Повторная динамическая квантизация

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
119526, Москва, Проспект Вернадского, 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

В традиционной квантовой механике квантовая частица есть особый объект, чьи свойства описываются специальными понятиями и квантовыми принципами. Квантование есть особая процедура, сопровождающаяся введением специальных понятий. Поэтому квантование нельзя повторить. В модельной концепции квантовых явлений (АККЯ) квантовая частица есть частный случай стохастической частицы, и квантовая динамика есть частный случай динамики стохастических систем. В АККЯ квантование есть динамическая процедура, в которой к лагранжиану статистического ансамбля (классических) частиц добавляется специальный квантовый член. Эта процедура может быть многократно повторена, потому что она не сопровождается введением новых понятий. Это очень удобно с формальной точки зрения, множество динамических квантизаций образует однопараметрическую группу, позволяющую разделить динамические и статистические (стохастические) свойства.

1 Введение

Иногда исследование нового класса физических явлений осуществляется в два этапа. Сперва возникает простая аксиоматическая концепция, основанная на эмпирическом основаниии. Затем аксиоматическая концепция заменяется более развитой модельной концепцией, где аксиомы первого этапа получаются как свойства модели. Теория тепловых явлений развивалась в соответствии с этой схемой. Сначала возникла термодинамика (аксиоматическая концепция тепловых явлений). Затем была разработана статистическая физика (модельная концепция тепловых явлений). Аксиомы термодинамики и свойства теплорода были получены как свойства хаотического движения молекул. Модельная концепция имела преимущества перед аксиоматической концепцией. *Методы исследования и математический формализм модельной концепции более тонки и эффективны*, чем методы исследования и формализм аксиоматической концепции. Например, в рамках статистической физики можно рассчитать теплоемкость и другие характеристики вещества, тогда как в рамках термодинамики их можно только измерить эмпирически. Второй закон термодинамики есть постулат термодинамики. Это формальное свидетельство аксиоматического характера термодинамики. В рамках статистической физики второй закон термодинамики есть следствие модели тепла (хаотического движения молекул) и статистических принципов.

Современная квантовая теория является первым (аксиоматическим) этапом в развитии физики микромира. Формальным свидетельством этого является существование дополнительных постулатов (квантовых принципов). Появление следующего (модельного) этапа, где квантовые принципы являются следствием модели представляется неизбежным, потому что только в этом случае физика микромира будет иметь надежное основание для своего дальнейшего развития. Модельная концепция привлекательна тем, что она использует более тонкие и эффективные математические методы исследования. Кроме того она очерчивает границы применения аксиоматической концепции. Это можно видеть на примере взаимоотношений между статистической физикой и термодинамикой.

Модельная концепция квантовых явлений (МККЯ) выглядит следующим образом [1]. В результате обобщения римановой геометрии мы получаем класс однородных и изотропных геометрий пространства-времени (невырожденные геометрии [2, 3, 4]), где движение свободных частиц является изначально стохастическим, а массы частиц геометризованы. Эксперименты показывают, что движение частиц малой массы является стохастическим, и эта стохастичность зависит от массы частицы. Свободное движение частиц должно определяться только пространственно-временно́й геометрией, и невырожденные геометрии со стохастическим движением свободных частиц более правильны, чем пространственно-временна́я геометрия Минковского с детерминированным движением свободных частиц. Возможно так выбрать параметры невырожденной пространственно-временно́й геометрии, что статистическое описание стохастически движущихся частиц совпадет с квантовым описанием (уравнением Шредингера). Квантовая постоянная $\hbar$ появляется как атрибут пространственно-временно́й геометрии. Квантовые принципы появляются как следствия нерелятивистского приближения пространственно-временно́й модели. Тогда появляется модельная концепция квантовых явлений (МККЯ).

Кратко МККЯ можно сформулировать следующим образом. Пространственно-временна́я геометрия зависит от квантовой постоянной $\hbar$ и порождает стохастичность, которая зависит от массы частицы m и от $\hbar$. Статистический ансамбль стохастически движущихся частиц представляет собой разновидность жидкости, зависящей от m и $\hbar$. Спин и волновая функция являются атрибутами любой идеальной жидкости [4]. Описывая жидкость (статистический ансамбль) в терминах волновой функции, мы получаем квантовое описание (уравнение Шредингера).

Стохастичность движения свободной частицы в детерминированной невырожденной пространственно-временной геометрии объясняется следующим образом. В невырожденной геометрии имеется много векторов $\overrightarrow{P_0Q}$ фиксированной длины, которые параллельны вектору $\overrightarrow{P_0P_1}$, тогда как в вырожденной геометрии имеется только один вектор $\overrightarrow{P_0Q}$ фиксированной длины, который параллелен вектору $\overrightarrow{P_0P_1}$. Вектор импульса $\overrightarrow{p}$ свободной частицы переносится параллельно вдоль мировой линии частицы. Вектор импульса $\overrightarrow{p}$ касателен к мировой линии и определяет ее направление. В вырожденной геометрии (например, в геометрии Минковского) вектор импульса $\overrightarrow{p}$, переносится параллельно, и мировая линия определяется однозначно. В невырожденной геометрии имеется много векторов импульса, получаемых в результате параллельного переноса, и мировая линия определяется неоднозначно. Другими словами, мировая линия оказывается стохастической (случайной).

Замена аксиоматической концепции квантовых явлений (АККЯ) модельной концепцией (МККЯ) представляет собой довольно радикальную модификацию существующей теории микромира, и для правильной оценки взаимоотношений между АККЯ и МККЯ следует учесть такой фактор как стиль исследований, который обычно очень консервативен. Стиль исследования существенно влияет на оценку достижений теории. Существует два стиля исследований: (1) классический стиль исследований (К-стиль) и (2) прагматичный стиль исследований (П-стиль).

К-стиль – это дедуктивный стиль исследований. Он очень чувствителен к фундаментальным утверждениям и принципам физической концепции. Дедуктивный характер К-стиля не позволяет призводить исследования при неправильных принципах и фундаментальных утверждениях, потому что все следствия извлекаются из первых принципов. Существо К-стиля можно выразить лозунгом Ньютона:"Hypotheses non fingo". Если некоторые первые принципы неправильны, К-стиль исследований не работает.

Напротив, П-стиль исследований нечувствителен к правильности первых принципов. П-стиль мало использует дедукцию, и он может эффективно работать, когда не все первые принципы правильны. П-стиль использует короткую логику (короткие логические цепи). Он не может использовать длинные логические цепи. Это ненадежно, потому что нельзя быть уверенным в правильности первых принципов. Объяснение экспериментальных данных – это единственный критерий, используемый П-стилем. П-стиль пригоден для решения малых физических проблем и для описания ограниченного круга физических явлений. П-стиль не годится для построения фундаментальных физических концепций, потому что при таком построении первые принципы должны быть правильными. Для объяснения новых неизвестных физических явлений П-стиль использует новые дополнительные предположения (гипотезы), которые связывают различные физические явления и объясняют их в терминах новых гипотез.

П-стиль эффективен и полезен для определения связи между различными физическими явлениями. П-стиль был эффективно использован при построении квантовой механики.

Некоторые современные исследователи рассматривают П-стиль как новый исследовательский стиль современной физики, противопоставляя его старомодному стилю классической физики (К-стилю). На самом деле П-стиль не нов. Птолемей и его последователи использовали его для объяснения явлений небесной механики. Первые принципы небесной механики того времени содержали ошибку (Солнце вращается вокруг Земли). Тем не менее Птолемею удалось объяснить и правильно предсказать движение планет, потому что он компенсировал дополнительными гипотезами ошибочный первый принцип. Такую концепцию, где ошибочное фундаментальное утверждение компенсируется дополнительными предположениями, мы будем называть компенсирующей концепцией. Такая компенсирующая концепция пригодна для правильного описания частных физических явлений, но нельзя построить хорошо определенную фундаментальную теорию в рамках компенсирующей теории, которая использует П-стиль. Например, в рамках доктрины Птолемея нельзя открыть закон всемирного тяготения. Его открытие произошло более чем через сто лет после того, как ошибка во взаимоотношениях Солнца и Земли была исправлена Коперником.

Подробное исследование взаимоотношений между П-стилем и К-стилем можно найти в работе [5]. Здесь мы ограничимся следующими утверждениями. С точки зрения П-стиля единственным критерием качества научной концепции является объяснение экспериментальных данных. Такие категории как структура концепции и количество дополнительных гипотез не принимаются в расчет. Пусть две различные концепции A и B объясняют одни и те же экспериментальные данные. Если концепция A была предложена раньше, то с точки зрения приверженцев П-стиля она имеет преимущества перед концепцией B. В этом случае логика приверженцев П-стиля очень проста: у нас есть концепция A и нам не нужна другая концепция B, которая не может объяснить новых экспериментов. Приверженцев П-стиля не интересует относительное качество концепций A и B.

С точки зрения К-стиля хорошо определенная концепция не должна, вообще, содержать дополнительных гипотез. Если концепция содержит дополнительные гипотезы, то это – компенсирующая концепция, которая содержит ошибки (заблуждения) в своих первых принципах. В рамках К-стиля критерий объяснения экспериментальных данных также верен, но прямой тест экспериментальных данных затруднителен из-за дедуктивного характера хорошо определенной концепции. Если хорошо определенная концепция появляется в то время, когда уже имеется конкурирующая компенсирующая концепция, то требуется длительное время, чтобы развить математический формализм на основе первых принципов и объяснить имеющиеся экспериментальные данные на основе этого формализма. В случае конкуренции между доктринами Коперника и Птолемея понадобилось более столетия. Чтобы продемонстрировать возможности МККЯ, нужно предсказать новое физическое явление на основе математического формализма, порожденного МККЯ. Трудно сказать, сколько времени понадобится для такого предсказания, потому что построение математического формализма МККЯ достаточно трудная задача.

Идея обоснования квантовой механики как статистического описания случайно движущихся частиц – это очень старя идея, однако, реализовать ее не удавалось из-за математических трудностей. Были три серьезные проблемы в реализации этой идеи:

1. Построение адекватной пространственно-временно́й геометрии со стохастически движущимися свободными частицами.

2. Построение динамической концепции статистического описания, где не используется понятие вероятности.

3. Описание идеальной жидкости в терминах волновой функции.

Необходимость решения этих проблем существовала с момента возникновения квантовой механики. Для объяснения стохастического движения частиц изобретались стохастические пространственно-временны́е геометрии [7, 8, 9], но эти геометрии были обогащенными геометриями, т.е. геометриями с дополнительными структурами, заданными в пространстве-времени, тогда как нужна было описывать стохастичность частиц в рамках детерминированной геометрии, т.е. без введения дополнительных структур (которые были дополнительными гипотезами).

Хорошо известно, что уравнение Шредингера может быть представлено в виде гидродинамических уравнений для потенциального течения некоторой жидкости [10], но не удавалось описать завихренное течение идеальной жидкости в терминах волновой функции, потому что для этого нужно было проинтегрировать динамические уравнения для идеальной жидкости. В результате волновая функция оставалась первичным объектом. После описания идеальной жидкости в терминах волновой функции [4] жидкость сделалась первичным объектом, и волновую функцию стало возможным рассматривать как атрибут этой жидкости. Тогда квантовые явления можно будет интерпретировать в терминах гидродинамики. Вышеупомянутые проблемы были решены соответственно в работах [3, 2], [11, 6, 12] и [4].

Существенно и характерно, что первые две проблемы были решены очень просто после того, как были найдены и исправлены ошибки (заблуждения) в классическом подходе к этим проблемам. С точки зрения П-стиля можно выдвигать экзотические дополнительные предположения, но поиск ошибок в основаниях геометрии и в принципах статистического описания представляет собой безнадежное предприятие, что-то вроде научной ереси. Только научные диссиденты могут искать ошибки в классических концепциях. Тем не менее заблуждения (ошибки) были найдены. Эти ошибки не были математическими или логическими. Они были ассоциативными. Древние египтяне считали, что все реки текут на север, потому что они знали только одну реку Нил, которая текла точно на север. У древних египтян направление течения реки ассоциировалось с направлением в пространстве, и это было ассоциативное заблуждение, потому что источник этого заблуждения неправильная ассоциация.

Невозможность решения первой проблемы: построения детерминированной пространственно-временно́й геометрии с изначально стохастическим движением свободных частиц связано с ассоциативным заблуждением. Мы полагаем, что прямая линия (аналог евклидовой прямой) представляет собой одномерное множество в любой физической геометрии, потому что мы знаем только такие геометрии, где это утверждение верно. Поскольку любая физическая геометрия есть результат деформации собственно евклидовой геометрии [3, 2], эта одномерность прямой налагает необоснованное ограничение на возможные деформации евклидовой геометрии и устраняет правильную геометрию из списка возможных пространственно-временны́х геометрий.

Невозможность решения второй проблемы: построение динамической концепции статистического описания связана с другим ассоциативным заблуждением. В статистической физике статистическое описание производится в терминах распределений, которые представляют собой разновидность плотности вероятности. На этом основании многие исследователи полагают, что любое статистическое описание является вероятностным описанием, и пытаются построить статистическое описание стохастических мировых линий как вероятностное статистическое описание. Ассоциация между статистическим описанием и теорией вероятностей есть ассоциативное заблуждение. Иногда вероятностное статистическое описание возможно, но не всегда. Динамическая концепция статистического описания возможна всегда, хотя она не столь информативна, как вероятностное статистическое описание.

Наша стратегия исследования микромира такова. Мы ищем ошибки в классическом подходе к описанию микромира, находим их и исправляем. Такая стратегия беспроигрышна, потому что ошибки должны быть найдены и испраавлены независимо от того поможет ли исправление ошибок в объяснении экспериментальных данных.

АККЯ и МККЯ суть различные концепции, описывающие квантовые явления, так же как термодинамика и статистическая физика являются различными концепциями, описывающими тепловые явленя. Имеется соответствие между процедурами и методми в АККЯ и МККЯ. Это соответствие описывается следующей схемой.

АККЯ	МККЯ
1. Используются дополнительные гипотезы (КМ принципы)	1. *Дополнительных гипотезы не используются*
2. Один вид измерений т.к. рассматривается только один среднестатистический объект $\langle\mathcal{S}\rangle$, называемый квантовой системой	2. Два вида измерений, поскольку рассматривается два вида объектов (индивидуальный $\mathcal{S}_{\text{st}}$ и среднестатистический $\langle\mathcal{S}\rangle$)
3. Квантование: процедура на концептуальном уровне: $\mathbf{p}\rightarrow -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ etc.	3. Динамическая квантизация: релятивистская процедура на динамическом уровне $m^2\rightarrow m_{\text{eff}}^2=m^2+\frac{\hbar^2}{c^2}\left(\kappa_l\kappa^l+\partial_l\kappa^l\right)$
4. Переход к классическому приближению: процедура на концептуальном уровне $\hbar\rightarrow 0 \qquad \psi\rightarrow(\mathbf{x},\mathbf{p})$	4. Динамическая расквантизация: релятивистская процедура на динамическом уровне $\partial^k\rightarrow\frac{j^kj^l}{j_sj^s}\partial_l$
5. Комбинация нерелятивистского квантового формализма с принципами СТО	5. Последовательное релятивистское описание на всех этапах
6. Интерпретация в терминах волновой функции ψ	6. Интерпретация в терминах среднестатистических мировых линий (МЛ): $\frac{dx^i}{d\tau}=j^i(x)$ $j^k=-\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial^k\psi-\partial^k\psi^*\cdot\psi\right)$

Теперь главная задача МККЯ – дальнейшая разработка математического формализма, отличающегося от соответствующего формализма АККЯ. В настоящей работе мы рассмотрим только свойства процедуры квантования. В традиционной квантовой механике (АККЯ) процедура квантования есть переход от классического описания частицы к квантовому описанию частицы. В АККЯ квантование есть концептуальная процедура, где понятия классической физики (координата $\mathbf{x}$ и импульс $\mathbf{p}$) заменяются операторами ($\mathbf{x}$ и $-i\hbar\boldsymbol{\nabla}$) и появляется новое понятие – волновая функция ψ. Динамические уравнения для переменных $\mathbf{x},\mathbf{p}$ заменяются уравнением Шредингера (или Клейна-Гордона) для волновой функции ψ. В АККЯ волновая функция ψ есть фундаментальный объект теории, а свойства волновой функции ψ описываются принципами квантовой механики.

В случае МККЯ квантование есть динамическая процедура. Никаких новых понятий не появляется. Динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\text{d}}\left[\mathcal{S}_{\text{d}}\right]$ детерминированных (классических) частиц $\mathcal{S}_{\text{d}}$ преобразуются в динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\text{st}}\left[\mathcal{S}_{\text{st}}\right]$ стохастических (квантовых) частиц $\mathcal{S}_{\text{st}}$. Эти динамические уравнения эквивалентны уравнению Шредингера (или Клейна-Гордона) для волновой функции ψ, которая описывает состояние статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\text{st}}\left[\mathcal{S}_{\text{st}}\right]$. В МККЯ волновая функция есть просто способ описания статистического ансамбля, который представляет собой разновидность жидкости. Волновая функция может использоваться для описания статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{d}}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ детерминированных (классических) частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, так же как и для описания статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. В обоих случая статистический ансамбль представляет собой динамическую систему типа сплошной среды.

В рамках МККЯ процедура квантования (динамическая квантизация) может быть произведена многократно, потому что динамическая квантизация не сопровождается введением новых понятий. Формально динамическая квантизация представляет собой добавление дополнительного члена к лагранжиану. Этот дополнительный член вводит новое поле κ, описывающее случайную составляющую движения стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Мы можем повторить динамическую квантизацию много раз, вводя каждый раз новое поле κ. Оказывается, что каждое новое поле κ совпадает с существующим полем κ с точностью до множителя, и повторная динамическая квантизация приводит только к изменению интенсивности κ-поля. Возникающее κ-поле представляет собой очень важное поле, потому что оно ответственно за рождение пар, и механизм рождения пар может быть описан в терминах κ-поля [13]. Ничего подобного мы не можем получить в рамках АККЯ, потому что в АККЯ квантование есть концептуальная процедура, которая может быть проведена только один раз. Кроме того в рамках АККЯ κ-поле есть составная часть волновой функции. κ-поле не может быть отделено от волновой функции, потому что волновая функция является фундаментальным понятием АККЯ. Механизм рождения пар не может быть определен и описан в рамках АККЯ. Аналогично, в рамках термодинамики мы не можем получить никакой информации о молекулярной структуре вещества, тогда как мы можем сделать это в рамках статистической физики. Другими словами, МККЯ осуществляет более детальное описание квантовых объектов. Такое описание невозможно в рамках АККЯ.

Математический формализм МККЯ отличается от формализма АККЯ, так же как математический формализм статистической физики отличается от формализма термодинамики. При построении МККЯ разработка математического формализма МККЯ является основной задачей. В настоящей работе мы исследуем математические свойства повторной динамической квантизации. В рамках МККЯ процедура квантования проявляет групповые свойства, и это может оказаться интересным и полезным для дальнейших исследований.

2 Динамическая квантизация

Действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ свободных детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ имеет вид

$$\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]: \qquad \mathcal{A}[x] = \int \left\{ -mc\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} \right\} d\tau d\boldsymbol{\xi}, \qquad \dot{x}^k \equiv \frac{dx^k}{d\tau} \tag{2.1}$$

где координаты $x = \{x^i(\xi)\}$, $i = 0, 1, 2, 3$, $\xi = \{\tau, \boldsymbol{\xi}\} = \{\tau, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ описывают положение частицы в пространстве-времени. Лагранжевы координаты

$\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ маркируют частицы ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm d}]$. Здесь и далее по повторяющимся латинским индексам производится суммирование $(0-3)$. Чтобы произвести динамическую квантизацию и получить действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]$, стохастических частиц следует сделать замену

$$m^2 \to m^2 + \frac{\hbar^2}{c^2}\left(\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right), \qquad \partial_l \equiv \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{2.2}$$

где $\kappa = \left\{\kappa^l(x)\right\}$, $l = 0,1,2,3$ суть новые динамические переменные, описывающие интенсивность стохастической составляющей движения чапстицы. Динамические уравнения для κ-поля κ^l определяются из вариационного принципа при помощи вариации по κ^l. После замены (2.2) действие (2.1) превращается в действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]$

$$\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]: \qquad \mathcal{A}[x,\kappa] = \int\left\{-mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\right\}d\tau d\boldsymbol{\xi}, \qquad K = \sqrt{1+\lambda^2\left(\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right)} \tag{2.3}$$

где $\lambda = \hbar/mc$ есть комптоновская длина волны частицы.

Смысл замены (2.2) становится ясным, если записать действие (2.3) в нерелятивистском приближении, когда $g_{ik} = \mathrm{diag}\{c^2,-1,-1,-1\}$, $c^{-2}\left(\kappa^0\right)^2 \ll \boldsymbol{\kappa}^2$, и $c^2\left(\dot{x}^0\right)^2 \gg \dot{\mathbf{x}}^2$. В нерелятивистском приближении мы получаем вместо (2.3)

$$\mathcal{E}_{\rm st}[\mathcal{S}_{\rm st}]: \qquad \mathcal{A}[\mathbf{x},\mathbf{u}] = \int\left\{-mc^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}dt d\boldsymbol{\xi}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$, $\quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \frac{\hbar}{m}\boldsymbol{\kappa}$. Переменная $\mathbf{u}$ описывает среднее значение стохастической составляющей скорости. Энергия $m\mathbf{u}^2/2$, связанная с со стохастической составляющей добавляется к энергии, связанной регулярной составляющей скорости частицы. Последний член в (2.4) описывает связь между стохастической составляющей скорости и регулярной ее составляющей.

Формально замена (2.2) с произвольным параметром $a = \hbar^2$

$$m^2 \to m^2 + \frac{a}{c^2}\left(\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right) \tag{2.5}$$

может быть применена к любому статистическому ансамблю (2.3) стохастических частиц, при этом детерминированные частицы рассматриваются как стохастические с нулевой стохастичностью. Такое преобразование изменяет интенсивность стохастичности, и мы получаем динамику стохастических частиц с другим видом стохастичности. Такой подход позволяет получить динамику стохастических частиц с непрерывной зависимостью от интенсивности стохастичности, описываемой параметром $a = \hbar^2$. Такая зависимость от параметра позволяет отделить динамические свойства от статистических свойств, обусловленных стохастичностью движения частиц. Разумеется, результаты описания в рамках АККЯ также зависят от $a = \hbar^2$, однако, в этом случае изменение параметра $a = \hbar^2$ сопрождает изменение квантовых принципов, которые содержат параметр $a=\hbar^2$. Кроме того, полагая $a=\hbar^2=0$ в традиционном квантовом описании, мы не получаем классического описания, потому что квантовые принципы не переходят в классические при $\hbar\to 0$. В традиционном квантовом описании динамика смешана со стохастикой таким образом, что их разделение оказывается трудной задачей. Математическая причина этой путаницы будет указана ниже.

Динамические уравнения для переменных κ^l получаются из действия (2.3) при помощи вариации по κ^l

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\kappa^l}=-\lambda^2\kappa_l\frac{mcR}{K}+\lambda^2\partial_l\frac{mcR}{2K}=0,\qquad l=0,1,2,3 \tag{2.6}$$

где

$$R=J\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k},\qquad J=\frac{\partial\left(\tau,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)} \tag{2.7}$$

Решение уравнений (2.6) имеет вид

$$\kappa_l=\partial_l\kappa,\qquad l=0,1,2,3,\qquad \kappa=\frac{1}{2}\ln\frac{mcR}{K} \tag{2.8}$$

После ряда замен переменных и некоторого интегрирования действие (2.3) приводится к виду (См. математические детали в Приложении)

$$\mathcal{A}\left[\psi,\psi^*\right]=\int\left\{b_0^2\partial_k\psi^*\partial^k\psi-m^2c^2\rho-\frac{b_0^2}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\rho+\left(\hbar^2-b_0^2\right)\frac{\partial_l\rho\partial^l\rho}{4\rho}\right\}d^4x \tag{2.9}$$

где $\psi=\psi\left(x\right)$ есть двухкомпонентная комплексная волновая функция, и ψ^* есть величина , комплексно сопряженная к ψ

$$\psi=\binom{\psi_1}{\psi_2},\qquad \psi^*=\left(\psi_1^*,\psi_2^*\right), \tag{2.10}$$

$$\rho=\psi^*\psi,\qquad s_\alpha=\frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho},\qquad \alpha=1,2,3 \tag{2.11}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ суть матрицы Паули. Величина b_0 есть произвольная вещественная постоянная ($b_0\neq 0$). Здесь и в дальнейшем по повторяющимся греческим индексам производится суммирование $(1-3)$. Динамическая система, описываемая действием, есть идеальная жидкость, где 4-ток j^i описывается соотношением

$$j^l=\frac{ib_0}{2}\left(\psi^*\partial^l\psi-\partial^l\psi^*\cdot\psi\right) \tag{2.12}$$

Величины s_α описывают завихренность течения жидкости. Если $s_\alpha=$const, $\alpha=1,2,3$, течение жидкости будет потенциальным.

В случае потенциального течения следует использовать линейно зависимые компоненты волновой функции $\psi_1=a\psi_2$, $a=$const. В этом случае $s_\alpha=$const, $\alpha=1,2,3$ и действие (2.9) приводится к виду

$$\mathcal{A}\left[\psi,\psi^*\right]=\int\left\{b_0^2\partial_k\psi^*\partial^k\psi-m^2c^2\rho+\left(\hbar^2-b_0^2\right)\frac{\partial_l\rho\partial^l\rho}{4\rho}\right\}d^4x \tag{2.13}$$

Полагая $b_0 = \hbar$ в (2.13), получаем действие для уравнения Клейна-Гордона

$$\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]: \qquad \mathcal{A}\left[\psi,\psi^*\right] = \int \left\{\hbar^2\partial_k\psi^*\partial^k\psi - m^2c^2\psi^*\psi\right\} d^4x \tag{2.14}$$

Таким образом, замена (2.2) осуществляет квантование динамических уравнений для свободной релятивистской частицы с помощью динамических методов, т.е. без ссылки на квантовыые принципы.

В действии (2.13) b_0 является произвольной постоянной, и действия (2.13) и (2.14) описывают одну и ту же динамическую систему для любого значения величины $b_0 \neq 0/$. Однако, есть разница в описании статистического ансамбля с помощью двух действий (2.13) и (2.14). Динамическое уравнение, порождаемое действием (2.14), линейно, тогда как динамическое уравнение, порождаемое действием (2.13), линейно только при $b_0^2 = \hbar^2$. С другой стороны, если мы положим $\hbar = 0$ в действии (2.13), мы получим классическое описание, тогда как, если положим $\hbar = 0$ в действии (2.14), мы, вообще, не получим никакого описания. Дело в том, что постоянная b_0 связана с динамикой, тогда как постоянная $\hbar$ связана со стохастичностью. Если мы полагаем $b_0 = 0$ в действии (2.13), мы подавляем динамику. Если мы полагаем $\hbar = 0$ в действии (2.13), мы подавляем стохастику. В действии (2.14) $b_0 = \hbar$, и полагая $\hbar = 0$ в действии (2.14), мы подавляем динамику и стохастику одновременно. Таким образом, в действии (2.14) динамика перепутана со стохастичностью, и эта путаница является необходимым условием линейности динамического уравнения. Линейность динамического уравнения очень привлекательна. АККЯ даже рассматривает эту линейность в качестве принципа. Смешение динамики и стохастики есть плата за эту линейность.

Применим повторную динамическую квантизацию к действию (2.3). Получаем вместо (2.3)

$$\mathcal{A}\left[x,\kappa_{(1)},\kappa_{(2)}\right] = \int \left\{-mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\right\} d\tau d\boldsymbol{\xi} \tag{2.15}$$

где теперь

$$K = \sqrt{1+\lambda^2\sum_{A=1,2}\left(\kappa_{(A)l}\kappa_{(A)}^l + \partial_l\kappa_{(A)}^l\right)}, \tag{2.16}$$

Динамические уравнения для $\kappa_{(A)l}$ имеют вид

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\kappa_{(A)}^l} = -\lambda^2\kappa_{(A)l}\frac{mcR}{K} + \lambda^2\partial_l\frac{mcR}{2K} = 0, \qquad A = 1,2 \tag{2.17}$$

$$R = \sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\frac{\partial\left(\tau,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)}$$

Решение динамических уравнений (2.17) дает

$$\kappa_{(1)l} = \kappa_{(2)l} = \frac{1}{2}\partial_l\kappa, \qquad \kappa = \ln\frac{mcR}{K} \tag{2.18}$$

Подстановка (2.18) в (2.16) приводит к

$$K = \sqrt{1 + \lambda'^2 \left(\kappa_l \kappa^l + \partial_l \kappa^l\right)}, \qquad \lambda'^2 = 2\lambda^2 = 2\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \tag{2.19}$$

Сравнивая (2.17) с (2.3), заключаем, что две последовательные динамические квантизации, описываемые параметром $\hbar^2$ эквивалентны одной динамической квантизации, описываемой параметром $\hbar'^2 = 2\hbar^2$.

Динамическая квантизация не зависит от формы представления действия. Например, применим повторную динамическую квантизацию к действию (2.13). Используя замену (2.2) в действии (2.13), получаем дополнительный член $\mathcal{A}_{\text{add}}[\psi, \psi^*, \kappa]$ в действии (2.13)

$$\mathcal{A}_{\text{add}}[\psi, \psi^*, \kappa] = -\int \left\{\hbar^2 \left(\kappa_l \kappa^l + \partial_l \kappa^l\right) \psi^* \psi\right\} d^4x \tag{2.20}$$

Динамические уравнения для κ-поля имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \kappa^l} + \frac{\delta \mathcal{A}_{\text{add}}}{\delta \kappa^l} = \frac{\delta \mathcal{A}_{\text{add}}}{\delta \kappa^l} = -2\hbar^2 \kappa_l (\psi^* \psi) + \hbar^2 \partial_l (\psi^* \psi) = 0, \qquad l = 0, 1, 2, 3 \tag{2.21}$$

Решение динамических уравнений (2.21) может быть записано в виде

$$\kappa_l = \frac{1}{2} \partial_l \ln \rho = \frac{1}{2} \partial_l \ln (\psi^* \psi) \tag{2.22}$$

После подстановки (2.22) в (2.20) получаем

$$\mathcal{A}_{\text{add}}[\psi, \psi^*] = -\int \hbar^2 \left(\frac{\partial_l \rho \partial^l \rho}{4\rho} - \frac{\partial_l \rho \partial^l \rho}{2\rho} + \frac{1}{2} \partial_l \partial^l \rho\right) d^4x \tag{2.23}$$

Последний член в (2.23) имеет вид дивергенции. Он не дает вклада в динамические уравнения и может быть опущен. Объединяя (2.13) и (2.23), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\psi, \psi^*] + \mathcal{A}_{\text{add}}[\psi, \psi^*] \;\; = \;\; & \int \left\{ b_0^2 \partial_k \psi^* \partial^k \psi - \frac{b_0^2}{4} (\partial_l s_\alpha) \left(\partial^l s_\alpha\right) \rho \right. \\ & \left. - m^2 c^2 \rho + \left(2\hbar^2 - b_0^2\right) \frac{\partial_l \rho \partial^l \rho}{4\rho} \right\} d^4x \end{aligned} \tag{2.24}$$

Здесь и далее производится суммирование по повторяющимся греческим индексам $(1-3)$. Действие (2.24), получаемое как результат повторной динамической квантизации, отличается от действия (2.13) только в том отношении, что квантовая постоянная $\hbar$ заменяется квантовой постоянной $\hbar' = \sqrt{2}\hbar$.

3 Обсуждение

Повторная динамическая квантизация демонстрирует разницу между подходами АККЯ и МККЯ. Это различие заключается главным образом в интерпретации κ-поля. С точки зрения АККЯ κ-поле, вообще, не существует, потому что в соответствии с (2.22) оно является составной частью волновой функции, а волновая функция является атрибутом частицы. В рамках АККЯ нет необходимости рассматривать κ-поле, достаточно рассмотреть соответствующую волновую функцию. В АККЯ волновая функция есть фундаментальный объект, чьи свойства описываются квантовой аксиоматикой, и бесполезно делить волновую функцию на ее составные части.

В МККЯ волновая функция есть просто метод описания статистического ансамбля $\mathcal{E}_{\rm st}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$, состоящего из стохастических частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$. Регулярная составляющая стохастического движения частицы описывается 4-током j^k, тогда как стохастическая составляющая описывается κ-полем κ^l. С формальной точки зрения κ-поле представляет собой релятивистское силовое поле, которое порождается регулярной составляющей движения, и которое может существовать в отрыве от его источника [13]. κ-поле взаимодействует с регулярной составляющей движения частицы. Две разные стохастические частицы взаимодействуют через их общее κ-поле точно так же, как две заряженные частицы взаимодействуют через общее электромагнитное поле. Взаимодействие двух частиц через κ-поле возможно только в МККЯ. Это свойство отсутствует в АККЯ, и это серьезный дефект АККЯ, потому что κ-поле может рождать пары частица-античастица. Ни электромагнитное поле, ни гравитационное поле не могут рождать пары, потому что они не меняют массу частицы, что необходимо для рождения пар. Только κ-поле может рождать пары, потому что фактор K в (2.3) может сделать массу m частицы мнимой, когда $K^2<0$. Это необходимо для того, чтобы составляющая $dx^0/d\tau$ 4-скорости частицы могла изменить знак.

Эффект рождения пар является ключевым эффектом при столкновении частиц большой энергии. Эксперименты показывают, что рождение пар является существенно квантовым эффектом. В настоящее время удовлетворительный механизм рождения пар не известен. По-видимому, этот механизм связан с применением κ-поля. Во всяком случае, рождение пар с помощью заданного зависящего от времени κ-поля получено [13], тогда как рождение пар при столкновении релятивистских частиц остается нерешенной задачей. Традиционное описание рождения пар в рамках квантовой теории поля неудовлетворительно в некоторых аспектах (См. детали в [13]).

Приложение A. Преобразование действия

Преобразуем действие (2.3) к виду (2.13). Введем вместо τ переменную ξ_0, и перепишем (2.3) в виде

$$\mathcal{A}\left[x,\kappa\right]=\int\left\{-mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\right\}d^4\xi,\qquad K=\sqrt{1+\lambda^2\left(\kappa_l\kappa^l+\partial_l\kappa^l\right)}\tag{A.1}$$

где $\xi=\{\xi_0,\boldsymbol{\xi}\}=\{\xi_k\}$, $k=0,1,2,3$, $x=\left\{x^k\left(\xi\right)\right\}$, $k=0,1,2,3$.

Будем рассматривать переменные $\xi = \xi(x)$ в (A.1) как зависимые переменные, а переменные x как независимые переменные. Пусть якобиан

$$J = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det ||\xi_{i,k}||, \qquad \xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i, \qquad i,k = 0,1,2,3 \tag{A.2}$$

рассматривается как мультилинейная функция переменных $\xi_{i,k}$. Тогда

$$d^4\xi = J d^4 x, \qquad \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\xi_0} \equiv \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J^{-1}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \tag{A.3}$$

После преобразования к зависимым переменным ξ действие (A.1) принимает вид

$$\mathcal{A}[\xi, \kappa] = -\int mcK\sqrt{g_{ik}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}}d^4x, \tag{A.4}$$

Введем новые переменные

$$j^k = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{A.5}$$

с помощью множителей Лагранжа p_k

$$\mathcal{A}[\xi, \kappa, j, p] = \int \left\{-mcK\sqrt{g_{ik}j^i j^k} + p_k\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} - j^k\right)\right\}d^4x, \tag{A.6}$$

Вариация по ξ_i дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \xi_i} = -\partial_l\left(p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}}\right) = 0, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{A.7}$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}}\right) \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}}\xi_{k,l} \equiv J\delta_k^i, \qquad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{A.9}$$

можно проверить прямой подстановкой, что общее решение линейных уравнений (A.7) имеет вид

$$p_k = b_0\left(\partial_k \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\partial_k \xi_\alpha\right), \qquad k = 0,1,2,3 \tag{A.10}$$

где $b_0 \neq 0$ есть постоянная, $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1,2,3$ суть произвольные функции переменных $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, и φ есть динамическая переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной. Подставим (A.10) в (A.6). Член вида $\partial_k\varphi\partial J/\partial\xi_{0,k}$

приводится к якобиану и не дает вклада в динамическое уравнение. Члены вида $\xi_{\alpha,k}\partial J/\partial\xi_{0,k}$ обращаются в нуль в силу тождеств (A.9). Получаем

$$\mathcal{A}[\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa,j]=\int\left\{-mcK\sqrt{g_{ik}j^ij^k}-j^kp_k\right\}d^4x, \tag{A.11}$$

где величины p_k определяются соотношениями (A.10)

Вариация (A.11) по κ^l дает

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\kappa^l}=-\frac{\lambda^2mc\sqrt{g_{ik}j^ij^k}}{K}\kappa_l+\partial_l\frac{\lambda^2mc\sqrt{g_{ik}j^ij^k}}{2K}=0 \tag{A.12}$$

Оно может быть записано в виде

$$\kappa_l=\partial_l\kappa=\frac{1}{2}\partial_l\ln\rho,\qquad e^{2\kappa}=\frac{\rho}{\rho_0}\equiv\frac{\sqrt{j_sj^s}}{\rho_0mcK}, \tag{A.13}$$

где ρ_0 =const есть постоянная интегрирования. Подставляя выражение для K из (A.1) в (A.13), получаем динамическое уравнение для κ

$$\hbar^2\left(\partial_l\kappa\cdot\partial^l\kappa+\partial_l\partial^l\kappa\right)=\frac{e^{-4\kappa}j_sj^s}{\rho_0^2}-m^2c^2 \tag{A.14}$$

Вариация (A.11) по j^k дает

$$p_k=-\frac{mcKj_k}{\sqrt{g_{ls}j^lj^s}} \tag{A.15}$$

или

$$p_kg^{kl}p_l=m^2c^2K^2 \tag{A.16}$$

Подставляя второе уравнение (A.13) в (A.15), получаем

$$j_k=-\rho_0e^{2\kappa}p_k, \tag{A.17}$$

Теперь мы исключим переменные j^k из действия (A.11), используя соотношение (A.17) и (A.13). Получаем

$$\mathcal{A}[\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa]=\int\rho_0e^{2\kappa}\left\{-m^2c^2K^2+p^kp_k\right\}d^4x, \tag{A.18}$$

где p_k определяется соотношением (A.10). Используя выражение (A.1) для K, преобразуем первый член действия (A.18) следующим образом

$$\begin{aligned}-m^2c^2e^{2\kappa}K^2 &= -m^2c^2e^{2\kappa}\left(1+\lambda^2\left(\partial_l\kappa\partial^l\kappa+\partial_l\partial^l\kappa\right)\right)\\ &= -m^2c^2e^{2\kappa}+\hbar^2e^{2\kappa}\partial_l\kappa\partial^l\kappa-\frac{\hbar^2}{2}\partial_l\partial^le^{2\kappa}\end{aligned}$$

Примем во внимание, что последний член имеет вид дивергенции. Он не дает вклада в динамические уравнения и может быть опущен. Опуская этот член, получаем

$$\mathcal{A}[\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa] = \int \rho_0 e^{2\kappa} \left\{ -m^2c^2 + \hbar^2 \partial_l \kappa \partial^l \kappa + p^k p_k \right\} d^4x, \tag{A.19}$$

Вместо динамических переменных $\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa$ введем n-компонентную комплексную функцию

$$\psi = \{\psi_\alpha\} = \left\{ \sqrt{\rho} e^{i\varphi} u_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \right\} = \left\{ \sqrt{\rho_0} e^{\kappa + i\varphi} u_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \right\}, \qquad \alpha = 1, 2, ...n \tag{A.20}$$

Здесь u_α суть функции только переменных $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, обладающие следующими свойствами

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} u_\alpha^* u_\alpha = 1, \qquad -\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \left(u_\alpha^* \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \xi_\beta} u_\alpha \right) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}) \tag{A.21}$$

где $(^*)$ означает комплексное сопряжение. Число n компонентов волновой функции ψ выбирается таким образом, чтобы уравнения (A.21) имели решение. Тогда получаем

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \psi_\alpha^* \psi_\alpha = \rho = \rho_0 e^{2\kappa}, \qquad \partial_l \kappa = \frac{\partial_l (\psi^*\psi)}{2\psi^*\psi} \tag{A.22}$$

$$p_k = -\frac{ib_0 (\psi^* \partial_k \psi - \partial_k \psi^* \cdot \psi)}{2\psi^*\psi}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{A.23}$$

Подставляя соотншения (A.22), (A.23) в (A.19), получаем действие, записаное в терминах волновой функции ψ

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\psi, \psi^*] &= \int \left\{ \left[\frac{ib_0 (\psi^* \partial_k \psi - \partial_k \psi^* \cdot \psi)}{2\psi^*\psi} \right] \left[\frac{ib_0 \left(\psi^* \partial^k \psi - \partial^k \psi^* \cdot \psi \right)}{2\psi^*\psi} \right] \right. \\ &\quad \left. + \hbar^2 \frac{\partial_l (\psi^*\psi) \partial^l (\psi^*\psi)}{4 (\psi^*\psi)^2} - m^2c^2 \right\} \psi^*\psi d^4x \end{aligned} \tag{A.24}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 2$, и волновая функция имеет два компонента. В этом случае

$$\psi = \binom{\psi_1}{\psi_2}, \qquad \psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*), \tag{A.25}$$

Имеется следующее тождество

$$\begin{aligned} &\frac{(\psi^* \partial_l \psi - \partial_l \psi^* \cdot \psi) \left(\psi^* \partial^l \psi - \partial^l \psi^* \cdot \psi \right)}{4\rho} - \frac{(\partial_l \rho) \left(\partial^l \rho \right)}{4\rho} \\ \equiv \; & -\partial_l \psi^* \partial^l \psi + \frac{1}{4} (\partial_l s_\alpha) \left(\partial^l s_\alpha \right) \rho \end{aligned} \tag{A.26}$$

где 3-вектор $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3, \}$ определяется соотношением

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad s_\alpha = \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{A.27}$$

а матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ имеют вид

$$\sigma_1 = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right), \qquad \sigma_2 = \left(\begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array}\right), \qquad \sigma_1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) \tag{A.28}$$

Используя тождество (A.26), получаем из (A.24) выражение для действия

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ b_0^2 \partial_k \psi^* \partial^k \psi - m^2 c^2 \rho - \frac{b_0^2}{4} (\partial_l s_\alpha) \left(\partial^l s_\alpha\right) \rho + \left(\hbar^2 - b_0^2\right) \frac{\partial_l \rho \partial^l \rho}{4\rho} \right\} d^4 x \tag{A.29}$$

которое совпадает с (2.9).

Список литературы

[1] Yu. A. Rylov, Model conception of quantum phenomena: logical structure and investigation methods. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0310050, v2).

[2] Yu. A. Rylov, Deformation principle as a foundation of physical geometry. (Available at http://arXiv.org/abs/math.GM/0312160)

[3] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (available at http://arXiv.org/abs/math.MG/0103002).

[4] Yu.A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.* **40**, No.1, 256-278, (1999).

[5] Yu.A. Rylov Associative delusions and problem of their overcoming. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0201065).

[6] Yu. A. Rylov, Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them. (In preparation, available at http:// arXiv.org /abs/physics /0210003).

[7] K. Menger, Probabilistic geometry. *Proc. Nat. Acad. Sci.,* **37**, 226-229, (1951).

[8] Д.И. Блохинцев, *Пространство и время в микромире.* Наука, 1970.

[9] Д.И. Блохинцев, Стохастические пространства. *Физ. Элементарн. частиц и атом. ядра* **5,** 606-644, (1974).

[10] E. Madelung, Quanten theorie in hydrodynamischer Form. *Z.Phys.* **40,** 322-326, (1926).

[11] Yu.A. Rylov, Hamilton variational principle for statistical ensemble of deterministic systems and its application for ensemble of stochastic systems. *Russ. J. Math. Phys.*, **9**, iss. 3, 335-348, (2002).

[12] Yu.A. Rylov, Quantum mechanics as a dynamic construction. *Found. Phys.* **28**, No.2, 245-271, (1998).

[13] Yu. A. Rylov, Classical description of pair production. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0301020).