}$$

Из соотношений (2.20) – (2.23) следует

$$\varphi(x) = \hat{\Pi}_+\varphi_{\mathrm{E}}(x) + \hat{\Pi}_-\hat{I}_0\varphi^*_{\mathrm{E}}(x), \tag{2.24}$$

Пусть $\varphi(x)$ квантуется в соответствии с PA-схемой

$$[\varphi(x), \varphi^*(x')]_- = -iD(x - x') \tag{2.25}$$

где $D(x - x')$ коммутационная функция Паули – Йордана в $(n + 1)$-мерном пространстве-времени.

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int \frac{d\mathbf{k}}{\beta(\mathbf{k})} \left(e^{iE(\mathbf{k})x^0 - i\mathbf{kx}} - e^{-iE(\mathbf{k})x^0 - i\mathbf{kx}}\right) = D^+(x) + D^-(x)$$

$$D^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^n i} \int \frac{d\mathbf{k}}{\beta(\mathbf{k})} e^{iE(\mathbf{k})x^0 - i\mathbf{kx}}$$

$$D^-(x) = \frac{i}{(2\pi)^n} \int \frac{d\mathbf{k}}{\beta(\mathbf{k})} e^{-iE(\mathbf{k})x^0 - i\mathbf{kx}} = -D^+(-x)$$

В этом случае $\varphi_{\mathrm{E}}(x)$ квантуется в соответствии с WL-схемой. Коммутационные соотношения имеют вид

$$[\varphi_{\mathrm{E}}(x), \varphi^*_{\mathrm{E}}(x')]_- = D_1(x - x') = i[D^+(x - x') - D^-(x - x')] \tag{2.26}$$

Для нечетного n и $(x - x')^2 < 0$ выполнено условие $D(x - x') = 0$. Однако, функция $D_1(x - x')$ этим свойством не обладает. Принято считать, [7], что нарушение этого свойства ведет к нарушению причинности. Однако, преобразование от PA-схемы к WL-схеме есть только изменение обозначений (2.17), что не может нарушать причинность. Тем не менее это ведет к соотношению (2.26), которое не обращается в нуль при $(x - x')^2 < 0$. Это означает только, что упомянутое свойство является атрибутом PA-схемы квантования (см. также обсуждение этого вопроса в [4]).

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ суть два скаляра. При преобразовании

$$x^i \to \tilde{x}^i = x^i + a^i, \qquad \tilde{x} = x + a, \qquad a^i = \mathrm{const} \tag{2.27}$$

каждый из них преобразуется по закону

$$\varphi(x) \to \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(x) = \varphi(\tilde{x} + a) \tag{2.28}$$

При собственно Лоренцовом преобразовании

$$x^i \to \tilde{x}^i = \Lambda^{i}_{.k} x^k, \qquad \tilde{x} = \Lambda x, \qquad \Lambda^{i}_{.k} g^{kl} \Lambda^{j}_{.l} = g^{ij}, \qquad \Lambda^{0}_{.0} > 0 \tag{2.29}$$

каждый из них преобразуется по закону

$$\varphi(x) \to \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(x) = \varphi(\Lambda^{-1}\tilde{x}), \qquad (\Lambda\Lambda^{-1})^{i}_{.k} = \delta^i_k. \tag{2.30}$$

Тогда величина

$$f_y(x) = \varphi_1(x) + \hat{I}_y \varphi_2(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(2y - x), \tag{2.31}$$

рассматриваемая как функция аргументов x и y, является скаляром

$$f_y(x) \to \tilde{f}_{\tilde{y}}(\tilde{x}) = f_y(x). \tag{2.32}$$

В то же время величина $f_y(x)$, рассматриваемая как функция только от x не является скаляром. Мы будем называть величину (2.31), рассматриваемую как функцию только x, скалярным кентавром с контактной точкой y.

Пусть скаляр φ удовлетворяет уравнению (2.1). Тогда $\hat{\Pi}_+\varphi(x)$ и $\hat{\Pi}_+\varphi^*(x)$ суть скаляры, удовлетворяющие (2.1). Величина $\varphi_{\mathrm{E}}(x)$, определенная соотношением (2.20) есть скалярный кентавр с контактной точкой $y = 0$. Этот скалярный кентавр $\varphi_{\mathrm{E}}(x)$ также удовлетворяет уравнению (2.1).

Если скалярное поле $\varphi(x)$ квантуется по PA-схеме, то $\varphi_{\mathrm{E}}(x)$ есть скалярный кентавр, который квантуется по WL-схеме. Если $\varphi_{\mathrm{E}}(x)$ есть скаляр, который квантуется по WL-схеме, то $\varphi(x)$, определенный соотношением (2.24), есть скалярный кентавр, который квантуется по PA-схеме.

Итак, PA-схема квантования и WL-схема эквивлентны в том смысле, что каждая из них может быть преобразована в другую с помощью замены переменных, но при такой замене переменных скаляр преобразуется в скалярный кентавр и наоборот.

Заметим, что преобразование (2.22) ассоциируется с преобразованием (1.19), а не с преобразованием (1.18), потому что описание поля φ не содержит величины, аналогичной параметру τ в действии (1.6). Учитывая ограничение (1.2), мы вынуждены использовать преобразование, аналогичное (1.19) и использовать различные динамические системы для описания поля φ. В отсутствие электромагнитного поля ($A_i = 0$) действие (1.6), (1.7) инвариантно относительно преобразования (1.19), и можно использовать это преобразование так же как и преобразование (2.12) в случае свободного поля φ. В случае взаимодействия, когда $A_i \neq 0$, действие (1.6), (1.7) неинвариантно относительно преобразования (1.19), это преобразование использовать нельзя. Как мы увидим в четвертом разделе, то же самое относится к нелинейному полю $\varphi(x)$.

3 Модель квантования

Определение 3.1. Модель квантования есть совокупность схемы квантования и наблюдаемых величин, представленных как функции динамических переменных в данной схеме квантования.

При одной и той же схеме квантования могут существовать различные модели квантования. Введем наблюдаемые величины с помощью соответствующих классических величин. Плотность лагранжиана имеет вид

$$L = \varphi_i^* \varphi^i - m^2 \varphi^* \varphi, \qquad \varphi_i \equiv \partial_i \varphi, \qquad \varphi^i \equiv \partial^i \varphi = g^{ik} \varphi_k \tag{3.1}$$

Определим энергию E и импульс P_α соотношениями

$$P_0 = E = \int T_{0.}^{.0} d\mathbf{x}, \qquad P_\alpha = \int T_{\alpha.}^{.0} d\mathbf{x},$$

$$T_{i.}^{.k} = \varphi_i^* \varphi^k + \varphi^{*k} \varphi_i - \delta_i^k L \tag{3.2}$$

Число N СМЛ и электрический заряд Q определяются соотношениями

$$N = -i \int (\dot{\varphi}^* \varphi - \varphi^* \dot{\varphi}) d\mathbf{x}, \qquad Q = eN \tag{3.3}$$

В выражении для энергии-импульса P_i и для заряда Q следует использовать нормальное упорядочение, т.е. любой оператор рождения должен стоять левее всех операторов уничтожения. В WL-схеме оператор φ содержит только операторы уничтожения, а φ^* содержит только операторы рождения. Поэтому выражения (3.1) – (3.3) оказываются нормально упорядоченными автоматически.

Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и квантуется по PA-схеме. Пусть $\varphi_E(x)$ связан с $\varphi(x)$ преобразованием (2.20). Тогда расчет приводит к следующим выражениям для P_i и Q

$$P_0 = E = \int E(\mathbf{k})[c^*(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) + d^*(\mathbf{k})d(\mathbf{k})]dk = \int E(\mathbf{k}) b_{\mathrm{E}}^*(K) b_{\mathrm{E}}(K) dK \tag{3.4}$$

$$P_\alpha = \int k_\alpha [c^*(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) - d^*(\mathbf{k})d(\mathbf{k})]d\mathbf{k} = \int \varepsilon_k k_\alpha b_{\mathrm{E}}^*(K) b_{\mathrm{E}}(K) dK \tag{3.5}$$

$$Q = \int e[c^*(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) - d^*(\mathbf{k})d(\mathbf{k})]d\mathbf{k} = \int e\varepsilon_k b_{\mathrm{E}}^*(K) b_{\mathrm{E}}(K) dK \tag{3.6}$$

Пусть теперь $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и квантуется по WL-схеме. Тогда

$$P_i = \int \varepsilon_k k_i b^*(K) b(K) dK, \qquad k_0 = \varepsilon_k E(\mathbf{k}), \qquad i = 0, 1, \ldots n \tag{3.7}$$

$$Q = \int e\varepsilon_k b^*(K) b(K) dK \tag{3.8}$$

Сравнение соотношений (3.4) – (3.6) с соотношениями (3.7, (3.8) показывает, что при квантовании φ по PA-схеме выражения интегральных величин P_i, Q через операторы b_E^*, b_E имеют тот же вид, что и выражения тех же величин P_i, Q через операторы b^*, b при квантовании φ по WL-схеме. Сформулируем это обстоятельство следующим образом. PA-модель квантования поля φ эквивалентна WL-модели квантования поля φ относительно интегральных величин P_i, Q.

Однако, PA-модель и WL-модель не эквивалентны относительно локальных величин типа плотности тока j^i или тензора энергии-импульса T^{ik}. Например, при квантовании φ по PA-схеме получаем

$$PA: \qquad j^0 = -ie : \dot{\varphi}^*(x)\varphi(x) - \varphi^*(x)\dot{\varphi}(x) :$$

$$= \frac{e}{(2\pi)} \int\limits_{\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{k}d\mathbf{k}'}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})\beta(\mathbf{k}')}} \exp[-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}]$$

$$\times\{[E(\mathbf{k})+E(\mathbf{k}')][b_{\mathrm{E}}^*(1,\mathbf{k},x^0)b_{\mathrm{E}}(1,\mathbf{k}',x^0) - b_{\mathrm{E}}^*(-1,\mathbf{k}',x^0)b_{\mathrm{E}}(-1,\mathbf{k},x^0)]$$
$$+[E(\mathbf{k})-E(\mathbf{k}')][b_{\mathrm{E}}^*(1,\mathbf{k},x^0)b_{\mathrm{E}}^*(-1,\mathbf{k}',x^0) - b_{\mathrm{E}}(-1,\mathbf{k},x^0)b_{\mathrm{E}}(1,\mathbf{k}',x^0)]\} \tag{3.9}$$

Здесь двоеточие ":" означает нормальное упорядочение

При квантовании поля φ по WL-схеме получаем

$$WL: \qquad j^0 = -ie[\dot{\varphi}^*(x)\varphi(x) - \varphi^*(x)\dot{\varphi}(x)]$$

$$= \frac{e}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[\varepsilon_k E(\mathbf{k}) - \varepsilon_{k'}E(\mathbf{k}')]x^0 - i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}\}$$
$$\times \frac{\varepsilon_k E(\mathbf{k}) + \varepsilon_{k'}E(\mathbf{k}')}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})\beta(\mathbf{k}')}} b^*(K)b(K')dKdK' \tag{3.10}$$

Интегрирование соотношений (3.9) и (3.10) по $\mathbf{x}$ приводит к тому же результату (3.6), (3.8).

Определим канонический импульс $p_i = (-H, p_\alpha) = (-H, -\pi_\alpha)$ с помощью соотношения

$$\partial_k\varphi(x) = i\,[\varphi(x), p_k]_- \tag{3.11}$$

Для PA-схемы получаем из соотношений (3.11), (2.9), (2.11) и (2.17)

$$PA: \qquad H = -p_0 = \int E(\mathbf{k})[c^*(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) + d^*(\mathbf{k})d(\mathbf{k})]d\mathbf{k}$$

$$\pi_\alpha = -p_\alpha = \int k_\alpha[c^*(\mathbf{k})c(\mathbf{k}) - d^*(\mathbf{k})d(\mathbf{k})]d\mathbf{k}, \qquad \alpha = 1,2,...n \tag{3.12}$$

При квантовании по WL-схеме из соотношений (3.11), (2.13), (2.15) следует

$$WL: \qquad \pi_i = -p_i = \int k_i b^*(K)b(K)dK, \qquad i = 0,1,...n \tag{3.13}$$

Сравнивая соотношение (3.12) с соотношениями (3.4), (3.5), можно видеть, что условие (1.20) выполнено. Именно оно является критерием PA-подхода.

Из соотношений (3.13) и (3.8) можно видеть, что условие (1.20) выполнено для вкладов с $\varepsilon_k = 1$, и оно не выполняется для вкладов с $\varepsilon_k = -1$.

В классическом случае преобразование от WL-подхода к PA-подходу может быть реализовано с помощью преобразования (1.18), где отражение канонического импульса производится без отражения координат. В квантовой теории для перехода от WL-подхода к PA-подходу приходится использовать преобразование (1.19), где отражение канонического импульса сопровождается отражением координат. Это приводит к преобразованию скаляра в скалярный кентавр.

Ни рассмотрение схем квантования, ни рассмотрение моделей квантования линейного скалярного поля не отвечает на вопрос, какой из двух подходов является правильным. Но этот вопрос должен быть поставлен, потому что оба подхода не могут быть правильными одновременно. Если $\varphi(x)$ и квантование по WL-схеме правильно, то квантование по PA-схеме правильным быть не может, потому что в этом случае $\varphi(x)$ является кентавром. Наоборот, если верно квантование скалярного поля $\varphi(x)$ по PA-схеме, то квантование по WL-схеме не может быть правильным, потому что в этом случае $\varphi(x)$ будет кентавром. По существу проблема сводится к вопросу, как различить между скаляром и скалярным кентавром, поскольку скалярный кентавр есть "испорченный" скаляр.

4 Квантование нелинейного скалярного поля

Рассмотрим квантование заряженного скалярного поля $\varphi(x)$, описываемого плотностью лагранжиана

$$L =: \varphi_i^* \varphi^i - m^2 \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{2} \varphi^* \varphi^* \varphi \varphi : \tag{4.1}$$

$$\varphi = \varphi(x), \qquad \varphi_i \equiv \partial_i \varphi, \qquad \varphi^i \equiv \partial^i \varphi, \qquad x = (t, x).$$

Здесь λ есть постоянная самодействия

Введем переменные $b(K,t), b^*(K,t)$ с помощью соотношений (2.2) – (2.6). Тогда динамическое уравнение для поля φ.

$$(\partial_i \partial^i + m^2) \varphi =: \lambda \varphi^* \varphi \varphi : \tag{4.2}$$

преобразуется в уравнение

$$\dot{b}(K,t) = -i\varepsilon_k E(\mathbf{k}) b(K,t) + : i\lambda \frac{\varepsilon_k g(\mathbf{k},t)}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})}} : \tag{4.3}$$

где

$$g(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int\int \frac{\delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k}')}{\sqrt{\beta(\mathbf{p})\beta(\mathbf{k}')\beta(\mathbf{p}')}} b^*(P,t) b(P',t) b(K',t) dP dP' dK'. \tag{4.4}$$

Двоеточие означает нормальное упорядочение. Выражение между двумя двоеточиями рассматривается как нормально упорядоченное. Поле является скаляром по отношению к преобразованиям группы Пуанкаре, т.е. оно преобразуется в соответствии с соотношениями (2.27) – (2.30).

Пусть поле φ квантуется по WL-схеме. В этом случае двоеточия в (4.3) можно опустить. Предполагается, что вакуумное состояние $\Phi_0 = |0\rangle, \Phi_0^* = \langle 0|$ единственно. Оно определяется соотношениями

$$b(K)|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|b^*(K) = 0, \qquad b(K) \equiv b(K,0). \tag{4.5}$$

Из соотношений (4.3), (4.5) следует

$$\dot{b}(K)|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|\dot{b}^*(K) = 0 \tag{4.6}$$

и, следовательно,

$$b(K,t)|0\rangle = 0, \qquad \varphi(x)|0\rangle = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{4.7}$$

$$\partial_k \varphi(x)|0\rangle = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{4.8}$$

Из соотношений (4.7), (4.8) и определения (3.11) оператора канонического импульса следует, что

$$\partial_k \varphi(x)|0\rangle = i\varphi(x)p_k|0\rangle = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{4.9}$$

Поскольку существует только одно вакуумное состояние, определяемое соотношением (4.5), или (4.8), то из соотношения (4.9) следует, что $p_k|0\rangle$ отличается от $|0\rangle$ только множителем. Это означает, что вакуум $|0\rangle$ является собственным вектором оператора p_k

$$p_k|0\rangle = p'_k|0\rangle \tag{4.10}$$

где p'_k, $(k = 0, 1, ...n)$ суть c-числа.

Предполагается, что вакуумное состояние $|0\rangle$ является инвариантным по отношению к преобразованиям (2.27) – (2.30) группы Пуанкаре. Это предположение совместимо с соотношениями (4.7), (4.8) и динамическими уравнениями. В частности, ваккумное состояние $|0\rangle$ стационарно, как это следует из (4.10).

Пусть теперь поле $\varphi(x)$ квантуется по PA-схеме. Тогда в соответствии с соотношениями (2.12), (2.17)

$$b(\varepsilon_k, \mathbf{k}, t) = b_{\mathrm{E}}^{-\varepsilon_k}(\varepsilon_k, \mathbf{k}, \varepsilon_k t) \tag{4.11}$$

где использованы следующие обозначения

$$b_{\mathrm{E}}^{\varepsilon}(K,t) = \begin{cases} b_{\mathrm{E}}^*(K,t), & \text{если} \quad \varepsilon = 1 \\ b_{\mathrm{E}}(K,t), & \text{если} \quad \varepsilon = -1 \end{cases} \tag{4.12}$$

В терминах переменных b_{E} выражение (4.3) принимает вид

$$\dot{b}_{\mathrm{E}}(K,t) = -i\varepsilon_k E(\mathbf{k}) b_{\mathrm{E}}(K,t) + \frac{i\lambda\varepsilon_k}{(2\pi)^n} \int\int\int \frac{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{r})}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})\beta(\mathbf{p})\beta(\mathbf{q})\beta(\mathbf{r})}}$$

$$\times : b_{\mathrm{E}}^{-\varepsilon_k\varepsilon_p}(\varepsilon_p, \mathbf{p}, \varepsilon_k\varepsilon_p t) b_{\mathrm{E}}^{\varepsilon_k\varepsilon_q}(\varepsilon_q, \mathbf{q}, \varepsilon_k\varepsilon_q t) b_{\mathrm{E}}^{\varepsilon_k\varepsilon_r}(\varepsilon_r, \mathbf{r}, \varepsilon_k\varepsilon_r t) : dPdQdR \tag{4.13}$$

Определение вакуумного вектора $|0\rangle$ имеет вид второго уравнения (2.18). При $t = 0$ из уравнения (4.13) следует

$$\dot{b}_{\mathrm{E}}(K)|0\rangle_{\mathrm{PA}} = \frac{i\lambda\varepsilon_k}{(2\pi)^n} \int\int\int \frac{b_{\mathrm{E}}^*(-\varepsilon_k, \mathbf{p}) b_{\mathrm{E}}^*(\varepsilon_k, \mathbf{q}) b_{\mathrm{E}}^*(\varepsilon_k, \mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{q})}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})\beta(\mathbf{p})\beta(\mathbf{q})\beta(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{q})}} |0\rangle_{\mathrm{PA}} d\mathbf{p}d\mathbf{q} \tag{4.14}$$

Таким образом, вообще говоря

$$\dot{b}_{\mathrm{E}}(K)|0\rangle_{\mathrm{PA}} \neq 0, \tag{4.15}$$

Это означает, что вакуумный вектор $|0\rangle_{\mathrm{PA}}$ не может быть собственным вектором гамильтониана $H = -p_0$, т.е. $|0\rangle_{\mathrm{PA}}$ не является стационарным вектором. Тот факт, что вакуум $|0\rangle_{\mathrm{PA}}$ нестационарен порождает разочарование и неудовлетворенность, потому что это означает трансляционную неинвариантность вакуума $|0\rangle_{PA}$ (смотри обсуждение этого вопроса в разд. 4 работы [8]) и самой PA-схемы квантования. Применительно к уравнению (2.7) PA- и WL-схема эквивалетны, но в применении к уравнению (4.3), (4.4) они неэквивалентны. потому что вид уравнения (4.3) неинвариантен относительно преобразования (4.11). Если выбирать между двумя схемами квантования, то естественно выбрать ту схему, где вакуумное состояние хорошо определено.

Итак, выбрана WL-схема. Далее мы будем иметь дело только со скалярным полем, квантуемым по WL-схеме.

Коммутационные соотношения между динамическими перемнными $b(K,t)$ и $b^*(K',t)$ необходимы для расчета матричных элементов оператора $\mathcal{R}$ между двумя состояниями Φ и Φ'. Любое состояние Φ может быть представлено следующим образом

$$\Phi_l = \sum_{l=0} \Phi_l, \qquad \Phi_l^* = \sum_{l=0} \Phi_l^*, \tag{4.16}$$

где Φ_l есть l-эмлонное состояние, определяемое соотношениями

$$\Phi_l = \frac{1}{\sqrt{l!}} \int f_l(\mathcal{K}^l) B_l^*(\mathcal{K}^l)|0\rangle d\mathcal{K}^l \equiv \int f_l(\mathcal{K}^l)|\mathcal{K}^l\rangle d\mathcal{K}^l$$

$$\Phi_l^* = \frac{1}{\sqrt{l!}} \int \langle 0| f_l^*(\mathcal{K}^l) B_l(\mathcal{K}^l) d\mathcal{K}^l \equiv \int \langle \mathcal{K}^l| f_l^*(\mathcal{K}^l) d\mathcal{K}^l \tag{4.17}$$

где

$$\mathcal{K}^l \equiv \{K_1, K_2, \dots K_l\}, \qquad d\mathcal{K}^l \equiv dK_1 dK_2 \dots dK_l,$$
$$B_l^*(\mathcal{K}^l) \equiv b^*(K_1) b^*(K_2) \dots b^*(K_l), \qquad B_l(\mathcal{K}^l) \equiv b(K_l) b(K_{l-1}) \dots b_1(K), \tag{4.18}$$
$$|\mathcal{K}^l\rangle \equiv B_l^*(\mathcal{K}^l)|0\rangle, \qquad \langle \mathcal{K}^l| \equiv \langle 0|B_l(\mathcal{K}^l)$$

и $f_l(\mathcal{K}^l)$ есть комплексная функция аргументов $K_1, K_2, \dots K_l$. Волновая функция $f_l(\mathcal{K}^l)$ симметрична, если она не изменяется при перестановке любых двух аргументов.

Для расчета $(\Phi, \mathcal{R}\Phi)$ достаточно знать коммутационные соотношения

$$[b(K,t), b^*(K',t')]_- = D(t,t';K,K') \tag{4.19}$$

$$b(K,t)b^*(K',t') = F(t,t';K,K') \tag{4.20}$$

где $D(t,t';K,K')$ и $F(t,t';K,K')$ суть операторы, зависящие от параметров K, K', t, t'. Предполагается, что они являются функциями динамических переменных $b(K), b^*(K)$, расположенных в нормальном порядке, когда в каждом члене операторы рождения $b^*(K)$ расположены левее всех операторов уничтожения $b(K)$. $D(t,t';K,K')$ и $F(t,t';K,K')$ связаны между собой очевидным соотношением

$$F(t,t';K,K') = D(t,t';K,K') + b^*(K',t')b(K,t) \tag{4.21}$$

Определение операторов D и F эквивалентно решению уравнения (4.3). Для расчета матричных элементов коммутационные соотношения $[b(K,t), b(K,t')]_-$, $[b^*(K,t), b^*(K',t')]\_$ не являются необходимыми. Эти коммутационные соотношения важны для рассмотрения тождественности эмлонов.

При определении операторов D и F предполагаются выполненными следующие свойства

I. Соотношения (4.19), (4.20) обладают всеми теми симметриями, что и поле φ

II. Соотношения (4.19), (4.20) совместны с динамическим уравнением (4.3).

III. Соотношения (4.19), (4.20) инвариантны относительно группы Пуанкаре.

IV. Для любого l-эмлонного состояния (4.17) $l = 1, 2, \dots$ скалярное произведение $(\Phi, \Phi) > 0$, если симметричная часть волновой функции $f_l(\mathcal{K}^l)$ отлична от нуля, и $(\Phi, \Phi) = 0$, если волновая функция $f_l(\mathcal{K}^l)$ антисимметрична.

V. Оператор (3.8) имеет только e-кратные собственные значения. В l-эмлонном состоянии собственные значения оператора Q/e равны $-l, -l+2, \dots l$.

VI. При $t = t'$ в пределе $\lambda \to 0$ коммутационные соотношения (4.19) превращаются в (2.15).

Из соотношения (4.20) следует

$$F(t,t';K,K') = F^*(t',t;K',K) \tag{4.22}$$

Поскольку левая часть равенства (4.20) инвариантна относительно преобразования

$$b(K,t) \to \tilde{b}(K,t) = b(K,t)e^{i\alpha}, \qquad \alpha = \mathrm{const}$$
$$b^*(K,t) \to \tilde{b}^*(K,t) = b^*(K,t)e^{-i\alpha}, \tag{4.23}$$

то оператор F имеет вид

$$F(t,t';K,K') = F_0(t,t';K,K') +$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \int\int F_l(t,t';K,K';\mathcal{P}^l,\mathcal{P}'^l) B_l^*(\mathcal{P}^l) B_l(\mathcal{P}'^l) d\mathcal{P} d\mathcal{P}'^l \tag{4.24}$$

где $F_l(t,t';K,K';\mathcal{P}^l,\mathcal{P}'^l)$ $l=0,1,2,\ldots$ суть некоторые c-числовые функции своих аргументов. Вид функций определяется условиями II-VI. Разложение оператора D имеет аналогичный вид.

Дифференцируя уравнение (4.20) по t и используя соотношение (4.3), получаем интегро-дифференциальное уравнение для определения $F(t,t';K,K')$

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,t';K,K') = -i\varepsilon_k E(k)F(t,t';K,K')$$
$$+\frac{i\lambda\varepsilon_k}{(2\pi)^n}\int\int\int \frac{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{k}''-\mathbf{p}'')}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})\beta(\mathbf{p})\beta(\mathbf{k}'')\beta(\mathbf{p}'')}} b^*(P,t)b(P'',t)F(t,t';K'',K')dK''dP''dP \tag{4.25}$$

Выражение для $\partial F/\partial t'$ получается из (4.25) с помощью эрмитова сопряжения и подстановки $t\leftrightarrow t'$, $K\leftrightarrow K'$.

Возьмем матричный элемент $\langle 0|\ldots|0\rangle$ от уравнения (4.25) и аналогичного уравнения для $\partial F/\partial t'$. Получаем

$$\frac{\partial F_0}{\partial t}(t,t';K,K') = -i\varepsilon_k E(k)F_0(t,t';K,K')$$
$$\frac{\partial F_0}{\partial t'}(t,t';K,K') = i\varepsilon_{k'} E(k)F_0(t,t';K,K') \tag{4.26}$$

Принимая во внимание условия III$-V$, заключаем, что решение этих уравнений единственно и имеет вид [4]

$$D_0(t,t';K,K') = F_0(t,t';K,K') = \delta(K-K')e^{-i\varepsilon_k E(k)(t-t')} \tag{4.27}$$

Это согласуется с коммутационными соотношениями (2.15) для свободного поля, квантуемого по WL-схеме.

Возьмем матричный элемент $\langle P|\ldots|P'\rangle$ от уравнения (4.25). Используя (4.27), получаем тогда

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,t';K,K';P,P') = -i\varepsilon_k E(k)F_1(t,t';K,K';P,P')$$
$$+\frac{i\lambda\varepsilon_k}{(2\pi)^n}\int\int\int \frac{\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{k}''-\mathbf{p}'')}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})\beta(\mathbf{p})\beta(\mathbf{k}'')\beta(\mathbf{p}'')}} e^{i[\varepsilon_p E(\mathbf{p})-\varepsilon_{p''}E(\mathbf{p}'')]t}$$
$$\times F_1(t,t';K'',K';P'',P')dK''dP'' \tag{4.28}$$

Вычисляя матричные элементы $\langle\mathcal{P}^l|\ldots|\mathcal{P}'^l\rangle$ $(l=2,3,\ldots)$ от уравнения (4.25), получаем цепь интегро-дифференциальных уравнений для определения функций $F_2,F_3,\ldots$ Уравнение l-ого порядка линейно относительно функций F_l. Коэффициенты этого уравнения содержат функции F_{l-1},F_{l-2},... которые определяются из предыдущих уравнений цепи.

Для решения уравнения (4.28) удобно ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} -w &= \{P,K\}\equiv\{\mathbf{s},-u\}, \qquad -u=\{\varepsilon_p,\varepsilon_k,-\mathbf{q}/2\}, \qquad \mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{p} \\ w &= \{K,P\}\equiv\{\mathbf{s},u\}, \qquad u=\{\varepsilon_k,\varepsilon_p,\mathbf{q}/2\}, \qquad \mathbf{s}=\mathbf{k}+\mathbf{p} \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$
\begin{aligned}
-w' &= \{P', K'\} \equiv \{\mathbf{s}', -u'\}, \qquad u' = \{\varepsilon_{p'}, \varepsilon_{k'}, -\mathbf{q}'/2\}, \qquad \mathbf{q}' = \mathbf{k}' - \mathbf{p}' \\
w' &= \{K', P'\} \equiv \{\mathbf{s}', u'\}, \qquad u' = \{\varepsilon_{k'}, \varepsilon_{p'}, \mathbf{q}'/2\}, \qquad \mathbf{s}' = \mathbf{k}' + \mathbf{p}' \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int (.) dw &\equiv \int\int (.) dK dP \equiv \int\int (.) d\mathbf{s} du, \\
\int (.) du &\equiv 2^{-n} \sum_{\varepsilon_k, \varepsilon_p = \mp 1} \int_{-\infty}^{\infty} (.) d\mathbf{q} \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(w - w') \equiv \delta(K - K')\delta(P - P') \equiv \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}')\delta(u - u') \\
\delta(w + w') \equiv \delta(K - P')\delta(P - K') \equiv \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}')\delta(u + u') \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Полагая

$$
\begin{aligned}
F_1(t, t'; K, K', P, P') = e^{-i\varepsilon_k E(\mathbf{k})t + i\varepsilon_{k'} E(\mathbf{k}')t'} D_1'(t, t'; w, w') \\
- e^{-i\varepsilon_p E(\mathbf{p})(t - t')} \delta(w - w') \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

получаем из (4.28)

$$
\frac{\partial D_1'}{\partial t}(t, t'; w, w') = i\lambda \int \mathcal{K}(w, w'') e^{i[\omega(w) - \omega(w''))]t} D_1'(t, t'; w'', w') dw''
$$

$$
\frac{\partial D_1'}{\partial t'}(t, t'; w, w') = -i\lambda \int \mathcal{K}(w', w'') e^{i[\omega(w') - \omega(w'')]t} D_1'(t, t'; w, w'') dw'' \qquad (4.34)
$$

где использованы следующие обозначения

$$
\mathcal{K}(w, w') = (2\pi)^{-n} \eta_1(w) \eta_2(w') \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}'), \qquad \eta_1(w) \equiv \zeta_1(u, \mathbf{s}) = \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})\beta(\mathbf{p})}}, \quad (4.35)
$$

$$
\eta_2(w) \equiv \zeta_2(u, \mathbf{s}) = \frac{1}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})\beta(\mathbf{p})}}, \qquad \omega(w) = \omega_1(u, \mathbf{s}) \equiv \varepsilon_k E(\mathbf{k}) + \varepsilon_p E(\mathbf{p}) \quad (4.36)
$$

Решение уравнения (4.34) можно получить в виде

$$
D_1'(t, t'; w, w') = \int\int \kappa_{\overline{w}}^{(+)}(w) e^{i[\omega(\overline{w}) - \omega(w)]t} B_{\overline{w}\overline{w}'} \kappa_{\overline{w}}^{(-)}(w') e^{-i[\omega(\overline{w}') - \omega(w')]t'} d\overline{w} d\overline{w}' \qquad (4.37)
$$

Здесь $\overline{w}$ и $\overline{w}'$ маркируют собственные функции $\kappa_{\overline{w}}^{(\pm)}(w)$ уравнения с собственными значениями $\omega(\overline{w})$

$$
[\omega(\overline{w}) - \omega(w)] \kappa_{\overline{w}}^{(\pm)}(w) + \lambda \int \mathcal{K}(w, w') \kappa_{\overline{w}}^{(\pm)}(w') dw' = 0 \qquad (4.38)
$$

и $B_{\overline{w}\overline{w}'}$ есть некоторая функция аргументов $\overline{w}, \overline{w}'$. Интеграл по $\overline{w}$ включает суммирование по дискретному спектру и интегрирование по непрерывному спектру.

Для определения собственных $\kappa^{(\pm)}$ функций важны следующие интегралы

$$I^{(\pm)}(\omega, \mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\eta_1(w)\eta_2(w)\delta(\mathbf{s}-\mathbf{k}-\mathbf{p})}{\omega - \omega(w) \pm i0} dw \tag{4.39}$$

Здесь символ ± 0 определяет обход полюсов подынтегрального выражения. Это означает $\pm i\varepsilon$, $\varepsilon \to +0$.

Как показано в [4], интегралы $I^{(\pm)}(\omega, \mathbf{s})$ зависят только от аргумента $z = \gamma^2 = \omega^2 - s^2$. Они являются аналитическим функциями z на комплексной плоскости z с разрезом вдоль вещественной оси $[4m^2, +\infty)$. $I^{(\pm)}$ суть значения интеграла $I(\gamma)$ на разных берегах разреза.

Положим

$$\Delta(z) = 1 + \lambda I(\omega, \mathbf{s}), \qquad z = \omega^2 - s^2 = \gamma^2 \tag{4.40}$$

Вычисления [4] дают следующее выражение $\Delta(z)$ для различных значений размерности n конфигурационного пространства

$$n = 1, \qquad \Delta_1(z) = 1 - \frac{\lambda}{\pi\gamma\sqrt{4m^2-\gamma^2}} \arctan \frac{\gamma}{\sqrt{4m^2-\gamma^2}}, \qquad \gamma = \sqrt{z} \tag{4.41}$$

$$n = 2, \qquad \Delta_2(z) = 1 - \frac{\lambda}{8\pi\gamma} \log \frac{2m+\gamma}{2m-\gamma}, \qquad \gamma = \sqrt{z} \tag{4.42}$$

Для $n = 3$ инеграл (4.39) расходится. Он может быть представлен в виде

$$\Delta_3(z) = 1 - \frac{\lambda}{8\pi^2} \left\{ \frac{\sqrt{4m^2-\gamma^2}}{\gamma} \arctan \frac{\gamma}{\sqrt{4m^2-\gamma^2}} + \lim_{\mu \to +\infty} \log \frac{\mu + \sqrt{4m^2+\mu^2}}{2m} \right\} \tag{4.43}$$

Значения частот $\omega = \pm\sqrt{4m^2 + \mathbf{s}^2} \geq 0$ на берегах разреза определяют непрерывный спектр уравнения (4.38). Корни $z = M^2$ функции $\Delta(z)$ определяют дискретный спектр $\omega = \pm\sqrt{4m^2 + \mathbf{s}^2}$. Анализ показывает [4], что $\Delta(z)$ не имеет корней или имеет один корень в зависимости от значения λ. Корень лежит в интервале $0 \leq M^2 < 4m^2$.

Параметр $\overline{w}$, маркирующий функции $\kappa^{(\pm)}_{\overline{w}}(w)$ может быть представлен следующим образом

$$\overline{w} = \{(\overline{K}, \overline{P}), \overline{S}\}, \qquad \overline{S} = \{\varepsilon_{\overline{s}}, \overline{\mathbf{s}}\}, \qquad \varepsilon_{\overline{s}} = \pm 1 \tag{4.44}$$

$$\omega(\overline{w}) = \{\omega(\overline{K}, \overline{P}), \omega(\overline{S})\}, \qquad \omega(\overline{K}, \overline{P}) = \varepsilon_{\overline{k}} E(\overline{\mathbf{k}}) + \varepsilon_{\overline{p}} E(\overline{\mathbf{p}}) \quad \text{для } \overline{w} = (\overline{K}, \overline{P}) \tag{4.45}$$

$$\omega(\overline{w}) = \omega(\overline{S}) = \varepsilon_{\overline{s}} E_M(\overline{\mathbf{s}}) \quad \text{для} \quad \overline{w} = \overline{S} = \{\varepsilon_{\overline{s}}, \overline{\mathbf{s}}\} \tag{4.46}$$

где

$$\beta_M(\mathbf{s}) = 2E_M(\mathbf{s}) = 2\left|\sqrt{M^2 + \mathbf{s}^2}\right|, \qquad \varepsilon_s = \pm 1 \tag{4.47}$$

M^2 есть корень функции $\Delta(z)$. Величина $\varepsilon_s = \pm 1$ маркирует состояния дискретного спектра.

Для $\overline{w} = \{\overline{K}, \overline{P}\}$ собственные функции уравнения (4.38) имеют вид

$$\kappa_{\overline{w}}^{(\pm)}(w) = \kappa_{\overline{KP}}^{(\pm)}(K,P) = \delta(w-\overline{w}) - \frac{\lambda}{(2\pi)^n}\frac{\eta_1(w)\eta_2(\overline{w})\delta(\mathbf{s}-\overline{\mathbf{s}})}{[\omega(\overline{w})-\omega(w)\pm i0]\Delta_\pm(\overline{w})} \tag{4.48}$$

где

$$\Delta_\pm(\overline{w}) = 1 + \lambda I^{(\pm)}(\omega(\overline{w}), \overline{\mathbf{s}}), \qquad \overline{\mathbf{s}} = \overline{\mathbf{k}} + \overline{\mathbf{p}} \tag{4.49}$$

Для дискретного спектра $\overline{w} = \overline{S}$, имеем

$$\kappa_{\overline{w}}^{(\pm)}(w) = \kappa_{\overline{S}}^{(\pm)}(K,P) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n B}}\frac{\varepsilon_s\eta_2(w)\delta(\mathbf{s}-\overline{\mathbf{s}})}{\sqrt{\beta_M(\mathbf{s})}[\omega(\overline{S})-\omega(w)]} \tag{4.50}$$

$$B = \left|\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Delta(z)}{\partial z}\right|_{z=M^2} \tag{4.51}$$

Уравнение (4.38) не является самосопряженным. Сопряженное уравнение имеет вид

$$[\omega(\overline{w})-\omega(w)]\overline{\kappa}_{\overline{w}}^{(\pm)}(w) + \lambda\int \mathcal{K}(w',w)\overline{\kappa}_{\overline{w}}^{(\pm)}(w')dw' = 0 \tag{4.52}$$

Здесь $\overline{\kappa}_{\overline{w}}^{(\pm)}(w)$ суть функции, сопряженные к $\kappa_{\overline{w}}^{(\pm)}(w)$. $\overline{\kappa}_{\overline{w}}^{(\pm)}(w)$ получаются из $\kappa_{\overline{w}}^{(\pm)}(w)$ заменой $\eta_1 \leftrightarrow \eta_2$, т.е.

$$\overline{\kappa}_{\overline{w}}^{(\pm)}(w) = \varepsilon_{\overline{k}}\varepsilon_k\kappa_{\overline{w}}^{(\pm)}(w) \quad \text{для} \quad \overline{w} = (\overline{K}, \overline{P})$$

$$\overline{\kappa}_{\overline{S}}^{(\pm)}(w) = \varepsilon_{\overline{S}}\varepsilon_k\kappa_{\overline{w}}^{(\pm)}(w) \quad \text{для} \quad \overline{w} = \overline{S} \tag{4.53}$$

Каждый из наборов $\kappa_{\overline{w}}^{(+)}$ и $\kappa_{\overline{w}}^{(-)}$ является полным и удовлетворяет соотношениям

$$\int \overline{\kappa}_{\overline{w}}^{(\pm)}(w)\kappa_{\overline{w}'}^{(\mp)}(w)dw = \delta(\overline{w}-\overline{w}') \tag{4.54}$$

$$\int \overline{\kappa}_{\overline{w}}^{(\pm)}(w)\kappa_{\overline{w}}^{(\mp)}(w')d\overline{w} = \delta(w-w') \tag{4.55}$$

где

$$\delta(\overline{w}-\overline{w}') = \{\delta(\overline{K}-\overline{K}')\delta(\overline{P}-\overline{P}'), \delta(\overline{S}-\overline{S}')\} \tag{4.56}$$

Интеграл по $\overline{w}$ включает интегрирование по всем непрерывным и дискретным состояниям

$$\int(.)d\overline{w} = \int(.)d\overline{K}d\overline{P} + \int(.)d\overline{S} \tag{4.57}$$

Кроме того используются следующие аналогичные (4.29) обозначения

$$\overline{w} = \{(\overline{K},\overline{P}),\overline{S}\}, \qquad -\overline{w} = \{(\overline{P},\overline{K}),\overline{S}\},$$

$$\delta(\overline{w}+\overline{w}') = \{\delta(\overline{K}-\overline{P}')\delta(\overline{P}-\overline{K}'), \delta(\overline{S}-\overline{S}')\} \tag{4.58}$$

Связанное состояние возникает только при определенном значении λ. Результат зависит от размерности n. При $n = 1$ $\Delta_1(z)$ имеет один корень, если $0 < \lambda < 4\pi m^2$. Корней нет, если $\lambda < 0 \vee \lambda > 4\pi m^2$. При $n = 2$ функция $\Delta_2(z)$ имеет один корень, если $0 < \lambda < 8\pi m$. Корней нет, если $\lambda \leq 0 \vee \lambda > 8\pi m$. При $n = 3$ λ есть безразмерная постоянная. Корней нет для любого значения λ за исключением случая, когда λ есть бесконечно малая величина и $\lambda > 0$. Если λ зависит от μ таким образом, что

$$\lim_{\mu\to+\infty}\left[\frac{\lambda}{8\pi}\log\left(\frac{\mu}{8\pi}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4m^2}+1}\right)-1\right]=+0 \tag{4.59}$$

то существует связанное состояние, описываемое соотношением (4.50). Это не зависит ни от λ, ни от расходящейся части уравнения (4.43). Но масса M связанного состояния не может быть определена из уравнения (4.43). Ее следует задать независимо.

Решение (4.37) уравнения (4.34), удовлетворяющее условиям III-V имеет вид

$$D_1'(t,t';w,w') = \int \kappa_{\overline{w}}^{(+)}(w)e^{i[\omega(\overline{w})-\omega(w)]t}[\kappa_{\overline{w}}^{(-)}(w')+\kappa_{-\overline{w}}^{(-)}(w')]e^{-i[\omega(\overline{w})-\omega(w')]t'}d\overline{w} \tag{4.60}$$

Тогда из уравнений (4.21), (4.33) следует

$$D_1(t,t';w,w') = [D_1'(t,t';w,w') - \delta(w-w') - \delta(w+w')]e^{-i\varepsilon_k E(\mathbf{k})t + i\varepsilon_{k'}E(\mathbf{k}')t'} \tag{4.61}$$

При $t = t' = 0$ и $\lambda = 0$ одновременны́е перестановочные соотношения (4.19) принимают вид

$$[b(K), b^*(K')]_- = \delta(K-K') + O_{2,2} \tag{4.62}$$

где использованы обозначения

$$O_{k,l} = \sum_{s=0}^{\infty}\int\int f_{k+s,l+s}(\mathcal{K}^{k+s},\mathcal{K}'^{l+s})B^*_{k+s}(\mathcal{K}^{k+s})B_{l+s}(\mathcal{K}'^{l+s})d\mathcal{K}^{k+s}d\mathcal{K}'^{l+s} \tag{4.63}$$

$f_{k+s,l+s}$ есть некоторая функция аргументов $\mathcal{K}^{k+s}, \mathcal{K}'^{l+s}$.

В двухэмлонном случае, где получены уравнения (4.62), соотношения (4.62) совпадают с (2.15) при $\lambda = 0$. Но при $\lambda \neq 0$ одновременны́е перестановочные соотношения не совпадают со свободными одновременны́ми перестановочными соотношениями. (2.15).

Попытка использовать одновременны́е перестановочные соотношения (2.15) как начальные условия для решения системы (4.34) приводит к результату (4.37) с величиной $B_{\overline{w}\overline{w}'}$, которая определяется выражением

$$B_{\overline{w}\overline{w}'} = \int \overline{\kappa}_{\overline{w}}^{(-)}(w)[\overline{\kappa}_{\overline{w}'}^{(+)}(w) + \overline{\kappa}_{\overline{w}'}^{(+)}(-w)]dw \tag{4.64}$$

В явном виде выражение (4.64) записывается для $\overline{w} = \{\overline{K}, \overline{P}\}, \quad \overline{w}' = \{\overline{K}', \overline{P}'\}$

$$B_{\overline{w}\overline{w}'} = \delta(\overline{w}-\overline{w}') + \delta(\overline{w}+\overline{w}')\frac{\lambda}{(2\pi)^n}\frac{\eta_2(\overline{w})\eta_2(\overline{w}')\delta(\overline{\mathbf{s}}-\overline{\mathbf{s}}')}{[\omega(\overline{w})-\omega(\overline{w}')\pm i0]\Delta_+(\overline{w}')\Delta_-(\overline{w})}$$

$$\times\{2\varepsilon_{\overline{k}}\Delta_+(\overline{w}')-2\varepsilon_{\overline{k}'}\Delta_+(\overline{w})-(\varepsilon_{\overline{k}'}+\varepsilon_{\overline{k}})[\tilde{\Delta}_+(\overline{w}')-\tilde{\Delta}_+(\overline{w})]\} \tag{4.65}$$

где

$$\tilde{\Delta}_\pm(\overline{w})=1+\lambda\tilde{I}^\pm(\omega(\overline{w}),\mathbf{s})$$

$$\tilde{I}^{(\pm)}(\omega,\mathbf{s})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\frac{\eta_2^2(w)\delta(\mathbf{s}-\mathbf{k}-\mathbf{p})}{\omega-\omega(w)\pm i0}dw \tag{4.66}$$

Функции η_2, $\omega(\overline{w})$ определяются соотношением (4.36). Функции $\Delta_\pm$ определяются соотношениями (4.39), (4.49). Предполагается, что коммутационные соотношения являются трансляционно инвариантными. Если это условие выполнено (условие III), то функция F_1, заданная соотношениями (4.33), (4.37), (4.65) должна зависеть только от разности $t-t'$, и $B_{\overline{w}\overline{w}'}$ должно содержать фактор $\delta[\omega(\overline{w})-\omega(\overline{w}')]$. Легко проверить, что это возможно лишь в том случае, когда $\lambda=0$, т.е. для свободного поля.

Таким образом, при квантовании по WL-схеме традиционная форма одновременны́х перестановочных соотношений оказывается несовместной с трансляционной инвариантностью. Она не может использоваться при квантовании нелинейного поля по WL-схеме.

При квантовании *по WL-схеме одновременны́е перестановочные соотношения зависят, вообще говоря, от λ.*

Замечание. Выражение для функции D_1' может быть взято в виде

$$D_1'(t,t';w,w')=\int\kappa_{\overline{w}}^{(-)}(w)e^{i[\omega(\overline{w})-\omega(w)]t}[\kappa_{\overline{w}}^{(+)}(w')+\kappa_{-\overline{w}}^{(+)}(w')]e^{-i[\omega(\overline{w})-\omega(w')]t'}d\overline{w} \tag{4.67}$$

Выражение для D_1', полученное из соотношения (4.60) заменой $\kappa^{(+)}\to\kappa^{(-)}$, $\kappa^{(-)}\to\kappa^{(+)}$ удовлетворяет условиям II-VI.

5 Свободные поля

Пусть $\mathcal{H}_2$ есть гильбертово пространство состояний, содержащих не более двух эмлонов, т.е. $\mathcal{H}_2$ состоит из векторов вида (4.17) с $l\le 2$. Двухэмлонные состояния $|K,P\rangle$ не ортогональны. В самом деле, в силу соотношений (4.33), (4.60) одновременны́е перестановочные соотношения (4.20) принимают вид

$$b(K)b^*(K')=\delta(K-K')[1-\int b^*(P)b(P)dP$$

$$+\int\int D_1'(K,P;K',P')b^*(P)b(P')dPdP']+O_{2,2} \tag{5.1}$$

где

$$D_1'(K,P;K'P')=D_1'(0,0;w,w') \tag{5.2}$$

и $O_{2,2}$ определяется соотношением (4.63). Тогда

$$\langle w'|w\rangle\equiv\langle P',K'|K,P\rangle\equiv\frac{1}{2}\langle 0|b(P')b(K')b^*(K)b^*(P)|0\rangle=\frac{1}{2}D_1'(K,P;K'P') \tag{5.3}$$

что отличается от $[\delta(w'-w)+\delta(w+w')]/2$, если $\lambda \neq 0$.

Введем ортонормированные состояния $|\overline{w}\rangle_+$, $|\overline{w}\rangle_-$, определив их соотношениями

$$|\overline{w}\rangle_\alpha = \{|\overline{K},\overline{P}\rangle_\alpha, |\overline{S}\rangle_\alpha\}, \qquad \alpha = \pm \tag{5.4}$$

$$|\overline{K},\overline{P}\rangle_\alpha = \iint \overline{\kappa}^{(\alpha)}_{\overline{K},\overline{P}}(K,P)|K,P\rangle dKdP = \int \kappa^{(\alpha)}_{\overline{w}}(w)|w\rangle dw, \qquad \alpha = \pm \tag{5.5}$$

$$|S\rangle_\alpha = \iint \overline{\kappa}_{\overline{S}}(K,P)|K,P\rangle dKdP, \qquad \alpha = \pm \tag{5.6}$$

Волновые функции $f(K,P)$,

$$\psi_{(+)}(\overline{w}) = \{\psi_{(+)}(\overline{K},\overline{P}),\psi(S)\}, \quad \psi_{(-)}(\overline{w}) = \{\psi_{(-)}(\overline{K},\overline{P}),\psi(S)\}$$

состояния Φ_2 определяются в этих трех предствлениях с помощью соотношений

$$\Phi_2 = \int f(w)|w\rangle dw = \int \psi_{(+)}(\overline{w})|\overline{w}\rangle_+ d\overline{w} = \int \psi_{(-)}(\overline{w})|\overline{w}\rangle_- d\overline{w}. \tag{5.7}$$

Они связаны между собой посредством соотношений

$$\psi_{(\pm)}(\overline{w}) = \int \kappa^{(\mp)}_{\overline{w}}(w)f(w)d\overline{w},$$

$$f(w) = \int \overline{\kappa}^{(\pm)}_{\overline{w}}(w)\psi_{(\pm)}(\overline{w})d\overline{w}, \tag{5.8}$$

$$\psi_{(\alpha)}(\overline{w}) = \int \Omega^{(-\alpha)}(w)\psi_{(-\alpha)}(\overline{w}')d\overline{w}', \qquad \alpha = \pm,$$

где

$$\Omega^{(\pm)}(\overline{w},\overline{w}') = \int \overline{\kappa}^{(\pm)}_{\overline{w}}(w)\kappa^{(\pm)}_{\overline{w}'}(w)dw,$$

$$\Omega^{(\pm)}(\overline{K},\overline{P};\overline{K}'\overline{P}') = \delta(\overline{w}-\overline{w}') \pm \frac{i\lambda}{(2\pi)^{n-1}}\frac{\varepsilon_{\overline{k}}\eta_2(\overline{w})\eta_2(\overline{w}')}{\Delta_\pm(\overline{w})}\delta[\omega(\overline{w})-\omega(\overline{w}')]$$
$$\times\delta(\overline{\mathbf{k}}+\overline{\mathbf{p}}-\overline{\mathbf{k}}'-\overline{\mathbf{p}}'), \tag{5.9}$$
$$\Omega^{(\pm)}(\overline{S};\overline{S}') = \delta(\overline{S}-\overline{S}'),$$
$$\Omega^{(\pm)}(\overline{K},\overline{P};\overline{S}') = \Omega^{(\pm)}(\overline{S};\overline{K},\overline{P}) = 0.$$

Здесь верхние и нижние знаки берутся одновременно.

Можно усмотреть из соотношений (5.8), что симметризация любой из волновых функций $f(w)$, $\psi_{(\pm)}(\overline{w})$, $\psi_{(-)}(\overline{w})$ приводит к симметризации остальных волновых функций, т.е. выполнение любого из равенств

$$f(w) = f(-w), \qquad \psi_{(+)}(\overline{w}) = \psi_{(+)}(-\overline{w}),$$

$$\psi_{(-)}(\overline{w}) = \psi_{(-)}(-\overline{w}) \tag{5.10}$$

приводит к выполнению двух остальных.

Волновая функция тождественных эмлонов должна быть симметричной. В КТП симметричные волновые функции возникают как результат коммутативности всех операторов рождения (2.15). Это приводит к отождествлению состояний $|K,P\rangle$ и $|P,K\rangle$ в виде

$$|K,P\rangle - |P,K\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[b^*(K)b^*(P) - b^*(P)b^*(K)]|0\rangle = 0 \tag{5.11}$$

Однако, это возможно только для свободного поля. В самом деле, свертывая соотношение (5.11) с вектором состояния $\langle P',K'|$, получаем при помощи уравнений (5.3) и (4.60)

$$D_1'(w',w) - D_1'(w',-w) = 0 \tag{5.12}$$

Для $\varepsilon_k = -\varepsilon_p$ соотношение (5.12) выполняется только при $\lambda = 0$.

Введем операторы свободных полей $b_0(K,t)$, $b_1(S,t)$, $b_0^*(K,t)$, $b_1^*(S,t)$, определив их соотношениями

$$b_0(K,t)|0\rangle = b_1(K,t)|0\rangle = 0 \tag{5.13}$$

$$b_0^*(K,t)|0\rangle = b^*(K,t)|0\rangle \tag{5.14}$$

$$b_0^*(\overline{K},t)b_0^*(\overline{P},t)|0\rangle = \int\int \overline{\kappa}^{(+)}_{\overline{K},\overline{P}}(K,P)b^*(K,t)b^*(P,t)|0\rangle dKdP \tag{5.15}$$

$$b_1^*(\overline{S},t)|0\rangle = \int\int \overline{\kappa}_{\overline{S}}(K,P)b^*(K,t)b^*(P,t)|0\rangle dKdP \tag{5.16}$$

Решение уравнений (5.13) – (5.16) может быть представлено в виде

$$b_0(K,t) = b(K,t) + \int\int\int \overline{\mu}^{(-)}_{K,P}(K',P')b^*(P,t)b(P',t)b(K',t)dK'dP'dP + O_{2,3} \tag{5.17}$$

$$b_1(S,t) = \int\int \overline{\mu}_S(K',P')b(P',t)b(K',t)dK'dP' + O_{1,3} \tag{5.18}$$

где

$$\begin{aligned}\overline{\mu}^{(\pm)}_{\overline{K},\overline{P}}(K,P) = \overline{\kappa}^{(\pm)}_{\overline{K},\overline{P}}(K,P) - \delta(\overline{K}-K)\delta(\overline{P}-P) = \\ -\frac{\lambda}{(2\pi)^n}\frac{\eta_1(\overline{w})\eta_2(w)\delta(\mathbf{s}-\overline{\mathbf{s}})}{[\omega(\overline{w})-\omega(w)\pm i0]\Delta_\pm(\overline{w})}\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\overline{\mu}_{\overline{S}}(K,P) = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\kappa}_{\overline{S}}(K,P) = \frac{\varepsilon_s\eta_2(w)\delta(\mathbf{s}-\overline{\mathbf{s}})}{\sqrt{(2\pi)^n B}\sqrt{\beta_{\mathrm{M}}(\mathbf{s})}[\omega(\overline{S})-\omega(w)]} \tag{5.20}$$

где B определяется соотношением (4.51).

Обратные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}b(K,t) &= b_0(K,t) + \int\int \mu^{(+)}_{K',P'}(K,P)b_0^*(P,t)b_0(P',t)b_0(K',t)dK'dP'dP \\ &+ \int\int \mu_S(K,P)b_0^*(P,t)b_1(K,t)dSdP + O_{2,3}\end{aligned} \tag{5.21}$$

где
$$\mu^{(\pm)}_{\overline{K},\overline{P}}(K,P)=\kappa^{(\pm)}_{\overline{K},\overline{P}}(K,P)-\delta(\overline{K}-K)\delta(\overline{P}-P) \qquad (5.22)$$
$$\mu_{\overline{S}}(K,P)=\sqrt{2}\kappa_{\overline{S}}(K,P) \qquad (5.23)$$
и соотношения для b_0^*, b_1^*, b^* получаются из соотношений (5.17), (5.18), (5.21) с помощью эрмитова сопряжения.

Пусть коммутационные соотношения имеют вид (5.1), где D_1' определяется соотношением (4.60). Тогда расчет дает
$$[b_0(K,t),b_0^*(K',t)]_-=\delta(K-K')+O_{2,2} \qquad (5.24)$$
$$b_0(K,t)b_1^*(K',t)=O_{2,1} \qquad (5.25)$$
$$b_1(K,t)b_0^*(K',t)=O_{1,2} \qquad (5.26)$$
$$b_1(K,t)b_1^*(K',t)=\delta(K-K')+O_{2,2} \qquad (5.27)$$
Дифференцируя соотношения (5.17), (5.18) по t и используя соотношения (4.3), (4.4), (5.1), получаем
$$\dot{b}_A(K,t)=-i\varepsilon_k E_A(\mathbf{k})b_A(K,t)+O_{2-A,3}, \qquad A=0,1 \qquad (5.28)$$
$$E_A(k)=|\sqrt{m_A^2+\mathbf{k}^2}|, \qquad m_0=m, \qquad m_1=M, \qquad A=0,1 \qquad (5.29)$$
Введем поля $\varphi_A(x)=\varphi_A(\mathbf{x},t)$, $A=0,1$, определив их соотношениями вида (2.4), (2.5)
$$\varphi_A(\mathbf{x},t)=(2\pi)^{-n/2}\int e^{i\mathbf{kx}}\frac{b_A(K,t)}{\sqrt{\beta_A(\mathbf{k})}}dK, \qquad \beta_A(\mathbf{k})=2E_A(\mathbf{k}), \qquad A=0,1 \quad (5.30)$$
$$\dot{\varphi}_A(\mathbf{x},t)=\frac{\partial\varphi_A}{\partial t}=-i(2\pi)^{-n/2}\int\frac{\varepsilon_k}{2}\sqrt{\beta_A(\mathbf{k})}e^{i\mathbf{kx}}b_A(K,t)dK, \qquad A=0,1 \quad (5.31)$$
Тогда в соответствии с соотношением (5.23) поля $\varphi_A(x)$ удовлетворяют динамическим уравнениям
$$(\partial_i\partial^i+m_A^2)\varphi_A=O_{2-A,3}, \qquad A=0,1 \qquad (5.32)$$
Другими словами, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_2$ поля $\varphi_A(x)$, $A=0,1$ суть свободные невзаимодействующие поля массы m_A.

Используя трансформационные свойства поля φ и соотношения (5.17), (5.18), можно показать, что поля φ_0,φ_1 суть скаляры. Итак, нелинейное поле φ может описываться с помощью двух свободных скалярных полей φ_0,φ_1 с точностью до $O_{2,3}$.

В случае перестановочных соотношений (5.24) – (5.27) гамильтониан $H=-p_0$ и канонический импульс $\pi_\alpha=-p_\alpha$, определяемый соотношением (3.11), имеют следующий вид
$$H=\sum_{A=0,1}\int\varepsilon_k E_A(\mathbf{k})b_A^*(K)b_A(K)dK+O_{3,3} \qquad (5.33)$$

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_{A=0,1} \int \mathbf{k} b_A^*(K) b_A(K) dK + O_{3,3} \tag{5.34}$$

Векторы $|0\rangle$, $|K\rangle$, $|K,P\rangle_+ + |P,K\rangle_+$, $|K,P\rangle_- + |P,K\rangle_-$, $b_1^*(S)|0\rangle$ суть собственные векторы операторов H, $\boldsymbol{\pi}$ с собственными значениями $\{0,\mathbf{0}\}$, $\{\varepsilon_k E(\mathbf{k}),\mathbf{k}\}$, $\{\omega(K,P)+i0,\mathbf{k}+\mathbf{p}\}$, $\{\omega(K,P)-i0,\mathbf{k}+\mathbf{p}\}$, $\{\varepsilon_s E_M(\mathbf{k}),\mathbf{s}\}$ соответственно. Все они описывают стационарные состояния. Векторы $|K,P\rangle_+$, $|P,K\rangle_+$, $|K,P\rangle_-$, $|P,K\rangle_-$, вообще говоря, не являются стационарными состояниями при $K \neq P$.

Коммутационные соотношения (5.24) – (5.27) допускают только коммутирование оператора рождения b^* с оператором уничтожения b. Они не допускают коммутации двух операторов рождения b^*. По этой причине вектор $|K,P\rangle_+ = 2^{-1/2} b_0^*(K) b_0^*(P)|0\rangle$ не связан с вектором $|P,K\rangle_+ = 2^{-1/2} b_0^*(P) b_0^*(K)|0\rangle$, если $K \neq P$.

Учет тождественности эмлонов осуществляется симметричными волновыми функциями (5.8). Использование условия (5.11), как мы видели, невозможно. Однако состояния $|K,P\rangle_+$ и $|P,K\rangle_+$ могут быть отождествлены, поскольку в соответствии с соотношением (5.24) вектор $|K,P\rangle_+ - |P,K\rangle_+$ ортогонален всем векторам пространства $\mathcal{H}_2$.

$$\langle P',K'|K,P\rangle_+ - \langle P',K'|P,K\rangle_+ = 0 \tag{5.35}$$

Отождествим вектор $|K,P\rangle_+ - |P,K\rangle_+$ с нулевым вектором. Это эквивалентно коммутационным соотношениям

$$[b_0^*(K), b_0^*(K')]_- = O_{3,1} \tag{5.36}$$

$$[b^*(K), b^*(P)]_- = \frac{i\lambda}{(2\pi)^n} \int \frac{(\varepsilon_k - \varepsilon_p)\eta_2(w)\eta_2(\overline{w})\delta(\mathbf{s}-\overline{\mathbf{s}})}{[\omega(\overline{w}) - \omega(w) - i0]\Delta_-(\overline{w})} b_0^*(\overline{K}) b_0^*(\overline{P}) d\overline{K} d\overline{P} + O_{3,1} \tag{5.37}$$

Если имеет место соотношение (5.36), то гильбертово пространство $\mathcal{H}_2$ превращается в гильбертово пространство $\mathcal{H}_{2,s}$ тожественных эмлонов.

Введем операторы $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ с помощью соотношений

$$S^{(\pm)} = 1 + \int\int \sigma^{(\pm)}(w,w') b_0^*(P) b_0^*(K) b_0(K') b_0(P') dw dw' + O_{3,3} \tag{5.38}$$

где

$$\sigma^{(\pm)}(w,w') = \frac{1}{2}\{\Omega^{(\pm)}(K,P;K',P') - \delta(w-w')\} + (K \leftrightarrow P)$$
$$\pm \frac{i\lambda}{(2\pi)^{n-1}} \frac{(\varepsilon_k + \varepsilon_p)\eta_2(w)\eta_2(w')}{2\Delta_\pm(w)} \delta[\omega(w) - \omega(w')]\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{k}'-\mathbf{p}') \tag{5.39}$$

где $\Omega^{(\pm)}$ определяется соотношениями (5.9), и $(K \leftrightarrow P)$ означает член, получаемый из предыдущего с помощью замены $K \leftrightarrow P$.

Можно проверить, что операторы $S^{(+)}$ и $S^{(-)}$ унитарны в $\mathcal{H}_{2,s}$

$$(S^{(+)})^* = S^{(-)} + O_{3,3}, \qquad S^{(+)}S^{(-)} = S^{(-)}S^{(+)} = 1 + O_{3,3} \tag{5.40}$$

и коммутируют с операторами H и $\boldsymbol{\pi}$

$$[S^{(\pm)}, H]_- = O_{3,3}, \qquad [S^{(\pm)}, \boldsymbol{\pi}]_- = O_{3,3} \tag{5.41}$$

Введем операторы

$$c_0^*(K,t) = S^{(-)} b_0^*(K,t) S^{(+)}, \qquad c_0(K,t) = S^{(-)} b_0(K,t) S^{(+)} \tag{5.42}$$

Из унитарности $S^{(+)}$ и соотношения

$$c_1(K,t) = S^{(-)} b_1(K,t) S^{(+)} = b_1(K,t) + O_{1,3}. \tag{5.43}$$

следует, что операторы c_0, c_1 удовлетворяют тем же самым коммутационным соотношениям (5.24) – (5.27), (5.36), что и операторы b_0, b_1. Из соотношений (5.41) следует, что операторы $c_0(K,t)$, $c_1(K,t)$ удовлетворяют тем же самым уравнениям (5.28), что и операторы $b_0(K,t)$, $b_1(K,t)$.

Другими словами, операторы $c_0(K,t)$, $b_0(K,t)$ описывают свободные поля и удовлетворяют перестановочным соотношениям для свободных полей. Операторы b_0, c_0 имеют много свойств общих с *in*- и *out*-операторами в КТП [9]. Однако имеются различия. Например, одновременные перестановочные соотношения одни и те же для операторов $b_{\rm in}, b_{\rm out}$ и b, тогда как они различны для b_0 и b. По этой причине мы не будем отождествлять операторы b_0, c_0 с $b_{\rm in}$ и $b_{\rm out}$.

Из уравнений (5.5), (5.6), (5.9), (5.38), (5.39) следует

$$|K,P\rangle_- = S^{(-)}|K,P\rangle_+, \qquad |K,P\rangle_+ = S^{(+)}|K,P\rangle_- \tag{5.44}$$

В соответствии с соотношениями (5.42), (5.15) это можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}} c_0^*(K) c_0^*(P)|0\rangle = S^{(-)}|K,P\rangle_+ = |K,P\rangle_- \tag{5.45}$$

Оператор $S^{(-)}$ обычно называют матрицей рассеяния или S-матрицей. Далее будет показано, что действительно оператор $S^{(-)}$ описывает рассеяние СМЛ. Но это нельзя сделать *в рамках схемы квантования.* Кроме того нужно еще ввести оператор, описывающий пространственное распределение СМЛ, например, нужно ввести плотность тока СМЛ.

6 Проблема рассеяния

При традиционном подходе [1] к релятивистской проблеме рассеяния используется выключения взаимодействия при $t \to \infty$. Другими словами, постановка проблемы рассеяния использует два гамильтониана: гамильтониан H, определенный соотношением (5.33) и невозмущенный гамильтониан H_0. Однако, реальное взаимодействие нельзя выключить. Реально имеется только один гамильтониан H, и *проблему рассеяния следует формулировать только в терминах этого гамильтониана H.*

Сформулируем проблему рассеяния следующим образом. Пусть состояние $\Phi_2 \in \mathcal{H}_{2,s}$ описывает два волновых пакета частиц, проходящих один сквозь другой в момент времени $t = 0$ в начале системы координат. Каждый из двух волновых пакетов предполагается почти моноимпульсным и имеющим размер $a \gg m^{-1}$, где m^{-1} есть комптоновская длина волны частицы. Это необходимо для того, чтобы можно было пренебречь расширением волнового пакета. Пусть частицы волновых пакетов регистрируются детекторами размером $L \gg a$. Детекторы расположены на таком расстоянии $d \gg L$ от начала системы отсчета, что каждый детектор имеет угловой размер $\Omega = L/d \ll 1$. В этом случае частицы одного из волновых пакетов регистрируются детектором α_1 а частицы другого волнового пакета регистрируются детектором α_2. Рассеянные частицы (если такие появятся) регистрируются детекторами $\beta_1, \beta_2, \ldots$

Пусть $\Phi_2' \in \mathcal{H}_{2,s}$ есть другое состояние, которое отличается от Φ_2 только некоторым смещением второго волнового пакета. Он смещен на расстояние l, $(L \gg l \gg a)$ таким образом, что не проходит через первый волновой пакет. В этом случае частицы первого волнового пакета регистрируются тем же самым детектором α_1, а частицы второго волнового пакета регистрируются детектором α_2. Рассеянных частиц в этом случае не будет. Таким образом, можно исследовать рассеяние, сравнивая плотности частиц в состояниях Φ_1 и Φ_2'.

Пусть $d\nu$ есть число частиц, рассеянных в направлении $\mathbf{l}$ внутри телесного угла $d\omega$. Пусть $n_1^i(\mathbf{x}, t), n_2^i(\mathbf{x}, t)$ есть плотности потока частиц соответственно в первом и во втором волновых пакетах. Тогда эффективное сечение $d\sigma$ рассеяния в направлении $\mathbf{l}$ описывается соотношением

$$d\nu = J d\sigma \tag{6.1}$$

$$J = \int\int \sqrt{(n_1^i, n_{2i})^2 - (n_1^i, n_{1i})^2 (n_2^k, n_{2k})^2} d\mathbf{x} dt \tag{6.2}$$

Здесь инвариантный интеграл J описывает степень перекрытия волновых пакетов. В частности, в системе координат, где первый волновой пакет покоится, второй волновой пакет движется со скоростью $\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$, т.е.

$$n_1^0 = n_1, \quad \mathbf{n}_1 = 0, \qquad n_2^0 = n_2, \quad \mathbf{n}_2 = n_2 \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} \tag{6.3}$$

соотношение (6.1) преобразуется в хорошо известное выражение

$$d\nu = d\sigma \int n_1 n_2 \left| \mathbf{v}_{\mathrm{rel}} \right| d\mathbf{x} dt. \tag{6.4}$$

Выберем состояние Φ_2 в виде

$$\Phi_2 = \int f_W(K, P) |K, P\rangle dK dP \tag{6.5}$$

где

$$f_W(K, P) = \frac{1}{2} F(K - R) F(P - Q) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y} - i\mathbf{p}\mathbf{z}} + (K \leftrightarrow P) \tag{6.6}$$

Здесь и далее $(K \leftrightarrow P)$ означает член, получаемый из предыдущего перестановкой $K \leftrightarrow P$. $W = \{R, Q, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, $R = \{\varepsilon_r, \mathbf{r}\}$, $Q = \{\varepsilon_q, \mathbf{q}\}$ есть набор параметров, описывающих волновую функцию ψ_W.

$$F(K - R) = A\delta_{\varepsilon_k,\varepsilon_r} \exp\{-\frac{1}{2}(\mathbf{k} - \mathbf{r})^2 a^2\} \tag{6.7}$$

есть вещественная функция, существенно отличная от нуля только в области

$$|\mathbf{k} - \mathbf{r}| < a^{-1} \ll m \tag{6.8}$$

A есть нормировочная постоянная.

Оставаясь в рамках схемы квантования, нельзя понять смысл параметров W волновой функции ψ_W. Только переходя к модели квантования и вводя операторы физических величин, можно понять, что означают параметры W. Но физические величины можно ввести различными способами.

Плотность заряда может быть введена по крайней мере двумя способами. Первый способ

$$j^0(\mathbf{x}, t) = e^{iHt - i\boldsymbol{\pi}\mathbf{x}} \frac{e}{(2\pi)^n} \int \frac{\varepsilon_k}{2} \sqrt{\beta(\mathbf{k})/\beta(\mathbf{k}')} b^*(K) b(K') dK dK' e^{-iHt + i\boldsymbol{\pi}\mathbf{x}} + (\mathrm{h.c.}) \tag{6.9}$$

Второй способ

$$\begin{aligned} j^0(\mathbf{x}, t) \;\; &= \;\; e^{iHt - i\boldsymbol{\pi}\mathbf{x}} \int \frac{\varepsilon_k}{2(2\pi)^n} \sum_{A=0,1} e_A \sqrt{\beta(\mathbf{k})/\beta(\mathbf{k}')} \\ &\times b_A^*(K) b_A(K') dK dK' e^{-iHt + i\boldsymbol{\pi}\mathbf{x}} + (\mathrm{h.c.}) \end{aligned} \tag{6.10}$$

Здесь (h.c.) означает добавление эрмитово сопряженного выражения $e_0 = e$, $e_1 = 2e$.

Соотношение (6.9) соответствует выражению (3.10) для нелинейного поля φ. Соотношение (6.10) соответствует тому же самому выражению (3.10) для линейных невзаимодействующих полей φ_0, φ_1. Полный заряд Q один и тот же в обоих случаях

$$Q = e \int \varepsilon_k b^*((K) b(K) dK = \sum_{A=0,1} e \int \varepsilon_k b_A^*((K) b_A(K) dK + O_{3,3} \tag{6.11}$$

Во второй модели квантования j^0 определяется соотношением (6.10), состояние (6.5), (6.6) описывает два волновых пакета размера $\cong a$. Они движутся со скоростями

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\varepsilon_r \mathbf{r}}{E(\mathbf{r})}, \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\varepsilon_q \mathbf{q}}{E(\mathbf{q})} \tag{6.12}$$

и оказываются в момент времени $t = 0$ соответственно в точках $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$. Во второй модели квантования *рассеянных частиц нет*

В первой модели квантования, где j^0 определяется соотношением (6.9), состояние (6.5), (6.6) описывает те же волновые пакеты, что и в первой модели.

Но в этом случае появляется *"рассеянный заряд", если волновые пакеты перекрываются.*

Рассмотрим детально первую модель. Усредняя оператор (6.9) по Φ_2, получаем следующее выражение

$$\langle j^0(\mathbf{x},t)\rangle_{\Phi_2} = (\Phi_2, j^0(\mathbf{x},t)\Phi_2)$$

$$= \frac{e}{(2\pi)^n} \sum_{\varepsilon_{k'},\varepsilon_{k''}=\pm 1} \int \varepsilon_{k'} \Psi^{(+)}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k'},P)\Psi^{(-)}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P)dP + (\text{c.c.}) \tag{6.13}$$

где

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P) = \Psi^{(\pm)}_{\text{fr}}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P) + \Psi^{(\pm)}_{\text{sc}}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P) \tag{6.14}$$

$$\Psi^{(\pm)}_{\text{fr}}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P) = \frac{1}{2}\int F(K''-R)F(P''-Q)e^{\pm i\zeta_{\text{fr}}(K'',P'')}d\mathbf{k}'' + (W\to -W) \tag{6.15}$$

$$\Psi^{(\pm)}_{\text{sc}}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P'') = \frac{1}{2}\int F(K-R)F(P-Q)\mu^{(\mp)}_{K,P}(K'',P'')$$
$$\times e^{\pm i\zeta_{\text{fr}}(K,P)}dKdPd\mathbf{k}'' + (W\to -W) \tag{6.16}$$

Здесь и далее $(W\to -W)$ означает член, получаемый из предыдущего с помощью замены $(R\leftrightarrow Q,\ \mathbf{y}\leftrightarrow\mathbf{z})$.

$$\zeta_{\text{fr}}(K,P) = \omega(K,P)t - \mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \tag{6.17}$$

где $\omega(K,P)$ определяется соотношением (4.36), или (4.45).

Функции $\mu^{(\pm)}$ определяются соотношениями (4.48), (5.22). При получении выражения (6.13), учтено, что множитель $\sqrt{\beta(\mathbf{k})/\beta(\mathbf{k}')}$ в соотношении (6.9) меняется медленно в области ненулевого вклада. $\Psi^{(-)}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P)$ можно интерпретировать как волновую функцию в смешанном импульсно-координатном представлении. $\Psi^{(+)}$ есть комплексно сопряженная функция. $\Psi^{(-)}_{fr}, \Psi^{(-)}_{sc}$ ответственны соответственно за свободное движение и рассеяние.

Используя выражения (4.48), (5.22) для $\mu^{(\pm)}$, соотношение (6.16) можно представить в виде

$$\Psi^{(\pm)}_{\text{sc}}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P'') = \pm\frac{i\lambda}{(2\pi)^n}\int\int dKdP\frac{\varepsilon_{k''}\eta_2(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'',\mathbf{p})\eta_2(K,P)}{\Delta_\pm(K,P)}$$
$$\times F(K-R)F(P-Q)\int_0^\infty d\alpha e^{\pm i\zeta_{\text{sc}}(K,P;\varepsilon_{k''},P'',\alpha)} + (W\to -W) \tag{6.18}$$

$$\zeta_{\text{sc}}(K,P;\varepsilon_{k''},P'',\alpha) = \zeta_{\text{fr}}(K,P) + \alpha[\omega(K,P) - \varepsilon_{k''}E(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'') - \varepsilon_{p''}E(\mathbf{p}'')] \tag{6.19}$$

Волновые функции (6.15), (6.18) суть интегралы от быстро осциллирующих функций. Они существенно отличны от нуля только для тех значений параметров $\mathbf{x}, t, W$, для которых фазы ζ_{fr} и ζ_{sc} стационарны (т.е. фазы имеют экстремум по всем аргументам, по которым производится интегрирование). Фаза ζ_{fr} стационарна, если выполнены следующие условия

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{v}_1 t, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{v}_2 t \tag{6.20}$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ определяются соотношением (6.12).

Уравнения (6.19) описывают свободное движение центров волновых пакетов. В их окрестности $\Psi_{fr}^{(\pm)}$ существенно отличается от нуля.

Фаза ζ_{sc} стационарна, если выполнены следующие условия

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \frac{\varepsilon_{k''}(\mathbf{r}+\mathbf{q}-\mathbf{p}'')}{E(\mathbf{r}+\mathbf{q}-\mathbf{p}'')}(t-T), \qquad t > T \tag{6.21}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{y} + \mathbf{v}_1 T = \mathbf{z} + \mathbf{v}_2 T \tag{6.22}$$

$$\omega(R,Q) - \varepsilon_{k''}E(\mathbf{r}+\mathbf{q}-\mathbf{p}'') - \varepsilon_{p''}E(\mathbf{p}'') = 0 \tag{6.23}$$

Условия (6.21), (6.22) могут быть выполнены только в том случае, когда волновые пакеты, движущиеся в соответствии с уравнением (6.20), проходят один сквозь другой, и их центры совпадают в точке $\mathbf{X}$ в момент времени T. Если это происходит, то появляются "рассеянные заряды". Они движутся со скоростью

$$\mathbf{v}_{\mathrm{sc}} = \frac{\varepsilon_{k''}(\mathbf{r}+\mathbf{q}-\mathbf{p}'')}{E(r+q-p'')} \tag{6.24}$$

в направлении от точки столкновения $\mathbf{X}$.

Допустимые значения $\mathbf{p}''$ определяются из соотношения (6.23). Для $\varepsilon_r = \varepsilon_q$ соотношение (6.23) есть закон сохранения энергии. В этом случае рассеяние упругое. В самом деле, в системе координат, где $\mathbf{q}+\mathbf{r} = 0$, из соотношения (6.23) следует

$$\varepsilon_{k''} = \varepsilon_{p''} = \varepsilon_r = \varepsilon_q, \qquad |\mathbf{p}''| = |\mathbf{r}| = |\mathbf{q}| \tag{6.25}$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{sc}} = \varepsilon_{p''}\frac{\mathbf{p}''}{E(\mathbf{p}'')} \qquad |\mathbf{v}_{\mathrm{sc}}| = |\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| \tag{6.26}$$

В случае $\varepsilon_r = -\varepsilon_q$, когда частица сталкивается с античастицей, рассеяние полностью отсутствует. В самом деле $\langle j^0(\mathbf{x},t)\rangle_{\Phi_2}$ можно разделить на три части

$$\langle j^0(\mathbf{x},t)\rangle_{\Phi_2} = \langle j^0(\mathbf{x},t)\rangle_{\mathrm{fr}} + \langle j^0(\mathbf{x},t)\rangle_{\mathrm{sc}} + \langle j^0(\mathbf{x},t)\rangle_{-} \tag{6.27}$$

где

$$\langle j^0(\mathbf{x},t)\rangle_{\mathrm{fr}} = \frac{e}{(2\pi)^n}\sum_{\varepsilon_{k''},\varepsilon_{k'}=\pm1}\int \varepsilon_{k'}\Psi_{\mathrm{fr}}^{(+)}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P'')\Psi_{\mathrm{fr}}^{(-)}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k'},P'')dP'' + (\mathrm{c.c}) \tag{6.28}$$

$$\langle j^0(\mathbf{x},t)\rangle_{\mathrm{sc}} = \frac{e}{(2\pi)^n}\sum_{\varepsilon_{k''},\varepsilon_{k'}=\pm1}\int \varepsilon_{k'}\Psi_{\mathrm{sc}}^{(+)}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P'')\Psi_{\mathrm{sc}}^{(-)}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k'},P'')dP'' + (\mathrm{c.c}) \tag{6.29}$$

$$\langle j^0(\mathbf{x},t)\rangle_{-} = \frac{e}{(2\pi)^n}\sum_{\varepsilon_{k''},\varepsilon_{k'}=\pm1}\int \Psi_{\mathrm{fr}}^{(+)}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k''},P')(\varepsilon_{k'}+\varepsilon_{k''})$$
$$\Psi_{\mathrm{sc}}^{(-)}(\mathbf{x},t;\varepsilon_{k'},P'')dP'' + (\mathrm{c.c}) \tag{6.30}$$

Здесь $\langle j^0\rangle_{\rm fr}$, $\langle j^0\rangle_{\rm sc}$ и $\langle j^0\rangle_-$ суть соответственно заряд невзаимодействующих волновых пакетов, рассеянный заряд и заряд выбывший из волновых пакетов в результате рассеяния.

Из-за множителя $\varepsilon_{k'}$ в уравнении (6.29) рассеянный заряд обращается в нуль даже в случае, когда Ψ_{sc} не обращается в нуль. Но в случае $\varepsilon_r = -\varepsilon_q$ заряд

$$Q_-(t) = \int \langle j^0(\mathbf{x}, t)\rangle_- d\mathbf{x}, \tag{6.31}$$

выбывающий из каждого волнового пакета по отдельности, равен нулю. Это означает, что в двух-эмлонном случае *частица не взаимодействует с античастицей.*

Представим результаты, полученные в результате расчета с помощью формализма стационарной фазы.

$$\langle j^0(\mathbf{x}, t)\rangle_{\rm fr} = \frac{e}{(\pi a^2)^{n/2}}\{\varepsilon_r \exp[-(x-y-v_1t)^2/a^2]+\varepsilon_q \exp[-(x-z-v_2t)^2/a^2]\} \tag{6.32}$$

$$Q_{\rm sc}(t) = -Q_-(t) = -\frac{e\lambda\Delta_1(R,Q)\varepsilon_q}{(2\pi a^2)^{(n-1)/2}E(\mathbf{r})E(\mathbf{q})\sqrt{(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_1)^2}|\Delta_+(R,Q)|^2} \tag{6.33}$$

где

$$\Delta_1(R,Q) = \frac{\Delta_+(R,Q)-\Delta_-(R,Q)}{2i} \tag{6.34}$$

Вычисление интетеграла (6.2) приводит к результату

$$J = (2\pi a^2)^{(n-1)/2}\sqrt{1-[(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)^2-\mathbf{v}_1^2\mathbf{v}_2^2](\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^{-2}} \tag{6.35}$$

С помощью уравнений (6.1), (6.3), (6.35) получаем для полного сечения рассеяния

$$\sigma_{\rm tot} = \frac{|Q_{\rm sc}|}{J} = \frac{\lambda|\Delta_1(R,Q)|}{2|\Delta_+(R,Q)|\sqrt{(r_iq^i)^2-m^2}}, \tag{6.36}$$

$$r^i = \{\varepsilon_r E(\mathbf{r}), \mathbf{r}\}, \qquad q^i = \{\varepsilon_q E(\mathbf{q}), \mathbf{q}\} \tag{6.37}$$

Используя соотношения (4.49), (4.42), получаем в случае $n = 2$

$$\sigma_{\rm tot} = \frac{\lambda^2\delta_{\varepsilon_r,\varepsilon_q}}{8\gamma\sqrt{2(\gamma^2-4m^2)}[(1-\frac{\lambda}{8\pi\gamma}\log|\frac{2m+\gamma}{2m-\gamma}|)^2+\frac{\lambda^2}{64\gamma^2}]},$$

$$\gamma^2 = (r^i+q^i)(r_i+q_i).$$

В случае $n = 3$ Δ_1 конечно и Δ_+ расходится. Тогда $\sigma_{\rm tot} = 0$, и рассеяние отсутствует.

Результат (6.36) может быть получен также в рамках традиционного S - матричного подхода. Отождествим оператор $S^{(-)}$, определенный соотношением (5.38) с S-матрицей. Элементы S-матрицы имеют вид

$$_+\langle P, K|S^{(-)}|K', P'\rangle_+ \equiv _+\langle u, \mathbf{s}|S^{(-)}|\mathbf{s}', u'\rangle_+ =$$

$$\delta(\mathbf{s}-\mathbf{s}')\{\frac{1}{2}[\delta(u-u')+\delta(u+u')]-2\pi i T(\mathbf{s},u,u')\delta[\omega_1(u,\mathbf{s})-\omega_1(u',\mathbf{s})]\} \tag{6.38}$$

где в соответствии с уравнениями (5.39), (4.29), (4.36)

$$T(\mathbf{s},u,u') = \frac{\lambda}{(2\pi)^n}\frac{(\varepsilon_k+\varepsilon_p)\xi_2^2(u,\mathbf{s})}{2\Delta_-(w)} \tag{6.39}$$

В соответствии с оптической теоремой [9] (гл. 5, ф-ла (39))

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = -\frac{2}{v}(2\pi)^n \mathrm{Im}(T(\mathbf{s},u,u)) \tag{6.40}$$

где v есть относительная скорость сталкивающихся частиц. Подставляя соотношение (6.39) в уравнение (6.40) и используя (6.34), получаем результат (6.36).

Итак, не используя выключения взаимодействия, было обосновано использование S-матрицы. Однако следует иметь в виду, что полученная модель рассеяния есть *результат модели квантования, где оператор плотности заряда выбран в виде* (6.9). Если оператор плотности заряда имеет другой вид, то получается, вообще говоря, другая модель рассеяния даже при той же самой схеме квантования.

7 Операторы физических величин

Среди физических величин

$$E(t) = \int E(k) b^*(K,t) b(K,t) dK$$

$$+\frac{\lambda}{2(2\pi)^n}\int\int\int \frac{b^*(K,t)b^*(P,t)b(P',t)b(K',t)}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})\beta(\mathbf{p})\beta(\mathbf{k}')\beta(\mathbf{p}')}}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{k}'-\mathbf{p}')dKdPdK'dP' \tag{7.1}$$

$$P_\alpha(t) = \int \varepsilon_k k_\alpha b^*(K,t) b(K,t) dK, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{7.2}$$

$$Q(t) = \int \varepsilon_k b^*(K,t) b(K,t) dK \tag{7.3}$$

только заряд $Q(t)$ не зависит от времени t в силу динамического уравнения (4.3).

Действительно, вычисляя $\partial E/\partial t$ и используя соотношение (4.3), получаем

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_{t=0} \;=\; &\frac{i\lambda}{2(2\pi)^n}\int\int\int\int \frac{\varepsilon_k E(\mathbf{k})-\varepsilon_p E(\mathbf{p})+\varepsilon_{k'}E(\mathbf{k}')-\varepsilon_{p'}E(\mathbf{p}')}{\sqrt{\beta(\mathbf{k})\beta(\mathbf{p})\beta(\mathbf{k}')\beta(\mathbf{k}')}}\\ &\times b^*(K)b^*(P)b(K')b(P')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{k}'-\mathbf{p}')dKdPdK'dP' + O_{3,3}\end{aligned} \tag{7.4}$$

$\partial E/\partial t$ обращается в нуль, если операторы $b(P')$ и $b(K')$ коммутируют. В классическом случае, когда $b(K)$ есть c-число, $\partial E/\partial t = 0$ и E сохраняется. При перестановочных соотношениях (5.36), (5.37) $\partial E/\partial t \neq 0$, и $E(t)$ не является сохраняющейся величиной. Матричные элементы вида $_+\langle P, K|\partial E/\partial t|K', P'\rangle_+$ расходятся.

Оператор $E(0)$ можно записать в виде

$$E(0) = \int E(\mathbf{k}) b_0^*(K) b_0(K) dK$$
$$+ \int\int \{E(\mathbf{k})\mu_{w'}^{(-)}(w) + E(\mathbf{k}')\mu_w^{(+)}(w') + C_1(w, w')$$
$$- \frac{\lambda\eta_2(w)\eta_2(w')}{2(2\pi)^n \Delta_+(w)\Delta_-(w')} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{p}')\} b_0^*(K') b_0^*(P') b_0(K) b_0(P) dw dw'$$
$$+ \int\int \{E(\mathbf{k})\mu_S(w) + C_2(w, S) + \frac{\eta_2(w)\delta(\mathbf{s} - \mathbf{k} - \mathbf{p})}{\Delta_-(w)\sqrt{2(2\pi)^n \beta(\mathbf{s}) B}}\} b_0^*(K) b_0^*(P) b_1(S) dw dS$$
$$+(\mathrm{h.c.}) + \int\int \{C_3(S, S') - \frac{\lambda\delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}')}{2(2\pi)^n \beta_1(\mathbf{s})\,|B|}\} b_1^*(S) b_1(S') dS dS' + O_{3,3} \qquad (7.5)$$

где

$$C_1(w, w') = \int \mu_{w'}^{(-)}(w'')\mu_w^{(+)}(w'') E(\mathbf{k}'') dw''$$
$$C_2(w, S) = \int \mu_w^{(-)}(w'')\mu_S(w'') E(\mathbf{k}'') dw'' \qquad (7.6)$$
$$C_3(S, S') = \int \mu_S(w'')\mu_{S'}(w'') E(\mathbf{k}'') dw''$$

Для того, чтобы $E(t)$ не зависело от t, достаточно ограничить область интегрирования в интегралах (7.6), добавив множитель $\delta_{\varepsilon_{k''},\varepsilon_{p''}}$ в каждое подыынтегральное выражение. После такого исправления выражение (7.5) принимает вид

$$E(t) = E(0) = \sum_{A=0,1} \int E_A(\mathbf{k}) b_A^*(K) b_A(K) dK + O_{3,3} \qquad (7.7)$$

Следует заметить, что добавление множителя $\delta_{\varepsilon_{k''},\varepsilon_{p''}}$ уничтожает матричные элементы между Гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_2\backslash\mathcal{H}_{2,s}$. Это препятствует переходу от $\mathcal{H}_{2,s}$ к $\mathcal{H}_2$. Аналогичную коррекцию следует сделать в разложении $P_\alpha(t)$ по операторам $b_A^*(K), b_A(K')$. После такой коррекции $P_\alpha(t)$ принимает вид

$$P_\alpha(t) = P_\alpha(0) = \int \varepsilon_k k_\alpha b_A^*(K) b_A(K) dK + O_{3,3}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \qquad (7.8)$$

Аналогичное ограничение в области интегрирования должно быть сделано в разложении тензора энергии-импульса

$$T^{ik} = \varphi^{*i}\varphi^k + \varphi^{*k}\varphi^i - g^{ik} L \qquad (7.9)$$

по операторам $b_A^*(K), b_A(K')$. Тогда он начинает удовлетворять закону сохранения

$$\partial_k T^{ik} = O_{3,3} \qquad (7.10)$$

8 Заключительные замечания

Проблема рождения пар есть главная проблема КТП. Соотношения, полученные в $\mathcal{H}_{2,s}$ являются точными. Они применимы при любых энергиях сталкивающихся частиц. Но нелинейная модель (4.1), (4.3) скалярного поля не описывает рождение пар. Она не описывает даже рассеяние частица – античастица. Это обстоятельство вызывает разочарование.

Это разочарование в определенной степени основано на способе мышления, связанном с теорией возмущений. В релятивистской КТП динамика всех нелинейных моделей исследуется с помощью формализма теории возмущений. Нелинейный член порождает набор диаграмм, которые описывают и рождение, и аннигиляцию частиц. В соответствии с этим подходом *любое нелинейное взаимодействие должно приводить к рождению пар, если* энергии сталкивающихся частиц достаточно велики.

Но исследование классического описания рождения пар приводит к другому заключению. Вернемся к действию (1.6), описывющему поведение эмлона в некотором внешнем поле $f(q)$, которое попрождает пары. (Пусть для простоты электромагнитное и гравитационное поля отсутствуют). Уравнение Якоби – Гамильтона для действия (1.6) имеет вид

$$\sqrt{f(q)(\frac{\partial S}{\partial q^i}g^{ik}\frac{\partial S}{\partial q^k})} = \alpha b, \qquad b = \mathrm{const} \tag{8.1}$$

Уравнение (8.1) при $\alpha > 0$ допускает пространственноподобный импульс $p_i = \partial S/\partial q^i$, при условии что $f(q) < 0$. Следовательно, оно допускает поворот эмлона во временно́м направлении [5]. В пределе $\alpha \to 0$ уравнение (8.1) превращается в

$$f(q)(\frac{\partial S}{\partial q^i}g^{ik}\frac{\partial S}{\partial q^k} - m^2c^2) = 0 \tag{8.2}$$

Это уравнение означает, что точка, где $f(q) = 0$, может быть точкой излома. Оставаясь времениподобным эмлон меняет здесь временно́е направление, т.е. внешнее поле $f(q)$ рождает или уничтожает пару в этой точке. В работе [3] строится пример такого решения для конечного $\alpha > 0$. При конечном $\alpha > 0$ имеется некоторая окрестность точки поворота, где эмлон является пространственноподобным. При $\alpha \to +0$ эта окрестность вырождается в точку излома, и эмлон остается везде времениподобным за исключением точки излома. В этой точке эмлон меняет временно́е направление.

Было также показано [3], что рождение пар внешним полем $f(q)$ происходит также в пределе $\alpha \to +0$. Другими словами, действие (1.6) может описывать рождение пар при бесконечно малом $\alpha > 0$.

Используем это обстоятельство и разложим соотношение (1.6) по степеням параметра α.

$$S[q] = - \int\limits_{\min(\tau',\tau'')}^{\max(\tau',\tau'')} \left\{ mc\sqrt{\dot{q}^k g_{kl} \dot{q}^l} - \frac{\alpha f(q)}{2mc\sqrt{\dot{q}^k g_{kl} \dot{q}^l}} \right\} d\tau \tag{8.3}$$

В этом случае уравнение Гамильтона – Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial q^i} g^{ik} \frac{\partial S}{\partial q^k} = \left[mc + \frac{\alpha b^2}{f(q)} \right]^2, \qquad b = \mathrm{const} \tag{8.4}$$

Здесь 4-импульс $p_i = \partial S / \partial q^i$ всегда времениподобный. Поворот эмлона во времени невозможен. В пределе $\alpha \to 0$ поле $f(q)$ исчезает, и действие (8.3) не может описывать рождение пар.

Действие (1.6) допускает пространственноподобные $\dot{q}^i$ (при $\alpha f(q) < 0$), а действие (8.3) не допускает это в принципе. В этом различие между двумя действиями. Этот пример показывает, что для рождения пар нужно специальное взаимодействие. Возможно, что самодействие модели (4.1), (4.2) этим свойством не обладает.

Представляется маловероятным, что рождение пар может появиться в модели (4.1) при рассмотрении процессов в $\mathcal{H}_3$ и $\mathcal{H}_4$, где рассматриваются три и четыре эмлона, потому что нелинейный член модели ассоциируется с разложением (8.3) по степеням постоянной взаимодействия.

Но почему рассмотрение модели (4.1) традиционными методами квантования [11] - [14] описывает рождение пар? Ответ очень прост. Потому что традиционная схема квантования внутренне противоречива. Когда используется противоречивая концепция, то, проявив достаточно изобретательности, можно получить любой желаемый результат. При традиционном квантовании по PA-схеме мировая линия делится на фрагменты (частицы и античастицы). Но соединить эти фрагменты должным образом не удается. Некоторая часть фрагментов остается. Они имитируют рождение пар.

Наиболее неожиданной чертой квантования в терминах эмлонов является различие одновременны́х перестановочных соотношений для свободного поля и для поля с самодействием (т.е. одновременны́е перестановочные соотношения зависят от постоянной самодействия λ). В целом эта концепция *не обнаруживает видимых противоречий.*

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, *Found. Phys.* **28,** 245, (1998).

[2] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в квантовую теорию поля.* (ГИТТЛ, Москва 1957).

[3] Ю.А. Рылов, *ТМФ* **5** (1970) 333,

[4] Yu. A. Rylov, *Int. J. Theor. Phys.* **6** (1972) 181.

[5] E. C. G. Stueckelberg, *Helvetica Physica Acta* **15** (1942) 23.

[6] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **76** (1949) 749.

[7] W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.* **13** (1941) 203.

[8] A. S. Wightman, *Introduction to Some Aspects of Relativistic Dynamics of Quantized Fields.* (Revised notes for lectures at the French Summer School of Theoretical Physics, Carêse, Corsica, Yuli, 1964)

[9] S. S. Schweber, *An Introduction to the Relativistic Quantum Theory*, (Row, Peterson and Co., New York, 1961). (Русс. пер. С. Швебер *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля.* ИИЛ, Москва, 1963.)

[10] M. L. Goldberger and K. M. Watson, *Collision Theory*, (N.Y., London, 1964). (Русс. пер. М. Гольдбергер и К. Ватсон *Теория столкновений.* Изд. МИР, Москва, 1967.)

[11] J. Glimm and A. Jaffe, *Phys. Rev.* **176**, 1945, (1968).

[12] J. Glimm and A. Jaffe, *Ann. Math.* **91**, 362, (1970).

[13] J. Glimm and A. Jaffe, *Acta Math.* **125**, 203, (1970).

[14] J. Glimm and A. Jaffe, *J. Math. Phys.* **13**, 1568, (1972).