Релятивистская природа нерелятивистской квантовой механики и многовариантость геометрии пространства-времени

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия 119526, Москва, Пр. Вернадского 101-1.
e-mail: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{\ }rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{\ }rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Используется исследовательская стратегия: "Найди ошибку в основаниях физики и исправь ее." Исправлены два фундаментальных дефекта: (1) нерелятивистское понятие состояния частицы, (2) неадекватность формализма дифференциальной геометрии при метрическом подходе к геометрии. Использование релятивистского понятия состояния частицы позволяет создать единый формализм для описания движения детерминированных и стохастических частиц. Квантовая механика обосновывается как статистическое описание движения стохастических частиц. Стохастичность движения квантовых частиц объясняется многовариантностью геометрии пространства-времени, которая приводит к вихлянию мировых линий элементарных частиц. Релятивистское понятие состояния частицы и метрический подход к геометрии пространства-времени позволяют построить каркасную концепцию элементарных частиц. Каркасная концепция концепция позволяет исследовать устройство элементарных частиц (а не только систематизировать их, приписывая им квантовые числа).

Ключевые слова: релятивистское состояние частицы; единый формализм динамики; метрический подход к геометрии; многовариантная геометрия; неадекватность формализма дифференциальной геометрии.

1 Введение

Мы полагаем, что многие проблемы современной теоретической физики являются результатом некоторых ошибок в основаниях физики. Находя эти ошибки и исправляя их, можно решить многие проблемы теоретической физики, если эти ошибки сделаны в основаниях физики на глубоком уровне. Исправление таких ошибок (если они имеются) может существенно изменить направление развития физики. Это может привести к развитию нового формализма (разумеется, если ошибка действительно существует и касается оснований физики).

В этой работе мы рассмотрим две существенные ошибки в основании физики. Первая ошибка связана с тем, что динамика релятивистских частиц не является полностью релятивистской в том смысле, что динамические уравнения движения частиц релятивистские, тогда как состояние релятивистской частицы описывается нерелятивистски. Это не существенно при описании детерминированных частиц, но это существенно при описании стохастических (квантовых) частиц. Введение релятивистского состояния частицы позволяет создать единый формализм для описания детерминированных и стохастических частиц. В результате удается объяснить квантовые эффекты как результат статистического описания движения стохастических частиц, и квантовые принципы перестают быть первыми принципами природы.

Вторая ошибка связана с понятием многовариантной геометрии. Традиционная геометрия пространства-времени не признает понятия многовариантности. Рассмотрение многовариантной геометрии пространства-времени позволяет объяснить стохастическое движение свободных частиц. Рассмотрение многовариантной геометрии пространства-времени позволяет построить каркасную концепцию элементарных частиц. Каркасная концепция позволяет исследовать устройство элементарных частиц, тогда как традиционная теория элементарных частиц может только систематизировать элементарные частицы, приписывая им квантовые числа.

Динамика релятивистских частиц не была полностью сформулирована в начале двадцатого века. Динамические уравнения движения частицы были релятивистскими, но описание состояния частицы оставалось нерелятивистским. Это не существенно для динамики детерминированных частиц. Но это важно для описания движения недетерминированных (стохастических) частиц. Без релятивистского описания состояния частицы нельзя описать стохастическое движение квантовых частиц в терминах динамики классических частиц. В результате исследователи были вынуждены изобрести аксиоматическую концепцию, известную как нерелятивистская квантовая механика. На самом деле, нерелятивистская квантовая механика является релятивистской концепцией в том смысле, что только среднее движение нерелятивистских квантовых частиц является нерелятивистским, тогда как стохастическая составляющая движения квантовой частицы является релятивистской. Среднее значение стохастической составляющей исчезает при усреднении, и это не учитывается квантовой механикой. Тем не менее, для построения динамики квантовой частицы нужно использовать релятивистскую концепцию динамики частиц. Истинное (релятивистское) описание состояния частицы позволяет описывать движение квантовых частиц как статистическое описание движения классических стохастических частиц. В результате получается статистическое обоснование квантовой механики, где принципы квантовой механики оказываются вторичными принципами, которые получаются как результат статистического описания классической динамики стохастических частиц.

Кроме того, для статистического обоснования квантовой механики надо показать, что такое волновая функция и как она появляется в статистическом описании. Оказывается, что волновая функция является способом описания идеальной сплошной среды [1]. В самом деле, статистическое описание стохастических частиц есть описание статистического ансамбля, который представляет собой множество многих одинаковых независимых частиц (детерминированных или стохастических). Движение статистического ансамбля сродни движению газа, который представляет собой множество многих одинаковых частиц, взаимодействующих через столкновения. Методы описания газа совпадают с методами описания статистического ансамбля. Это обстоятельство объясняет появление волновой функции в квантовой механике при условии, что квантовая механика представляет собой статистическое описание движения стохастических частиц в терминах статистического ансамбля.

После обоснования квантовой механики как статистического описания стохастически движущихся частиц возник вопрос, почему частицы малой массы движутся стохастически. Причиной стохастического поведения частиц оказалась дискретность геометрии пространства-времени. Точнее, причиной стохастичности движения является многовариантность дискретной геометрии пространства-времени.

Многовариантность – это такое свойство геометрии, когда в точке P имеется много векторов $\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PQ}'$, $\mathbf{PQ}''$,... которые эквивалентны вектору $\mathbf{AB}$ в точке A, но векторы $\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PQ}'$, $\mathbf{PQ}''$,... не эквивалентны между собой. Даже в геометрии Минковского эквивалентность пространственноподобных векторов многовариантна. Например, вектор $\mathbf{PQ} = (r_1, r_1 \cos \phi_1, r_1 \sin \phi_1, z)$ и вектор $\mathbf{PQ}' = (r_2, r_2 \cos \phi_2, r_2 \sin \phi_2, z)$ эквивалентны вектору $\mathbf{AB} = (0, 0, 0, z)$ для произвольных значений r_1, ϕ_1, r_2, ϕ_2, но векторы $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{PQ}'$, вообще говоря, не эквивалентны. Эквивалентность времениподобных векторов одновариантна в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, но она многовариантна в дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Многовариантность векторов, касательных к мировой линии частицы, приводит к вихлянию мировой линии, что означает стохастичность частицы.

Эквивалентность двух векторов $\mathbf{PQ}$ and $\mathbf{AB}$ определяется следующим образом

$$\mathbf{PQ}\mathrm{eqv}\mathbf{AB}: \quad (\mathbf{PQ}.\mathbf{AB}) = |\mathbf{PQ}| \cdot |\mathbf{AB}| \wedge |\mathbf{PQ}| = |\mathbf{AB}| \tag{1.1}$$

где $(\mathbf{PQ}.\mathbf{AB})$ есть скалярное произведение векторов $\mathbf{PQ}$ and $\mathbf{AB}$ и $|\mathbf{PQ}|$ есть длина вектора $\mathbf{PQ}$.

Заметим, что дискретная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ – это такая геометрия, где расстояние $\rho(A, B)$ между любыми точками A и B больше, чем элементарная длина λ_0

$$|\rho(A, B)| \notin (0, \lambda_0), \quad \forall A, B \in \Omega \tag{1.2}$$

где Ω есть множество точек, на котором задана геометрия. Подчеркнем, что соотношение (1.2) есть ограничение на вид функции расстояния ρ, а не на множество точек Ω. В частности, множество Ω может совпадать с многообразием Ω_{M}, где задана геометрия Минковского. Вместо функции расстояния ρ более удобно использовать мировую функцию $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$, потому что мировая функция всегда вещественна, даже в геометрии Минковского, где ρ мнимо для пространственноподобных векторов. Мировая функция σ_{d} дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ может иметь вид

$$\sigma_{\mathrm{d}}(P,Q) = \sigma_{\mathrm{M}}(P,Q) + \frac{\lambda_0^2}{2}\mathrm{sgn}\left(\sigma_{\mathrm{M}}(P,Q)\right) \tag{1.3}$$

где σ_{M} есть мировая функция геометрии Минковского. В инерциальной системе координат σ_{M} имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{M}}(x,x') = \frac{1}{2}g_{ik}\left(x^i - x'^i\right)\left(x^k - x'^k\right), \quad g_{ik} = \mathrm{diag}\left(c^2, -1, -1, -1\right) \tag{1.4}$$

Здесь и далее производится суммирование $(0 \div 3)$ по повторяющимся латинским индексам и $(1 \div 3)$ по греческим индексам. Легко проверить, что (1.3) удовлетворяет ограничению (1.2).

В терминах мировой функции скалярное произведение $(\mathbf{PQ}.\mathbf{AB})$ и длина $|\mathbf{PQ}|$ могут быть представлены в виде

$$(\mathbf{PQ}.\mathbf{AB}) = \sigma(P,B) + \sigma(Q,A) - \sigma(P,A) - \sigma(Q,B) \tag{1.5}$$

$$|\mathbf{PQ}| = \sqrt{2\sigma(P,Q)} \tag{1.6}$$

Бескоординатные формулы (1.5) и (1.6) верны в любой физической геометрии. Физическая геометрия – это такая геометрия, которая может быть полностью описана в терминах и только в терминах мировой функции σ. Описание геометрии в терминах мировой функции σ (или в терминах функции расстояния ρ) известно как метрический подход к геометрии.

К сожалению, метрический подход к геометрии не может быть последовательно осуществлен при традиционном подходе к геометрии. Причиной этого является неадекватность операций линейного векторного пространства (дифференциальной геометрии) при метрическом подходе к геометрии.

Метрический подход к геометрии означает, что геометрия описывается бескоординатным способом в терминах функции расстояния ρ или мировой функции $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$. Метрический подход необходим для опознания одного и того же геометрического объекта в различных геометриях. Геометрический вектор (g-вектор) $\mathbf{PQ} = \{P,Q\}$ есть упорядоченное множество из двух точек $P,Q \in \Omega$. В геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma,\Omega\}$ имеется много g-векторов $\mathbf{AB}$, которые эквивалентны g-вектору $\mathbf{PQ}$. Они определяются соотношением (1.1).

Если отношение эквивалентности транзитивно, и для любых g-векторов из соотношений $(\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{AB}) \wedge (\mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2\mathrm{eqv}\mathbf{AB})$ следует, что $(\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2)$, то множество всех g-векторов $\mathbf{PQ}$, $(\mathbf{PQ}\mathrm{eqv}\mathbf{AB})$ образует класс эквивалентности $[\mathbf{AB}]$ g-вектора $\mathbf{AB}$. В этом случае геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma,\Omega\}$ одновариантна. Если отношение эквивалентности интранзитивно, то геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma,\Omega\}$ многовариантна.

В одновариантной геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ можно связать класс эквивалентности $[\mathbf{AB}]$ с линейным вектором (линвектором)) $u \in \mathcal{L}_n$ линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$ и применить операции, определенные для линвекторов в $\mathcal{L}_n$ для классов эквивалентности геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$.

В многовариантной геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ нельзя определить линейные операции линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$. Если тем не менее определить суммирование двух g-векторов и умножение g-вектора на число, то эти операции оказываются многозначными, потому что такое определение этих операций содержит отношение эквивалентности (1.1), которое многозначно в многовариантной геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$.

Геометрия Минковского одновариантна по отношению к времениподобным векторам и многовариантна по отношению пространственноподобным векторам. Обычно не рассматривают пространственноподобные векторы и пространственноподобные мировые линии, полагая, что тахионов не существует. Рассмотрение тахионов в геометрии Минковского показывает, что мировые линии тахионов вихляют с бесконечной амплитудой, и отдельный тахион не может быть обнаружен. Однако, тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационному полю. В результате тахионы могут существовать, и тахионный газ является лучшим кандидатом на темную материю [2].

В современной геометрии не различают между линвекторами и g-векторами, полагая, что g-векторы образуют классы эквивалентности. Предполагается, что отношения эквивалентности транзитивны в любой геометрии, и предполагается, что нет геометрий с интранзитивным отношением эквивалентности. Если интранзитивное отношение эквивалентности случайно появляется (например, в римановой геометрии для g-векторов, имеющих разное начало), то такая эквивалентность ограничивается некоторыми добавочными условиями (параллельный перенос), или отношение эквивалентности игнорируется, как в случае пространственноподобных векторов в геометрии Минковского. Такое отрицание многовариантности g-векторов является ошибкой, которая может приводить к ошибочным заключениям.

В настоящей работе мы преодолеваем дефекты современной теории элементарных частиц. Эти дефекты связаны с использованием нерелятивистского понятия состояния частицы и с игнорированием понятия многовариантности в геометрии пространства-времени. Преодоление этих двух дефектов позволяет создать каркасную концепцию элементарных частиц [3], которая позволяет определять структуру элементарных частиц (а не только систематизировать элементарные частицы и приписывать им некоторые квантовые числа).

2 Релятивистское понятие состояния частицы

После объяснения тепловых явлений с помощью кинетической теории газов было естественно думать, что квантовые эффекты можно объяснить стохастическим движением микрочастиц. Некоторые исследователи [4, 5] пытались объяснить квантовую механику как статистическое описание стохастически движущихся микрочастиц. Им не удалось объяснить квантовую механику как статистическое описание случайно движущихся частиц. Мойел [4] пытался привести квантовые динамические уравнения к виду, который характерен для динамических уравнений стохастических процессов. Феньеш [5] пытался получить статистическое описание, используя сходство между уравнением Шредингера и уравнением Фоккера для процессов диффузии. Оба автора использовали понятие волновой функции, не понимая, что оно означает. Объяснение квантовых явлений едва ли возможно без понимания того, что такое волновая функция. Однако в начале двадцатого века никто не знал, что такое волновая функция.

Дело в том, уравнение Шредингера может быть приведено к описанию потенциального течения некоторой квантовой жидкости, что было показано Маделунгом [6]. Однако представление гидродинамических уравнений для идеальной жидкости в терминах волновой функции требует полного интегрирования гидродинамических уравнений.

Для перехода от уравнения Шредингера к системе из четырех гидродинамических уравнений комплексное уравнение Шредингера для волновой функции $\psi = \sqrt{\rho}\exp\left(i\varphi/\hbar\right)$ представляется в виде двух вещественных уравнений для амплитуды $\sqrt{\rho}$ и для фазы φ. Чтобы получить гидродинамические уравнения, достаточно взять градиент от уравнения для фазы φ. В результате получаются четыре динамические уравнения, которые превращаются в четыре гидродинамические уравнения после введения надлежащих обозначений. Другими словами, для перехода от динамических уравнений в терминах волновой функции к гидродинамической форме этих уравнений нужно продифференцировать динамические уравнения. Наоборот, для перехода от гидродинамической формы динамических уравнений к их представлению в терминах волновой функции, нужно интегрировать динамические уравнения. В случае потенциального течения это интегрирование легко осуществляется, тогда как в случае завихренного течения способ интегрирования стал известен только в конце двадцатого века [1].

Бом [7] использовал гидродинамическое представление уравнения Шредингера для интерпретации квантовой механики. Он начал с волновой функции и квантовых принципов и интерпретировал их в гидродинамических терминах. Однако, он не мог обосновать квантовую механику на основе гидродинамики, потому что для такого обоснования следовало начать с гидродинамических понятий и уравнений для того, чтобы получить волновую функцию в гидродинамических терминах. Он не мог этого сделать, потому что в этом случае он был бы вынужден интегрировать гидродинамические уравнения в общем случае, а не только для потенциальных течений. Интегрирование гидродинамических уравнений не было известно почти в течение всего двадцатого века. Это была довольно сложная математическая проблема.

Информацию о других попытках статистического обоснования можно найти в книге Голланда [8]. Все авторы пытались обосновать нерелятивистскую квантовую механику на основе нерелятивистского статистического описания.

Это обстоятельство было главной причиной неудач. Кроме того они не понимали, что волновая функция есть просто метод описания непрерывной сплошной среды. Нерелятивистская квантовая механика описывает среднее движение частиц, и это среднее движение является нерелятивистским. Однако нерелятивистский характер среднего движения не означает, что точное движение является также нерелятивистским. Стохастическая составляющая движения частицы может быть релятивистской, и она исчезает при при усреднении этой составляющей. Чтобы получить правильное описание, следует использовать релятивистское статистическое описание.

В нерелятивистской физике состояние частицы описывается как точка в фазовом пространстве координат и импульсов. В релятивистской физике состояние частицы описывается ее мировой линией. В нерелятивистской физике плотность состояний определяется как множитель в соотношении

$$dN = ndV \tag{2.1}$$

где dN есть число частиц в объеме dV фазового пространства. Величина n неотрицательна. Она превращается плотность вероятности w при надлежащей нормировке.

В релятивистской физике плотность состояний частицы j^k определяется как множитель в соотношении

$$dF = j^k dS_k \tag{2.2}$$

где dF есть поток мировых линий через трех-мерную площадку dS_k. Поскольку состоянием статистического ансамбля является плотность состояний частиц, состояние статистического ансамбля оказывается разным в релятивистской и нерелятивистской физике. Нерелятивистская плотность состояний w приводит к вероятностной концепции статистического ансамбля, тогда как релятивистская плотность состояний j^k приводит к динамической (гидродинамической) концепции статистического ансамбля [9, 10, 11].

Гидродинамические уравнения имеют вид

$$\partial_0\rho + \boldsymbol{\nabla}(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \partial_0\mathbf{v} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}p \tag{2.3}$$

где $\rho, \mathbf{v}, p = p(\rho)$ суть соответственно плотность, скорость и давление в жидкости. Система из четырех гидродинамических уравнений не образует полной системы гидродинамических уравнений для жидкости. Она образует замкнутую подсистему полной системы динамических уравнений. Чтобы получить полную систему гидродинамических уравнений для жидкости, нужно добавить динамические уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \tag{2.4}$$

описывающие движение частиц жидкости в заданном поле скоростей. Формальное различие между системой (2.3) и системой (2.3), (2.4) такое. Полная система уравнений (2.3), (2.4) может быть получена из вариационного принципа, тогда как замкнутая подсистема (2.3) не может быть получена из вариационного принципа в общем случае. Она может быть получена только в случае потенциального течения [12].

Уравнения (2.4) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, тогда как уравнения (2.3) являются дифференциальными уравнениями в частных производных. С точки зрения гидродинамиков решение уравнений (2.3) является наиболее трудной и важной проблемой гидродинамики. Если уравнения (2.3) решены и поле скоростей $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ определено, то решение уравнений (2.4) представляется более простой проблемой по сравнению с решением уравнений (2.3). В результате гидродинамики склонны рассматривать замкнутую подсистему (2.3) как систему гидродинамических уравнений, игнорируя уравнения (2.4). Чтобы получить описание гидродинамических уравнений в терминах волновой функции следует интегрировать уравнения (2.3), (2.4).

Перепишем уравнения (2.4) в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ суть независимые интегралы уравнений (2.4). Уравнения (2.4) и (2.5) эквивалентны, и переменные $\boldsymbol{\xi}$ могут рассматриваться как лагранжевы координаты, маркирующие частицы жидкости, потому что в соответствии с (2.5) переменные $\boldsymbol{\xi}$ постоянны вдоль мировой линии частицы жидкости. Формально уравнения (2.5) являются уравнениями в частных производных, но они могут быть приведены к виду обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4).

Рассмотрим действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ свободных стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, среднее движение которых является нерелятивистским

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int \int\limits_{V_\xi} \left\{ \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} \right\} \rho_0(\boldsymbol{\xi})\, dt d\boldsymbol{\xi}, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{2.6}$$

Переменная $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ описывает регулярную составляющую движения частицы. Переменная $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ описывает среднее значение стохастической составляющей скорости, $\hbar$ есть квантовая постоянная. Второй член в (2.6) описывает кинетическую энергию стохастической составляющей скорости. Третий член описывает взаимодействие между стохастической составляющей $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и регулярной составляющей $\dot{\mathbf{x}}(t, \boldsymbol{\xi})$. Оператор

$$\boldsymbol{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \tag{2.7}$$

определен в пространстве координат $\mathbf{x}$. Величина $\rho_0(\boldsymbol{\xi})$ является весовой функцией.

Формально действие (2.6) выглядит как действие для множества детерминированных частиц, взаимодействующих через некоторое силовое поле $\mathbf{u}$. Вариация (2.6) по $\mathbf{u}$ дает

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\hbar}{2m} \boldsymbol{\nabla} \ln \rho, \tag{2.8}$$

где

$$\rho = \rho_0 (\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x^1, x^2, x^3)} = \rho_0 (\boldsymbol{\xi}) \left(\frac{\partial (x^1, x^2, x^3)}{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right)^{-1} \tag{2.9}$$

Вариация по $\mathbf{x}$ дает

$$\delta \mathbf{x} : \qquad -m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \boldsymbol{\nabla} \left(\frac{m}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} \right) = 0 \tag{2.10}$$

Подставляя (2.8) в (2.10) и рассматривая ρ как функцию от $t, \mathbf{x}$, получаем

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla} U_{\mathrm{B}} \tag{2.11}$$

где d/dt означает субстанциональную производную по времени t

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial (F, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$

$\boldsymbol{\nabla}$ есть градиент в пространстве координат x, и U_{B} есть так называемый потенциал Бома

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{B}} (t, \mathbf{x}) &= -\frac{m}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} = U \left(\rho, \boldsymbol{\nabla} \rho, \boldsymbol{\nabla}^2 \rho \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\boldsymbol{\nabla} \rho)^2}{\rho^2} - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\boldsymbol{\nabla}^2 \rho}{\rho} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \boldsymbol{\nabla}^2 \sqrt{\rho} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Преобразуем динамическое уравнение (2.11) к виду, где переменные $\boldsymbol{\xi}$ являются зависимыми динамическими переменными, и $t, \mathbf{x}$ суть независимые динамические переменные. В этом представлении переменные $\boldsymbol{\xi}$ (потенциалы Клебша [14, 15]) могут рассматриваться как обобщенная функция тока, потому что они имеют свойство функции тока: (1) они маркируют мировые линии частиц жидкости и (2) некоторые комбинации производных от $\boldsymbol{\xi}$ удовлетворяют уравнению непрерывности тождественно для любых значений переменных $\boldsymbol{\xi}$. (Смотри детали в [16]).

Динамическое уравнение (2.11) может быть получено из действия

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]} [\mathbf{x}] = \int \int_{V_{\boldsymbol{\xi}}} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 - U_{\mathrm{B}} (t, \mathbf{x}) \right\} \rho_0 (\boldsymbol{\xi}) \, dt d\boldsymbol{\xi} \tag{2.13}$$

где $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x} (t, \boldsymbol{\xi})$. Переменные ρ и $U_{\mathrm{B}} = U \left(\rho, \boldsymbol{\nabla} \rho, \boldsymbol{\nabla}^2 \rho \right)$ определяются соотношениями (2.12), (2.9).

Чтобы преобразовать действие (2.13) к независимым переменным $x = \left\{x^k\right\} = \{t, \mathbf{x}\}$, используем параметрическое представление мировых линий $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right)$. Пусть

$$x^k = x^k\left(\xi_0, \boldsymbol{\xi}\right) = x^k\left(\xi\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{2.14}$$

где $\xi = \{\xi_k\} = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Форма мировой линии описывается с помощью x^k, рассматриваемых как функции от ξ_0 при фиксированных $\boldsymbol{\xi}$. Действие (2.13) может быть переписано в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[x\right] = \int\limits_{V_{\boldsymbol{\xi}}} \left\{\frac{m}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_0}\right)^2 \left(\frac{\partial x^0}{\partial \xi_0}\right)^{-1} - U_{\mathrm{B}}\frac{\partial x^0}{\partial \xi_0}\right\} \rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right) d^4\xi, \tag{2.15}$$

Рассмотрим переменные $\xi = \{\xi_k\}$, $k = 0, 1, 2, 3$ как зависимые переменные и переменные $x = \left\{x^k\right\}$ как независимые переменные. Будем рассматривать якобиан

$$J = \frac{\partial\left(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)} = \det\left|\left|\xi_{l,k}\right|\right|, \qquad \xi_{l,k} \equiv \frac{\partial \xi_l}{\partial x^k} \qquad l, k = 0, 1, 2, 3 \tag{2.16}$$

как 4-линейную функцию от переменных $\xi_{l,k} \equiv \partial_k \xi_l$, $l, k = 0, 1, 2, 3$. Примем во внимание, что

$$\frac{\partial x^k}{\partial \xi_0} = \frac{\partial\left(x^k, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)} = \frac{\partial\left(x^k, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)} \frac{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)}{\partial\left(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)} = J^{-1}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \tag{2.17}$$

и

$$\rho = \rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^1, x^2, x^3\right)} = \rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial\left(x^0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)} = \rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \tag{2.18}$$

Действие (2.15) принимает вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\xi\right] = \int\limits_{V_x} \left\{\frac{m}{2}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}}\right)^2 \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}\right)^{-2} - U_{\mathrm{B}}\right\} \rho d^4x \tag{2.19}$$

$$\rho \equiv \rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}$$

Из (2.12) следует, что

$$\rho U_{\mathrm{B}} = \rho U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho, \boldsymbol{\nabla}^2\rho\right) = \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho} - \frac{\hbar^2}{4m}\boldsymbol{\nabla}^2\rho \tag{2.20}$$

Последний член в (2.20) имеет вид дивергенции, и он не дает вклада в динамические уравнения. Он может быть опущен.

Если соотношение

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \neq 0 \tag{2.21}$$

выполняется, то вариационные задачи (2.15) и (2.19) эквивалентны. Наоборот, если соотношение (2.21) нарушается, то нельзя быть уверенным, что они эквивалентны.

Введем обозначение $j = \{j^0, \mathbf{j}\} = \{\rho, \mathbf{j}\} = \{j^k\}$, $k = 0, 1, 2, 3$

$$j^k = \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial\left(x^k, \xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}{\partial\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)} = \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{2.22}$$

и добавим обозначение (2.22) к действию (2.19) с помощью множителей Лагранжа p_k, $k = 0, 1, 2, 3$. Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\xi, j, p] = \int_{V_x} \left\{ m\frac{\mathbf{j}^2}{2\rho} - \rho U_{\mathrm{B}} - p_k \left(j^k - \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right) \right\} d^4x, \tag{2.23}$$

$$U_{\mathrm{B}} = U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho, \boldsymbol{\nabla}^2\rho\right), \qquad \rho \equiv j^0$$

Заметим, что действие (2.19) и действие (2.23) описывают одну и ту же вариационную задачу. Действие (2.23) интересно в том отношении, что лагранжевы координаты $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$ концентрируются в последнем члене действия. Лагранжевы координаты $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\}$ определяются с точностью до преобразования

$$\xi_0 = f_0\left(\tilde{\xi}_0\right), \qquad \xi_\alpha = f_\alpha\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}\right), \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{2.24}$$

где f_k, $k = 0, 1, 2, 3$ суть произвольные функции своих аргументов. Переменная ξ_0 фиктивна, и вариация по ξ_0 не дает независимого динамического уравнения.

Вариация действия (2.23) по ξ_l, $l = 0, 1, 2, 3$ приводит к динамическим уравнениям

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}}{\delta \xi_l} = -\partial_s \left(\rho_0(\boldsymbol{\xi}) p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \right) + p_k \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_l}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \qquad l = 0, 1, 2, 3 \tag{2.25}$$

Используя тождества

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} \xi_{k,l} \equiv J \delta_k^i, \qquad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \equiv J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \tag{2.27}$$

получаем из (2.25) с помощью тождеств (2.27), (2.26)

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \rho_0 \partial_s p_k - \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{l,s}} \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_j} \xi_{j,s} p_k + p_k \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi_l} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \qquad l = 0, 1, 2, 3$$

$$-J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \partial_s p_k - \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \delta_j^l - \delta_j^0 \frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}} \right) \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} p_k$$
$$+ p_k \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_l} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \qquad l = 0, 1, 2, 3 \tag{2.28}$$

Упрощая (2.28) с помощью первого тождества (2.26), получаем

$$J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}}-\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}}\right)\rho_0\partial_s p_k=0 \tag{2.29}$$

Свертывая (2.29) с $\xi_{l,i}$ и используя первое тождество (2.26) и обозначения (2.22), получаем

$$j^k\partial_i p_k-j^k\partial_k p_i=0,\qquad i=0,1,2,3 \tag{2.30}$$

Вариация (2.23) по j^β дает

$$\delta j^\beta:\quad p_\beta=m\frac{j^\beta}{\rho},\qquad \beta=1,2,3 \tag{2.31}$$

Варьируя (2.23) по $j^0=\rho$, используя обозначения

$$\rho_\gamma\equiv\partial_\gamma\rho,\qquad \rho_{\alpha\beta}\equiv\partial_\alpha\partial_\beta\rho$$

и принимая во внимание соотношение (2.12) для $U_{\mathrm{B}}=U\left(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho,\boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)$, получаем

$$\begin{aligned}\delta j^0\quad &:\qquad p_0=-\frac{m}{2\rho^2}j^\alpha j^\alpha-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho U_{\mathrm{B}}\right)+\partial_\gamma\frac{\partial}{\partial\rho_\gamma}\left(\rho U_{\mathrm{B}}\right)-\partial_\alpha\partial_\beta\frac{\partial}{\partial\rho_{\alpha\beta}}\left(\rho U_{\mathrm{B}}\right)\\ &=\quad -\frac{m}{2\rho^2}j^\alpha j^\alpha-U_{\mathrm{B}}\end{aligned} \tag{2.32}$$

Отметим замечательное свойство потенциала Бома $U_{\mathrm{B}}=U\left(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho,\boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)$, определенного соотношением (2.12). Величина p_0 выражается через $U_{\mathrm{B}}=U\left(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho,\boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)$ таким образом, как если бы $U\left(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho,\boldsymbol{\nabla}^2\rho\right)$ не зависело от ρ и его производных.

Исключая p_k из уравнений (2.30) с помощью соотношений (2.31), (2.32) и полагая $\mathbf{v}=\mathbf{j}/\rho$, получаем динамические уравнения в эйлеровом виде (2.3).

Имеется другая возможность. Динамические уравнения (2.29) можно рассматривать как линейные дифференциальные уравнения для переменных p_k. Они могут быть решены в виде

$$p_k=b_0\left(\partial_k\varphi+g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial_k\xi_\alpha\right),\qquad k=0,1,2,3 \tag{2.33}$$

где $g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right),\quad \alpha=1,2,3$ суть произвольные функции аргумента $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, $b_0\neq 0$ есть произвольная вещественная постоянная, и φ есть переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной. Заметим, что постоянная b_0 может быть исключена и включена в функции $\mathbf{g}=\{g^1,g^2,g^3\}$ и в переменную φ.

Можно проверить прямой подстановкой, что соотношение (2.33) является общим решением линейных уравнений (2.29). Подставляя (2.33) в (2.29) и принимая во внимание антисимметрию скобки в (2.29) относительно перестановки индексов k и s, получаем

$$J^{-1}\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{l,s}}-\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,s}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{l,k}}\right)\frac{\partial g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)}{\partial\xi_\mu}\xi_{\mu,s}\xi_{\alpha,k}=0 \tag{2.34}$$

Соотношение (2.34) есть верное равенство, как это следует из первого тождества (2.26).

Подставим (2.33) в действие (2.23). Принимая во внимание первое тождество (2.26) и опуская член

$$\rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\partial_k\varphi = \rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial(\varphi,\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}$$

который не дает вклада в динамические уравнения, получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\varphi,\boldsymbol{\xi},j] = \int\left\{\frac{m}{2}\frac{j^\alpha j^\alpha}{j^0} - U_{\mathrm{B}}\rho - j^k b_0\left(\partial_k\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_k\xi_\alpha\right)\right\}d^4x, \qquad j^0\equiv\rho \tag{2.35}$$

Вариация (2.35) по $j^0\equiv\rho$ дает

$$-\frac{m\mathbf{j}^2}{2\rho^2} - U_{\mathrm{B}} - b_0\left(\partial_0\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_0\xi_\alpha\right) = 0, \qquad U_{\mathrm{B}} = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} - 2\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\rho}{\rho}\right) \tag{2.36}$$

Вариация (2.35) по j^μ дает

$$m\frac{j^\mu}{\rho} = b_0\left(\partial_\mu\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\partial_\mu\xi_\alpha\right) \tag{2.37}$$

Вариация (2.35) относительно φ дает

$$\partial_k j^k = 0 \tag{2.38}$$

Наконец, варьируя (2.35) по ξ_μ и принимая во внимание (2.38), получаем

$$b_0 j^k\Omega^{\alpha\mu}(\boldsymbol{\xi})\partial_k\xi_\alpha = 0, \qquad \Omega^{a\mu}(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\partial g^\alpha(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_\mu} - \frac{\partial g^\mu(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_\alpha}\right) \tag{2.39}$$

Если

$$\det||\Omega^{\alpha\mu}|| \neq 0 \tag{2.40}$$

то учитывая, что скорость $\mathbf{v}=\mathbf{j}/j^0$, получаем из (2.39), так называемое условие Лина [17]

$$\partial_0\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{2.41}$$

которое означает, что переменные $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ постоянны вдоль средних мировых линий частиц. Другими словами, переменные $\boldsymbol{\xi}$ являются лагранжевыми координатами, которые маркируют средние мировые линии частиц.

Однако условие (2.40) выполнено не всегда. В частности, $\Omega^{\alpha\beta}\equiv 0$ в случае потенциального течения. Кроме того, величина $\Omega^{\alpha\beta}$ антисимметрична, как это следует из соотношения (2.39), и

$$\det\left|\left|\Omega^{\alpha\beta}\right|\right| = \begin{vmatrix} 0 & \Omega^{12} & \Omega^{13} \\ -\Omega^{12} & 0 & \Omega^{23} \\ -\Omega^{13} & -\Omega^{23} & 0 \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{2.42}$$

Заметим, что тождество (2.42) является свойством трехмерного пространства. В случае двумерного пространства $\det \left|\left|\Omega^{\alpha\beta}\right|\right| = \left(\Omega^{12}\right)^2$. В случае четырехмерного пространства имеем

$$\det \left|\left|\Omega^{\alpha\beta}\right|\right| = \left(\Omega^{12}\Omega^{34} - \Omega^{13}\Omega^{24} + \Omega^{14}\Omega^{23}\right)^2$$

Кажется довольно странным, что условие Лина (2.41) не является следствием динамического уравнения (2.39), хотя условие Лина (2.41) совместимо с динамическим уравнением (2.39). В случае потенциального течения эйлеровы гидродинамические уравнения для идеальной жидкости могут быть получены из вариационного принципа [12]. В случае завихренного течения той же самой жидкости гидродинамические уравнения Эйлера могут быть получены из вариационного принципа, только если условия Лина введены в функционал действия в виде сторонних условий, и переменные $\boldsymbol{\xi}$ рассматриваются как динамические переменные [17]. Означает ли это, что лагранжевы координаты $\boldsymbol{\xi}$ являются неадекватными динамическими переменными? Возможно. Это пока не ясно.

Из уравнений (2.36) - (2.41) получаем пять уравнений

$$-\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right)^2}{2m} - U_{\text{B}} - \left(\partial_0\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial_0\xi_{\alpha}\right) = 0, \tag{2.43}$$

$$\partial_0\boldsymbol{\xi} + \left(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{2.44}$$

$$\partial_0\rho + \boldsymbol{\nabla}\left(\rho\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right)}{m}\right) \tag{2.45}$$

для динамических переменных $\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}$. Неопределенные функции $\mathbf{g}\left(\boldsymbol{\xi}\right) = \{g^1\left(\boldsymbol{\xi}\right), g^2\left(\boldsymbol{\xi}\right), g^3\left(\boldsymbol{\xi}\right)\}$ определяются из начальных условий для скорости $\mathbf{v} = \mathbf{j}/\rho$. Постоянная b_0 включена в неопределенные функции $\varphi, \mathbf{g}\left(\boldsymbol{\xi}\right)$. Скорость $\mathbf{v}$ выражается через динамические переменные $\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}$ с помощью соотношений

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right)}{m} \tag{2.46}$$

3 Описание в терминах волновой функции

Потенциалы Клебша $\boldsymbol{\xi}$, φ и плотность ρ могут быть использованы для образования комплексной волновой функции ψ. С помощью замены переменных действие (2.35) может быть преобразовано к описанию в терминах волновой функции [1]. Введем k-компонентную комплексную функцию $\psi = \{\psi_{\alpha}\}$, $\alpha = 1, 2, ...k$определив, ее соотношениями

$$\psi_{\alpha} = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}), \qquad \psi_{\alpha}^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u_{\alpha}^*(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1, 2, ...k \tag{3.1}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{k}\psi_{\alpha}^*\psi_{\alpha} \tag{3.2}$$

где (*) означает комплексное сопряжение, $u_\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1, 2, ...k$ являются функциями только переменных $\boldsymbol{\xi}$. Они определяются соотношениями

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{k}(u_\alpha^*\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \xi_\beta}u_\alpha) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}), \qquad \beta = 1, 2, ...k \qquad \sum_{\alpha=1}^{k} u_\alpha^* u_\alpha = 1 \tag{3.3}$$

где k есть такое натуральное число, что уравнения (3.3) допускают решение. Вообще говоря, k зависит от вида произвольных функций $\mathbf{g} = \{g^\beta(\boldsymbol{\xi})\}$, $\beta = 1, 2, 3$.

Легко проверить, что

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad j^\mu = -\frac{ib_0}{2m}(\psi^*\partial_\mu\psi - \partial_\mu\psi^*\cdot\psi), \qquad \mu = 1, 2, 3 \tag{3.4}$$

Вариационная проблема с действием (2.35) оказывается эквивалентной вариационной проблеме с функционалом действия [1]

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] \;\; = \;\; & \int\left\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\psi) + \frac{b_0^2(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)^2}{8m\psi^*\psi}\right. \\ & \left. -\frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}(\psi^*\psi))^2}{\psi^*\psi}\right\}\mathrm{d}^4x \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{\nabla} = \{\partial_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, 3$.

Рассмотрим случай, когда число k компонентов волновой функции равно 2. В этом случае волновая функция $\psi = \left\{\begin{smallmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{smallmatrix}\right\}$ имеет четыре вещественных составляющие. Число гидродинамических переменных ρ, $\mathbf{j}$ также равно четырем, и мы можем надеяться, что первые три уравнения (3.3) могут быть решены при любом выборе функций $\mathbf{g}$. Для двухкомпонентной волновой функции ψ получаем тождество

$$(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)^2 \equiv -4\rho\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + (\boldsymbol{\nabla}\rho)^2 + 4\rho^2\sum_{\alpha=1}^{3}(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2 \tag{3.6}$$

где

$$\rho = \psi^*\psi, \qquad s_\alpha = \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{3.7}$$

σ_α суть 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

Подставляя (3.6) в (3.5), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] \;\; = \;\; & \int\left\{\frac{ib_0}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - \frac{b_0^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi + \frac{b_0^2}{8m}\rho(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2\right. \\ & \left. +\frac{b_0^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho}\right\}\mathrm{d}^4x \end{aligned} \tag{3.9}$$

Если выбрать произвольную постоянную b_0 в виде $b_0 = \hbar$, то действие (3.9) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi, \psi^*] &= \int \left\{ \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \psi^* \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi \right. \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{8m} \rho \boldsymbol{\nabla} s_\alpha \boldsymbol{\nabla} s_\alpha \right\} \mathrm{d}^4 x \end{aligned} \tag{3.10}$$

В случае когда волновая функция ψ однокомпонентна, например, $\psi = \left\{ \begin{smallmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\}$, или $\psi_1 = a\psi_2$, $a =$const, величины $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ постоянны ($s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 1$), Действие (3.10) превращается в

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \psi^* \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi \right\} \mathrm{d}^4 x \tag{3.11}$$

Динамическое уравнение, порожденное действием (3.11), является уравнением Шредингера

$$i\hbar \partial_0 \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla}^2 \psi = 0 \tag{3.12}$$

Это динамическое уравнение описывает течение жидкости.

В общем случае динамическое уравнение, порожденное действием (3.10) имеет вид

$$i\hbar \partial_0 \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla}^2 \psi + \frac{\hbar^2}{8m} \boldsymbol{\nabla}^2 s_\alpha \cdot (s_\alpha - 2\sigma_\alpha) \psi - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\boldsymbol{\nabla} \rho}{\rho} \boldsymbol{\nabla} s_\alpha \sigma_\alpha \psi = 0 \tag{3.13}$$

Получая динамическое уравнение (3.13), мы использовали тождества

$$\mathbf{s}^2 \equiv 1, \qquad s_\alpha \boldsymbol{\nabla} s_\alpha \equiv 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} s_\alpha (\boldsymbol{\nabla} s_\alpha) + s_\alpha \boldsymbol{\nabla}^2 s_\alpha \equiv 0$$

Используя замену переменных (3.1), (3.3), мы не использовали тот факт, что решение уравнений (2.39) является решением уравнений (2.41). В случае описания в терминах волновой функции ψ у нас не возникает проблемы, которую мы имеем при описании в терминах обобщенной функции тока $\boldsymbol{\xi}$, когда имеются такие решения уравнения (2.39), которые не являются решениями уравнений (2.41).

Таким образом, мы видели, что последовательное применение теории относительности (релятивистское понятие состояния частицы) требует описывать среднее движение стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ в терминах статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ есть динамическая система типа сплошной среды. Динамика статистического ансамбля описывается динамическими уравнениями гидродинамического типа. Эти динамические уравнения можно описывать в терминах волновой функции. В специальном случае, когда внутренняя энергия жидкости, описываемой $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, имеет вид $E_{\mathrm{int}} = \frac{\hbar^2}{8m^2} \left(\frac{\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\rho}}{\rho} \right)^2$, динамическое уравнение совпадает с уравнением Шредингера, если течение жидкости потенциальное. В общем случае завихренного течения динамическое уравнение в терминах волновой функции нелинейно. Динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ были получены без ссылок на квантовые принципы (в частности, на принцип линейности). При других типах стохастичности частицы можно получить динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$.

4 Многовариантность геометрии пространства-времени

Реальная геометрия пространства-времени многовариантна в том смысле, что в точке P имеется много векторов $\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PQ}'$, $\mathbf{PQ}''$,... которые эквивалентны вектору $\mathbf{AB}$ в точке A, но векторы $\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PQ}'$, $\mathbf{PQ}''$,... не эквивалентны между собой. Свойство многовариантности порождается интранзитивностью отношения эквивалентности (1.1), (1.5), (1.6) двух векторов. Это определение эквивалентности (равенства) векторов дается безотносительно к методу описания геометрии (системе координат). Это более правильно, чем традиционное определение эквивалентности векторов, когда векторы эквивалентны (равны), если равны их координаты. В собственно евклидовой геометрии оба определения совпадают, потому что собственно евклидова геометрия одновариантна. Однако в геометрии Минковского (псевдоевклидова геометрия индекса 1) оба определения совпадают только для времениподобных векторов. Геометрия Минковского многовариантна относительно пространственноподобных векторов. Пространственноподобные мировые линии вихляют с бесконечной амплитудой. Это обстоятельство является причиной того, почему отельный тахион (т.е. частица с пространственноподобной мировой линией) не может быть обнаружен. Если использовать традиционное определение эквивалентности векторов (равенство координат векторов), то мировая линия тахиона рассматривается как гладкая линия (без вихляний). В этом случае экспериментальная невозможность обнаружения тахиона, интерпретируется как доказательство утверждения, что тахионы не существуют. В римановой геометрии пространства-времени математики вынуждены были запретить фернпараллелизм и ввести параллельный перенос векторов, чтобы подавить естественную многовариантность римановой геометрии пространства-времени по отношению к удаленным векторам.

Вообще, бескоординатный метрический подход геометрии пространства-времени, когда геометрия полностью описывается мировой функцией, представляется более естественным, чем традиционный метод описания геометрии, когда описание геометрии пространства-времени начинается с фиксирования размерности и системы координат.

Всякая обобщенная геометрия $\mathcal{G}$ является обобщением собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Это обобщение существенно зависит от представления $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Традиционное представление евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ (V-представление) содержит несколько базовых понятий: (1) размерность, (2) система координат,

(3) бесконечно малое расстояние, (4) эквивалентность векторов. В $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ все эти понятия согласованы, и аксиомы, связывающие эти понятия, непротиворечивы. При обобщении евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ базовые понятия модифицируются. Соответствующие модификации аксиом должны быть такими, чтобы модифицированные аксиомы были непротиворечивы. Это очень трудная задача, потому что существует много обобщенных геометрий, и для всех их аксиомы должны быть непротиворечивы.

Решать проблему обобщения евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ следует, используя монистическое представление геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, когда имеется только одно базовое понятие и все другие геометрические понятия и величины являются производными. Они получаются из единственного базового понятия. Такое монистическое представление геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ называется σ-представлением, когда $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ описывается в терминах и только в терминах мировой функции σ. Имеются связи между мировой функцией σ и производными геометрическими понятиями. Эти связи сохраняются при обобщении геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, при условии, что эти связи могут быть выражены в терминах мировой функции и только в этих терминах. Однако, мировая функция σ_{E} of $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может иметь специфические свойства, которые не сохраняются при обобщении геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.

При обобщении собственно евклидовой геометрии получается физическая геометрия $\mathcal{G}$. Она получается в результате замены мировой функции σ_{E} мировой функцией σ геометрии $\mathcal{G}$ во всех геометрических соотношениях геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, которые могут быть выражены в терминах только евклидовой мировой функции σ_{E}. Эти соотношения называются общегеометрическими соотношениями. Выражения (1.1), (1.5), (1.6) представляют собой примеры общегеометрических соотношений.

Другим примером общегеометрического соотношения является линейная зависимость n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2,...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2,...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ являются линейно зависимыми, если и только если выполнено условие

$$F_n\left(\mathcal{P}^n\right) = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и $F_n\left(\mathcal{P}^n\right)$ есть определитель Грама

$$F_n\left(\mathcal{P}^n\right) \equiv \det\left|\left|(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)\right|\right|, \quad i,k = 1,2,...n \tag{4.2}$$

Скалярное произведение в (4.2) выражается через мировую функцию с помощью (1.5).

5 Специфические свойства собственно евклидовой геометрии

Имеются специфические свойства геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, которые не сохраняются при замене σ_{E} мировой функцией σ. Если $\sigma = \sigma_{\mathrm{E}}$ есть мировая функция n-мерного евклидова пространства E^n, то она удовлетворяет следующим соотношениям.

I. Определение размерности и введение прямолинейной системы координат:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \quad (5.1)$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама (4.2), и Ω есть множество точек, где задана геометрия. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$ являются базисными векторами прямолинейной системы координат K_n с началом в точке P_0. Ковариантный метрический тензор $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, ...n$ и контравариантный метрический тензор $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, ...n$ в прямолинейной системе координат K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\, g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i, l = 1, 2, ...n \quad (5.2)$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, ...n \quad (5.3)$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma_{\mathrm{E}}(P, Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\,(x_i(P) - x_i(Q))\,(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P, Q \in \Omega \quad (5.4)$$

где координаты $x_i(P)$, $i = 1, 2, ...n$ точки P являются координатами вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, определяемыми соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1, 2, ...n \quad (5.5)$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \quad (5.6)$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \quad (5.7)$$

рассматриваемая как уравнения для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ...n$ имеет всегда одно и только одно решение.

Не все условия I – IV являются независимыми. Они определяют различные свойства геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Например, условие I определяет размерность n евклидова пространства E^n. Эта размерность n есть максимальное число линейно независимых векторов в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Это число определяется общегеометрическим соотношением (4.2), которое зависит от вида мировой функции. Если мировая функция изменяется, и условия (5.1) не выполняются, то нельзя ввести систему координат в традиционном виде, потому что метрическая размерность n_m обобщенной геометрии $\mathcal{G}$ остается неопределенной. Например, в дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, определяемой мировой функцией (1.3) можно найти пять векторов $\mathbf{PP}_0 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{PP}_1 = (0,1,0,0)$, $\mathbf{PP}_2 = (0,0,1,0)$, $\mathbf{PP}_3 = (0,0,0,1)$,

$\mathbf{PP}_4 = (a, 0, 0, 0)$, $a > 1$, которые линейно зависимы. Для случая дискретной геометрии (1.3) расчет дает

$$F_4(P, P_0, P_1, P_2, P_3) = -1 - 4\lambda_0^2 + \mathcal{O}\left(\lambda_0^4\right), \quad \lambda_0^2 \ll 1 \tag{5.8}$$

$$F_5(P, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4) = -\lambda_0^2 - a\lambda_0^2(a-1) + \mathcal{O}\left(\lambda_0^4\right), \quad \lambda_0^2 \ll 1 \tag{5.9}$$

Мы видим, что определитель Грама пятого порядка в "четырехмерной" геометрии не обращается в нуль. Однако он обращается в нуль, если $\lambda_0 \to 0$ и дискретная геометрия превращается в геометрию Минковского. Это означает, что метрическая размерность n_m в $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ больше, чем координатная размерность n_c (число координат) $n_c < n_m$. Определитель Грама для двух линейно зависимых векторов $\mathbf{PP}_0 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{PP}_4 = (a, 0, 0, 0)$, $a > 1$

$$F_2(P, P_0, P_4) = \lambda_0^2\left(1 - a + a^2 + \frac{3}{4}\lambda_0^2\right) \tag{5.10}$$

Векторы $\mathbf{PP}_0$, $\mathbf{PP}_4$ линейно зависимы с точки зрения их координатного представления. Однако с точки зрения метрического подхода векторы $\mathbf{PP}_0$, $\mathbf{PP}_4$ линейно независимы.

Таким образом, специфические свойства (5.1) евклидовой геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{E}$ ответственны за размерность и систему координат в $\mathcal{G}_\mathrm{E}$. В римановой геометрии свойства (5.1) выполняются локально

$$\exists\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega_\varepsilon, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega_\varepsilon^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{5.11}$$

где Ω_ε есть бесконечно малая область точечного множества Ω, которое расположено вокруг точки P_0. Для конечных векторов риманова геометрия многовариантна, вообще говоря.

В геометрии Минковского $\mathcal{G}_\mathrm{M}$ специфические условия геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{E}$ не выполнены, потому что нарушается соотношение (5.6). Геометрия Минковского многовариантна относительно пространственноподобных векторов, хотя она одновариантна относительно времениподобных векторов.

6 Опознание геометрических объектов

Наиболее важная проблема геометрии – это опознание одного и того же геометрического объекта в разных геометриях пространства-времени. Такая проблема возникает, когда физическое тело (частица) перемещается из пространственно-временной области Ω_1 с геометрией $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ в другую пространственно-временную область Ω_2 с геометрией $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$. Как описывать геометрический объект для того, чтобы его можно было опознать в разных областях пространства-времени Ω_1 и Ω_2? При традиционном подходе к геометрии такая задача даже не ставится.

Рассмотрим проблему на простейшем примере, когда геометрическим объектом в геометрии $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ является отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ прямой линии между точками

P_0 и P_1. В собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ Этот отрезок может описываться как множество точек R, определенных соотношением

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \left\{ R | \rho\left(P_0, R\right) + \rho\left(R, P_1\right) - \rho\left(P_0, P_1\right) = 0, \quad \rho = \sqrt{2\sigma} \right\} \tag{6.1}$$

где $\sigma = \sigma_{\mathrm{E}}$ есть мировая функция геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Отрезок в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является одномерным в том смысле, что его сечение $S\left(P, \mathcal{T}_{[P_0P_1]}\right)$ отрезка $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ в любой точке $P \in \mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ состоит только из этой точки P.

$$S\left(P, \mathcal{T}_{[P_0P_1]}\right) \equiv \left\{ R | \bigwedge_{s=0,1} \rho\left(P_s, P\right) = \rho\left(P_s, R\right) \right\} = \{P\}, \quad \rho = \sqrt{2\sigma} \tag{6.2}$$

В геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ времениподобный отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, $(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_1\right) > 0)$ так же описывается соотношением (6.1), где $\sigma = \sigma_{\mathrm{M}}$. Он также одномерен. Пространственноподобный отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, $(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_0, P_1\right) < 0)$ представляет собой бесконечную трехмерную поверхность.

Является ли отрезок времениподобной прямой одномерным в других пространственно-временных геометриях $\mathcal{G}$? Считается, что отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ прямой линии одномерен в любой реальной геометрии пространства-времени. Такая вера включает ограничения на функцию расстояния ρ геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{m}}$ (метрической геометрии), где любая прямая линия одномерна.

С другой стороны, рассмотрим эллипсоид в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Он определяется в терминах расстояния ρ в виде

$$\mathcal{EL}_{F_1F_2P} = \left\{ R | \rho\left(F_1, R\right) + \rho\left(R, F_2\right) = \rho\left(F_1, P\right) + \rho\left(P, F_2\right) \right\} \tag{6.3}$$

где F_1, F_2 суть фокусы эллипсоида и P есть некоторая точка на поверхности эллипсоида. Если точка P совпадает с фокусом F_2, то эллипсоид вырождается в отрезок $\mathcal{T}_{[F_1P]}$ прямой линии.

$$\mathcal{EL}_{F_1PP} = \mathcal{T}_{[F_1P]} = \left\{ R | \rho\left(F_1, R\right) + \rho\left(R, P\right) = \rho\left(F_1, P\right) \right\} \tag{6.4}$$

Вырожденный эллипсоид $\left[\mathcal{EL}_{F_1F_2P}\right]_{F_2=P}$ вырождается в одномерный отрезок в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. В произвольной геометрии $\mathcal{G}$ он может не быть одномерной линией. Он остается одномерным, если выполнена аксиома треугольника.

$$\rho\left(F_1, R\right) + \rho\left(R, F_2\right) \geq \rho\left(F_1, F_2\right), \quad \forall F_1, F_2, P \in \Omega \tag{6.5}$$

Какое из двух свойств отрезка прямой линии следует взять для определения отрезка в геометрии пространства-времени? (одномерность или вырожденный эллипсоид?) Ясно, что отрезок прямой линии следует определить через эллипсоид, потому что такое определение не накладывает ограничений на мировую функцию (или функцию расстояния). Кроме того такое определение производится в терминах мировой функции.

Но отрезок прямой линии является простейшим геометрическим объектом собственно евклидовой геометрии. Имеются другие геометрические объекты, свойства которых более сложны, чем свойства отрезка прямой.

Геометрический объект, определяется в $\mathcal{G}_{\rm E}$ в терминах мировой функции $\sigma_{\rm E}$. Заменяя в этом определении мировую функцию $\sigma_{\rm E}$ мировой функцией σ обобщенной геометрии $\mathcal{G}$, получаем определение этого геометрического объекта в $\mathcal{G}$.

Определение 1: Геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ геометрии $\mathcal{G}=\{\sigma,\Omega\}$ есть подмножество точек $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}\subset\Omega$ точечного множества Ω. Этот геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ есть множество корней $R\in\Omega$ функции $F_{\mathcal{P}_n,\sigma}$

$$g_{\mathcal{P}_n,\sigma}=\{R|F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=0\},\quad F_{\mathcal{P}_n,\sigma}:\quad \Omega\rightarrow\mathbb{R} \tag{6.6}$$

где $F_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ от точки R через мировые функции аргументов $\{\mathcal{P}_n,R\}=\{P_0,P_1,...P_n,R\}$

$$F_{\mathcal{P}_n,\sigma}:\quad F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=G_{\mathcal{P}_n,\sigma}(u_1,u_2,...u_s),\qquad s=\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{6.7}$$

$$u_l=\sigma(w_i,w_k),\quad i,k=0,1,...n+1,\quad l=1,2,...\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{6.8}$$

$$w_k=P_k\in\Omega,\qquad k=0,1,...n,\qquad w_{n+1}=R\in\Omega \tag{6.9}$$

Здесь $\mathcal{P}_n=\{P_0,P_1,...,P_n\}\subset\Omega$ суть $n+1$ точек, которые являются параметрами, определяющими геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$

$$g_{\mathcal{P}_n,\sigma}=\{R|F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=0\},\qquad R\in\Omega,\qquad \mathcal{P}_n\in\Omega^{n+1} \tag{6.10}$$

$F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=G_{\mathcal{P}_n,\sigma}(u_1,u_2,...u_s)$ есть функция от $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ аргументов u_k и от $n+1$ параметров $\mathcal{P}_n$. Множество $\mathcal{P}_n=\{P_0,P_1,...P_n\}\in\Omega^{n+1}$ параметров геометрического объекта будем называть каркасом геометрического объекта. Подмножество $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}\subset\Omega$ будем называть оболочкой каркаса. Каркас является аналогом системы отсчета, жестко скрепленной с физическим телом. следя за движением каркаса, можно следить за движением физического тела. Когда частица рассматривается как геометрический объект, ее движение в пространстве-времени описывается движение каркаса $\mathcal{P}_n$. При таком подходе (приближение жесткого тела) форма оболочки не существенна.

Замечание: Произвольное подмножество точек Ω' точечного множества Ω не является геометрическим объектом, вообще говоря. Предполагается, что физические тела могут иметь только форму геометрических объектов, потому что только в этом случае можно идентифицировать физические тела (геометрические объекты) в разных геометриях пространства-времени.

Существование одних и тех же геометрических объектов в разных областях пространства-времени, имеющих разную геометрию, ставит вопрос об эквивалентности геометрических объектов разных геометриях пространства-времени. Такой вопрос не поднимался прежде, потому что не рассматривалась такая ситуация, когда физическое тело перемещалось из пространственно-временной области в другую пространственно-временную область, имеющую другую геометрию. Вообще, математический формализм традиционной геометрии пространства-времени (дифференциальная геометрия) был неприменим для одновременного рассмотрения нескольких различных геометрий различных областей пространства-времени.

Мы можем воспринимать геометрию только через движение физических тел в пространстве-времени или через построение геометрических объектов, соответствующих этим телам. Как следует из *определения 1* геометрического объекта, функция $G_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ как функция ее аргументов u_k, $k=1,2,...n(n+1)/2$ (мировых функций от различных точек) есть одна и та же функция во всех физических геометриях. Это означает, что геометрический объект $\mathcal{O}_1$ в геометрии $\mathcal{G}_1=\{\sigma_1,\Omega_1\}$ получается из того же геометрического объекта $\mathcal{O}_2$ в геометрии $\mathcal{G}_2=\{\sigma_2,\Omega_2\}$ с помощью замены мировой функции σ_1 мировой функцией σ_2 в определении этого геометрического объекта.

Определение 2: Геометрический объект $g_{P'_n,\sigma'}$ ($\mathcal{P}'_n=\{P'_0,P'_1,..P'_n\}$) в геометрии $\mathcal{G}'=\{\sigma',\Omega'\}$ и геометрический объект $g_{P_n,\sigma}$ ($\mathcal{P}_n=\{P_0,P_1,..P_n\}$) в геометрии $\mathcal{G}=\{\sigma,\Omega\}$ суть одинаковые геометрические объекты, если

$$\sigma'(P'_i,P'_k)=\sigma(P_i,P_k), \qquad i,k=0,1,..n \tag{6.11}$$

и функции $G'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}$ для $g_{P'_n,\sigma'}$ и $G_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ для $g_{P_n,\sigma}$ в формуле (6.7) являются одинаковыми функциями о аргументов $u_1,u_2,...u_s$

$$G'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}(u_1,u_2,...u_s)=G_{\mathcal{P}_n,\sigma}(u_1,u_2,...u_s) \tag{6.12}$$

В этом случае

$$u_l\equiv\sigma(P_i,P_k)=u'_l\equiv\sigma'(P'_i,P'_k), \quad i,k=0,1,...n, \quad l=1,2,..n(n+1)/2 \tag{6.13}$$

Функции $F'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}$ for $g_{P'_n,\sigma'}$ и $F_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ for $g_{P_n,\sigma}$ в формуле (6.7) имеют одни и те же корни, если соотношения (6.12) выполнены. В результате возникает однозначная связь между геометрическими объектами $g_{P'_n,\sigma'}$ и $g_{P_n,\sigma}$.

Поскольку физическая геометрия определяется построением ее геометрических объектов, физическая геометрия $\mathcal{G}=\{\sigma,\Omega\}$ может быть получена из известной стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\rm st}=\{\sigma_{\rm st},\Omega\}$ с помощью деформации стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\rm st}$. Деформация стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\rm st}$ реализуется заменой мировой функции $\sigma_{\rm st}$ мировой функцией σ во всех определениях геометрических объектов в стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\rm st}$. Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\rm E}$ является аксиоматизируемой геометрией. Она может быть построена евклидовым методом как логическое построение. Одновременно собственно евклидова геометрия является физической геометрией. Она может использоваться как стандартная геометрия $\mathcal{G}_{\rm st}$. Построение физической геометрии в виде деформации собственно евклидовой геометрии будем называть принципом деформации [18, 19, 20]. Большинство физических геометрий являются неаксиоматизируемыми геометриями. Они могут быть построены только с помощью принципа деформации.

7 Многовариантность геометрии пространства-времени

Многовариантность является имманентным свойством геометрии пространства-времени [21]. Даже геометрия Минковского многовариантна (относительно пространственноподобных векторов). Реальное пространство-время многвариантно также относительно времениподобных векторов, и эта многовариантность является причиной квантовых эффектов. Математический формализм дифференциальной геометрии используется для описания геометрии пространства-времени. Этот формализм не может быть адекватным при описании геометрии пространства-времени, потому что он не совместим с многовариантностью геометрии.

Формально можно определить операции суммирования g-векторов в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$, но это будет неоднозначно. В само деле, сумма $\mathbf{AC}$ двух g-векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BC}$, когда конец одного g-вектора является началом другого определяется следующим образом

$$\mathbf{AB}+\mathbf{BC}=\mathbf{AC} \tag{7.1}$$

Сумма $\mathbf{AD}_1$ двух произвольных g-векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{CD}$ в точке A определяется следующим образом

$$\mathbf{AB}+\mathbf{CD}=\mathbf{AB}+\mathbf{BD}_1=\mathbf{AD}_1, \quad (\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{BD}_1) \tag{7.2}$$

g-вектор $\mathbf{AD}_1$ определяется соотношением (7.2) неоднозначно, потому что g-вектор $\mathbf{BD}_1$ определен неоднозначно соотношением эквивалентности $(\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{BD}_1)$.

g-вектор $\mathbf{AC} = a\mathbf{AB}$, который является результатом умножения g-вектора $\mathbf{AB}$ на вещественное число a определяется соотношениями

$$a\mathbf{AB}=\mathbf{AC}, \quad |\mathbf{AC}|=a\,|\mathbf{AB}|\,, \quad (\mathbf{AB}.\mathbf{AC})=a\,|\mathbf{AB}|^2 \tag{7.3}$$

Результат умножения неоднозначен, потому что, вообще говоря, система из двух последних уравнений (7.3) не имеет единственного решения в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$.

Таким образом математический формализм дифференциальной геометрии не может использоваться в многовариантной геометрии. В результате большинство исследователей не признают физическую геометрию и метрический подход к геометрии пространства-времени. Современные исследователи имеют дело с времениподобной частью геометрии Минковского, которая одновариантна, и с времениподобной частью римановой геометрии, которая одновариантна для бесконечно малых векторов. Они игнорируют пространственноподобную часть геометрии Минковского и игнорируют существование тахионов. В результате они имеют проблему с темной материей. Они рассматривают риманову геометрию пространства-времени как единственно возможную геометрию пространства-времени. Однако, использование метрического подхода к геометрии в общей теории относительности (ОТО) позволяет получить динамические уравнения прямо для мировой функции (а не для метрического тензора) и построить расширенную теорию относительности (РОТО), которая не ограничена условием римановости [22]. В РОТО мировая функция однозначна тогда как в ОТО она, вообще говоря, неоднозначна. Кроме того в РОТО черные дыры не существуют [23] из-за индуцированной антигравитации [24].

8 Восприятие многовариантности

Интранзитивные отношения эквивалентности встречают возражения ("отношения эквивалентности транзитивны по определению"). Такое возражение возникает, потому что исследователи все время работали только с евклидовым методом построения геометрии который является логическим построением и где отношение эквивалентности не может быть интранзитивным. При метрическом подходе к геометрии физическая геометрия строится как деформация уже построенной геометрии. Деформация геометрии (замена σ_{E} мировой функцией σ) не является логической операцией. Физическая геометрия не является логическим построением и она является неаксиоматизируемой геометрией, которая не может быть построена обычным методом Евклида. Многие исследователи склонны думать, что не существует неаксиоматизируемых многовариантных геометрий. Кроме того метрический подход к геометрии требует построения нового математического формализма.

Пренебрежение многовариантностью является проявлением концептуальных проблем, связанных с переходом от описания детерминированного движения к описанию стохастического движения. Понятие многовариантности связано с математическим формализмом, описывающим движение стохастических частиц. Впервые негативное отношение научного сообщества к стохастическому движению проявилось в отношении к работам Больцмана, который предложил объяснит детерминированное движение сплошной среды стохастическим движением молекул этой среды. Поскольку стохастическое движение и многовариантность геометрии пространства-времени тесно связаны, отторжение кинетических уравнений Больцмана было отторжением многовариантности как причины стохастического движения. Поскольку формализм описания стохастического движения практически отсутствует, научное сообщество склонно игнорировать стохастическое движение и его обоснование с помощью многовариантной геометрии пространства-времени.

Причина такого отторжения может быть проиллюстрирована на примере перехода от механики Аристотеля к механике Ньютона. Механика Аристотеля – это по существу статика, которая исследует условия равновесия тела под действием различных сил. Механика Аристотеля не содержит таких понятий как ускорение и инерция. Она не рассматривает нарушение равновесия. Движение тела рассматривается как перемещение тела при сбалансированных силах, действующих на тело. Переход к механике Ньютона означал введение новых понятий, таких как ускорение и инерция. В соответствии с определением Ли Смолина [25] механика Ньютона – это объединение покоя и движения. Введение таких понятий как инерция и ускорение требовало такого математического формализма как исчисление бесконечно малых. Галилей ввел понятие инерции, которое позволяло объяснить совместимость вращения Земли вокруг своей оси с экспериментальными данными. Однако, соответствующего математического формализма не было и работы Галилея не были признаны. Очень трудно признать новое понятие, которое существенно изменяет существующую теорию, если не сформулирован соответствующий математический формализм.

Понятие инерции было признано только после работ Ньютона, который ввел понятие инерции в первый закон механики. Хотя первый закон механики является частным случаем второго закона механики, понятие инерции было введено как первый закон для того, чтобы подчеркнуть важность понятия инерции, которое не признавалось большинством ученых того времени.

Сейчас происходит переход от детерминированного движения частиц к стохастическому движению частиц. Этот переход нуждается в новом понятии (многовариантности) и новом математическом формализме. В новом формализме каркасной концепции элементарных частиц число динамических уравнений отличается, вообще говоря, от числа динамических переменных. Состояние частицы, описываемое каркасом $\mathcal{P}_n$, содержит $4n$ динамических переменных, которые удовлетворяют $n\,(n+1)$ динамических уравнений. Если $4n > n\,(n+1)$, например, для $n = 1, 2$, решение динамических уравнений не единственно. Это причина для вихляний мировой цепи. Понятие многовариантности и новый формализм, соответствующий объединению детерминированного движения частиц со стохастическим движением частиц не были приняты научным сообществом. По-видимому, это естественная вещь, что научное сообщество не воспринимает новые понятия, которые вводятся на основе логического рассмотрения новых фундаментальных физических принципов, а не на основе гипотез, извлеченных из экспериментальных данных.

9 Приложения каркасной концепции к микромиру

Таким образом, исправляя ошибки в основных физических и геометрических принципах, удалось создать каркасную концепцию элементарных частиц (ККЭП), которая позволяет исследовать устройство элементарных частиц, а не только систематизировать их. Это новая концепция, которая может быть классифицирована как объединение стохастического движения частиц с детерминированным их движением. Приложение ККЭП к уравнению Дирака показывает, что дираковская частица (фермион) имеет мировую линию в виде винтовой линии с времениподобной осью. Вращение частицы при ее движении вдоль винтовой линии непринужденно объясняет спин и магнитный момент частицы. Хотя этот результат получен при исследовании уравнения Дирака, он мог быть получен только в рамках ККЭП, когда уравнение Дирака рассматривается как динамическое уравнение, описывающее эволюцию статистического ансамбля [26, 27, 28, 29, 30]. Мировая линия свободной частицы может иметь форму винтовой линии, если каркас частицы состоит из трех точек [31, 32]. Естественное ограничение, что мировая функция является однозначной, приводит к тому, что электрический заряд элементарной частицы не больше элементарного заряда [33]. Этот результат известен из эксперимента, но не может быть объяснен существующей теорией элементарных частиц.

Список литературы

[1] Yu.A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. (*Journ. Math. Phys.* **40**, *pp. 256 - 278, (1999).*

[2] Yu.A. Rylov, Dynamic equations for tachyon gas,*Int. J. Theor. Phys.* **52**, 133(10), 3683- 3695, (2013), DOI:10.1007/s10773-013-1674-4

[3] Yu. A.Rylov, Discrete space-time geometry and skeleton conception of particle dynamics. *Int. J. Theor. Phys.* **51**, iss. 6 (2012), pp/ 1847-1865, (2012), see also *e-print* ArXiv: /1110.3399v1.

[4] J.E. Moyal, Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc.Phil. Soc.* **45**, 99 (1949).

[5] I.Fenyes, Foundation and interpretation of quantum mechanics from viewpoint of probability theory. *Zs. f. Physics* **132**, 81, (1952)

[6] E. Madelung, Quantentheorie in hydrodynamischer Form, Z. Physik, **40**, 322-326, (1926).

[7] D. Bohm, On interpretation of quantum mechanics on the basis of the "hidden"variable conception. *Phys.Rev.* **85,** 166, 180, (1952).

[8] P. Holland, *The Quantum Theory of Motion*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993) and references therein.

[9] Yu.A.Rylov, Quantum Mechanics as a theory of relativistic Brownian motion. *Ann. Phys. (Leipzig).* **27**, *1-11, (1971)*

[10] Yu.A.Rylov, Quantum mechanics as relativistic statistics.I: The two-particle case. *Int. J. Theor. Phys.* **8**, *65-83,(1973).*

[11] Yu.A.Rylov, Quantum mechanics as relativistic statistics.II: The case of two interacting particles. *Int. J. Theor. Phys.* 8, *123-139, (1973*).

[12] Б. Давыдов, Вариационный принцип и канонические уравнения для идеальной жидкости *ДАН*, **69**, 165-168, (1949)

[13] Yu. A.Rylov, Uniform formalism for description of dynamic, quantum and stochastic systems. *http://arXiv.org/abs/physics/0603237v6*

[14] A. Clebsch, Über eine allgemaine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).

[15] A. Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).

[16] Yu. A. Rylov, Hydrodynamical interpretation of quantum mechanics: the momentum distribution. *e-print, ArXiv: /physics/0402068*

[17] Lin, C.C. Hydrodynamics of Helium II. *Proc. Int. Sch Phys.* Course XXI, pp. 93-146, New York, Academic, 1963.

[18] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, *iss. 12, 733-760, (2002)*, см. также /math.MG/0103002.

[19] Yu. A.Rylov, Deformation principle and further geometrization of physics. *e-print* ArXiv: /0704.3003

[20] Yu. A.Rylov, Non-Euclidean method of the generalized geometry construction and its application to space-time geometry. in *Pure and Applied Differential geometry* pp.238-246. eds. Franki Dillen and Ignace Van de Woestyne. Shaker Verlag, Aachen, 2007. see also *e-print* ArXiv: /Math.GM/0702552

[21] Yu. A. Rylov, Multivariance as immanent property of the space-time geometry, *Int. J. Theor. Phys* **52**, iss.11, *4074-4082, (2013)*, DOI: 10.1007/s10773-013-1721-1

[22] Yu. A. Rylov, General relativity extended to non-Riemannian space-time geometry. *e-print* arXiv: /0910.3582v7

[23] Yu. A. Rylov, General relativity extended to non-Riemannian space-time geometry. *e-print* arXiv: /0910.3582v7

[24] Yu. A. Rylov, Induced antigravitation in the extended general relativity . *Gravitation and Cosmology*, **18**, No. 2, pp. 107–112,(2012)

[25] L.Smolin, *The trouble with physics: the rise of string theory, the fall of science, and what comes next.* Houghton Mifflin, Boston, 2006.

[26] Yu.A.Rylov, Dirac equation in terms of hydrodynamic variables *Advances in Applied Clifford Algebras*, **5**, pp 1-40, (1995)) See also *e-print* ArXiv: /1101.5868

[27] Yu.A. Rylov, Dynamic disquantization of Dirac equation. *e-print* ArXiv: /quant-ph/0104060.

[28] Yu. A. Rylov, Is the Dirac particle composite? *e-print* ArXiv: /physics/0410045.

[29] Yu. A. Rylov, Is the Dirac particle completely relativistic? *e-print* arXiv: /physics/0412032.

[30] Yu. A. Rylov, Dynamical methods of investigation in application to the Dirac particle. *e-print* arXiv: /physics/0507084

[31] Yu. A. Rylov, Geometrical dynamics: spin as a result of rotation with superluminal speed. *e-print* arXiv: /0801.1913

[32] Yu. A. Rylov, Neutrino world chain in framework of skeleton conception of particle dynamics. *Int. J. Theor. Phys.* (2012), DOI: 10.1007/s10773-012-1158-y

[33] Yu. A. Rylov, Discriminating properties of compactification in discrete uniform isotropic space-time. *e-print* arXiv: /0809.2516v2.