Структурный подход к теории элементарных частиц

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site: $http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Имеются два подхода к атомной физике: (1) структурный подход и (2) эмпирический подход (химия). Структурный подход использует методы атомной физики и, в частности, квантовую механику. Структурный подход позволяет исследовать структуру и устройство атома (ядра и электронной оболочки). Эмпирический подход использует только экспериментальные методы, в частности периодическую систему химических элементов. Он исследует свойства химических элементов и их химические реакции. Он может предсказывать новые химические элементы и их свойства (соответствующие квантовые числа), но он не может исследовать устройство атома (ядро и электронные оболочки).

В современной теории элементарных частиц имеется только эмпирический подход. Он позволяет определить квантовые числа элементарных частиц. Он позволяет систематизировать элементарные частицы, исследовать их взаимодействия, предсказывать новые элементарные частицы, но он не позволяет исследовать устройство элементарных частиц. Структурного подхода к теории элементарных частиц в настоящее время не существует. Настоящая работа посвящена развитию структурного подхода к теории элементарных частиц. Будучи аксиоматической концепцией, квантовая теория не может быть использована для построения структурного подхода. Рассматривая квантовое описание как статистическое описание стохастически движущихся элементарных частиц, удается получить некоторые элементы устройства элементарных частиц. В частности, оказывается, что релятивистские элементарные частицы порождают некоторое силовое поле (κ-поле), которое ответственно за рождение пар. Некоторые свойства κ-поля исследуются в работе. Стохастическое движение элементарных частиц может быть непринужденно объяснено свойствами дискретной геометрии пространства-времени, которая позволяет построить каркасную концепцию элементарных частиц.

Ключевые слова: структурный подход; единый формализм динамики; многовариантная геометрия; каркасная концепция

1 Введение

Имеется два разных подхода к теории элементарных частиц: (1) структурный подход и (2) эмпирический подход. При структурном подходе пытаются исследовать устройство элементарных частиц и их структуру. При эмпирическом подходе между разными элементарными частицами различают с помощью некоторых "квантовых чисел" приписываемых каждой элементарной частице. Этими "квантовыми числами (параметрами) являются: масса, электрический заряд, спин, магнитный момент, барионный заряд, изоспин и т.д. Элементарные частицы классифицируются по этим параметрам и на основе этой классификации предсказываются новые элементарные частицы. Однако, не удается связать эти параметры со структурой элементарных частиц, потому что в современной теории структурный подход отсутствует.

Что такое структурный подход можно понять на примере атомной теории, где имеются оба подхода структурный и эмпирический. При структурном подходе исследуется устройство атома: его ядро и электронная оболочка. Используется квантовая механика, которая позволяет рассчитать электронные оболочки разных атомов. При эмпирическом подходе химические элементы классифицируются по их свойствам, порожденным электронными оболочками их атомов. При эмпирическом подходе не интересуются структурой и устройством атомов. При эмпирическом подходе используется периодическая система химических элементов, полученная экспериментальным путем. Эмпирический подход не позволяет исследовать структуру атома. Структурный подход является более фундаментальным, чем эмпирический (химический) подход.

В современной теории элементарных частиц структурный подход отсутствует. На самом деле современная теория элементарных частиц – это химия (а не физика) элементарных частиц. Методы современной теории элементарных частиц не позволяют исследовать структуру (устройство) элементарных частиц. Они позволяют только приписывать квантовые числа разным элементарным частицам и различать между ними, пользуясь этими квантовыми числами. Причиной подобной ситуации является рассматривание квантовых законов в качестве фундаментальных законов природы, тогда как они описывают только среднее движение квантовых частиц. Точно так же законы газовой динамики описывают только среднее движение молекул газа, и они не позволяют исследовать структуру молекул газа, основываясь только на законах газовой динамики. В этой работе рассматриваются концептуальные проблемы физики микромира. Структурный подход основан на новой концепции элементарных частиц.

Следует заметить, что мы различаем между концепцией и теорией. Концепция не совпадает с теорией. Например, каркасная концепция элементарных частиц [1] отличается от теории элементарных частиц. Концепция исследует связи между понятиями теории. Например, каркасная концепция элементарных частиц исследует структуру возможной теории элементарных частиц. Она исследует, почему элементарная частица описывается ее каркасом (несколько пространственно-временных точек), который содержит всю информацию об элементарной частице. Каркасная концепция объясняет, почему динамические уравнения являются бескоординатными алгебраическими уравнениями и почему динамические уравнения записываются в терминах мировой функции. Однако каркасная концепция не дает ответа на вопрос, какой каркас соответствует конкретной элементарной частице и какова мировая функция для реального пространства-времени. Другими словами, каркасная концепция имеет дело с физическими принципами, а не с конкретными элементарными частицами. Концепцию нельзя проверить экспериментально. Однако, если мировая функция реального пространства-времени установлена и установлено соответствие между конкретной элементарной частицей и ее каркасом, то каркасная концепция превращается в теорию элементарных частиц. Теория элементарных частиц (а не концепция) может быть проверена на эксперименте.

Другими словами, бесполезно говорить об экспериментальной проверке каркасной концепции, потому что она имеет дело только с физическими принципами. Обсуждая свойства концепции, следует говорить только о свойствах понятий и логической связи между ними, а не о том, в какой степени они согласуются с экспериментальными данными. Например, утверждение, что динамика детерминированных частиц описывается в терминах лагранжианов есть утверждение концепции динамики частиц. Оно не утверждает какой именно лагранжиан следует использовать для описания некоторой конкретной частицы. Теория движения частиц получается после того, как установлено какой лагранжиан описывает каждую частицу. Птолемеевская концепция движения планет отличается от ньютоновской концепции движения планет, Хотя для первых шести планет обе теории дают один и тот же результат.

Чтобы использовать квантовую теорию в структурном подходе, надо заменить аксиоматическую концепцию квантовой теории на модельную концепцию. Например, волновая функция - это главный объект квантовой механики. Но что такое волновая функция? Откуда она взялась? Никто не знает. Волновая функция – это метод описания любой недиссипативной сплошной среды [2]. То, что уравнение Шредингера описывает потенциальное течение некоторой "квантовой" жидкости был известно с момента возникновения квантовой механики [3, 4]. Однако, в этих случаях начинали с уравнения Шредингера и квантовых принципов. Не удавалось начать с гидродинамики и вывести квантовое описание, записанное в терминах волновой функции. Чтобы сделать это, нужно проинтегрировать уравнения гидродинамики и представить их в терминах гидродинамических потенциалов (потенциалы Клебша [5, 6]). После этого можно построить волновую функцию из термодинамических потенциалов и получить описание в терминах волновой функции. Вообще говоря, динамические уравнения в терминах волновой функции нелинейны. Они становятся линейными только для потенциального течения. Но линейность динамических уравнений, записанных в терминах волновой функции, рассматривается обычно как принцип квантовой механики.

Но откуда появляется сплошная среда в описании квантовых частиц? Любая квантовая частицы – это стохастическая частица, и не существует динамических уравнений для описания отдельной стохастической частицы. Можно описывать только среднее движение квантовой частицы. Нужно рассмотреть много одинаковых независимых стохастических частиц. Эти частицы образуют статистический ансамбль. который может рассматриваться как множество независимых стохастических частиц. Статистический ансамбль есть динамическая система типа сплошной среды. Этот статистический ансамбль может рассматриваться как газ из невзаимодействущих стохастических частиц. Этот газ (сплошная среда) описывается волновой функцией. Такое описание удобно, потому что динамическое уравнение линейно в терминах волновой функции для потенциальных течений. Такое описание объясняет, что такое волновая функция и откуда она появилась.

Статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$ представляет собой множество независимых одинаковых стохастических частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$. Стохастическая частица $\mathcal{S}_{\rm st}$ не является динамической системой, и не существует динамических уравнений для $\mathcal{S}_{\rm st}$. Однако статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$ является динамической системой, и для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ существуют динамические уравнения. Динамическая система $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ есть динамическая система типа сплошной среды (жидкости). Динамические уравнения для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ описывают среднее движение стохастической частицы $\mathcal{S}_{\rm st}$. Формально статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ может рассматриваться как множество (не статистический ансамбль) одинаковых детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$ взаимодействующих между собой с помощью некоторого силового поля. Если это поле рассматривается как атрибут стохастической частицы, то исследуя свойства этого поля, можно исследовать структуру стохастической частицы.

Например, действие для статистического ансамбля стохастических частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$ имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}[\mathbf{x},\mathbf{u}] = \int\int\limits_{V_\xi} \left\{\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}\rho_1(\boldsymbol{\xi})\,dtd\boldsymbol{\xi}, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{1.1}$$

Переменная $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi})$ описывает регулярную составляющую движения частицы. Независимые переменные $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ маркируют элементы (частицы) статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$. Переменная $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ описывает среднее значение стохастической составляющей скорости, $\hbar$ есть квантовая постоянная, $\rho_1(\boldsymbol{\xi})$ есть весовая функция. Можно положить $\rho_1 = 1$. Второй член в (1.1) описывает кинетическую энергию стохастической составляющей скорости. Третий член описывает взаимодействие между стохастической составляющей $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ и регулярной составляющей $\dot{\mathbf{x}}(t,\boldsymbol{\xi})$. Оператор

$$\boldsymbol{\nabla} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right\} \tag{1.2}$$

определен в пространстве координат $\mathbf{x}$.

Формально действие (1.1) описывает множество детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$, взаимодействующих через силовое поле $\mathbf{u}$. Частицы $\mathcal{S}_{\rm d}$ образуют газ (или жидкость), описываемый переменными $\dot{\mathbf{x}}(t,\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{v}(t,\boldsymbol{\xi})$. Описание здесь производится в представлении Лагранжа. Гидродинамическое описание производится в терминах плотности ρ и скорости $\mathbf{v}$, где

$$\rho = \rho_1 J, \quad J \equiv \frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)} \tag{1.3}$$

Потенциальное течение этого газа описывается уравнением Шредингера [7].

Динамическое уравнение для силового поля $\mathbf{u}$ получается в результате вариации действия (1.1) по $\mathbf{u}$. оно имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho \tag{1.4}$$

Вектор $\mathbf{u}$ описывает среднее значение стохастической составляющей скорости стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. В нерелятивистском случае силовое поле $\mathbf{u}$ определяется его источником: плотностью жидкости ρ.

В терминах волновой функции действие (1.1) имеет вид [7]

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*]=\int\left\{\frac{i\hbar}{2}(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi)-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi+\frac{\hbar^2}{8m}\rho\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\right\}\mathrm{d}^4x \qquad (1.5)$$

где волновая функция $\psi=\left\{\begin{smallmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{smallmatrix}\right\}$ имеет две комплексные составляющие

$$\rho=\psi^*\psi,\qquad s_\alpha=\frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho},\qquad \alpha=1,2,3 \qquad (1.6)$$

σ_α есть 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_1=\left(\begin{array}{cc}0&1\\1&0\end{array}\right),\qquad \sigma_2=\left(\begin{array}{cc}0&-i\\i&0\end{array}\right),\qquad \sigma_3=\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&-1\end{array}\right), \qquad (1.7)$$

Динамическое уравнение, порожденное действием (1.5), имеет вид

$$i\hbar\partial_0\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi+\frac{\hbar^2}{8m}\boldsymbol{\nabla}^2s_\alpha\cdot(s_\alpha-2\sigma_\alpha)\,\psi-\frac{\hbar^2}{4m}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\sigma_\alpha\psi=0 \qquad (1.8)$$

В случае однокомпонентной волновой функции ψ, когда течение потенциально и $\boldsymbol{\nabla}s_\alpha=0$, динамическое уравнение имеет вид уравнения Шредингера

$$i\hbar\partial_0\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi=0 \qquad (1.9)$$

Таким образом, уравнение Шредингера является частным случаем динамического уравнения, порожденного действием (1.1) или (1.5).

Имеется несколько интерпретаций Шредингеровской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$: (1) квантовая интерпретация, (2) гидродинамическая интерпретация, (3) динамическая интерпретация.

При традиционной квантовой интерпретации шредингеровская частица $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является квантовой частицей, чья динамика описывается аксиоматическим уравнением Шредингера (1.9). Любые вопросы типа: почему частица $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является квантовой и какие величины ответственны за ее квантовое поведение, являются неуместными из-за аксиоматического характера описания.

Гидродинамическая интерпретация и динамическая интерпретация довольно близки. В соответствии с гидродинамической интерпретацией действие (1.1) описывает множество детерминированных частиц, взаимодействующих между собой через силовое поле $\mathbf{u}$. Нельзя рассматривать отдельную частицу, потому что в этом случае исчезает взаимодействие между частицами. Гидродинамическое описание не допускает рассмотрения отдельной частицы. Когда действие (1.1) описывает статистический ансамбль (а не множество взаимодействующих детерминированных частиц), динамическая интерпретация позволяет рассматривать эксперименты с отдельной частицей. Эксперименты со статистическим ансамблем могут быть реализованы как множество экспериментов с одинаково приготовленными стохастическими частицами. Движение отдельных частиц будет разным, вообще говоря, в разных экспериментах. Однако результат статистической обработки всех экспериментов не зависит от способов осуществления экспериментов. Эксперименты с отдельными частицами можно производить одновременно в одном и том же месте или в различных местах в разное время. Статистическое усреднение дает один и тот же результат во всех этих случаях. Например, двух-щелевой эксперимент можно производить для многих электронов сразу, или с отдельным электроном много раз. Результат статистического усреднения будет одним и тем же во всех случаях. Это показывает, что действие (1.1) описывает статистический ансамбль стохастических частиц, а не газ взаимодействующих детерминированных частиц.

Таким образом, динамическая интерпретация, когда действие (1.1) описывает статистический ансамбль стохастических частиц является наиболее правильной интерпретацией, которая не закрывает дверь для исследования стохастического поведения квантовых частиц. Причиной такого стохастического поведения может быть взаимодействие частицы со средой (вакуумом, эфиром, и т.д.), где движется частица. Влияние среды остается одним и тем же во всех отдельных экспериментах.

2 Релятивистская стохастическая частица

Рождение пар появляется только для релятивистских квантовых частиц. Оно отсутствует для классических частиц. Что является причиной рождения пар? Возможно ли описать это динамически? Динамическое описание не возможно в рамках традиционной аксиоматической квантовой теории. Однако оно возможно при описании стохастической частицы $\mathcal{S}_{\rm st}$ в терминах статистического ансамбля. В случае релятивистской стохастической частицы $\mathcal{S}_{\rm st}$ силовое поле имеет свои собственные степени свободы. Оно может отрываться от источника и перемещаться в пространстве-времени. В релятивистском случае получаем действие

$$\mathcal{A}\left[x,\kappa\right] = \int \left\{-mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k} - \frac{e}{c}A_k\dot{x}^k\right\} d^4\xi, \quad d^4\xi = d\xi_0 d\boldsymbol{\xi} \tag{2.1}$$

$$K = \sqrt{1+\lambda^2\left(\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l\right)}, \qquad \lambda = \frac{\hbar}{mc}, \quad \tau = \boldsymbol{\xi}_0 \tag{2.2}$$

Здесь $x = \left\{x^i\left(\xi_0, \boldsymbol{\xi}\right)\right\}, \quad i = 0,1,2,3$ суть зависимые переменные, описывающие регулярную составляющую движения частицы. Переменные $\xi = \left\{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\right\} = \left\{\xi_k\right\}, \quad k = 0,1,2,3$ являются независимыми переменными, маркирующими частицы статистического ансамбля, и $\dot{x}^i \equiv dx^i/d\xi_0$. Величины $\kappa^l = \left\{\kappa^l\left(x\right)\right\}, \quad l = 0,1,2,3$ являются зависимыми переменными, описывающими стохастическую составляющую скорости частицы, $A_k = \left\{A_k\left(x\right)\right\}, \quad k = 0,1,2,3$ есть потенциал электромагнитного поля. Мы будем обозначать динамическую систему, описываемую действием (2.1), (2.2) посредством $\mathcal{S}_{\rm KG}$, потому что потенциальное течение среды $\mathcal{S}_{\rm KG}$ описывается уравнением Клейна-Гордона [8]. Мы приведем здесь это преобразование к виду уравнения Клейна-Гордона. Здесь и далее производится суммирование по повторяющимся латинским индексам $(0 \div 3)$ и по греческим индексам $(1 \div 3)$. Мы представим здесь преобразование действия (2.1), (2.2) к виду Клейна-Гордона.

Динамические уравнения, порожденные действием (2.1), (2.2), являются уравнениями гидродинамического типа. Чтобы представить эти уравнения в терминах волновой функции, нужно проинтегрировать их в общем виде. Проблема интегрирования четырех гидродинамических уравнений Эйлера

$$\partial_0 \rho + \boldsymbol{\nabla} (\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{2.3}$$

$$\partial_0 \mathbf{v} + (\mathbf{v} \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p, \qquad p = p(\rho, \boldsymbol{\nabla} \rho) \tag{2.4}$$

кажется безнадежной. Это действительно так, если система уравнений Эйлера (2.3), (2.4) рассматривается как полная система динамических уравнений. На самом деле, эйлеровы уравнения (2.3), (2.4) не образуют полной системы динамических уравнений, поскольку они не описывают движение частицы жидкости вдоль их траекторий. Чтобы получить полную систему динамических уравнений, следует добавить к ней так называемые условия Лина [9]

$$\partial_0 \boldsymbol{\xi} + (\mathbf{v} \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{\xi} = 0 \tag{2.5}$$

где $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ суть три независимых интеграла динамических уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}),$$

описывающих движение частиц жидкости в заданном поле скоростей.

Семь уравнений (2.3) – (2.5) образуют полную систему динамических уравнений, тогда как четыре уравнения Эйлера (2.3), (2.4) образуют только замкнутую подсистему полной системы динамических уравнений. Волновая функция выражается через гидродинамические потенциалы $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, которые известны также как потенциалы Клебша [5, 6]. В общем случае произвольного течения в трехмерном пространстве комплексная волновая функция ψ имеет две комплексные составляющие ψ_1, ψ_2 (или четыре независимые вещественные составляющие)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} e^{i\varphi} u_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \sqrt{\rho} e^{i\varphi} u_2(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}, \qquad |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1 \tag{2.6}$$

Невозможно получить общее решение системы Эйлера (2.3), (2.4), но можно частично проинтегрировать полную систему уравнений (2.3) – (2.5), уменьшив ее порядок до четырех уравнений для волновой функции (2.6). Практически это означает, что интегрируются динамические уравнения (2.5), где функция $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ определяется неявно уравнениями (2.3), (2.4). Такое интегрирование и уменьшение порядка полной системы уравнений оказывается возможным, потому что система (2.3) – (2.5) имеет группу симметрии, связанную с преобразованием потенциалов Клебша

$$\xi_\alpha \to \tilde{\xi}_\alpha = \tilde{\xi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1, 2, 3, \qquad \frac{\partial\left(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3\right)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \neq 0 \tag{2.7}$$

3 Преобразование действия к описанию в терминах волновой функции

Рассмотрим переменные $\xi = \xi(x)$ в (2.1) как зависимые переменные, а переменные x как независимые переменные. Пусть якобиан

$$J = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det\left|\left|\xi_{i,k}\right|\right|, \qquad \xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i, \qquad i,k = 0,1,2,3 \tag{3.1}$$

рассматривается как полилинейная функция от $\xi_{i,k}$. Тогда

$$d^4\xi = J d^4 x, \qquad \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\xi_0} \equiv \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J^{-1}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \tag{3.2}$$

После преобразования к зависимым переменным ξ действие (2.1) принимает вид

$$\mathcal{A}[\xi, \kappa] = \int \left\{ -mcK\sqrt{g_{ik}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}} - \frac{e}{c}A_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right\} d^4x, \tag{3.3}$$

$$K = \sqrt{1 + \lambda^2\left(\kappa_l \kappa^l + \partial_l \kappa^l\right)}, \qquad \lambda = \frac{\hbar}{mc}, \tag{3.4}$$

Введем новые переменные

$$j^k = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{3.5}$$

с помощью множителей Лагранжа p_k

$$\mathcal{A}[\xi, \kappa, j, p] = \int \left\{ -mcK\sqrt{g_{ik} j^i j^k} - \frac{e}{c}A_k j^k + p_k\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} - j^k\right) \right\} d^4x, \tag{3.6}$$

Вариация по ξ_i дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \xi_i} = -\partial_l\left(p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}}\right) = 0, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{3.7}$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}}\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}}\right) \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}}\xi_{k,l} \equiv J\delta_k^i, \qquad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k}\partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{3.9}$$

можно проверить прямой подстановкой, что общее решение линейных уравнений (3.7) имеет вид

$$p_k = b_0\left(\partial_k \varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\partial_k \xi_\alpha\right), \qquad k = 0,1,2,3 \tag{3.10}$$

где $b_0 \neq 0$ есть постоянная, $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1,2,3$ суть произвольные функции аргументов $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, и φ есть динамическая переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной. Подставим (3.10) в (3.6). Член вида $\partial J/\partial\xi_{0,k}\partial_k\varphi$ приводится к якобиану и не дает вклада в динамические уравнения. Члены вида $\xi_{\alpha,k}\partial J/\partial\xi_{0,k}$ исчезают благодаря тождествам (3.9). Получаем

$$\mathcal{A}[\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa, j] = \int \left\{-mcK\sqrt{g_{ik}j^i j^k} - j^k\pi_k\right\} d^4x, \tag{3.11}$$

где величины π_k определяются соотношениями

$$\pi_k = b_0\left(\partial_k\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\partial_k\xi_\alpha\right) + \frac{e}{c}A_k, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{3.12}$$

Интегрирование уравнений (3.7) в виде (3.10) есть именно то интегрирование, которое позволяет ввести волновую функцию. Заметим, что коэффициенты в системе уравнений (3.7) перед прозводными p_k построены из миноров якобиана (3.1). Именно это обстоятельство позволяет произвести формальное общее интегрирование.

Вариация действия (3.11) по κ^l дает

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\kappa^l} = -\frac{\lambda^2 mc\sqrt{g_{ik}j^i j^k}}{K}\kappa_l + \partial_l\frac{\lambda^2 mc\sqrt{g_{ik}j^i j^k}}{2K} = 0, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \tag{3.13}$$

Это может быть записано в виде

$$\kappa_l = \partial_l\kappa = \frac{1}{2}\partial_l\ln\rho, \qquad e^{2\kappa} = \frac{\rho}{\rho_0} \equiv \frac{\sqrt{j_s j^s}}{\rho_0 K}, \tag{3.14}$$

где ρ_0 =const есть постоянная интегрирования. Подставляя (3.4) в (3.14), получаем динамическое уравнение для κ

$$\hbar^2\left(\partial_l\kappa\cdot\partial^l\kappa + \partial_l\partial^l\kappa\right) = m^2c^2\frac{e^{-4\kappa}j_s j^s}{\rho_0^2} - m^2c^2 \tag{3.15}$$

Вариация действия (3.11) по j^k дает

$$\pi_k = -\frac{mcKj_k}{\sqrt{g_{ls}j^l j^s}} \tag{3.16}$$

или

$$\pi_k g^{kl}\pi_l = m^2c^2K^2 \tag{3.17}$$

Подставляя $\sqrt{j_s j^s}/K$ из второго уравнения (3.14) в (3.16), получаем

$$j_k = -\frac{\rho_0}{mc}e^{2\kappa}\pi_k, \tag{3.18}$$

Теперь исключим переменные j^k из действия (3.11), используя соотношения (3.18) и (3.14). Получаем

$$\mathcal{A}[\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa] = \int \rho_0 e^{2\kappa}\left\{-m^2c^2K^2 + \pi^k\pi_k\right\} d^4x, \tag{3.19}$$

где π_k определяется соотношением (3.12). При использовании выражения (2.2) для K, первый член действия (3.19) может быть преобразован следующим образом.

$$\begin{aligned}
-m^2c^2e^{2\kappa}K^2 &= -m^2c^2e^{2\kappa}\left(1+\lambda^2\left(\partial_l\kappa\partial^l\kappa+\partial_l\partial^l\kappa\right)\right) \\
&= -m^2c^2e^{2\kappa}+\hbar^2e^{2\kappa}\partial_l\kappa\partial^l\kappa-\frac{\hbar^2}{2}\partial_l\partial^le^{2\kappa}
\end{aligned}$$

Примем во внимание, что последний член имеет вид дивергенции. Он не дает вклада в динамические уравнения и может быть опущен. Опустив этот член, получаем

$$\mathcal{A}[\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa]=\int\rho_0e^{2\kappa}\left\{-m^2c^2+\hbar^2\partial_l\kappa\partial^l\kappa+\pi^k\pi_k\right\}d^4x, \tag{3.20}$$

Здесь π_k определяется соотношением (3.12), где постоянная интегрирования b_0 выбрана в виде $b_0=\hbar$

$$\pi_k=\hbar\left(\partial_k\varphi+g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\partial_k\xi_\alpha\right)+\frac{e}{c}A_k,\qquad k=0,1,2,3 \tag{3.21}$$

Вместо динамических переменных $\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa$ введем n-компонентную комплексную функцию

$$\psi=\{\psi_\alpha\}=\left\{\sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi})\right\}=\left\{\sqrt{\rho_0}e^{\kappa+i\varphi}u_\alpha(\boldsymbol{\xi})\right\},\qquad \alpha=1,2,...n \tag{3.22}$$

Здесь u_α суть функции только от $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, имеющие следующие свойства

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}u_\alpha^*u_\alpha=1,\qquad -\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(u_\alpha^*\frac{\partial u_\alpha}{\partial\xi_\beta}-\frac{\partial u_\alpha^*}{\partial\xi_\beta}u_\alpha\right)=g^\beta(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.23}$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Число n компонентов волновой функции ψ зависит от вида функций $g^\beta(\boldsymbol{\xi})$. Число n выбрано таким образом, чтобы уравнения (3.23) имели решение. Тогда получаем

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\psi_\alpha^*\psi_\alpha=\rho=\rho_0e^{2\kappa},\qquad \partial_l\kappa=\frac{\partial_l(\psi^*\psi)}{2\psi^*\psi} \tag{3.24}$$

$$\pi_k = -\frac{i\hbar\left(\psi^*\partial_k\psi-\partial_k\psi^*\cdot\psi\right)}{2\psi^*\psi}+\frac{e}{c}A_k,\qquad k=0,1,2,3 \tag{3.25}$$

Подставляя соотношения (3.24), (3.25) в (3.20), получаем действие, записанное в терминах волновой функции ψ

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[\psi,\psi^*] &= \int\left\{\left[\frac{i\hbar\left(\psi^*\partial_k\psi-\partial_k\psi^*\cdot\psi\right)}{2\psi^*\psi}-\frac{e}{c}A_k\right]\left[\frac{i\hbar\left(\psi^*\partial^k\psi-\partial^k\psi^*\cdot\psi\right)}{2\psi^*\psi}-\frac{e}{c}A^k\right]\right. \\
&\quad\left.+\hbar^2\frac{\partial_l(\psi^*\psi)\,\partial^l(\psi^*\psi)}{4(\psi^*\psi)^2}-m^2c^2\right\}\psi^*\psi d^4x
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Используем тождество

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\psi^*\partial_l\psi-\partial_l\psi^*\cdot\psi\right)\left(\psi^*\partial^l\psi-\partial^l\psi^*\cdot\psi\right)}{4\psi^*\psi}+\partial_l\psi^*\partial^l\psi \\
\equiv\ &\frac{\partial_l\left(\psi^*\psi\right)\partial^l\left(\psi^*\psi\right)}{4\psi^*\psi}+\frac{g^{ls}}{2}\psi^*\psi\sum_{\alpha,\beta=1}^{\alpha,\beta=n}Q_{\alpha\beta,l}^*Q_{\alpha\beta,s}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

где

$$Q_{\alpha\beta,l}=\frac{1}{\psi^*\psi}\left|\begin{array}{cc}\psi_\alpha & \psi_\beta\\ \partial_l\psi_\alpha & \partial_l\psi_\beta\end{array}\right|,\qquad Q_{\alpha\beta,l}^*=\frac{1}{\psi^*\psi}\left|\begin{array}{cc}\psi_\alpha^* & \psi_\beta^*\\ \partial_l\psi_\alpha^* & \partial_l\psi_\beta^*\end{array}\right| \tag{3.28}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\left[\psi,\psi^*\right]\ =\ &\int\left\{\left(i\hbar\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\psi^*\left(-i\hbar\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi-m^2c^2\psi^*\psi\right.\\
&\left.+\frac{\hbar^2}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\alpha,\beta=n}g^{ls}Q_{\alpha\beta,l}Q_{\alpha\beta,s}^*\psi^*\psi\right\}d^4x
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Рассмотрим случай потенциального течения, когда $g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)=0$ и функция ψ имеет только одну составляющую. Из (3.28) следует, что $Q_{\alpha\beta,l}=0$. Тогда получаем вместо (3.29)

$$\mathcal{A}\left[\psi,\psi^*\right]=\int\left\{\left(i\hbar\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\psi^*\left(-i\hbar\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi-m^2c^2\psi^*\psi\right\}d^4x \tag{3.30}$$

Вариация действия (3.30) по ψ^* порождает уравнение Клейна-Гордона

$$\left(-i\hbar\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\left(-i\hbar\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi-m^2c^2\psi=0 \tag{3.31}$$

Таким образом, уравнение Клейна-Гордона есть частный случай описания стохастических частиц с помощью действия(2.1), (2.2).

В случае когда течение жидкости завихренное, и волновая функция ψ двухкомпонентна, тождество (3.27) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\psi^*\partial_l\psi-\partial_l\psi^*\cdot\psi\right)\left(\psi^*\partial^l\psi-\partial^l\psi^*\cdot\psi\right)}{4\rho}-\frac{\left(\partial_l\rho\right)\left(\partial^l\rho\right)}{4\rho}\\
\equiv\ &-\partial_l\psi^*\partial^l\psi+\frac{1}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\rho
\end{aligned} \tag{3.32}$$

где 3-вектор $\mathbf{s}=\{s_1,s_2,s_3,\}$ определяется соотношением

$$\rho=\psi^*\psi,\qquad s_\alpha=\frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho},\qquad \alpha=1,2,3 \tag{3.33}$$

$$\psi=\binom{\psi_1}{\psi_2},\qquad \psi^*=\left(\psi_1^*,\psi_2^*\right), \tag{3.34}$$

а матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ имеют вид

$$\sigma_1=\left(\begin{array}{cc}0&1\\1&0\end{array}\right),\qquad \sigma_2=\left(\begin{array}{cc}0&-i\\i&0\end{array}\right),\qquad \sigma_3=\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&-1\end{array}\right) \tag{3.35}$$

Заметим, что 3-векторы $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ суть векторы в пространстве V_ξ потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$. Они преобразуются как векторы при преобразованиях (2.7)

Вообще говоря, преобразования потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$ и преобразования координат $\mathbf{x}$ независимы. Однако действие (3.26) не содержит ссылки на потенциалы Клебша $\boldsymbol{\xi}$ и преобразования (2.7) потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$. Если мы рассматриваем только преобразования пространственных координат $\mathbf{x}$

$$x^\alpha\rightarrow\tilde{x}^\alpha=b^\alpha+\omega_{.\beta}^\alpha x^\beta,\qquad \alpha=1,2,3 \tag{3.36}$$

ничто не мешает нам сопровождать каждое преобразование (3.36) аналогичным преобразованием

$$\xi_\alpha\rightarrow\tilde{\xi}_\alpha=b^\alpha+\omega_{.\beta}^\alpha \xi_\beta,\qquad \alpha=1,2,3 \tag{3.37}$$

потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$. Формулы для линейные преобразований векторов и спиноров в V_x не содержат явно координат $\mathbf{x}$, и можно рассматривать векторы и спиноры в V_ξ как векторы и спиноры в V_x, при условии, что мы всегда рассматриваем вместе преобразования (3.36) и (3.37).

Используя тождество (3.32), получаем из (3.26)

$$\mathcal{A}\left[\psi,\psi^*\right]=\int\left\{\left(i\hbar\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\psi^*\left(-i\hbar\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi-m^2c^2\rho-\frac{\hbar^2}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\rho\right\}d^4x \tag{3.38}$$

Динамическое уравнение, порожденное действием (3.38), имеет вид

$$\begin{aligned}&\left(-i\hbar\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\left(-i\hbar\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi-\left(m^2c^2+\frac{\hbar^2}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\right)\psi\\ =\ &-\hbar^2\frac{\partial_l\left(\rho\partial^l s_\alpha\right)}{2\rho}\left(\sigma_\alpha-s_\alpha\right)\psi\end{aligned} \tag{3.39}$$

Градиент единичного 3-вектора $\mathbf{s}=\{s_1,s_2,s_3\}$ описывает завихренную составляющую потока жидкости. Если $\mathbf{s}=\text{const}$, динамическое уравнение (3.39) превращается в традиционное уравнение Клейна-Гордона (3.31). Вихрь векторного поля π_k, определяемый соотношением(3.25), выражается только через производные единичного 3-вектора $\mathbf{s}$.

Чтобы показать это, представим волновую функцию (3.22) в виде

$$\psi=\sqrt{\rho}e^{i\varphi}\left(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\right)\chi,\qquad \psi^*=\sqrt{\rho}e^{-i\varphi}\chi^*\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right),\qquad \mathbf{n}^2=1,\qquad \chi^*\chi=1 \tag{3.40}$$

где $\mathbf{n}=\{n_1,n_2,n_3\}$ есть некоторый единичный 3-вектор, $\chi=\binom{\chi_1}{\chi_2}$, $\chi^*=(\chi_1^*,\chi_2^*)$ суть постоянные двухкомпонентные величины, и $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ суть матрицы Паули (3.35). Единичный вектор $\mathbf{s}$ и единичный вектор $\mathbf{n}$ связаны соотношениями

$$\mathbf{s}=2\mathbf{n}\left(\mathbf{nz}\right)-\mathbf{z},\qquad \mathbf{n}=\frac{\mathbf{s}+\mathbf{z}}{\sqrt{2\left(1+\left(\mathbf{sz}\right)\right)}} \tag{3.41}$$

где $\mathbf{z}$ есть постоянный единичный вектор, определяемый соотношением

$$\mathbf{z} = \chi^* \boldsymbol{\sigma} \chi, \qquad \mathbf{z}^2 = \chi^* \chi = 1 \tag{3.42}$$

Все 3-векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{z}$ являются векторами в V_ξ. Подставим соотношение (3.40) в выражение $\partial_l \pi_k - \partial_k \pi_l$ для вихря векторного поля π_k определенного соотношением (3.25). Тогда последовательно понижая степени σ с помощью тождества

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta \equiv \delta_{\alpha\beta} + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \tag{3.43}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ есть псевдотензор Леви-Чивита ($\varepsilon_{123} = 1$), получим после вычислений

$$\begin{aligned}
\pi_k &= -\frac{i\hbar\left(\psi^* \partial_k \psi - \partial_k \psi^* \cdot \psi\right)}{2\psi^* \psi} + \frac{e}{c} A_k \\
&= \hbar\left(\partial_k \varphi + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\alpha \partial_k n_\beta z_\gamma\right) + \frac{e}{c} A_k \qquad k = 0, 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\partial_k \pi_l - \partial_l \pi_k = -4\hbar \left[\partial_k \mathbf{n} \times \partial_l \mathbf{n}\right] \mathbf{z} + \frac{e}{c}\left(\partial_k A_l - \partial_l A_k\right), \qquad k, l = 0, 1, 2, 3 \tag{3.45}$$

Соотношение (3.45) может быть выражено также через 3-вектор $\mathbf{s}$, при условии что мы используем формулы (3.41).

Заметим,что двухкомпонентный вид волновой функции может описывать завихренное течение. Например, если $\psi = \binom{\psi_1}{\psi_1}$, $s_1 = 1$, $s_2 = s_3 = 0$, то динамическое уравнение (3.39) приводится к виду (3.31), и вихрь от π_k, определяемый соотношением (3.45) приводит к

$$\partial_k \pi_l - \partial_l \pi_k = \frac{e}{c}\left(\partial_k A_l - \partial_l A_k\right), \qquad k, l = 0, 1, 2, 3 \tag{3.46}$$

4 κ-поле ответственно за рождение пар

Нерелятивистское поле $\mathbf{u}$ в действии (1.1) является внутренним полем нерелятивистской частицы. Оно может только воздействовать на движение нерелятивистской частицы, делая его стохастическим. В соответствии с действием (2.1), (2.2) κ-поле выглядит как внутреннее поле частицы. Кажется, что оно может действовать только на движение частицы и не может действовать на движение других частиц. Однако это не так. κ-поле (релятивистская версия нерелятивистского поля $\mathbf{u}$) может рождать пары. Другими словами, κ-поле, может поворачивать мировую линию частицы во временном направлении. Формально в таком действии κ-поле действует как внутреннее поле частицы. Но такой поворот мировой линии возможен, если только κ-поле является внешним полем. Проиллюстрируем это на примере [10], когда

$$K = \sqrt{1 + \lambda^2\left(\kappa_l \kappa^l + \partial_l \kappa^l\right)} = \sqrt{1 + f(x)} \tag{4.1}$$

где $f(x)$ есть некоторая заданная функция координат x. Действие (2.1), (2.2) принимает вид

$$\mathcal{A}[q] = \int L(q, \dot{q})\, d\tau, \qquad L = -\sqrt{m^2 c^2 (1 + f(q))\, g_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k} - \frac{e}{c} A_k \dot{q}^k \tag{4.2}$$

где соотношения $x^i = q^i(\tau)$, $i = 0,1,2,3$ описывают мировую линию частицы, и $\dot{q}^k \equiv dq^i/d\tau$. Величины $A_k = A_k(q)$, $k = 0,1,2,3$ описывают заданный потенциал электромагнитного поля, и $f = f(q)$ есть некоторое заданное поле, Заменяющее массу частицы m эффективной массой частицы $m_{\text{eff}} = m\sqrt{(1+f(q))}$. Канонический импульс p_k определяется соотношением

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = -\frac{mcKg_{ki}\dot{q}^i}{\sqrt{g_{ls}\dot{q}^l\dot{q}^s}} - \frac{e}{c}A_k, \qquad K = \sqrt{(1+f(q))} \tag{4.3}$$

Динамические уравнения имеют вид

$$\frac{dp_k}{d\tau} = -mc\sqrt{g_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k}\frac{\partial K}{\partial q^k} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial q^k}\dot{q}^i \tag{4.4}$$

Можно видеть из (4.3), что вектор

$$\dot{q}_k = \sqrt{\frac{g_{ls}\dot{q}^l\dot{q}^s}{1+f(q)}}\frac{\left(p_k + \frac{e}{c}A_k\right)}{mc} \tag{4.5}$$

становится пространственноподобным $\left(g_{ls}\dot{q}^l\dot{q}^s < 0\right)$, если $f(q) < -1$, потому что только в этом случае выражение под радикалом в (4.5) будет вещественным.

Уравнение Гамильтона - Якоби для действия (4.2) имеет вид

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial q^i} + \frac{e}{c}A_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial q^k} + \frac{e}{c}A_k\right) = m^2c^2(1+f(q)) \tag{4.6}$$

Рассмотрим решение уравнения Гамильтона - Якоби в пространстве-времени, где $A_i = 0$, и $f = f(t)$ является функцией только времени t. В этом случае полный интеграл $S(t,\mathbf{x},\mathbf{p})$ уравнения (4.6) имеет вид

$$S(t,\mathbf{x},\mathbf{p}) = \mathbf{px} + \int\limits_0^t c\sqrt{m^2c^2(1+f(t)) + \mathbf{p}^2}dt + C, \qquad \mathbf{p}, C = \text{const} \tag{4.7}$$

где $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$ суть параметры. Уравнение мировой линии определяется уравнением

$$\frac{\partial S(t,\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_\alpha} = x^\alpha - x_0^\alpha, \quad x_0^\alpha = \text{const}, \quad \alpha = 1,2,3 \tag{4.8}$$

Подставляя (4.7) в (4.8) и полагая $p_2 = p_3 = 0$,получаем

$$x^1 - x_0^1 + \int\limits_0^t \frac{p_1 c dt}{\sqrt{m^2c^2(1+f(t)) + p_1^2}} = 0, \qquad x_0^1 = \text{const} \tag{4.9}$$

$$x^\alpha = x_0^\alpha = \text{const}, \quad \alpha = 2,3 \tag{4.10}$$

Пусть, например

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad t < 0 \\ -\frac{V^2}{m^2c^4t_0^2}t(t-t_0) & \text{если} \quad 0 < t < t_0 \\ 0 & \text{если} \quad t_0 < t \end{cases}, \qquad t_0, V = \text{const} \tag{4.11}$$

Мировая линия (4.9) принимает вид

$$x^1 = \begin{cases} x_0^1 - \frac{p_1 c^2}{E} t & \text{если} \quad t < 0 \\ x_0^1 - \int\limits_0^t \frac{p_1 c dt}{\sqrt{E^2 - V^2 t(t-t_0)/t_0^2}} & \text{если} \quad 0 < t < t_0 \\ x_1^1 + \alpha \frac{p_1 c^2}{E} (t - t_0) & \text{если} \quad t_0 < t \end{cases}, \qquad E = c\sqrt{m^2c^2 + p_1^2} \tag{4.12}$$

где $\alpha = \pm 1$. Знак величины α и постоянная x_1^1 определяются из условия непрерывности мировой линии при $t = t_0$. Решение (4.12) имеет различный вид в зависимости от знака постоянной $4E^2 - V^2$.

Если $4E^2 > V^2$, мировая линия (4.12) имеет вид

$$x^1 = \begin{cases} x_0^1 - \frac{p_1 c^2}{E} t & \text{если } t < 0 \\ x_0^1 - \frac{p_1 c^2 t_0}{V} \arcsin \frac{2V\left(\sqrt{E^2 t_0^2 - V^2 t(t-t_0)} - E(t_0 - 2t)\right)}{t_0(4E^2 + V^2)} & \text{если } 0 < t < t_0 \\ x_0^1 - p_1 c^2 \frac{t_0}{V} \arcsin \frac{4EV}{4E^2 + V^2} - \frac{p_1 c^2}{E} (t - t_0) & \text{если } t_0 < t \end{cases}, \qquad E^2 > V^2/4 \tag{4.13}$$

В случае, когда $4E^2 < V^2$, мировая линия отражается от области Ω_{fb} пространства-времени, определяемой условием $0 < t < t_0$ в (4.11). В этом случае координата x не является однозначной функцией времени t. Используем параметрическое представление для мировой линии (4.12). Получаем

$$x^1 = \begin{cases} x_0^1 - \frac{p_1 c^2 t_0}{2E} (1 - A\cosh\tau) & \text{если} \quad \tau < -\tau_0 \\ x_0^1 - \frac{p_1 c^2 t_0}{V} (\tau + \tau_0) & \text{если} \quad -\tau_0 < \tau < \tau_0 \\ x_0^1 - \frac{2p_1 t_0}{V} \tau_0 + \frac{p_1 c^2 t_0}{2E} (1 - A\cosh\tau) & \text{если} \quad \tau_0 < \tau \end{cases} \tag{4.14}$$

$$t = \frac{t_0}{2} (1 - A\cosh\tau) \tag{4.15}$$

где

$$A = \sqrt{1 - \frac{4E^2}{V^2}}, \qquad \tau_0 = \operatorname{arccosh} \frac{1}{A} = \operatorname{arccosh} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4E^2}{V^2}}} \tag{4.16}$$

Решение (4.14), (4.15) описывает аннигиляцию частицы и античастицы с энергией $E < V/2$ в области $0 < t < t_0$. Мировая линия, описывающая рождение пары частица - античастица, имеет вид

$$x^1 = \begin{cases} x_0^1 - \frac{p_1 c^2 t_0}{2E} (A\cosh\tau - 1) & \text{если} \quad \tau < -\tau_0 \\ x_0^1 + \frac{p_1 c^2 t_0}{V} (\tau + \tau_0) & \text{если} \quad -\tau_0 < \tau < \tau_0 \\ x_0^1 + \frac{2p_1 t_0}{V} \tau_0 + \frac{p_1 c^2 t_0}{2E} (A\cosh\tau - 1) & \text{если} \quad \tau_0 < \tau \end{cases} \tag{4.17}$$

$$t = \frac{t_0}{2} (A\cosh\tau - 1) \tag{4.18}$$

где параметры A, τ_0 определяются соотношением (4.16), и выполняется условие $2E < V$.

В обоих случаях (4.14) и (4.17) при $|t| \to \infty$ мировая линия имеет две ветви, которые могут быть аппроксимированы соотношениями

$$x^1 = x_0^1 + vt_1 \pm v\,(t - t_1)\,, \qquad t_1 = t_0 \frac{E}{V} \tag{4.19}$$

где $v = -\frac{p_1 c^2}{E}$ есть скорость частицы, и $v = \frac{p_1 c^2}{E}$ есть скорость античастицы.

Мировая линия частицы не может изменить свое направление во времени за счет внутренних резервов. Это возможно только в некотором внешнем поле. Энергия частицы и античастицы поглощается внешним полем $f\,(t)$. Таким образом, оказывается, что κ-поле не только внутреннее поле. Оно может быть силовым полем, которое ответственно за рождение пар и аннигиляцию пар, потому что оба процесса связаны с поворотом мировой линии во времени.

5 Много релятивистских стохастических частиц

Рассмотрим N тождественных релятивистских стохастических частиц, имеющих электрический заряд e и массу m. Они взаимодействуют через электромагнитное поле и через силовое поле κ. Действие имеет вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\,[X,\kappa, A] = \sum_{A=1}^{A=N} \int\limits_{V_{\boldsymbol{\xi}}} L_{(A)}\left(x_{(A)}\,(\tau, \boldsymbol{\xi})\right) d\tau d\boldsymbol{\xi} + \int_{V_x} L_{\mathrm{em}} d^4 x \tag{5.1}$$

$$X = \left\{x_{(1)}, x_{(1)}, ...x_{(N)}\right\}, \quad x_{(A)} = \left\{x_{(A)}^0, x_{(A)}^1, x_{(A)}^2, x_{(A)}^3\right\}, \quad A = 1, 2, ...N \tag{5.2}$$

Здесь индекс в круглых скобках означает номер частицы.

$$L_{(A)}\left(x_{(A)}\,(\tau, \boldsymbol{\xi})\right) = -mcK_{(A)}\left(x_{(A)}\right)\sqrt{g_{ik}\dot{x}_{(A)}^i \dot{x}_{(A)}^k} - \frac{e}{c} A_k\,(x_A)\,\dot{x}_{(A)}^k, \quad A = 1, 2, ...N \tag{5.3}$$

$$\dot{x}_{(A)}^i = \frac{dx_{(A)}^i}{d\tau}, \quad x_{(A)} = x_{(A)}\,(\tau, \boldsymbol{\xi}) \tag{5.4}$$

$$K_{(A)} = \sqrt{1 + \lambda^2 \left(g_{kl}\kappa^k\,(x_A)\,\kappa^l\,(x_A) + \frac{\partial}{\partial x_{(A)}^k}\kappa^k\,(x_A)\right)}, \qquad \lambda = \frac{\hbar}{mc}, \quad A = 1, 2, ...N \tag{5.5}$$

$$L_{\mathrm{em}} = \frac{1}{8\pi} g^{ik} \partial_i A_l\,(x)\,\partial_k A^l\,(x)\,, \quad x = \left\{x^0, x^1, x^2, x^3\right\} \tag{5.6}$$

Вариация действия по $x_{(A)}^i$ дает

$$mc\frac{d}{d\tau}\left(K_{(A)}\left(x_{(A)}\right)\frac{x_{(A)i}}{\sqrt{\dot{x}_{(A)s}\dot{x}_{(A)}^s}}\right) - mc\frac{\partial\left(K_{(A)}\left(x_{(A)}\right)\sqrt{\dot{x}_{(A)s}\dot{x}_{(A)}^s}\right)}{\partial x_{(A)}^i}$$
$$+\frac{e}{c}\frac{d}{d\tau}A_i\,(x_A) - \frac{e}{c}\dot{x}_{(A)}^k \frac{\partial}{\partial x_{(A)}^i} A_k\,(x_A) = 0, \quad A = 1, 2, ...N \tag{5.7}$$

Вариация (5.1) по $\kappa^i\left(x_{(A)}\right)$ дает

$$-mc\frac{\lambda^2 g_{ki}\kappa^k\left(x_{(A)}\right)J\left(x_{(A)}\right)\sqrt{\dot{x}_{(A)s}\dot{x}^s_{(A)}}}{K_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}+mc\frac{\partial}{\partial x^i_{(A)}}\frac{\lambda^2 J\left(x_{(A)}\right)\sqrt{\dot{x}_{(A)s}\dot{x}^s_{(A)}}}{2K_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}=0 \tag{5.8}$$

$$A=1,2,...N$$

$$J\left(x\right)=\frac{\partial\left(\tau,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)} \tag{5.9}$$

Якобиан $J\left(x_{(A)}\right)$ появляется в (5.8), потому что перед вариацией действия (5.1) нужно перейти от интегрирования по $d\tau d\boldsymbol{\xi}$ к интегрированию по d^4x в (5.1).

Уравнения (5.8) могут быть записаны в виде

$$\kappa_{(A)i}\left(x_{(A)}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i_{(A)}}\kappa\left(x_{(A)}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i_{(A)}}\log\frac{J\left(x_{(A)}\right)\sqrt{\dot{x}_{(A)s}\dot{x}^s_{(A)}}}{K_{(A)}\left(x_{(A)}\right)},\quad A=1,2,...N \tag{5.10}$$

где $\kappa\left(x_{(A)}\right)$ есть потенциал κ-поля κ^i.

Уравнения (5.10) могут быть проинтегрированы в виде

$$\kappa\left(x_{(A)}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{J\left(x_{(A)}\right)\sqrt{\dot{x}_{(A)s}\dot{x}^s_{(A)}}}{K_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}+\frac{1}{2}\log C_{(A)},\quad A=1,2,...N \tag{5.11}$$

где $C_{(A)}=C_{(A)}\left(X\right)$, $A=1,2,...N$ суть функции переменных $X=\left\{x_{(1)},x_{(2)},..x_{(N)}\right\}$. Эти функции $C_{(A)}$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial C_{(A)}\left(X\right)}{\partial x^k_{(A)}}=0,\quad A=1,2,...N,\quad k=0,1,2,3 \tag{5.12}$$

Заметим, что поток $j^k_{(A)}$ of A-ой частицы в статистическом ансамбле можно представить в виде

$$j^k_{(A)}\left(x_{(A)}\right)=\dot{x}^k_{(A)}\left(\tau,\boldsymbol{\xi}\right)J\left(x_{(A)}\right) \tag{5.13}$$

и уравнение (5.11) может быть переписано в виде

$$\kappa\left(x_{(A)}\right)=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{j_{(A)s}\left(x_{(A)}\right)j^s_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}}{K_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}+\frac{1}{2}\log C_{(A)},\quad A=1,2,...N \tag{5.14}$$

Выберем $\log C_{(A)}$ в виде

$$\log C_{(A)}=\frac{1}{2}\sum_{B=1}^{B=N}\left(1-\delta_{AB}\right)\log\frac{\sqrt{j_{(B)s}\left(x_{(B)}\right)j^s_{(B)}\left(x_{(B)}\right)}}{K_{(B)}\left(x_{(B)}\right)} \tag{5.15}$$

В соответствии с (5.15) κ-поле в точке $x_{(A)}$ имеет вид

$$\kappa\left(x_{(A)}\right)=\kappa\left(x_{(A)},X_{(A)}\right)=\frac{1}{2}\sum_{A=1}^{A=N}\log\frac{\sqrt{j_{(A)s}\left(x_{(A)}\right)j^s_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}}{K_{(A)}\left(x_{(A)}\right)} \tag{5.16}$$

Второй аргумент $X_{(A)}$

$$X_{(A)} = \left\{ x_{(1)}, x_{(2)}, ..x_{(A-1)}, x_{(A+1)}, ...x_{(N)} \right\} \tag{5.17}$$

поля κ показывает, что κ-поле в точке $x_{(A)}$ зависит от всех N частиц статистического ансамбля. Используя (5.5) для $K_{(A)}$, можно переписать соотношение (5.16) в виде динамических уравнений для $\kappa(x_A)$, $A = 1, 2, ...N$.

$$\begin{gathered}\left(1 + \lambda^2 g^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k_{(A)} \partial x^l_{(A)}}\right) w(x_A) \\ = \frac{j_{(A)s}\left(x_{(A)}\right) j^s_{(A)}\left(x_{(A)}\right)}{w^3\left(x_{(A)}\right)} \prod_{B=1, B\neq A}^{B=N} \frac{j_{(B)s}\left(x_{(B)}\right) j^s_{(B)}\left(x_{(B)}\right) w\left(x_{(B)}\right)}{K_{(B)}}, \\ A = 1, 2, ...N\end{gathered} \tag{5.18}$$

where

$$w\left(x_{(A)}\right) = e^{\kappa\left(x_{(A)}\right)}, \quad A = 1, 2, ...N \tag{5.19}$$

Выражение (5.16) симметрично относительно перестановки любых двух частиц из N рассматриваемых тождественных частиц.

Хотя действие (5.1) является суммой действий для отдельных частиц, и частицы рассматриваются как невзаимодействующие частицы, но на самом деле они взаимодействуют через κ-поле. Частицы взаимодействуют также через электромагнитное поле. Электромагнитное взаимодействие частиц возникает из-за последнего члена в (5.1), который содержит временные производные от A_k и описывает электромагнитное поле как динамическую систему. Такой член, содержащий временные производные κ-поля, присутствует в каждом $L_{(A)}$. Мы видели в четвертом разделе, что внешнее κ-поле ответственно за рождение пар. В этом разделе мы видели, что каждая релятивистская частица может порождать κ-поле, которое является внешним по отношению к остальным тождественным частицам. Каждая отдельная частица порождает κ-поле, которое действует на движение частицы. Однако при описании частицы в терминах волновой функции κ-поле включается в определение волновой функции с помощью формул (3.24). κ-поле рассматривается как атрибут волновой функции. описывающей свободную квантовую частицу (статистический ансамбль свободных стохастических частиц).

6 κ-поле отдельной частицы

Рассмотрим однородный статистический ансамбль, состояние которого описывается постоянным потоком j^i частиц

$$j^0 = \text{const}, \quad j^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3 \tag{6.1}$$

Для одной частицы ($N = 1$) уравнение (5.14) имеет вид

$$\exp(2\kappa) = \frac{\sqrt{j_s j^s}}{\sqrt{1 + \lambda^2 e^{-\kappa} g^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} e^\kappa}} \tag{6.2}$$

Или

$$1 + \lambda^2 e^{-\kappa} g^{kl} \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} e^{\kappa} = \frac{j_s j^s}{\exp(4\kappa)} \tag{6.3}$$

Вводя обозначение

$$w = e^{\kappa} \tag{6.4}$$

получаем динамическое уравнение для w

$$w + \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{c^2 \partial t^2} - \lambda^2 \Delta w = \frac{j_s j^s}{w^3} \tag{6.5}$$

Рассмотрим простейший случай, когда поток j^k взят в виде

$$j^{\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad j^0 = \left\{ \begin{array}{ll} \rho, \text{ if} & r < r_0 \\ 0, \text{ if} & r > r_0 \end{array} \right. , \quad \rho = \text{const} > 0, \quad r_0 \leq \lambda \tag{6.6}$$

Мы исследуем стационарное сферически симметричное решение, являющееся аналогом кулонова решения для электромагнитного поля. Пренебрегая членом с временной производной, получаем решение уравнения (6.5), взятого в виде

$$w - \lambda^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) = \frac{f}{w^3}, \quad f = j_s j^s \tag{6.7}$$

Легко проверить, что при $r < r_0$, где $f = f_0 =$const, решение имеет вид $w = f_0^{1/4}$. В области $r > r_0$, где $f = 0$ решение имеет вид $w = f_0^{1/4} e^{-r/\lambda}/r$. Таким образом, решение, аналогичное решению Кулона, имеет вид

$$w = \left\{ \begin{array}{c} f_0^{1/4}, \text{ если } r < r_0 \\ f_0^{1/4} \frac{e^{-r/\lambda}}{r}, \text{ если } r > r_0 \end{array} \right. \tag{6.8}$$

$$\kappa = \log w = -\frac{r}{\lambda} + \frac{1}{4} \log \frac{f_0}{r^4}, \quad r > r_0 \tag{6.9}$$

Разумеется, имеется также решение линейного уравнения

$$w + \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{c^2 \partial t^2} - \Delta w = 0 \tag{6.10}$$

которое появляется в области, где $j_k = 0$.

Таким образом, мы исследовали случай, когда внешнее κ-поле рождает пары, и случай, когда κ-поле порождается статистическим ансамблем стохастических (квантовых) частиц. К сожалению, самосогласованную концепцию рождения пар едва ли можно сформулировать в терминах описываемого формализма, потому что этот формализм не различает между частицей и античастицей. В четвертом разделе частица и античастица различались их ориентацией $\varepsilon = \pm 1$. Но ориентация дискретная величина, и нет динамического уравнения для ε. Мы надеемся, что удастся модифицировать формализм статистического ансамбля таким образом, что он будет различать формально между частицей и античастицей.

7 Многовариантная геометрия пространства-времени

Объяснение квантовых эффектов стохастическим движением элементарных частиц позволяет устранить квантовые принципы как первичные законы природы. Но одновременно стохастическое движение свободных частиц ставит вопрос о причинах этой стохастичности. Эта стохастичность может быть объяснена как результат взаимодействия с некоторой средой (эфиром, вакуумом и т.д.), распределенной в пространстве-времени. Другой причиной может быть прямое взаимодействие элементарных частиц с пространством-временем. Другими словами, геометрия пространства- времени может быть такой, что свободные элементарные частицы движутся стохастически в этой пространственно-временной геометрии. Мировые линии стохастически движущихся частиц вихляют. Это вихляние обусловлено многовариантностью геометрии пространства-времени.

Геометрический вектор (g-вектор) $\mathbf{AB}$ определяется как упорядоченное множество $\mathbf{AB} = \{A, B\}$ из двух точек $A, B \in \Omega$. Здесь Ω есть множество точек (событий), где задана геометрия. Мы используем термин g-вектор (вектор), потому что имеются линейные векторы (линвекторы) u, которые определяются как элементы линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$. Линвекторы $u \in \mathcal{L}_n$ являются абстрактными величинами, свойства которых определяются системой аксиом. В частности, в $\mathcal{L}_n$ определены операции сложения линвекторов и умножения линвектора на вещественное число. При некоторых условиях операции над линвекторами могут быть применены к g-векторам.

Линвекторы и g-векторы имеют разные свойства. Всякий линвектор существует в одном экземпляре, тогда как имеется много g-векторов $\mathbf{CD}$, эквивалентных g-вектору $\mathbf{AB}$. Геометрический вектор $\mathbf{CD}$ эквивалентен (равен) g-вектору $\mathbf{AB}$ ($\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{AB}$), если

$$(\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{AB}): \quad (\mathbf{AB}.\mathbf{CD}) = |\mathbf{CD}| \cdot |\mathbf{AB}| \wedge |\mathbf{CD}| = |\mathbf{AB}| \tag{7.1}$$

где $(\mathbf{CD}.\mathbf{AB})$ есть скалярное произведение двух g-векторов $\mathbf{CD}$ и $\mathbf{AB}$, и $|\mathbf{AB}| = \sqrt{(\mathbf{AB}.\mathbf{AB})}$ есть длина g-вектора $\mathbf{AB}$. В собственно евклидовой геометрии эквивалентность двух g-векторов определяется соотношением (7.1), где

$$(\mathbf{AB}.\mathbf{CD}) = \sigma(A, D) + \sigma(B, C) - \sigma(A, C) - \sigma(B, D) \tag{7.2}$$

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{2\sigma(A, B)} \tag{7.3}$$

Здесь $\sigma(A, B)$ есть мировая функция $\sigma(A, B) = \frac{1}{2}\rho^2(A, B)$, где $\rho(A, B)$ есть расстояние между точками A и B. Определение (7.1) - (7.3) эквивалентности двух g-векторов зависит только от мировой функции. Оно не зависит ни от размерности, ни от системы координат. Определение (7.1) - (7.3) эквивалентности двух g-векторов может использоваться в любой геометрии, которая полностью описывается ее мировой функцией и только ее мировой функцией. Такая геометрия называется физической геометрией. Если мировая функция ограничена некоторыми условиями (аксиомой треугольника и неотрицательностью расстояния ρ), то такая геометрия известна как метрическая геометрия. Метрическая геометрия является частным случаем физической геометрии. Метрическая геометрия так же как и дистантная геометрия [11] (ограниченная условием неотрицательности расстояния ρ) не могут использоваться для описания пространства-времени, потому что в геометрии пространства-времени пространственно-временное расстояние ρ может быть мнимым.

В собственно евклидовой геометрии имеется только один g-вектор $\mathbf{CD}$ в точке C, который эквивалентен g-вектору $\mathbf{AB}$ в точке A. Это означает, что существует только одна точка $D \in \Omega$, которая является решением двух уравнений

$$(\mathbf{AB}.\mathbf{CD}) = |\mathbf{CD}| \cdot |\mathbf{AB}|, \quad |\mathbf{CD}| = |\mathbf{AB}| \tag{7.4}$$

при фиксированных точках $A, B, C \in \Omega$.

В физической геометрии, вообще говоря, имеется много g-векторов $\mathbf{CD}, \mathbf{CD}'$, $\mathbf{CD}''$, ..., которые эквивалентны g-вектору $\mathbf{AB}$. Такая геометрия рассматривается как многовариантная геометрия. Многовариантность является причиной вихляния мировой линии свободной частицы. Мировая линия описывается как множество $\mathcal{C}$ точек ... $P_0, P_1, ...P_s, ...$разделенных постоянным расстоянием $\rho(P_s, P_{s+1}) = \mu$, $s = ...0, 1, ...$

$$\mathcal{C} = \bigcup_s P_s, \quad \rho(P_s, P_{s+1}) = \mu = \text{const}, \quad s = ...0, 1, ... \tag{7.5}$$

Если существует предел при $\mu \to 0$, то множество $\mathcal{C}$ стремится к непрерывной мировой линии частицы. Для свободной частицы $(\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}\text{eqv}\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2})$, $s = ...0, 1, ...$ Если имеется единственное решение двух уравнений

$$(\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}.\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}) = |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| \cdot |\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}|, \quad |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| = |\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}|, \quad s = ...0, 1, .. \tag{7.6}$$

для P_{s+2} при любых заданных P_s, P_{s+1}, то мировая линия не вихляет. В этом случае геометрия пространства-времени одно-вариантна, предел $\mu \to 0$ существует и множество $\mathcal{C}$ образует непрерывную мировую линию L. Если геометрия пространства-времени многовариантна, то имеется несколько точек P_{s+2} определяемых точками P_s, P_{s+1}. В этом случае $\mathcal{C}$ не образует непрерывной мировой линии. Множество $\mathcal{C}$ образует вихляющую ломаную линию, состоящую из связанных отрезков прямой линии.

Даже геометрия пространства-времени Минковского многовариантна относительно пространственноподобных g-векторов. Например, пространственноподобные g-векторы $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2} = \left\{\sqrt{r^2+z^2}, r\cos\phi, r\sin\phi, z\right\}$ и $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}'_{s+2} = \left\{\sqrt{r_1^2+z^2}, r_1\cos\phi_1, r_1\sin\phi_1, z\right\}$ эквивалентны пространственноподобному g-вектору $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1} = \{0, 0, 0, z\}$ при произвольных значениях величин r, r_1, ϕ, ϕ_1. Но g-векторы $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$ и $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}'_{s+2}$ не эквивалентны между собой, вообще говоря. Амплитуда этого различия бесконечна в том смысле, что значение величины $\left|\mathbf{P}_{s+2}\mathbf{P}'_{s+2}\right|$

$$\left|\mathbf{P}_{s+2}\mathbf{P}'_{s+2}\right|^2 = \sqrt{(r^2+z^2)(r_1^2+z^2)} - rr_1\cos(\phi-\phi_1) - z^2 \tag{7.7}$$

не имеет ни максимума, ни минимума. Частицы с пространственноподобной мировой линией называются тахионами. Отсутствие максимума выражения (7.7) означает, что мировая линия тахиона вихляет с бесконечной амплитудой, и тахион не может быть обнаружен, даже если он существует. Поскольку свободный тахион нельзя обнаружить, современные исследователи предпочитают думать, что тахионы не существуют. Они предпочитают не рассматривать вихляющие пространственноподобные мировые линии. Однако, хотя отдельный тахион нельзя обнаружить, но тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационному полю. Существование так называемой темной материи может быть непринужденно объяснено присутствием тахионного газа в космосе [12, 13].

Тардионы (т.е. частицы с времениподобной мировой линией) имеют гладкие мировые линии в пространственно-временной геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, потому что $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ одно-вариантна относительно времениподобных g-векторов. Однако, если геометрия пространства-времени $\mathcal{G}$ отличается от $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, геометрия пространства-времени $\mathcal{G}$ может быть многовариантна относительно времениподобных g-векторов. В этом случае мировая линия свободных тардионов вихляет. В частности, если геометрия пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ дискретна, и мировая функция σ_{d} этой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{d}}=\sigma_{\mathrm{M}}+\frac{\lambda_0^2}{2}\operatorname{sgn}\left(\sigma_{\mathrm{M}}\right) \tag{7.8}$$

где λ_0 есть элементарная длина, и σ_{M} есть мировая функция геометрии Минковского, то мировые линии тардионов тоже вихляют. Дискретная геометрия пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ задается на том же самом многообразии Ω_{M}, где задается геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Но любое расстояние ρ_{d} в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ обладает свойством

$$\left|\rho_{\mathrm{d}}\left(P,Q\right)\right|\notin\left(0,\lambda_0\right),\quad \forall P,Q\in\Omega_{\mathrm{M}} \tag{7.9}$$

которое означает, что любое расстояние $\left|\rho_{\mathrm{d}}\left(P,Q\right)\right|$ не меньше, чем элементарная длина λ_0. Легко проверить, что расстояние $\rho_{\mathrm{d}}=\sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}}$ геометрии (7.8) удовлетворяет условию (7.9). Из (7.9) следует, что λ_0 есть минимальное расстояние в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ (но $\rho_{\mathrm{d}}\left(P,Q\right)=0$ возможно). Дискретная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ многовариантна относительно любых g-векторов. Однако, вихляние времениподобных мировых линий ограничено элементарной длиной λ_0. Это вихляние ответственно за квантовые эффекты. Если $\lambda_0^2=\hbar/\left(bc\right)$, то статистическое описание вихляющих мировых линий эквивалентно описанию в терминах уравнения Шредингера [14]. Здесь $\hbar$ и c суть соответственно квантовая постоянная и скорость света. Величина b есть универсальная постоянная, которая связывает геометрическую массу μ, определенную в (7.5) с массой m частицы с помощью соотношения

$$m=b\mu \tag{7.10}$$

В реальном пространстве-времени геометрия может отличаться от (7.8), но в любом случае геометрия пространства-времени многовариантна, и эта многовариантность геометрии пространства-времени есть причина квантовых эффектов.

8 Подвижность границы между динамикой частицы и геометрией пространства-времени

Движение частицы происходит в пространстве-времени, и свойства пространства-времени существенны для описания движения частицы. Граница между свойствами пространства-времени и свойствами законов движения (динамики) не определена.

Можно выбрать простую геометрию пространства-времени и получить сложные законы динамики. Наоборот, можно выбрать простую динамику (свободное движение частиц) и получить сложную геометрию пространства-времени. Возможны промежуточные версии, когда динамика и геометрия пространства-времени не очень просты. Исторически граница между физикой и геометрией пространства-времени сдвигалась в сторону геометрии пространства-времени. Этот процесс можно квалифицировать как геометризацию физики. Можно усмотреть несколько стадий геометризации физики: (1) законы сохранения как следствия симметрии геометрии пространства-времени, (2) специальная теория относительности, (3) общая теория относительности, (4) 5-мерная геометрия Калуцы - Клейна, где движения заряженной частицы в заданных гравитационном и электромагнитном полях описывается как свободное движение частицы в пространственно-временной геометрии Калуцы - Клейна [15].

В классической физике, где гравитационное и электромагнитное поля являются единственно возможными силовыми полями, представление Калуцы - Клейна реализует полную геометризацию физики. Но эта геометризация не является полной в микромире, где существенны квантовые эффекты. Кроме того, риманова геометрия, которая используется описании Калуцы - Клейна довольно сложна. Риманова геометрия основывается на нескольких базовых понятиях: (1) понятия топологии, (2) понятия локальной геометрии такие, как размерность, система координат, метрический тензор, и параллельный перенос. Работа с понятиями римановой геометрии не проще, чем работа с многочисленными понятиями динамики. В результате предпочитают работать с привычными понятиями динамики.

При метрическом подходе, когда геометрия пространства-времени описывается в терминах только расстояния ρ или в терминах только мировой функции $\sigma = \rho^2/2$, любая модификация геометрии пространства-времени выглядит очень просто. Чтобы модифицировать геометрию, заменяют мировую функцию и получают модифицированную геометрию, описываемую новой мировой функцией. Если геометрия описывается в терминах нескольких фундаментальных понятий, то всякая модификация геометрии требует модификации всех фундаментальных понятий. Это модификация различных фундаментальных понятий должна быть согласованной для того, чтобы модифицированная геометрия получилась непротиворечивой. Чем больше базовых понятий, тем труднее согласование модифицированных базовых понятий. Монистическая концепция геометрии, когда имеется только одна фундаментальная величина, является наилучшей концепцией, потому что отсутствует проблема согласования различных базовых понятий при модификации геометрии. С этой точки зрения метрический подход к геометрии пространства-времени является наилучшим подходом.

9 Метрический подход к геометрии и многовариантная геометрия

Собственно евклидова геометрия может быть представлена в терминах и только в терминах ее мировой функции. Однако попытка обобщения собственно евклидовой геометрии [11] не удалась в том смысле, что Блюменталь был вынужден ввести понятие непрерывного отображения в дополнение к понятию расстояния. Условие непрерывного отображения не может быть выражено в терминах только расстояния. Но непрерывное отображение было необходимо для построения непрерывной одномерной кривой в дистантной геометрии Блюменталя. В результате Блюменталю не удалось реализовать последовательный метрический подход к геометрии, когда геометрия описывается только в терминах расстояния.

В чем причина неудачи? В течение двух тысяч лет мы знали только собственно евклидову геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Все утверждения геометрии $\mathcal{G}$E получались логически из нескольких базовых утверждений (аксиом). Любые представления $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ рассматриваются как способы получения (теоремы) различных утверждений геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ из аксиом геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Возникает впечатление, что эти теоремы представляют собой содержание геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, тогда как, на самом деле, эти теоремы представляют собой только способ построения собственно евклидовой геометрии. Сама по себе собственно евклидова геометрия представляет собой множество $\mathcal{P}_{\mathrm{E}}$ утверждений геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. При модификации $\mathcal{G}$ собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ множество $\mathcal{P}$ утверждений геометрии $\mathcal{G}$ получается из множества $\mathcal{P}_{\mathrm{E}}$ утверждений геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Такое получение $\mathcal{P}$ из $\mathcal{P}_{\mathrm{E}}$ может отличаться от способа построения собственно евклидовой геометрии. Возможна такая ситуация, что модифицированная (обобщенная) геометрия $\mathcal{G}$ не будет выводиться из системы аксиом. Другими словами, геометрия $\mathcal{G}$ может быть неаксиоматизируемой. К сожалению, неаксиоматизируемость геометрии воспринимается как нечто невозможное, и это восприятие является результатом отождествления геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ со способом построения $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.

Вообще говоря, при метрическом подходе к геометрии модифицированная (обобщенная) геометрия получается из $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ с помощью деформации, когда мировая функция σ_{E} заменяется мировой функцией σ модифицированной геометрии $\mathcal{G}$ во всех определениях и всех общегеометрических утверждениях, содержащих только σ_{E}. Такое построение физической геометрии будем называть принципом деформации [16, 17]. Неаксиоматизируемость физической геометрии связана с ее многовариантностью. В самом деле, для того, чтобы работал логический евклидов метод построения геометрии, отношение эквивалентности (7.1) должно быть транзитивно, когда из $(\mathbf{AB}\mathrm{eqv}\mathbf{CD})$ и $(\mathbf{AB}\mathrm{eqv}\mathbf{FH})$ следует, что $(\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{FH})$. Если отношение эквивалентности (7.1) интранзитивно и из $(\mathbf{AB}\mathrm{eqv}\mathbf{CD})\wedge(\mathbf{AB}\mathrm{eqv}\mathbf{FH})$ не следует, что $(\mathbf{CD}\mathrm{eqv}\mathbf{FH})$, то логическое построение оказывается невозможным. Но невозможность получения многовариантной физической геометрии $\mathcal{G}$ с помощью логического метода Евклида не означает, что множество $\mathcal{P}$ утверждений многовариантной геометрии $\mathcal{G}$ не может быть построено.

Заметим, что риманова геометрия пространства-времени многовариантна относительно удаленных g-векторов. Но в римановой геометрии устраняют фернпараллелизм (эквивалентность удаленных векторов). Вместо эквивалентности удаленных векторов вводится параллельный перенос вектора. В римановой геометрии конечное расстояние, определяемое как интеграл вдоль геодезической, во многих случаях оказывается многозначным. Многозначность расстояния представляется недопустимой с физической точки зрения.

Суммирование линвекторов и умножение линвектора на вещественное число суть операции, определенные в линейном векторном пространстве $\mathcal{L}_n$. Эти операции неадекватны в применении к g-векторам многовариантной геометрии, хотя они адекватны при применении к g-векторам евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, потому что собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ одно-вариантна.

Пусть $S_{\mathbf{AB}}$ есть множество g-векторов $\mathbf{CD}$, которые эквивалентны g-вектору $\mathbf{AB}.$ Если отношение эквивалентности транзитивно, то множество $S_{\mathbf{AB}}$ является классом эквивалентности $[\mathbf{AB}]$ g-вектора $\mathbf{AB}$. Он содержит только g-векторы , которые эквивалентны между собой. В этом случае любому классу эквивалентности $[\mathbf{AB}]$ можно поставить в соответствие линвектор $u \in \mathcal{L}_n$, и это соответствие будет однозначным, поскольку каждый класс эквивалентности существует только в одном экземпляре. Если отношение эквивалентности интранзитивно, и множество $S_{\mathbf{AB}}$ не образует класса эквивалентности, то соответствие между линвекторами и g-векторами установить нельзя. В результате операции линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$ оказываются неадекватными в многовариантной геометрии, где отношение эквивалентности интранзитивно.

Формально можно ввести суммирование g-векторов в многовариантной геометрии, но это суммирование g-векторов будет многозначным. Пусть нужно найти сумму g-векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{CD}$, и $B \neq C$. Пусть g-вектор $\mathbf{PQ} = \mathbf{AB} + \mathbf{CD}$, где точка P задана, а точку Q надо определить. Получаем

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{PF} + \mathbf{FQ} \tag{9.1}$$

где точки F и Q определяются из соотношений

$$(\mathbf{PF}\mathrm{eqv}\mathbf{AB}) \wedge (\mathbf{FQ}\mathrm{eqv}\mathbf{CD}) \tag{9.2}$$

В многовариантной геометрии уравнения (9.2) имеют много решений для точек F и Q, и операция сложения оказывается многозначной. В одновариантной геометрии соотношения (9.2) имеют единственное решение для точек F и Q. В результате суммирование (9.1) оказывается однозначным.

Умножение g-вектора на вещественное число также многозначно в многовариантной геометрии, потому что определение умножения содержит ссылку на отношение эквивалентности, которое многозначно в многовариантной геометрии. Пусть $\mathbf{PQ}' = a\mathbf{PQ}$, где точки P, Q и число a заданы, тогда точка Q' должна определяться из соотношений

$$(\mathbf{PQ}'.\mathbf{PQ}) = |\mathbf{PQ}'| \cdot |\mathbf{PQ}|\,, \quad |\mathbf{PQ}'| = a\,|\mathbf{PQ}| \tag{9.3}$$

Решение этих двух уравнений многозначно, вообще говоря. Таким образом, методы дифференциальной геометрии, развитые в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ неадекватны в многовариантной геометрии. *Однако, неадекватность методов дифференциальной геометрии не означает, что многовариантных геометрий не существует.*

Геометризация физики в классической физике, когда геометрия пространства-времени есть риманова геометрия, не эффективно, потому что для определения геометрии Калуцы-Клейна нужно определить метрический тензор g_{ik} и потенциал электромагнитного поля A_k, $k = 0, 1, 2, 3$. Однако, если эти величины известны, то можно записать динамические уравнения для движения частиц в геометрии пространства-времени Минковского и определить мировую линию частицы. Использование геометрии Калуцы-Клейна оказывается излишним.

При геометризации физики в микромире силовые поля, действующие на частицу не известны. Они различны для разных элементарных частиц. Предполагается, что в надлежащей (правильной) геометрии пространства-времени движение элементарных частиц является свободным. Записав динамические уравнения для свободного движения частиц в правильной геометрии пространства-времени, можно переписать эти уравнения в пространстве-времени Минковского. В этом случае динамические уравнения перестанут быть динамическими уравнениями для свободных частиц. Динамические уравнения будут содержать силовые поля, возникающие из-за отклонения геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ от правильной геометрии пространства-времени, где движение частиц является свободным. В микромире динамические уравнения в геометрии пространства-времени Минковского не известны вначале. Они возникают в результате преобразования свободных динамических уравнений, записанных в правильной геометрии пространства-времени. В микромире подвижность границы между динамикой частиц и геометрией пространства-времени позволяет свести определение законов динамики частиц к определению мировой функции правильной геометрии пространства-времени, где элементарные частицы движутся свободно.

Число вариантов динамических законов для неопределенного числа сортов элементарных частиц больше, чем число вариантов мировых функций $\sigma(P, Q)$ от двух пространственно-временных точек P, Q. В результате использование гипотезы о подвижности границы для любых элементарных частиц кажется более эффективным, чем предположение о динамике любой отдельной элементарной частицы, которое извлечено из сложных экспериментов с элементарными частицами. Разумеется, гипотеза о подвижности границы для любых элементарных частиц должна быть проверена на эксперименте. Однако, в случае классической физики эта гипотеза определенно верна. Кроме того, с самого начала не ясно, что ответственно за специфические свойства движения частиц: геометрия пространства-времени или законы динамики частиц.

Использование гипотезы о подвижности границы между динамикой и геометрией пространства-времени порождает концепцию динамики элементарных частиц. Другими словами, возникает связь между понятиями динамики и понятиями геометрии пространства-времени. Эта связь есть логическая связь. Она возникает на логической основе, а не на основе отдельного эксперимента или на основе нескольких отдельных экспериментов. Это касается всех элементарных частиц. Эта связь может быть правильной или ошибочной, но это концепция.

Подобная концепция отсутствует в современной физике элементарных частиц, где изобретаются предположения о динамике и взаимодействии различных сортов элементарных частиц, которые маркируются некоторыми квантовыми числами. Отсутствие концепции в современной теории порождает многочисленные варианты теории. Эти варианты содержат многочисленные константы взаимодействия, которые надо определят из эксперимента. Чтобы понять, почему это плохо, представим себе, что у нас нет концепции динамики классических частиц, которая утверждает, что каждая частицы - это динамическая система и ее движение описывается функцией Лагранжа. В отсутствии такой концепции мы будем вынуждены изобретать динамические уравнения для каждой частицы, зависящие от ее массы, цвета, температуры, формы и т.д. В отсутствии концепции динамики нельзя различить между существенными параметрами (массой) и несущественными параметрами (цвет, температура). В результате любое исследование динамики становится сложным.

10 Описание геометрических объектов в многовариантной геометрии

Геометрический объект – это геометрический образ физического тела. Любой геометрический объект является некоторым множеством точек в пространстве-времени. Однако геометрический объект не является произвольным множеством точек. В физической геометрии геометрический объект должен определяться таким образом, чтобы похожие геометрические объекты (которые являются образами одинаковых физических тел) могли бы распознаваться в различных геометриях пространства-времени.

Определение 1: Геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ геометрии $\mathcal{G}=\{\sigma,\Omega\}$ является подмножеством $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}\subset\Omega$ множества точек Ω. Этот геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ является множеством корней $R\in\Omega$ функции $F_{\mathcal{P}_n,\sigma}$

$$g_{\mathcal{P}_n,\sigma}=\left\{R|F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=0\right\},\quad F_{\mathcal{P}_n,\sigma}:\quad \Omega\rightarrow\mathbb{R} \tag{10.1}$$

где $F_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ зависит от точки R через мировые функции от аргументов $\{\mathcal{P}_n,R\}=\{P_0,P_1,...P_n,R\}$

$$F_{\mathcal{P}_n,\sigma}\quad:\qquad F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=G_{\mathcal{P}_n,\sigma}(u_1,u_2,...u_s),\qquad s=\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{10.2}$$

$$u_l=\sigma(w_i,w_k),\qquad i,k=0,1,...n+1,\quad l=1,2,...\frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{10.3}$$

$$w_k=P_k\in\Omega,\qquad k=0,1,...n,\qquad w_{n+1}=R\in\Omega \tag{10.4}$$

Здесь $\mathcal{P}_n=\{P_0,P_1,...,P_n\}\subset\Omega$ суть $n+1$ точек, которые являются параметрами, определяющими геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$

$$g_{\mathcal{P}_n,\sigma}=\left\{R|F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=0\right\},\qquad R\in\Omega,\qquad \mathcal{P}_n\in\Omega^{n+1} \tag{10.5}$$

$F_{\mathcal{P}_n,\sigma}(R)=G_{\mathcal{P}_n,\sigma}(u_1,u_2,...u_s)$ есть произвольная функция от $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ аргументов u_k и от $n+1$ параметров $\mathcal{P}_n$. Множество $\mathcal{P}_n=\{P_0,P_1,...P_n\}\in\Omega^{n+1}$ параметров геометрического объекта называется каркасом геометрического объекта. Подмножество $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}\subset\Omega$ называется оболочкой каркаса геометрического объекта. Каркас является аналогом системы отсчета, жестко связанной с физическим телом. Следя за движением каркаса, можно следить за движением физического тела. Когда частица рассматривается как геометрический объект, ее движение в пространстве-времени описывается движением каркаса $\mathcal{P}_n$. При таком подходе (аппроксимация твердого тела) форма оболочки не имеет значения.

Замечание: произвольное подмножество Ω' точек множества Ω не является, вообще говоря, геометрическим объектом. Предполагается, что физическое тело может иметь форму только геометрического объекта, потому что только в этом случае можно распознать одинаковые физические тела (геометрические объекты) в различных геометриях пространства-времени.

Существование одних и тех же геометрических объектов в различных областях пространства-времени, имеющих разную геометрию, ставит вопрос об эквивалентности геометрических объектов в разных геометриях пространства-времени. Такой вопрос не поднимался раньше, потому что не рассматривали ситуацию, когда физическое тело перемещалось из одной области пространства-времени в другую область, имеющую другую геометрию. Вообще, математический формализм традиционной геометрии пространства-времени (дифференциальная геометрия) не пригоден для одновременного рассмотрения нескольких различных геометрий разных областей пространства-времени.

Мы можем воспринимать геометрию пространства-времени только через движение физических тел в пространстве-времени, или через построение геометрических объектов, соответствующих этим физическим телам. Как следует из *определения 1* геометрического объекта, функция $G_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ как функция аргументов u_k, $k = 1,2,...n(n+1)/2$ (мировых функций от различных точек) одна и та же во всех физических геометриях. Это означает, что геометрический объект $\mathcal{O}_1$ в геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ получается из того же самого геометрического объекта $\mathcal{O}_2$ в геометрии $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ с помощью замены $\sigma_2 \rightarrow \sigma_1$ в определении этого геометрического объекта.

Определение 2: Геометрический объект $g_{P'_n,\sigma'}$ ($\mathcal{P}'_n = \{P'_0, P'_1, ..P'_n\}$) в геометрии $\mathcal{G}' = \{\sigma', \Omega'\}$ и геометрический объект $g_{P_n,\sigma}$ ($\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ..P_n\}$) в геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ являются одинаковыми геометрическими объектами, если

$$\sigma'(P'_i, P'_k) = \sigma(P_i, P_k), \qquad i,k = 0,1,..n \tag{10.6}$$

и функции $G'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}$ для $g_{P'_n,\sigma'}$ и $G_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ для $g_{P_n,\sigma}$ в формуле (10.2) являются одинаковыми функциями аргументов $u_1, u_2, ...u_s$

$$G'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}(u_1, u_2, ...u_s) = G_{\mathcal{P}_n,\sigma}(u_1, u_2, ...u_s) \tag{10.7}$$

В этом случае

$$u_l \equiv \sigma(P_i, P_k) = u'_l \equiv \sigma'(P'_i, P'_k), \qquad i,k = 0,1,...n, \qquad l = 1,2,..n(n+1)/2 \tag{10.8}$$

Функции $F'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}$ для $g_{P'_n,\sigma'}$ и $F_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ для $g_{P_n,\sigma}$ в формуле (10.2) имеют одни и те же корни, если выполнено соотношение (10.7). В результате возникает однозначное соответствие между геометрическими объектами $g_{P'_n,\sigma'}$ и $g_{P_n,\sigma}$.

Поскольку физическая геометрия определяется построением ее геометрических объектов, физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ может быть получена из некоторой стандартной физической геометрии $\mathcal{G}_{\rm st} = \{\sigma_{\rm st}, \Omega\}$ с помощью деформации стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\rm st}$. деформация стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\rm st}$ осуществляется заменой $\sigma_{\rm st}$ мировой функцией σ во всех определениях геометрических объектов в стандартной геометрии. Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\rm E}$ является аксиоматизируемой геометрией. Она была построена как логическая конструкция с помощью метода Евклида. Используя евклидов метод геометрия $\mathcal{G}_{\rm E}$ строится в векторном представлении [19]. Одновременно собственно евклидова геометрия является физической геометрией. В этом случае $\mathcal{G}_{\rm E}$ получается в терминах мировой функции $\sigma_{\rm E}$, т.е. в σ-представлении

[19]. Она может использоваться как стандартная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{st}}$. Построение физической геометрии в результате деформации собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ называется принципом деформации [17]. Большинство физических геометрий являются неаксиоматизируемыми геометриями. Они строятся с помощью принципа деформации.

11 Общегеометрические соотношения

Описывая физическую геометрию в терминах мировой функции, следует различать между общегеометрическими соотношениями и специальными геометрическими соотношениями. Общегеометрические соотношения – это соотношения, которые записываются в терминах только мировой функции. Общегеометрические соотношения верны для любой физической геометрии.

Первым общегеометрическим соотношением является определение скалярного произведения двух векторов (7.2). Определение эквивалентности двух векторов (7.1) - (7.3) также является общегеометрическим соотношением.

Линейная зависимость n g-векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, ...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ определяется соотношением

$$F_n\left(\mathcal{P}_n\right) = 0, \quad F_n\left(\mathcal{P}_n\right) \equiv \det\left|\left|\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k\right)\right|\right|, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{11.1}$$

где $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и $F_n\left(\mathcal{P}_n\right)$ есть определитель Грама. Обращение в нуль определителя Грама является необходимым и достаточным условием линейной зависимости n g-векторов. Условие линейной зависимости относится обычно к свойствам линейного векторного пространства. Кажется довольно бессмысленным использовать его, если нельзя ввести линейное векторное пространство. Тем не менее, соотношение (11.1), записанное как общегеометрическое соотношение, описывает некоторое общегеометрическое свойство g-векторов, которое в собственно евклидовой геометрии преобразуется в свойство линейной зависимости. В частности, размерность собственно евклидовой геометрии определяется в терминах соотношений типа (11.1) как максимальное число линейно независимых векторов, которое возможно в евклидовом пространстве. Это обстоятельство кажется несколько неожиданным, потому что в традиционном представлении (векторное представление [19]) евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ размерность геометрии постулируется в самом начале построения геометрии.

Общегеометрические соотношения описывают общие геометрические свойства g-векторов, которые используются при построении геометрических объектов. По существу общегеометрические соотношения являются определениями скалярного произведения, эквивалентности g-векторов и их линейной зависимости. Как мы видели, определение геометрических объектов в виде общегеометрических (т.е. в терминах мировой функции) необходимо для распознавания одинаковых физических тел в разных геометриях пространства-времени.

Общегеометрические соотношения параметризуются видом мировой функции. Изменяя вид мировой функции, получаем общегеометрические соотношения при новом значении параметра σ (новом виде мировой функции).

12 Специальные свойства n-мерного евклидова пространства

Наряду с общегеометрическими свойствами, связанными главным образом со свойствами линейного векторного пространства, имеются специальные геометрические соотношения, описывающие свойства мировой функции. Например, имеются соотношения, которые являются необходимыми и достаточными условиями того, что мировая функция σ_{E} является мировой функцией n-мерного евклидова пространства. Они имеют вид [18]:

I. Определение размерности:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{12.1}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама n-ого порядка (11.1). Геометрические g-векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, ...n$ являются базисными векторами прямолинейной системы координат K_n с началом в точке P_0. Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $i, k = 1, 2, ...n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\, g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \qquad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \qquad i, l = 1, 2, ...n \tag{12.2}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{12.3}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma_{\mathrm{E}}(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\,(x_i(P) - x_i(Q))\,(x_k(P) - x_k(Q)), \qquad \forall P, Q \in \Omega \tag{12.4}$$

где координатами $x_i(P)$, $x_i(Q)$, $i = 1, 2, ...n$ точек P и Q являются ковариантные координаты векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ соответственно в системе координат K_n. Ковариантные координаты определяются соотношениями

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1, 2, ...n \tag{12.5}$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения g_k

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{12.6}$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{12.7}$$

рассматриваемая как уравнения для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ...n$ всегда имеет одно и только одно решение. Условия I – IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства, которая определяется соотношениями (12.1).

Все соотношения I – IV записаны в терминах мировой функции. Они являются ограничениями на вид мировой функции собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Ограничения (12.1), определяющие размерность через вид мировой функции, выглядят довольно неожиданно. Они содержат массу ограничений на мировую функцию собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, и они являются необходимыми. При традиционном подходе к геометрии вместо многочисленных ограничений (12.1) используется очень простое предположение: "Пусть размерность евклидова пространства равна n".

В векторном представлении собственно евклидовой геометрии, которое базируется на использовании линейного векторного пространства, размерность рассматривается как изначальное свойство линейного векторного пространства и изначальное свойство евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Ситуация, когда размерность геометрии может быть различной в разных точках пространства Ω, или когда она просто не определена, не рассматривается. В векторном представлении евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ не различают между общегеометрическими соотношениями и специальными соотношениями геометрии.

Вместо ограничений (12.1) – (12.7) можно использовать явный вид мировой функции

$$\sigma_{\mathrm{E}}\left(x, x'\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(x^k - x'^k\right)^2 \tag{12.8}$$

где $x^k, x'^k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ...n$ суть декартовы координаты точек P и P' соответственно. Соотношение (12.8) удовлетворяет всем условиям (12.1) – (12.7). Оно использует понятия размерности и координат как изначальные понятия геометрии. Используя мировую функцию только в таком явном виде, нельзя представить себе обобщенную геометрию без таких понятий как размерность и система координат, хотя эти понятия являются только средствами описания геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.

Вообще, после логической перезагрузки к σ-представлению, когда такие понятия геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ как размерность и система координат заменяются одним базовым понятием (мировой функцией), собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ выглядит довольно неожиданно. Некоторые понятия выглядят очень просто в векторном представлении. Те же самые понятия выглядят сложными в σ-представлении и наоборот. В результате собственно евклидова геометрия в σ-представлении воспринимается с трудом. В векторном представлении имеется несколько фундаментальных понятий: размерность, система координат, линейная зависимость, тогда как в σ-представлении имеется только одна фундаментальная величина: мировая функция. При этом размерность, система координат, линейная зависимость векторов являются производными величинами. Согласование между этими величинами достигается автоматически, потому что они определяются как атрибуты мировой функции. Но это согласование кажется очень странным для исследователей, которые изучали евклидову геометрию в ее традиционном изложении и полагают, что любые свойства геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ сохраняются в любой обобщенной геометрии.

На самом деле, $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является вырожденной геометрией, где отношение эквивалентности транзитивно и свойство многовариантности отсутствует в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. В соответствии с этими свойствами $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ может рассматриваться как логическое построение. Большинство исследователей полагает, что геометрия пространства-времени может быть получена как логическое построение. Они не могут себе представить существование других методов построения геометрии. Они не могут себе представить интранзитивное отношение эквивалентности. Они считают, что отношение эквивалентности транзитивно по определению. (Как можно построить геометрию, если отношение эквивалентности интранзитивно?!) На самом деле, такая точка зрения является следствием того, что исследователи работали только с $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ которая является вырожденной одно-вариантной геометрией. В $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ некоторые естественные геометрические свойства (интранзитивность отношения эквивалентности и многовариантность) отсутствуют. Как можно принять геометрию, где привычные операции (1) сложение g-векторов, (2) умножение g-вектора на число и (3) разложение g-вектора на составляющие неадекватны?

Если $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i$, $i=1,2,...n$ суть базисные g-векторы в некоторой системе координат K_n, то можно определить проекции g-вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ на базисные g-векторы

$$\mathrm{Pr}\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}\right)_{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i}=\frac{\left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i\right)}{\left|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i\right|} \tag{12.9}$$

Однако g-вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ не может быть представлен как сумма его проекций, потому что сложение g-векторов является неадекватной операцией в многовариантной геометрии. Таким образом, координаты могут использоваться для маркировки точек, но их нельзя использовать для осуществления операций дифференциальной геометрии.

13 Эквивалентность физических геометрий

Обобщение общегеометрических выражений (7.1) – (7.3) на случай дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ получается с помощью замены σ_{E} на σ_{d}, где σ_{d} мировая функция (7.8) дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Мы должны быть готовы к тому, что свойства понятий размерности, линейной зависимости g-векторов и отрезка прямой линии в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ сильно отличаются от их свойств в $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Однако, у нас нет альтернативы этим соотношениям для определения геометрических величин в дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$.

Определение 4: физическая геометрия $\mathcal{G}=\{\sigma,\Omega\}$ есть множество точек Ω с заданной на нем однозначной функцией σ

$$\sigma: \qquad \Omega\times\Omega\rightarrow\mathbb{R}, \qquad \sigma\left(P,P\right)=0, \qquad \sigma\left(P,Q\right)=\sigma\left(Q,P\right), \qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{13.1}$$

Определение 5: Две физические геометрии $\mathcal{G}_1=\{\sigma_1,\Omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2=\{\sigma_2,\Omega_2\}$ эквивалентны ($\mathcal{G}_1\mathrm{eqv}\mathcal{G}_2$), если множество точек $\Omega_1\subseteq\Omega_2\wedge\sigma_1\left(P,Q\right)=\sigma_2\left(P,Q\right), \ \forall P,Q\in\Omega_1$, или $\Omega_2\subseteq\Omega_1\wedge\sigma_2\left(P,Q\right)=\sigma_1\left(P,Q\right), \ \forall P,Q\in\Omega_2$

Замечание: Совпадение точечных множеств Ω_1 и Ω_2 не является необходимым для эквивалентности геометрий $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$. Если потребовать совпадения Ω_1 и Ω_2 в случае эквивалентности $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, то устранение одной точки P из точечного множества Ω_1 превратит геометрию $\mathcal{G}_1=\{\sigma_1,\Omega_1\}$ в геометрию $\mathcal{G}_2=\{\sigma_1,\Omega_1\backslash P\}$, которая окажется неэквивалентной геометрии $\mathcal{G}_1$. Такая ситуация кажется неприемлемой, потому что геометрия на части $\omega\subset\Omega_1$ точечного множества Ω_1 оказывается неэквивалентной геометрии на всем точечном множестве Ω_1.

В соответствии с определением геометрий $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$ на частях $\omega_1 \subset \Omega$ и $\omega_2 \subset \Omega$ множества Ω эквивалентны $(\mathcal{G}_1 \mathrm{eqv} \mathcal{G})$, $(\mathcal{G}_2 \mathrm{eqv} \mathcal{G})$ геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$, тогда как геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma, \omega_1\}$ и $\mathcal{G}_2 = \{\sigma, \omega_2\}$ не являются эквивалентными, вообще говоря, если $\omega_1 \not\subseteq \omega_2$ и $\omega_2 \not\subseteq \omega_1$. Таким образом, отношение эквивалентности геометрий интранзитивно, вообще говоря. Геометрия пространства-времени может варьироваться в различных областях пространства-времени. Это означает, что физическое тело, описываемое геометрическим объектом, может эволюционировать таким образом, что оно оказывается в областях с различной геометрией пространства-времени.

Геометрия пространства-времени Минковского так же как и евклидова геометрия являются непрерывными геометриями. Это верно для обычных масштабов расстояний. Однако, нельзя быть уверенным в том, что геометрия пространства-времени непрерывна в микромире. Геометрия пространства-времени может оказаться дискретной в микромире. Мы рассмотрим дискретную геометрию пространства-времени и обсудим следствия возможной дискретности.

14 Дискретность и ее проявления

Простейшая дискретная геометрия пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ описывается мировой функцией (7.8). Плотность точек в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ по сравнению с плотностью точек в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ описывается соотношением

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{M}}}{d\sigma_{\mathrm{d}}} = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad |\sigma_{\mathrm{d}}| < \frac{1}{2}\lambda_0^2 \\ 1 & \text{если} \quad |\sigma_{\mathrm{d}}| > \frac{1}{2}\lambda_0^2 \end{cases} \tag{14.1}$$

Если мировая функция имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{g}} = \sigma_{\mathrm{M}} + \frac{\lambda_0^2}{2} \begin{cases} \mathrm{sgn}\,(\sigma_{\mathrm{M}}) & \text{если} \quad |\sigma_{\mathrm{M}}| > \sigma_0 \\ \frac{\sigma_{\mathrm{M}}}{\sigma_0} & \text{если} \quad |\sigma_{\mathrm{M}}| \leq \sigma_0 \end{cases} \tag{14.2}$$

где $\sigma_0 = \mathrm{const}$, $\sigma_0 \geq 0$, то относительная плотность точек имеет вид

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{M}}}{d\sigma_{\mathrm{g}}} = \begin{cases} \frac{2\sigma_0}{2\sigma_0 + \lambda_0^2} & \text{если} \quad |\sigma_{\mathrm{g}}| < \sigma_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^2 \\ 1 & \text{если} \quad |\sigma_{\mathrm{g}}| > \sigma_0 + \frac{1}{2}\lambda_0^2 \end{cases} \tag{14.3}$$

Если параметр $\sigma_0 \to 0$, мировая функция $\sigma_{\mathrm{g}} \to \sigma_{\mathrm{d}}$ и плотность точек (14.3) стремится к плотности точек (14.1). Геометрия пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$, описываемая мировой функцией (14.2), есть геометрия, которая является частично дискретной геометрией, потому что она является промежуточной между дискретной геометрией $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ и непрерывной геометрией $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Мы будем называть геометрию $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$ зернистой геометрией.

Отклонение дискретной геометрии от непрерывной геометрии Минковского порождает особые свойства геометрии, которые являются следствием невозможности введения линейного векторного пространства.

Пусть $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является времениподобным g-вектором в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ $(\sigma_{\mathrm{d}}(P_0, P_1) > 0)$. Попробуем определить g-вектор $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ в точке P_1, который эквивалентен g-вектору$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Геометрические векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ можно рассматривать как два смежных звена ломаной линии, описывающей движение точечной частицы.

Пусть для простоты координаты имеют вид

$$P_0 = \{0,0,0,0\}, \qquad P_1 = \{\mu,0,0,0\}, \qquad P_2 = \left\{x^0, \mathbf{x}\right\} = \left\{x^0, x^1, x^2, x^3\right\} \tag{14.4}$$

В этой системе координат мировая функция геометрии Минковского имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{M}}(x, x') = \frac{1}{2}\left(\left(x^0 - x^{0\prime}\right)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2\right) \tag{14.5}$$

и σ_{d} определяется соотношением (7.8). Определим координаты x точки P_1 из двух уравнений (7.1), которые можно записать в виде

$$\sigma_{\mathrm{d}}(P_0, P_1) = \sigma_{\mathrm{d}}(P_1, P_2), \quad \sigma_{\mathrm{d}}(P_0, P_2) = 4\sigma_{\mathrm{d}}(P_0, P_1) \tag{14.6}$$

После подстановки мировой функции (7.8) получаем

$$\frac{1}{2}\left(\left(x^0 - \mu\right)^2 - \mathbf{x}^2 + \lambda_0^2\right) = \frac{1}{2}\left(\mu^2 + \lambda_0^2\right) \tag{14.7}$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(x^0\right)^2 - \mathbf{x}^2 + \lambda_0^2\right) = 2\left(\left(x^0 - \mu\right)^2 - \mathbf{x}^2 + \lambda_0^2\right) \tag{14.8}$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$x^0 = 2\mu + \frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu}, \qquad \mathbf{x}^2 = 3\lambda_0^2\left(1 + \frac{3\lambda_0^2}{4\mu^2}\right) \tag{14.9}$$

В результате точка P_2 имеет координаты

$$P_2 = \left\{2\mu + \frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu}, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right\}, \quad r = \lambda_0\sqrt{3 + \frac{9}{4}\frac{\lambda_0^2}{\mu^2}} \tag{14.10}$$

где θ и φ – произвольные величины. Таким образом, пространственные координаты точки P_2 определяются с точностью до $\sqrt{3}\lambda_0$. В пределе $\lambda_0 \to 0$ точка P_2 определяется однозначно. Два решения

$$P_2' = \left\{2\mu + \frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu}, 0, 0, r\right\}, \quad P_2'' = \left\{2\mu + \frac{3}{2}\frac{\lambda_0^2}{\mu}, 0, 0, -r\right\}$$

разделены пространственным расстоянием $i\left|\mathbf{P}_2'\mathbf{P}_2''\right| = \sqrt{4r^2 + \lambda_0^2} \approx \sqrt{13}\lambda_0$ $(\lambda_0 \ll \mu)$. Это максимальное расстояние между двумя решениями $\mathbf{P}_2'$ и $\mathbf{P}_2''$.

Если $\lambda_0 = 0$, то дискретная геометрия превращается в геометрию Минковского, и $P_2 = \{2\mu, 0, 0, 0\}$. Соотношения

$$x^0 = 2\mu, \quad x^1 = 0, \quad x^2 = 0, \quad x^3 = 0 \tag{14.11}$$

следуют из одного уравнения $\mathbf{x}^2 = 0$. Это означает, что геометрия Минковского является вырожденной геометрией, потому что различные решения дискретной геометрии сливаются в одно решение геометрии Минковского.

Рассмотрим ту же задачу для пространственноподобных g-векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, когда

$$P_0 = \{0,0,0,0\}, \quad P_1 = \{0,l,0,0\}, \quad P_2 = \{ct,x,y,z\} \tag{14.12}$$

Мы получаем те же самые уравнения (14.6), но теперь мы имеем другое решение

$$x = 2l + \frac{3\lambda_0^2}{2l}, \quad y = a_2, \quad z = a_3, \quad c^2t^2 = r^2 = 3\lambda_0^2 + \frac{9}{4}\frac{\lambda_0^4}{l^2} \tag{14.13}$$

где a_2 и a_3 суть произвольные числа. Точка P_2 имеет координаты

$$P_2 = \left\{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + r^2}, 2l + \frac{3\lambda_0^2}{2l}, a_2, a_3\right\}, \quad r^2 = 3\lambda_0^2\left(1 + \frac{3\lambda_0^2}{4l^2}\right) \tag{14.14}$$

Разница между двумя решениями P_2' и P_2''

$$P_2' = \left\{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 + r^2}, 2l + \frac{3\lambda_0^2}{2l}, a_2, a_3\right\}, \quad P_2'' = \left\{\sqrt{b_2^2 + b_3^2 + r^2}, 2l + \frac{3\lambda_0^2}{2l}, b_2, b_3\right\}$$

может быть бесконечно большой

$$|\mathbf{P}_2'\mathbf{P}_2''| = \sqrt{2a_2b_2 + 2a_3b_3 - 2\sqrt{r^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{r^2 + b_2^2 + b_3^2} + 2r^2 - \lambda_0^2}$$

Эта разница остается очень большой, даже если $\lambda_0 \to 0$.

Таким образом, обе дискретная геометрия и геометрия Минковского многовариантны относительно пространственноподобных g-векторов. Однако это обстоятельство оставалось незамеченным в традиционной релятивистской динамике, потому что пространственноподобные g-векторы там не рассматривались.

Многовариантность дискретной геометрии приводит к интранзитивности отношения эквивалентности для двух векторов. В самом деле, если $(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)$ и $(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1')$, но g-вектор $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\overline{\mathrm{eqv}}\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1')$. Это означает интранзитивность отношения эквивалентности. Кроме того это означает, что дискретная геометрия неаксиоматизируема, потому что в любом логическом построении отношение эквивалентности транзитивно.

Транзитивность отношения эквивалентности в случае собственно евклидовой геометрии является следствием специальных условий (12.1) – (12.7). В случае произвольной физической геометрии они, вообще говоря, не выполняются.

Параллельный перенос g-вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ в некоторую точку Q_0 приводит к неопределенности результата этого переноса, потому что в точке Q_0 имеется много g-векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1'$,..., которые эквивалентны g-вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

В соответствии с (9.1) - (9.3) результат суммирования g-векторов и умножения g-вектора на вещественное число, вообще говоря, не является однозначным в дискретной геометрии. Это означает, что в дискретной геометрии нельзя ввести линейное векторное пространство.

Пусть дискретная геометрия описывается n координатами. Пусть каркас $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ определяет n g-векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k = 1,2,...n$, которые линейно независимы в том смысле, что

$$F_n(\mathcal{P}_n) = \det\|(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)\| \neq 0 \qquad i,k = 1,2,...n \tag{14.15}$$

Можно однозначно определить проекции g-вектора $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ на g-векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, ...n$ с помощью соотношений (12.9). Однако, нельзя восстановить g-вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, используя его проекции на g-векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k$, $k = 1, 2, ...n$, потому что суммирование компонентов g-вектора многозначно. Таким образом, все операции линейного векторного пространства неоднозначны в дискретной геометрии.

Математический формализм дифференциальной геометрии не адекватен при его применении в дискретной геометрии, потому что он слишком специален и адаптирован к непрерывной (дифференциальной) геометрии. Это обстоятельство особенно важно при описании динамики элементарных частиц. Состояние частицы не может описываться ее положением и ее импульсом, потому что предел $\mu \to +0$ в (14.4) не существует в дискретной геометрии. Кроме того динамические уравнения не могут быть дифференциальными уравнениями.

15 Каркасная концепция динамики частиц

Элементарная частица является физическим телом. В дискретной геометрии пространства-времени положение физического тела описывается его каркасом $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$. Разумеется, такое описание положения физического тела может быть использовано в любой геометрии пространства-времени. Каркас является аналогом системы отсчета жестко прикрепленной к частице (физическому телу). Следя за движением каркаса, можно следить за движением физического тела. Направление перемещения каркаса описывается ведущим вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Движение каркаса описывается мировой цепью $\mathcal{C}$ связанных каркасов

$$\mathcal{C} = \bigcup_{s=-\infty}^{s=+\infty} \mathcal{P}_n^{(s)} \tag{15.1}$$

Каркасы $\mathcal{P}_n^{(s)}$ мировой цепи связаны в том смысле, что точка P_1 каркаса является точкой P_0 смежного каркаса. Это означает

$$P_1^{(s)} = P_0^{(s+1)}, \qquad s = ...0, 1, ... \tag{15.2}$$

Геометрический вектор $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)} = \mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_0^{(s+1)}$ является ведущим g-вектором, определяющим направление мировой цепи.

Если движение частицы свободное, то смежные каркасы эквивалентны

$$\mathcal{P}_n^{(s)} \mathrm{eqv} \mathcal{P}_n^{(s+1)} : \qquad \mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)} \mathrm{eqv} \mathbf{P}_i^{(s+1)}\mathbf{P}_k^{(s+1)}, \qquad i, k = 0, 1, ...n, \qquad s = ..0, 1, .. \tag{15.3}$$

Если частица описывается каркасом $\mathcal{P}_n^{(s)}$, то мировая цепь (15.1) имеет $n(n+1)/2$ инвариантов

$$\mu_{ik} = \left|\mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)}\right|^2 = 2\sigma\left(P_i^{(s)}, P_k^s\right), \qquad i, k = 0, 1, ...n, \qquad s = ...0, 1, ... \tag{15.4}$$

которые постоянны вдоль всей мировой цепи.

Уравнения (15.3) образуют систему из $n\,(n+1)$ уравнений в конечных разностях для определения nD координат n точек каркаса $\{P_1, P_2, ..P_n\}$, где D есть координатная размерность пространства-времени. Число динамических переменных, подлежащих определению отличается, вообще говоря, от числа динамических уравнений. Это главное отличие каркасной концепции динамики частиц от традиционной концепции динамики частиц, где число динамических переменных совпадает с числом динамических уравнений.

В случае точечной частицы, когда $n = 1$, $D = 4$, число уравнений $n_e = 2$, тогда как число переменных $n_v = 4$. Число уравнений меньше, чем число динамических переменных. В дискретной геометрии пространства-времени(7.8) положение смежного каркаса определяется неоднозначно. В результате мировая цепь вихляет. В нерелятивистском приближении статистическое описание стохастических мировых цепей приводит к уравнению Шредингера [14], если элементарная длина λ_0 имеет вид

$$\lambda_0^2 = \frac{\hbar}{bc} \tag{15.5}$$

где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света и b есть универсальная постоянная, связывающая массу частицы m с длиной μ звена мировой линии с помощью соотношения (7.10).

Динамические уравнения (15.3) являются уравнениями в конечных разностях. На больших масштабах, когда можно перейти к пределу $\lambda_0 = 0$, динамические уравнения (15.3) превращаются в дифференциальные динамические уравнения. В случае точечной частицы ($n = 1$) и пятимерной геометрии Калуцы-Клейна эти уравнения описывают движение заряженной частицы в заданном электромагнитном поле. На этом примере можно видеть, что геометрия пространства-времени "поглощает" электромагнитное поле. Это означает, что можно рассматривать только свободное движение частицы, имея в виду, что геометрия пространства-времени может "поглотить" все силовые поля.

Динамические уравнения (15.3) реализуют каркасную концепцию динамики частиц в микромире. Каркасная концепция динамики отличается от традиционной концепции динамики частиц в том отношении, что число динамических уравнений может отличаться от числа динамических переменных, которые подлежат определению. В традиционной концепции динамики частиц число уравнений (первого порядка) всегда совпадает с числом динамических переменных, которые должны быть определены. В результате движение частицы (или среднестатистической частицы) оказывается детерминированным. В случае квантовых частиц, движение которых стохастическое (недетерминированное), динамические уравнения пишутся для статистического ансамбля недетерминированных частиц (или среднестатистических частиц).

В традиционной концепции динамики частиц можно получить динамическое уравнение для среднестатистической частицы (т.е. для статистического ансамбля, нормированного на единицу), но нет динамических уравнений для отдельной стохастической частицы. В каркасной концепции динамики частиц имеются динамические уравнения для отдельной частицы. Эти уравнения многозначны (многовариантны), но они существуют. В традиционной концепции динамики частиц можно получит уравнения для среднестатистической частицы, которые являются уравнениями типа гидродинамических уравнений (уравнений для сплошной среды). Но нельзя получить динамические уравнения для отдельной недетерминированной частицы [7].

Каркасная концепция динамики частиц реализует более детальное описание элементарной частицы, и можно надеяться получить информацию о структуре элементарной частицы.

Сегодня мы имеем два примера применения каркасной концепции. Рассматривая компактификацию в 5-мерной дискретной геометрии Калуцы-Клейна, и накладывая условие однозначности мировой функции, было получено, что величина электрического заряда стабильной элементарной частицы ограничена элементарным электрическим зарядом [20]. Этот результат известен из экспериментов, но он не был объяснен теоретически, потому что в непрерывной геометрии пространства-времени не рассматривают мировую функцию как фундаментальную величину и не требуют ее однозначности.

Другой пример касается структуры дираковских частиц (фермионов). При записи уравнения Дирака в виде динамического уравнения для ансамбля стохастических частиц [21, 22, 23] было получено, что средняя мировая линия такой частицы представляет собой винтовую линию с времениподобной осью. Спин и магнитный момент дираковской частицы обусловлены ее вращением при движении по винтовой линии. Таким образом, статистическое описание дает некоторую информацию о структуре дираковской частицы, тогда как квантовое описание не дает такой информации, хотя в обоих случаях исследуется одно и то же динамическое уравнение.

Рассмотрение в рамках каркасной концепции [24] показывает, что мировая цепь фермиона является (пространственноподобной или времениподобной) винтовой линией с времениподобной осью. Усредненная мировая цепь свободного фермиона является времениподобной прямой. Винтообразное движение каркаса порождает угловой момент (спин) и магнитный момент. такой результат выглядит достаточно разумным. В традиционной концепции динамики частиц спин и магнитный момент фермиона постулируются без ссылки на его структуру. Винтообразная мировая цепь фермиона связана с тем, что каркас дираковской частицы содержит три, и он или больше точек, причем каркас описывается тремя (или большим числом) инвариантами $\mu_{ik} = \mu_{ki}$, $i, k = 1, 2, 3$ Которые определяются соотношением (15.4). В случае двухточечного каркаса, описывающего точечную частицу имеется только один параметр μ который описывает массу частицы. При квантовом подходе параметр μ отсутствует, и масса частицы рассматривается как некоторый внешний (не геометрический) параметр частицы. В каркасной концепции все параметры частицы являются геометрическими величинами. В случае дираковской частицы ее масса и спин выражаются через геометрические инварианты μ_{ik}. (эта связь пока не получена).

16 Заключительные замечания

Структурный подход к теории элементарных частиц появляется как результат каркасной концепции, где состояние частицы описывается каркасом частицы. Такое описание является релятивистским. Кроме того, такое описание является бескоординатным и может производится в любой геометрии пространства-времени (непрерывной или дискретной). Релятивистское описание состояния частицы позволяет заменить квантовое описание статистическим описанием стохастических мировых линий элементарных частиц. В результате квантовые принципы и квантовые сущности становятся излишними. Такая замена квантового описания статистическим описанием оказывается возможным из-за логической перезагрузки в динамике частиц, когда отдельная частица как базовый объект динамики заменяется статистическим ансамблем частиц, и динамика стохастических и детерминированных частиц описывается в одних и тех же терминах.

Дальнейшее развитие каркасной концепции возникает после логической перезагрузки в геометрии пространства-времени, когда такие базовые геометрические понятия как размерность, система координат, бесконечно малое расстояние заменяются единственным базовым понятием: конечным расстоянием или мировой функцией. В результате возникает монистическая концепция геометрии пространства-времени. Возможности этой концепции существенно возрастают из-за ее монистического характера. В частности, удалось преодолеть вырожденность евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ и построить многовариантную геометрию пространства-времени. Многовариантность геометрии пространства-времени непринужденно объясняет стохастичность поведения элементарных частиц (квантовые эффекты).

Таким образом, дискретность геометрии пространства-времени представляется более разумным и естественным предположением, чем предположение о квантовой природе физических явлений в микромире. Дискретность – это просто свойство пространства-времени, тогда как квантовые принципы предполагают введение новых сущностей.

Формализм дискретной геометрии очень прост. Он не содержит теорем со сложными доказательствами. Тем не менее дискретная геометрия и ее формализм воспринимаются с трудом. Дискретная геометрия не развивалась в двадцатом веке, хотя дискретная геометрия была необходима для описания физических явлений в микромире. Представляется довольно естественным, что пространство-время дискретно в микромире. Какова причина пренебрежения дискретной геометрией? Попытаемся ответить на этот вопрос.

Дискретная геометрия не развивалась, потому что она могла быть получена только как обобщение собственно евклидовой геометрии. Почти все понятия и величины собственно евклидовой геометрии являются по существу понятиями непрерывной геометрии. Они не могут использоваться для построения дискретной геометрии. Только понятие расстояния (или мировой функции) не использует ссылку на непрерывность геометрии. Только бескоординатные выражения (7.1) –(7.4) евклидовой геометрии, представленные в терминах мировой функции, позволяют построить дискретную геометрию и другие физические геометрии.

Уверенность, что геометрия должна быть аксиоматизируемой, было вторым препятствием на пути построения дискретной геометрии. Тот факт, что собственно евклидова геометрия является вырожденной геометрией, было третьим препятствием. В частности, будучи физической геометрией, собственно евклидова геометрия аксиоматизируема, и это является свидетельством ее вырожденности. Очень трудно получить общую концепцию как обобщение вырожденной концепции, потому что некоторые различные величины совпадают в вырожденной концепции. Очень трудно бывает разъединить их при обобщении. Например, физическая геометрия, вообще говоря, многовариантна. Одно-вариантная физическая геометрия является вырожденной геометрией. В физической геометрии отрезок прямой линии $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} = \left\{ R | \sqrt{2\sigma(P_0, R)} + \sqrt{2\sigma(R, P_1)} = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \right\} \tag{16.1}$$

является, вообще говоря, поверхностью. В вырожденной физической геометрии (собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$) отрезок прямой является одномерным множеством. Как догадаться, что отрезок прямой является, вообще говоря, поверхностью? Кроме того, интранзитивность отношения эквивалентности приводит к неаксиоматизируемости геометрии. Но в течении последних двух тысяч лет мы изучали только аксиоматизируемые геометрии. Как мы можем догадаться, что существуют неаксиоматизируемые геометрии? *Многовариантность является естественным свойством геометрии. Неприятие этого понятия является главной причиной игнорирования дискретной физической геометрии.* Прямой путь от евклидовой геометрии к физическим геометриям был очень труден, и физические геометрии были получены окольным путем.

Дж.Л.Синг [25, 26] ввел мировую функцию для описания римановой геометрии. Я был студентом и не знал работ Синга. Я ввел мировую функцию для описания римановой геометрии в общей теории относительности. Мой подход немного отличался от подхода Синга. В частности, я получил уравнение для мировой функции риманова пространства [27], которое содержало только мировую функцию и ее производные

$$\frac{\partial\sigma(x, x')}{\partial x^i} G^{ik'}(x, x') \frac{\partial\sigma(x, x')}{\partial x'^k} = 2\sigma(x, x'), \qquad G^{ik'}(x, x') G_{lk'}(x, x') = \delta^i_l, \tag{16.2}$$

где

$$G_{lk'}(x, x') \equiv \frac{\partial^2\sigma(x, x')}{\partial x^l \partial x'^k}, \quad l, k = 0, 1, 2, 3 \tag{16.3}$$

Метрический тензор выражается через мировую функцию G в совпадающих точках с помощью соотношения.

$$g_{ik}(x) = -G_{lk'}(x, x) = -\left[G_{lk'}(x, x')\right]_{x'=x} \tag{16.4}$$

но оно используется для определения мировой функции $G(x, x')$ только как начальное (или граничное) условие. Уравнение (16.2) было получено как следствие определения мировой функции как интеграла вдоль геодезической, соединяющей точки x и x'. Это уравнение содержит только мировую функцию и ее производные, но не содержит метрический тензор.

Это уравнение поставило вопрос. Пусть мировая функция G не удовлетворяет уравнению (16.2). Будет ли мировая функция описывать не-риманову геометрию, или она, вообще, не будет описывать никакой геометрии? Мне было трудно ответить на этот вопрос. С одной стороны, формализм, основанный на мировой функции, является более продвинутым формализмом, чем формализм, основанный на использовании метрического тензора, потому что геодезическая между точками P_0, P_1 описывается в терминах мировой функции алгебраическим уравнением (16.1), тогда как та же самая геодезическая в терминах метрического тензора описывается дифференциальным уравнением.

С другой стороны, геодезическая, описываемая уравнением (16.1), является одномерной только в римановой геометрии. В n-мерном пространстве уравнение (16.1) описывает некоторую $(n-1)$-мерную поверхность. Я не знал является ли поверхность обобщением геодезической в любой геометрии. Я не был уверен, что это возможно, потому что в евклидовой геометрии отрезок прямой линии одномерен по определению. Я оставил вопрос нерешенным и вернулся к нему почти тридцать лет спустя, в начале девяностых годов прошлого века.

Когда появилась теория струн, то мне стало ясно, что частица может описываться мировой поверхностью (трубкой), а не только мировой линией. Поскольку мировая линия частицы ассоциируется с геодезической, я решил, что мировая трубка может описывать частицу. Это означало, что существуют геометрии пространства-времени, где прямые(геодезические) описываются мировыми трубками. Остальное было делом техники. Вопрос о возможности физических геометрий пространства-времени был для меня окончательно решен, когда квантовое описание оказалось следствием многовариантности пространства-времени [14].

Список литературы

[1] Yu. A.Rylov, Discrete space-time geometry and skeleton conception of particle dynamics. *Int. J. Theor. Phys.* **51**, *iss. 6 1847-1865, (2012)*, see also *e-print 1110.3399v1*

[2] Yu.A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. (*Journ. Math. Phys.* **40**, *pp. 256 - 278, (1999)*

[3] E. Madelung, Quanten theorie in hydrodynamischer Form, Z. Physik, **40**, 322-326, (1926).

[4] D. Bohm, On interpretation of quantum mechanics on the basis of the "hidden" variable conception. *Phys.Rev.* **85,** 166, 180, (1952).

[5] A. Clebsch, *J. reine angew. Math.* **54** , 293, (1857).

[6] A. Clebsch, *J. reine angew. Math.* **56** , 1, (1859).

[7] Yu. A.Rylov, Uniform formalism for description of dynamic, quantum and stochastic systems. *e-print /physics/0603237v6*

[8] Yu.A.Rylov, Quantum mechanics as a dynamic construction. *Found. Phys.* **28**, No.2, 245-271, (1998).

[9] C.C. Lin, *Proc. International School of Physics "Enrico Fermi".* Course XXI, Liquid Helium , New York, Academic. 1963, pp. 93-146.

[10] Yu.A.Rylov, Classical description of pair production, *e-print /abs/physics/0301020)*

[11] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953

[12] Yu. A. Rylov, Dynamic equations for tachyon gas. *Int. J. Theor. Phys.* (2012)

[13] Ю.А.Рылов, Тахионный газ как кандидат на темую материю. *Вестник РУДН, математика, информатика, физика. (2013) вып. 2 стр.159-173.*

[14] Yu.A.Rylov, "Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, *2092-2098, (1991)*

[15] Ю.С. Владимиров, *Геометродинамика*, гл. 8, Москва, Бином, 2005.

[16] Yu. A.Rylov, Deformation principle and further geometrization of physics. *e-print* /0704.3003

[17] Yu.A. Rylov, Non-Euclidean method of the generalized geometry construction and its application to space-time geometry in *Pure and Applied Differential geometry* pp.238-246. eds. Franki Dillen and Ignace Van de Woestyne. Shaker Verlag, Aachen, 2007. See also *e-print Math.GM/0702552*

[18] Yu.A. Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, *iss. 12, 733-760, (2002).*

[19] Yu. A. Rylov, Different conceptions of Euclidean geometry and their application to the space-time geometry. *e-print /0709.2755v4*

[20] Yu. A. Rylov, Discriminating properties of compactification in discrete uniform isotropic space-time. *e-print 0809.2516v2*

[21] Yu.A.Rylov, Dirac equation in terms of hydrodynamic variables. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **5**, *pp 1-40, (1995)*). See also *e-print /1101.5868.*

[22] Yu. A.Rylov, Is the Dirac particle composite? *e-print* /physics/0410045.

[23] Yu. A. Rylov (2004), Is the Dirac particle completely relativistic? *e-print* /physics/0412032.

[24] Yu. A. Rylov, Geometrical dynamics: spin as a result of rotation with superluminal speed. *e-print 0801.1913.*

[25] J.L. Synge, A characteristic function in Riemannian space and its applications to the soution of geodesic triangles. *Proc. London Math. Soc.* **32**, *241, (1931).*

[26] J.L.Synge, *Relativity: the General Theory.* Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1960.

[27] Ю.А.Рылов, О возможности описания риманова пространства в терминах конечного интервала. *Известия ВУЗов, математика. No.3(28), 131-142.* (1962).