σ-имманетная форма евклидовой геометрии как основа для неевклидовой геометрии.

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, 117526, Москва, пр. Вернадского 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru

Ключевые слова: метрика, кривая, мировая функция, трубка

Аннотация

Собственно евклидова геометрия рассматривается как метрическое пространство и описывается в терминах только метрики и конечных метрических подпространств (σ-имманентное описание). При таком описании вся информация о свойствах геометрии (таких как однородность, изотропность, непрерывность и вырожденность) заключена в метрике. Риманова геометрия строится двумя различными способами: (1) традиционным способом на основе метрического тензора, (2) как результат модификации метрики при σ-имманентном описании собственно евклидовой геометрии. Сравниваются эти две геометрии. Рассматриваются проблема выпуклости и проблема коллинеарности векторов в удаленных точках. Показано, что неметрическое определение кривой есть понятие, присущее собственно евклидовой геометрии и неадекватное любой невклидовой геометрии.

1 Введение

Существует несколько методов описания собственно евклидовой геометрии [1]. Наиболее старый метод описания – это аксиоматическое представление собственно евклидовой геометрии, где геометрия описывается в терминах точек, прямых и плоскостей, которые задаются их свойствами с помощью аксиом.

[1]Мы используем термин "евклидова геометрия" как собирательное понятие по отношению к терминам "собственно евклидова геометрия" и "псевдоевклидова геометрия". В первом случае собственные значения матрицы метрического тензора имеют одинаковые знаки, а во втором – они разных знаков.

Некоторые аксиомы описывают свойства естественных геометрических объектов (точек, прямых и плоскостей), другие – описывают такие свойства собственно евклидовой геометрии как однородность изотропия, непрерывность и вырожденность[2].

Реальная геометрия пространства-времени однородна лишь приблизительно, и нужно уметь рассматривать геометрии, которые не были бы однородными, изотропными, непрерывными и вырожденными. Другими словами, требуется уметь обобщать и видоизменять собственно евклидову геометрию. Но модифицировать аксиомы практически невозможно, и нужно описывать геометрию в форме, содержащей численные характеристики, которые можно было бы легко изменять. В качестве такой числовой характеристики собственно евклидовой геометрии обычно используется метрика $\rho(P,Q)$, описывающая расстояние между парой точек пространства P и Q. После модификации евклидовой метрики возникает другая геометрия, которая может быть свободна от таких свойств как однородность, изотропность, непрерывность и вырожденность.

Чтобы осуществить эту идею, дадим несколько определений, которые помогут сформулировать проблему обобщения и модификации собственно евклидовой геометрии.

Определение 1.1 *Метрическое пространство $M=\{\rho,\Omega\}$ есть множество Ω точек $P\in\Omega$, снабженное метрикой ρ заданной на $\Omega\times\Omega$*

$$\rho: \quad \Omega\times\Omega\rightarrow D_+\subset\mathbb{R} \tag{1.1}$$

$$\rho(P,P)=0, \qquad \rho(P,Q)=\rho(Q,P), \qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{1.2}$$

$$D_+=[0,\infty), \qquad \rho(P,Q)=0, \quad \text{если и только если} \quad P=Q, \qquad \forall P,Q\in\Omega \tag{1.3}$$

$$\rho(P,Q)+\rho(Q,R)\geq\rho(P,R), \qquad \forall P,Q,R\in\Omega \tag{1.4}$$

Определение 1.2 *Всякое подмножество $\Omega'\subset\Omega$ точек метрического пространства $M=\{\rho,\Omega\}$, снабженное метрикой ρ', являющейся сужением $\rho|_{\Omega'\times\Omega'}$ отображения (1.1) на множество $\Omega'\times\Omega'$ называется метрическим подпространством $M'=\{\rho',\Omega'\}$ метрического пространства $M=\{\rho,\Omega\}$.*

Легко видеть, что метрическое подпространство $M'=\{\rho',\Omega'\}$ является метрическим пространством.

Определение 1.3 *Метрическое пространство $M=\{\rho,\Omega\}$ называется конечным, если множество Ω состоит из конечного числа точек. Конечное метрическое подпространство $M(\mathcal{P}^n)=\{\rho,\mathcal{P}^n\}$ метрического пространства $M=\{\rho,\Omega\}$, состоящее из $n+1$ точек $\mathcal{P}^n\equiv\{P_0,P_1,\ldots P_n\}\subset\Omega$, $\quad n=0,1,\ldots$ называется метрическим подпространством n-ого порядка.*

---

[2]В общем случае множество векторов, параллельных данному вектору, образует конус. Вырождение собственно евклидовой геометрии означает, что этот конус вырождается в линию.

Собственно евклидово пространство можно рассматривать как разновидность метрического пространства $E = \{\rho_E, \Omega\}$. Будучи метрическим пространством, собственно евклидово пространство и геометрия на нем может описываться в терминах только конечных метрических подпространств и метрики ρ. Конечные метрические подпространства $M(\mathcal{P}^n)$ являются простейшими конституэнтами метрического пространства. Некоторые свойства конечных метрических подпространств $M(\mathcal{P}^n)$ были изучены Блументалем [1], но он не рассматривал их как первичные фундаментальные объекты метрического пространства, как это будем делать мы. Метрическое пространство $M(\mathcal{P}^n)$, состоящее из $n+1$ точек и имеющее ненулевую длину (понятие длины будет определено немного позже) порождает в собственно евклидовом пространстве n-мерную плоскость $\mathcal{L}_n(\mathcal{P}^n)$, которая оказывается атрибутом $M(\mathcal{P}^n)$ и может быть определена в терминах $M(\mathcal{P}^n)$.

Определение 1.4 *Элементарным геометрическим объектом называется множество точек, обладающее некоторым метрическим свойством.*

Определение 1.5 *Геометрический объект есть множество точек, возникшее в результате объединений и пересечений элементарных геометрических объектов.*

Другими словами, геометрическим объектом называется некоторое метрическое подпространство $M_G = \{\rho, G\}$, $G \subset \Omega$ метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$.

Определение 1.6 *Геометрия есть совокупность всех предложений (определений, аксиом и теорем) о свойствах геометрических объектов.*

Иначе говоря, геометрия есть совокупность всех утверждений о свойствах всех метрических подпространств метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$.

Рассмотрим некоторые примеры элементарных геометрических объектов.

Определение 1.7 *Сферой $\mathcal{S}(O;P)$, имеющей центр в точке O и проходящей через точку P, называется множество точек $R \in \Omega$ метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$, определенное соотношением*

$$\mathcal{S}(O;P) = \{R|\rho(O,R) = \rho(O,P)\}, \qquad O,P,R \in \Omega$$

Базисные точки O и P, определяющие сферу $\mathcal{S}(O;P)$, не эквивалентны, так как $\mathcal{S}(O;P)$ и $\mathcal{S}(P;O)$ – различные элементарные геометрические объекты (различные сферы). В частности, $P \in \mathcal{S}(O;P)$, но $O \notin \mathcal{S}(O;P)$. Сфера $\mathcal{S}(O;P)$ есть атрибут метрических подпространств нулевого порядка $M(O)$ и $M(P)$ (или двух точек O, P).

Определение 1.8 *Круговым цилиндром $\mathcal{C}(P_1, P_2; P)$, проходящим через точку P, с осью, определяемой базисными точками P_1, P_2, называется множество* *точек $R \in \Omega$ метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$, определяемое соотношением*

$$\mathcal{C}\left(P_1, P_2; P\right) = \left\{R | S_2\left(P_1, P_2, R\right) = S_2\left(P_1, P_2, P\right)\right\}, \qquad P_1, P_2, P, R \in \Omega$$

где $S_2\left(P_1, P_2, R\right)$ есть площадь треугольника с вершинами в точках P_1, P_2, R. Если площади треугольников $\triangle P_1 P_2 R$ и $\triangle P_1 P_2 P$ равны, то их высоты (радиусы), опущенные из вершин R и P этих треугольников на их общее основание, $P_1 P_2$ (ось цилиндра) также равны. Площадь треугольника $S_2\left(P_1, P_2, R\right)$ может быть выражена через метрику с помощью формулы Герона

$$S_2\left(A, B, C\right) = \sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)},$$

$$a = \rho\left(B, C\right), \qquad b = \rho\left(A, C\right), \qquad c = \rho\left(A, B\right), \qquad p = \left(a+b+c\right)/2$$

Круговой цилиндр $\mathcal{C}\left(P_1, P_2; P\right)$ есть атрибут двух метрических подпространств $M(P_1, P_2)$ и $M(P)$.

Определение 1.9 *Эллипсоидом $\mathcal{E}\left(P_1, P_2; P\right)$, имеющим фокусы в базисных точках P_1, P_2 и проходящим через точку P называется множество точек $R \in \Omega$ метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$, определяемое соотношением*

$$\mathcal{E}\left(P_1, P_2; P\right) = \left\{R | \rho\left(P_1, R\right) + \rho\left(P_2, R\right) = \rho\left(P_1, P\right) + \rho\left(P_2, P\right)\right\}, \qquad P_1, P_2, P, R \in \Omega$$

Эллипсоид $\mathcal{E}\left(P_1, P_2; P\right)$ есть атрибут двух конечных метрических подпространств $M(P_1, P_2)$ и $M(P)$. Если $P_1 \neq P$ и $P_2 \neq P$, то точки $P_1, P_2 \notin \mathcal{E}\left(P_1, P_2; P\right)$, но точка $P \in \mathcal{E}\left(P_1, P_2; P\right)$. Если точка $P = P_1$, то эллипсоид $\mathcal{E}\left(P_1, P_2; P\right)$ вырождается в сегмент $\mathcal{T}_{[P_1 P_2]}$ между точками P_1 and P_2 прямой $\mathcal{T}_{P_1 P_2}$, проходящей через точки P_1 и P_2. Сегмент $\mathcal{T}_{[P_1 P_2]}$ определяется следующим образом

Определение 1.10 *Сегмент $\mathcal{T}_{[P_1 P_2]}$ прямой между базисными точками P_1, P_2 есть множество точек $R \in \Omega$ метрического пространства $M = \{\rho, \Omega\}$, определяемое соотношением*

$$\mathcal{T}_{[P_1 P_2]} = \left\{R | \rho\left(P_1, R\right) + \rho\left(P_2, R\right) - \rho\left(P_1, P_2\right) = 0\right\}, \qquad P_1, P_2, R \in \Omega \tag{1.5}$$

Сегмент $\mathcal{T}_{[P_1 P_2]}$ есть элементарный геометрический объект, который не зависит от порядка точек P_1, P_2. Кроме того обе базисные точки $P_1, P_2 \in \mathcal{T}_{[P_1 P_2]}$. Сегмент $\mathcal{T}_{[P_1 P_2]}$ является атрибутом метрического подпространства первого порядка $M\left(P_1, P_2\right)$ в том смысле, что $\mathcal{T}_{[P_1 P_2]}$ определяется самим метрическим подпространством $M\left(P_1, P_2\right)$. Например, сфера $\mathcal{S}\left(O; P\right)$ определяется точками O, P метрического подпространства $M\left(O, P\right)$, но не самим метрическим подпространством $M\left(O, P\right)$ и сфера $\mathcal{S}\left(O; P\right)$ не является атрибутом метрического подпространства $M\left(O, P\right)$, хотя она является атрибутом двух метрических подпространств нулевого порядка $M(O)$ и $M(P)$ (или двух точек O, P).

Определение 1.11 *Элементарный геометрический объект, который является атрибутом метрического подпространства n-ого порядка $M(\mathcal{P}^n)$, есть естественный геометрический объект n-ого порядка (ЕГО n-ого порядка).*

Такие геометрические объекты как точка, евклидова прямая и евклидова плоскость являются ЕГО собственно евклидовой геометрии. Точка P_0 есть ЕГО нулевого порядка $\mathcal{T}_{P_0}$ собственно евклидовой геометрии, определяемый метрическим подпространством нулевого порядка $M(P_0) = P_0$. Прямая $\mathcal{T}_{P_0P_1}$ собственно евклидовой геометрии есть ЕГО первого порядка, который определяется метрическим подпространством первого порядка $M(P_0, P_1)$. Это означает, в частности, что $\mathcal{T}_{P_0P_1} = \mathcal{T}_{P_1P_0}$.

Двумерная плоскость $\mathcal{T}_{P_0P_1P_2}$ собственно евклидовой геометрии есть ЕГО второго порядка, который определяется метрическим подпространством второго порядка $M(P_0, P_1, P_2)$. Это означает, что ЕГО $\mathcal{T}_{P_0P_1P_2}$ не зависит от порядка базисных точек P_0, P_1, P_2, которые определяют $\mathcal{T}_{P_0P_1P_2}$. Однако, не всякое метрическое подпространство второго порядка $M(P_0, P_1, P_2)$ определяет $\mathcal{T}_{P_0P_1P_2}$. Только $M(P_0, P_1, P_2) \not\subset \mathcal{T}_{P_0P_1}$ могут определять $\mathcal{T}_{P_0P_1P_2}$.

Для явного определения ЕГО n-ого порядка нужно приписать длину $|M(\mathcal{P}^n)|$ любому метрическому подпространству n-ого порядка $M(\mathcal{P}^n)$.

Определение 1.12 *Квадратом длины $|M(\mathcal{P}^n)|^2$ метрического подпространства n-ого порядка $M(\mathcal{P}^n) \subset \Omega$ собственно евклидова пространства $E = \{\rho_E, \Omega\}$ называется вещественное число*

$$|M(\mathcal{P}^n)|^2 = (n!S_n(\mathcal{P}^n))^2 = F_n(\mathcal{P}^n)$$

где $S_n(\mathcal{P}^n)$ есть евклидов объем $(n+1)$-эдра с вершинами в точках $\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, \dots P_n\} \subset \Omega$.

В собственно евклидовой геометрии объем $S_n(\mathcal{P}^n)$ $(n+1)$-эдра и значение $F_n(\mathcal{P}^n)$ функции F_n, связанное с ним, могут быть выражены в терминах метрики ρ с помощью соотношений

$$F_n: \quad \Omega^{n+1} \to \mathbb{R}, \qquad \Omega^{n+1} = \bigotimes_{k=1}^{n+1} \Omega, \qquad n = 1, 2, \dots \tag{1.6}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||, \qquad P_0, P_i, P_k \in \Omega, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k) &\equiv \Gamma(P_0, P_i, P_k) \equiv \sigma(P_0, P_i) + \sigma(P_0, P_k) - \sigma(P_i, P_k), \\ i, k &= 1, 2, ...n. \end{aligned} \tag{1.8}$$

где функция σ определяется через метрику ρ с помощью соотношения

$$\sigma(P, Q) \equiv \frac{1}{2}\rho^2(P, Q), \qquad \forall P, Q \in \Omega. \tag{1.9}$$

и $\mathcal{P}^n$ означает $n+1$ точек $P_0, P_1, \ldots, P_n$ множества Ω

$$\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, \ldots, P_n\} \subset \Omega \tag{1.10}$$

Функция σ, называемая мировой функцией [2], очень важная величина, которая может использоваться вместо метрики ρ. Во многих случаях использование σ оказывается более удобным, чем использование метрики ρ. Квадрат длины $|M(\mathcal{P}^n)|^2 = F_n(\mathcal{P}^n)$ подсчитан для собственно евклидова пространства, но выражение (1.7) - (1.9) может быть использовано для любого конечного подпространства любого метрического пространства, потому что оно содержит только мировую функцию σ (метрику ρ) и может быть рассчитано для любого метрического пространства.

Определение 1.13 *Описание называется σ-имманентным, если оно не содержит ссылок на объекты и понятия, отличные от конечных метрических подпространств метрического пространства и его метрики.*

Приставка σ в термине "σ-имманентный" ассоциируется с мировой функцией σ. Понятие σ-имманентного описания очень важно для модификации собственно евклидовой геометрии. Рассматривая собственно евклидову геометрию как эталонную и определяя геометрический объект в ней σ-имманентным способом, можно использовать это определение в любом метрическом пространстве.

Заметим, что определение геометрических объектов – главная проблема метрической геометрии, т.е. геометрии, порождаемой метрическим пространством. Кратчайшая (линия), связывающая две произвольные точки $P, Q \in \Omega$ метрического пространства $\{\rho, \Omega\}$, есть основной геометрический объект, который обычно строится в метрическом пространстве [3]. Из отрезков кратчайшей можно построить угол, треугольник и многоугольник. Построение аналогов двумерной и трехмерной плоскостей в метрическом пространстве довольно проблематично. Во всяком случае не ясно, как можно построить эти плоскости, используя кратчайшую как основной геометрический объект. Возможность описания метрического пространства в терминах только кратчайшей ограничена, хотя проявив достаточно изобретательности, такое описание можно построить. Например, А.Д. Александров показал, что внутренняя геометрия двумерных границ выпуклых трехмерных тел может быть представлена в терминах одной только метрики [4]. По-видимому, без введения геометрических объектов, которые являются аналогами двумерных плоскостей, решить подобную проблему для трехмерных границ четырехмерных тел очень трудно.

Заметим, что ограничения (1.3), (1.4), налагаемые на метрику, нужны только для построения кратчайших. Кратчайшая, определяемая точками P_1, P_2, может быть заменена σ-имманентным определением (1.5) сегмента $\mathcal{T}_{[P_1P_2]}$, который совпадает с кратчайшей в метрическом пространстве, описываемом определением 1.1. Это определение само по себе не нуждается в ограничении (1.3), описывающим дефинитность метрики метрического пространства, и в ограничении (1.4), описывающем одномерность сегмента $\mathcal{T}_{[P_1P_2]}$. Если метрика не ограничена условием (1.4), сегмент $\mathcal{T}_{[P_1P_2]}$ имеет форму полой трубки, напоминающей эллипсоид, описываемый соотношением 1.9. Если ограничение (1.4) усилить ($\leq$ заменяется на $<$), то сегмент $\mathcal{T}_{[P_1P_2]}$ вырождается в две точки P_1, P_2. Случай одномерной кратчайшей является промежуточным между этими двумя.

В случае собственно евклидова пространства, рассматриваемого как метрическое пространство, ЕГО первого порядка, определяемый (1.5), есть одномерная линия. При этом остается неясным, является ли свойство одномерности специальным свойством собственно евклидовой геометрии, или это свойство любой геометрии, вообще. Мы не видим, почему следует настаивать на одномерности ЕГО первого порядка $\mathcal{T}_{[P_1P_2]}$ в случае произвольной модификации собственно евклидовой геометрии. Во-первых, полезно рассмотреть наиболее общую модификацию собственно евклидовой геометрии. Во-вторых, если это потребуется, в конце исследования всегда можно уменьшить степень обобщения, наложив дополнительные ограничения.

В собственно евклидовом пространстве n-мерная плоскость (ЕГО n-ого порядка) $n = 1, 2, \ldots$ определяется следующим образом

Определение 1.14 *Метрическое подпространство n-ого порядка $M(\mathcal{P}^n)$ ненулевой длины $|M(\mathcal{P}^n)|^2 = F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0$ определяет трубку n-ого порядка (ЕГО n-ого порядка) $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n)$ с помощью соотношения*

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) \equiv \mathcal{T}_{\mathcal{P}^n} = \left\{P_{n+1} | F_{n+1}\left(\mathcal{P}^{n+1}\right) = 0\right\}, \qquad P_i \in \Omega, \qquad i = 0, 1 \ldots n+1, \tag{1.11}$$

где функция F_n определяется соотношениями (1.6), (1.8)

Трубка n-ого порядка $\mathcal{T}_{\mathcal{P}^n}$, являющаяся аналогом n-мерной евклидовой плоскости может быть построена в любом метрическом пространстве, поскольку ее определение 1.14 σ-имманентно. Трубка может быть определена также в метрическом пространстве, где опущены ограничения (1.3), (1.4), обычно налагаемые на метрику. Мы будем называть такое обобщенное метрическое пространство σ-пространством. Геометрию, порождаемую σ-пространством, будем называть Т-геометрией (трубчатой геометрией).

Определение 1.15 *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ есть непустое множество Ω точек P с заданной на $\Omega \times \Omega$ вещественной функцией σ*

$$\sigma: \quad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(P,P) = 0, \qquad \sigma(P,Q) = \sigma(Q,P) \qquad \forall P, Q \in \Omega. \tag{1.12}$$

Функция σ называется мировой функцией, или σ-функцией. Метрика ρ может быть введена в σ-пространстве с помощью соотношения (1.9). Если σ положительна, метрика ρ тоже положительна, но если σ отрицательна, то метрики мнима.

Определение 1.16 . *Непустое подмножество $\Omega' \subset \Omega$ точек σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ с мировой функцией $\sigma' = \sigma|_{\Omega' \times \Omega'}$, которая является сужением σ на $\Omega' \times \Omega'$, называется σ-подпространством $V' = \{\sigma', \Omega'\}$ σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$.*

Далее мировая функция $\sigma' = \sigma|_{\Omega' \times \Omega'}$, являющаяся сужением σ будет обозначаться посредством σ. Любое σ-подпространство σ-пространства есть σ-пространство.

Определение 1.17 . *σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ называется изометрически вложимым в σ-пространство $V' = \{\sigma', \Omega'\}$, если существует такой мономорфизм $f : \Omega \to \Omega'$, что $\sigma(P, Q) = \sigma'(f(P), f(Q)), \quad \forall P, \forall Q \in \Omega, \quad f(P), f(Q) \in \Omega'$.*

Любое σ-подпространство V' σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ может быть изометрически вложено в него.

Определение 1.18 . *Два σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$ и $V' = \{\sigma', \Omega'\}$ называются изометричными (эквивалентными), если V изометрически вложимо в V', и V' изометрически вложимо в V.*

Определение 1.19 *σ-пространство $M = \{\rho, \Omega\}$ называется конечным σ-пространством, если множество Ω состоит из конечного числа точек.*

Определение 1.20 . *σ-подпространство $M_n(\mathcal{P}^n) = \{\sigma, \mathcal{P}^n\}$ σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$, состоящее из $n+1$ точек $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_1, ..., P_n\}$ называется σ-подпространством n-ого порядка.*

Все геометрические объекты Т-геометрии получаются следующим образом. Геометрические объекты собственно евклидовой геометрии определяются в σ-имманентной форме. Тогда они могут рассматриваться как определения соответствующих геометрических объектов в Т-геометрии. Мировая функция σ собственно евклидова пространства удовлетворяет некоторым σ-имманентным соотношениям, описывающим специальные свойства собственно евклидовой геометрии.

Метрическая сторона этих соотношений была сформулирована и доказана Менгером [5]. Мы приведем этот результат в виде теоремы, используя наши обозначения

Теорема 1.1 *Чтобы σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ было изометрически вложимо в n-мерное евклидово пространство E_n, необходимо и достаточно, чтобы любое σ-подпространство $(n+2)$-ого порядка $M(\mathcal{P}^{n+2}) \subset \Omega$ было изометрически вложимо в E_n.*

К сожалению, формулировка теоремы не является σ-инвариантной, так как содержит ссылку на вложимость в евклидово пространство E_n, σ-инвариантного определения которому не дается. Более конструктивный вариант условий евклидовости σ-пространства формулируется в виде теоремы.

Теорема 1.2 *Чтобы σ-пространство $V = \{\sigma, \Omega\}$ было n-мерным евклидовым пространством, необходимо и достаточно выполнения следующих трех условий.*

I.
$$\exists \mathcal{P}^n \subset \Omega, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_{n+1}(\Omega^{n+2}) = 0, \tag{1.13}$$
II.
$$\sigma(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)[\Gamma(P_0,P_i,P) - \Gamma(P_0,P_i,Q)]$$
$$\times[\Gamma(P_0,P_k,P) - \Gamma(P_0,P_k,Q)], \qquad \forall P,Q \in \Omega, \tag{1.14}$$
где $\Gamma(P_0,P_k,P)$ определяется соотношениями (1.8). Величины $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, $(i,k = 1,2,\ldots n)$ определяются соотношениями
$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}(\mathcal{P}^n) g^{kl}(\mathcal{P}^n) = \delta_i^l, \qquad i,l = 1,2,\ldots n \tag{1.15}$$
где
$$g_{ik}(\mathcal{P}^n) = \Gamma(P_0,P_i,P_k), \qquad i,k = 1,2,\ldots n \tag{1.16}$$
III. Соотношения
$$\Gamma(P_0,P_i,P) = x_i, \qquad x_i \in \mathbb{R}, \qquad P_0,P_i,P \in \Omega, \qquad i = 1,2,\ldots n, \tag{1.17}$$
рассматриваемые как уравнения для определения $P \in \Omega$, всегда имеют одно и только одно решение.

Замечание 1.1 *Для того чтобы евклидово пространство было собственно евклидовым, собственные значения матрицы $g_{ik}(\mathcal{P}^n) = \Gamma(P_0,P_i,P_k)$, $\quad i,k = 1,2,\ldots n$ должны иметь один и тот же знак, в противном случае евклидово пространство будет псевдоевклидовым.*

Замечание 1.2 *Условие (1.13) есть следствие условия (1.14). Оно формулируется в виде отдельного условия для того, чтобы отделить определение размерности от определения системы координат.*

Заметим, что все три условия записаны в σ-имманентной форме. Доказательство теоремы можно найти в [6]. Здесь мы ограничимся тем, что покажем, как исходя из абстрактного σ-пространства, удовлетворяющего условиям I - III теоремы, можно построить традиционное описание собственно евклидового пространства в некоторой прямолинейной системе координат.

Пусть имеется σ-пространство $V = \{\sigma,\Omega\}$, и известно, что выполнены условия I - III теоремы. Тогда σ-пространство евклидово, но его размерность n неизвестна. Чтобы определить размерность n, возьмем две различные точки $P_0, P_1 \in \Omega$, $\; F_1(\mathcal{P}^1) = 2\sigma(P_0,P_1) \neq 0$.

1. Построим трубку первого порядка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^1)$. Если $\mathcal{T}(\mathcal{P}^1) = \Omega$, то размерность σ-пространства V $n = 1$. Тогда $\Omega \backslash \mathcal{T}(\mathcal{P}^1) \neq \emptyset$, и $\; \exists P_2 \in \Omega$, $\; P_2 \notin \mathcal{T}(\mathcal{P}^1)$, и следовательно, $F_2(\mathcal{P}^2) \neq 0$.

2. Построим трубку второго порядка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^2)$. Если $\mathcal{T}(\mathcal{P}^2) = \Omega$, то $n = 2$, в противном случае $\; \exists P_3 \in \Omega$, $\; P_3 \notin \mathcal{T}(\mathcal{P}^2)$ и, следовательно, $F_3(\mathcal{P}^3) \neq 0$.

3. Построим трубку третьего порядка $\mathcal{T}(\mathcal{P}^3)$. Если $\mathcal{T}(\mathcal{P}^3) = \Omega$, то $n = 3$, в противном случае $\exists P_4 \in \Omega, \quad P_4 \notin \mathcal{T}(\mathcal{P}^3)$, и следовательно, $F_4(\mathcal{P}^4) \neq 0$.

4. и так далее.

Продолжая этот процесс, можно определить такие $n+1$ точек $\mathcal{P}^n$, что $\mathcal{T}(\mathcal{P}^n) = \Omega$ и следовательно, условия (1.13) будут выполнены.

Тогда с помощью соотношений

$$x_i(P) = \Gamma(P_0, P_i, P), \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{1.18}$$

можно приписать ковариантные координты $x(P) = \{x_i(P)\}, \quad i = 1, 2, \ldots n$ любой точке $\forall P \in \Omega$. Пусть $x = x(P) \in \mathbb{R}^n$ и $x' = x(P') \in \mathbb{R}^n$. Подставляя $\Gamma(P_0, P_i, P) = x$ и $\Gamma(P_0, P_i, P') = x'_i$ в (1.14), получаем обычное выражение для мировой функции в евклидовом пространстве в прямолинейной системе координат

$$\sigma(P, P') = \sigma_E(x, x') = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(\mathcal{P}^n)\,(x_i - x'_i)\,(x_k - x'_k)\,, \tag{1.19}$$

где $g^{ik}(\mathcal{P}^n)$, определенный соотношениями (1.16) и (1.15), есть контравариантный метрический тензор в этой координатной системе.

Условие III теоремы утверждает, что отображение

$$x:\ \Omega \to \mathbb{R}^n$$

описываемое соотношением (1.18) есть биекция, т.е. для $\forall y \in \mathbb{R}^n$ существует одна и только одна такая точка Q, что $y = x(Q)$.

Таким образом, на основе мировой функции, заданной на абстрактном множестве $\Omega \times \Omega$, можно определить размерность n евклидова пространства, построить прямолинейную систему координат с метрическим тензором $g_{ik}(\mathcal{P}^n) = \Gamma(P_0, P_i, P_k), \qquad i, k = 1, 2, \ldots n$ и описать все геометрические объекты, которые можно описать в терминах координат. В результате евклидово пространство и евклидова геометрия описываются в терминах и только в терминах мировой функции (метрики).

Изменяя мировую функцию собственно евклидова пространства, можно получить другое σ-пространство и другую, неевклидову геометрию. Следует ожидать, что неевклидова геометрия также будет полностью описываться в терминах мировой функции. При этом свойства геометрических объектов неевклидовой геометрии могут оказаться совсем не такими, как в собственно евклидовой геометрии. Например, в евклидовой геометрии $\mathcal{T}_{P_0P_1} \subset \mathcal{T}_{P_0P_1P_2}$, т.е. прямая, проходящая через точки P_0 и P_1 принадлежит любой двумерной плоскости, проходящей через эти точки. Для доказательства этого утверждения приходится использовать соотношения (1.15), поэтому в случае неевклидовой геометрии соотношение $\mathcal{T}_{P_0P_1} \subset \mathcal{T}_{P_0P_1P_2}$, вообще говоря, неверно.

Другой пример. Два цилиндра $\mathcal{C}(P_0, P_1; P)$ и $\mathcal{C}(P_0, P'_1; P)$, $P'_1 \in \mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, $P'_1 \neq P_1$, $P'_1 \neq P_0$, заданные определением 1.8, совпадают в собственно евклидовой геометрии, где точки P_0, P_1 и P_0, P'_1 задают одну и ту же ось цилиндра, так как все они лежат на одной прямой. В случае неевклидовой геометрии $\mathcal{C}(P_0, P_1; P)$ и $\mathcal{C}(P_0, P_1'; P)$ суть два различных геометрических объекта, так как соотношения (1.15), ответственные за совпадение этих геометрических объектов, вообще говоря, не выполняются .

В собственно евклидовой геометрии существует геометрический объект, называемый линией.

Определение 1.21 *Ломаная трубка* $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$ *есть множество связанных сегментов трубки (прямой)* $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$

$$\mathcal{T}_{\mathrm{br}} = \bigcup_i \mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]} \tag{1.20}$$

В собственно евклидовой геометрии непрерывная линия (или кривая) определяется как предел ломаной трубки $\mathcal{T}_{\mathrm{br}}$ при $P_i \to P_{i+1}$, $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. В неевклидовой геометрии существование такого предела проблематично, и эта проблема должна специально исследоваться всякий раз. Гладкая линия в собственно евклидовой геометрии определяется как предел соотношения (1.20) при $P_i \to P_{i+1}$, $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ при условии что $\cos \angle P_{i-1} P_i P_{i+1} \to -1$. Задав сегмент $\mathcal{T}_{[P_i P_{i+1}]}$ с помощью определения 1.10, получаем метрическое определение ломаной трубки (линии) (1.20). Для получения метрического определения непрерывной линии и гладкой линии, нужно перейти к соответствующим пределам в (1.20). В соответствии с этим определением линия есть многоточечный геометрический объект. Этот объект очень сложен, так как его точки задаются независимо, и его задание требует очень большой информации (имеется очень много степеней свободы).

С другой стороны в собственно евклидовой геометрии существует другое (неметрическое) определение непрерывной линии. Непрерывная линия $\mathcal{L}$ определяется как непрерывное отображение

$$L: \ I \to \Omega, \qquad I = [0, 1] \subset \mathbb{R}, \tag{1.21}$$

Строго говоря, геометрическим объектом является множество $\mathcal{L} = L(I) \subset \Omega$ точек σ-пространства $V = \{\sigma, \Omega\}$, а не само отображение (1.21). Однако, поскольку числовое множество I фиксировано, то с некоторыми оговорками можно считать соответствие между отображением L и множеством образов $\mathcal{L} = L(I)$ взаимно однозначным. Это дает возможность маркировать геометрические объекты (как σ-подпространства) с помощью отображений (1.21) и даже отождествлять отображение (1.21) с геометрическим объектом $\mathcal{L}$, называемым кривой (линией).

В собственно евклидовой геометрии определение линии (1.21) согласуется с определением 1.20. Но в неевклидовой геометрии определения (1.21) и (1.20), вообще говоря, не согласуются. Уже в римановой геометрии использование определения (1.21) как одного из основных понятий создает проблемы.

В римановом пространстве мировая функция $\sigma_R(x,x')$ между точками x и x' определяется соотношением

$$\sigma_R(x,x') = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_{[xx']}} \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}\right)^2 \tag{1.22}$$

где $\mathcal{L}_{[xx']}$ означает отрезок геодезической, соединяющей точки x и x'. Будем в σ-имманентном описании геометрии использовать мировую функцию (1.22) вместо евклидовой мировой функции (1.19). В результате мы получим σ-риманову геометрию, и следует ожидать, что риманова и σ-риманова геометрии совпадут, поскольку обе геометрии являются двумя обобщениями собственно евклидовой геометрии, использующими одну и ту же мировую функцию, которая полностью описывает геометрию. На самом деле, риманова и σ-риманова геометрии совпадают, но не во всем. Дело в том, что мировая функция есть фундаментальный объект в σ-римановой геометрии, тогда как она является производным (вторичным) объектом римановой геометрии, где фундаментальными объектами являются бесконечно малое расстояние и кривая (линия).

Линия $\mathcal{L}$, заданная неметрическим определением (1.21), является сложной и фундаментальной структурой римановой геометрии, которая отсутствует в такой форме в σ-римановой геометрии. Непрерывная линия $\mathcal{L}$ в σ-римановой геометрии может быть определена как предел ломаной трубки (1.20). Но это производный (а не фундаментальный) геометрический объект.

В целом ситуация выглядит так. σ-риманова геометрия строится σ-имманентно, т.е. на основе метрики и не нуждается в неметрическом определении (1.21). Риманова геометрия строится на основе бесконечно малой метрики $dS = \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$ (которая совпадает с бесконечно малой метрикой σ-римановой геометрии) и использует неметрическое определение линии (1.21) для построения конечной метрики. В результате конечные метрики обеих геометрий совпадают, но только для всей области $D = \Omega$, где определены обе геометрии. Если рассмотреть σ-риманову и риманову геометрии в некоторой подобласти $D' \subset D$, то конечные метрики определяются в D' различно для каждой из этих геометрий. Для σ-римановой геометрии конечная метрика в D' определяется как сужение конечной метрики в D, тогда как для римановой геометрии конечная метрика определяется на основе системы геодезических внутри D', которая, вообще говоря, не совпадает с системой геодезических в D, потому что геодезический сегмент $\mathcal{L}_{[xx']}$, определяющий $\sigma_R(x,x')$ есть протяженный геометрический объект, зависящий от формы подобласти D', где определяется риманова геометрия. В результате конечные метрики обеих геометрий могут быть различны в $D' \subset D$, хотя они совпадают в D.

Заметим еще, что неметрическое определение линии (1.21) требует дополнительных ограничений для того, чтобы стать достаточно определенным. Обсудим эти проблемы.

2 Риманово пространство и проблема выпуклости

Риманово пространство и риманова геометрия вводятся следующим образом. n-мерное риманово пространство может быть получено в результате обобщения описания n-мерного собственно евклидова пространства в общековариантной форме. В самом деле, n-мерное евклидово пространство $E_n = \{\mathbf{g}_E, K, \mathbb{R}^n\}$ описывается с помощью бесконечно малого расстояния записанного в прямолинейной системе координат K

$$dS^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \qquad g_{ik} = \text{diag}\,\{1, 1, ...1\}, \qquad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{2.1}$$

$\mathbf{g}_E$ означает матрицу $g_{ik}= \text{diag}\,\{1, 1, ...1\}$ метрического тензора. В произвольной криволинейной системе координат $\tilde{K}$ то же самое расстояние имеет вид

$$dS^2 = \tilde{g}_{ik}\,(\tilde{x})\,d\tilde{x}^i d\tilde{x}^k, \qquad \det \tilde{g}_{ik} \neq 0, \tag{2.2}$$

Здесь $\tilde{g}_{ik}\,(x)$ ограничено условием

$$\tilde{g}_{ik}\,(x) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_l\,(x)}{\partial x^i} \frac{\partial f_l\,(x)}{\partial x^k}, \tag{2.3}$$

где $f_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad l = 1, 2, \ldots n$ суть n функций, стесненных одним условием $\det ||\partial f_i / \partial x^k|| \neq 0, \quad i, k = 1, 2, ...n$. Если $\tilde{g}_{ik}\,(x)$ не удовлетворяет соотношению (2.3), то пространство перестает быть евклидовым и становится римановым пространством $R_n = \left\{\tilde{\mathbf{g}}, \tilde{K}, \mathbb{R}^n\right\}$. Ограничение (2.3) есть условие евклидовости пространства.

При устранении (2.3) получается риманово пространство $R_n = \{\mathbf{g}, K, \mathbb{R}^n\}$, которое определяется видом метрического тензора $g_{ik}(x)$. Мировая функция определяется соотношением (1.22), где $\mathcal{L}_{[xx']} \subset \mathbb{R}^n$ есть сегмент геодезической $\mathcal{L}_{xx'} \subset \mathbb{R}^n$. Эта геодезическая является экстремалью выражения (1.22), рассматриваемого как функционал от кривой $\mathcal{L}: \; x = x(\tau)$, записанный в виде

$$\sigma[x(\tau)] = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{L}} \sqrt{g_{ik}(x) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau}} d\tau \right)^2 \tag{2.4}$$

Геодезическая $\mathcal{L}_{xx'}: \; x = x(\tau)$ описывается уравнениями

$$\mathcal{L}_{xx'}: \qquad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n \tag{2.5}$$

где

$$\gamma^i_{kl} = \gamma^i_{kl}(x) = \frac{1}{2} g^{ij} \left(g_{kj,l} + g_{lj,k} - g_{kl,j} \right) \tag{2.6}$$

есть символ Кристоффеля, а запятая перед индексом l означает диференцирование по x^l.

В частности, если g_{ik} =const, $i,k = 1,2,\ldots n$, $g = \det ||g_{ik}|| \neq 0$, мировая функция описывается соотношением (1.19), и риманово пространство $R_n = \{\mathbf{g}, K, \mathbb{R}^n\}$ есть евклидово пространство. Рассмотрим теперь риманово пространство $R_n = \{\mathbf{g}_E, K, D\}$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ есть некоторая область евклидова пространства $E_n = \{\mathbf{g}_E, K, \mathbb{R}^n\}$. Если область D выпукла, т.е. любой сегмент $\mathcal{L}_{[xx']}$ прямой $\mathcal{L}_{xx'}$, связывающей точки $x, x' \in D$, принадлежит D ($\mathcal{L}_{[xx']} \subset D$), то мировая функция риманова пространства $R_n = \{\mathbf{g}_E, K, D\}$ имеет вид (1.19), и риманово пространство $R_n = \{\mathbf{g}_E, K, D\}$ может быть изометрически вложено в евклидово пространство $E_n = \{\mathbf{g}_E, K, \mathbb{R}^n\}$.

Если область D не выпукла, то система геодезических $R_n = \{\mathbf{g}_E, K, D\}$ не есть система прямых, и мировая функция (1.22) не описывается выражением (1.19).

Пример. Рассмотрим двумерное собственно евклидово пространство и прямолинейную ортогональную систему координат на нем. Рассмотрим область $D:\ (x^1)^2 + (x^2)^2 \geq 1$. Геодезические риманова пространства $R'_2 = \{\mathbf{g}_E, K, D\}$ имеют вид представленный на рисунке 1. После вырезания отверстия в евклидовой плоскости форма и длина геодезического сегмента между точками P и P' изменится. Мировая функция $\sigma(P, P')$ между точками P и P' изменится тоже, и часть $R'_2 = \{\mathbf{g}_E, K, D\}$ евклидовой плоскости $R_2 = \{\mathbf{g}_E, K, \mathbb{R}^2\}$ перестанет быть изометрически вложимой в $R_2 = \{\mathbf{g}_E, K, \mathbb{R}^2\}$. Кажется довольно странным, когда одна (невыпуклая) часть евклидовой плоскости не может быть изометрически вложена в евклидову плоскость, в то время как другая (выпуклая) – может.

Проблема выпуклости оказывается довольно серьезной, и большинство геометров предпочитают обойти эту проблему, рассматривая только выпуклые области [4]. В Т-геометрии нет проблемы выпуклости. В самом деле, в соответствии с определением 1.16 любое подмножество точек σ-пространства всегда изометрчески вложимо в σ-пространство. С точки зрения Т-геометрии отверстие в евклидовой плоскости $R_2 = \{\mathbf{g}_E, K, \mathbb{R}^2\}$ не может изменить форму геодезических (ЕГО первого порядка). Оно приводит только к дырам в геодезических, делая их разрывными. Непрерывность есть свойство координатной системы, используемой в римановой геометрии в качестве основного инструмента описания. С точки зрения Т-геометрии проблема выпуклости – это искуственная проблема. Настаивая на непрерывности геодезических, мы переоцениваем значение непрерывности для геометрии и приписываем непрерывность геодезических (ЕГО первого порядка) любой римановой геометрии, тогда как непрерывность геодезических есть специальное свойство собственно евклидовой геометрии.

3 Риманова геометрия и одномерность трубки первого порядка

Рассмотрим n-мерное псевдоевклидово пространство $E_n = \{\mathbf{g}_1, K, \mathbb{R}^n\}$ индекса $1, \mathbf{g}_1 = \mathrm{diag}\{1, -1, -1 \ldots -1\}$ как разновидность n-мерного риманова пространства[3]. Мировая функция определяется соотношением (1.19)

$$\sigma_1(x, x') = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} (x_i - x'_i)(x_k - x'_k), \qquad g^{ik} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1 \ldots -1\} \quad (3.1)$$

Геодезическая $\mathcal{L}_{yy'}$ есть прямая линия, и она рассматривается в псевдоримановой геометрии как ЕГО первого порядка, определяемый двумя точками y и y'.

$$\mathcal{L}_{yy'}: \quad x^i = \left(y^i - y'^i\right)\tau, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \qquad \tau \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

Геодезическая $\mathcal{L}_{yy'}$ называется времениподобной, если $\sigma_1(y, y') > 0$, она называется пространственноподобной, если $\sigma_1(y, y') < 0$. Геодезическая $\mathcal{L}_{yy'}$ называется изотропной, если $\sigma_1(y, y') = 0$.

Псевдоевклидово пространство $E_n = \{\mathbf{g}_1, K, \mathbb{R}^n\}$ порождает σ-пространство $V = \{\sigma_1, \mathbb{R}^n\}$, где мировая функция σ_1 определяется соотношением (3.1). Трубка первого порядка (ЕГО) $\mathcal{T}(x, x')$ в σ-римановом пространстве $V = \{\sigma_1, \mathbb{R}^n\}$ определяется соотношением (1.11)

$$\mathcal{T}(x, x') \equiv \mathcal{T}_{xx'} = \{r | F_2(x, x', r) = 0\}, \qquad \sigma_1(x, x') \neq 0, \qquad x, x', r \in \mathbb{R}^n, \quad (3.3)$$

$$F_2(x, x', r) = \begin{vmatrix} (x'_i - x_i)(x'^i - x^i) & (x'_i - x_i)(r^i - x^i) \\ (r_i - x_i)(x'^i - x^i) & (r_i - x_i)(r^i - x^i) \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

Решение уравнений (3.3), (3.4) дает следующий результат

$$\mathcal{T}_{xx'} = \left\{ r \left| \bigcup_{y \in \mathbb{R}^n} \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} r = (x' - x)\tau + y - x \wedge \Gamma(x, x', y) = 0 \wedge \Gamma(x, y, y) = 0 \right. \right\}, \quad (3.5)$$

$$x, x', y, r \in \mathbb{R}^n,$$

где $\Gamma(x, x', y) = (x'_i - x_i)(y^i - x^i)$ есть скалярное произведение векторов $\overrightarrow{xy}$ и $\overrightarrow{xx'}$ определенное соотношением (1.8). В случае времениподобного вектора $\overrightarrow{xx'}$, когда $\sigma_1(x, x') > 0$, имеется единственный изотропный вектор $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xx} = \overrightarrow{0}$, который ортогонален вектору $\overrightarrow{xx'}$. В этом случае $(n-1)$-мерная поверхность $\mathcal{T}_{xx'}$ вырождается в одномерную прямую

$$\mathcal{T}_{xx'} = \left\{ r \left| \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} r = (x' - x)\tau \right. \right\}, \qquad \sigma_1(x, x') > 0, \qquad x, x', r \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

---

[3]Термин "риманово пространство" рассматривается как собирательное понятие по отношению к понятиям "собственно риманово" и "псевдориманово". Матрица $\mathbf{g}$ метрического тензора имеет собственные значения одного знака в случае собственно риманова пространства и различных знаков в случае псевдориманова пространства.

Таким образом, для времениподобного вектора $\overrightarrow{xx'}$ трубка первого порядка $\mathcal{T}_{xx'}$ совпадает с геодезической $\mathcal{L}_{xx'}$. В случае пространственноподобного вектора $\overrightarrow{xx'}$ трубка $\mathcal{T}_{xx'}$ есть $(n-1)$-мерная поверхность, содержащая одномерную геодезическую $\mathcal{L}_{xx'}$ псевдоевклидова пространства $E_n = \{\mathbf{g}_1, K, \mathbb{R}^n\}$.

Возникает вопрос, в чем причина такого различия и какое из двух обобщений собственно евклидовой геометрии более правильно. Заметим, что четырехмерная псевдоевклидова геометрия индекса 1 используется для описания реального пространства-времени. Можно попробовать разрешить проблему с экспериментальной точки зрения. Свободные классические частицы описываются времениподобными прямыми линиями. В этом пункте псевдоевклидова геометрия и σ-псевдоевклидова геометрия (Т-геометрия) дают один и тот же результат. Считается, что пространственноподобные прямые описывают частицы, движущиеся со сверхсветовой скоростью (так называемые тахионы). Попытки экспериментального обнаружения тахионов привели к отрицательному результату. Разумеется, при попытках обнаружить тахионы, они рассматривались как описываемые пространственноподобными прямыми. С другой стороны, физики считают, что все, что не противоречит законам природы, должно существовать и может быть обнаружено. С этой точки зрения неудача обнаружения тахионов в виде пространственноподобных линий свидетельствует в пользу тахионов в виде трехмерных поверхностей.

Для интерпретации структуры множества (3.5), описывающего трубку первого порядка, примем во внимание, что трубка нулевого порядка $\mathcal{T}_x$, определяемая точкой x в σ-псевдоевклидовом пространстве, есть световой конус с вершиной в точке x (а не точка x). Практически, трубка первого порядка состоит из таких сечений светового конусов с их вершинами $y \in \mathcal{L}_{xx'}$, что все векторы $\overrightarrow{yr}$ этого сечения ортогональны вектору $\overrightarrow{xx'}$. Иначе говоря, трубка первого порядка $\mathcal{T}_{xx'}$ состоит из сечений трубок нулевого порядка $\mathcal{T}_y$ в точке y, ортогональных к $\overrightarrow{xx'}$, с $y \in \mathcal{L}_{xx'}$. Для времениподобных $\overrightarrow{xx'}$ это сечение состоит из одной точки, но для пространственноподобных $\overrightarrow{xx'}$ – это двумерные сечения светового конуса.

4 Коллинеарность в римановой и σ-римановой геометрии

Вернемся к риманову пространству $R_n = \{\mathbf{g}, K, D\}$, $\quad D \subset \mathbb{R}^n$, которое порождает мировую функцию $\sigma(x, x')$, определенную соотношением (1.22). Тогда появляется σ-пространство $V = \{\sigma, D\}$, которое мы будем называть σ-римановым пространством. Мы собираемся сравнить понятие коллинерности (параллелизма) в этих двух геометриях.

Мировая функция $\sigma = \sigma(x, x')$ обоих (σ-риманова и риманова) пространств удовлетворяет системе уравнений [7] (см также [8, 9])

$$\begin{array}{llll} (1) & \sigma_l \sigma^{lj'} \sigma_{j'} = 2\sigma & (4) & \det \parallel \sigma_{i||k} \parallel \neq 0 \\ (2) & \sigma(x,x') = \sigma(x',x) & (5) & \det \parallel \sigma_{ik'} \parallel \neq 0 \\ (3) & \sigma(x,x) = 0 & (6) & \sigma_{i||k||l} = 0 \end{array} \tag{4.1}$$

где использованы следующие обозначения

$$\sigma_i \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x^i}, \qquad \sigma_{i'} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x'^i}, \qquad \sigma_{ik'} \equiv \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x'^k}, \qquad \sigma^{ik'} \sigma_{lk'} = \delta_l^i$$

Здесь штрихованный индекс относится к точке x', а нештрихованный – к точке x. Две вертикальные параллельные черточки означают ковариантную производную $\tilde{\nabla}_i^{x'}$ по x^i с символом Кристоффеля

$$\Gamma_{kl}^i \equiv \Gamma_{kl}^i (x,x') \equiv \sigma^{is'} \sigma_{kls'}, \qquad \sigma_{kls'} \equiv \frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^k \partial x^l \partial x'^s}$$

Например,

$$G_{ik} \equiv G_{ik}(x,x') \equiv \sigma_{i||k} \equiv \frac{\partial \sigma_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l (x,x') \sigma_l \equiv \frac{\partial \sigma_i}{\partial x^k} - \sigma_{iks'} \sigma^{ls'} \sigma_l \tag{4.2}$$

$$G_{ik||l} \equiv \frac{\partial G_{ik}}{\partial x^l} - \sigma_{ils'} \sigma^{js'} G_{jk} - \sigma_{kls'} \sigma^{js'} G_{ij}$$

По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n. Ковариантная производная $\tilde{\nabla}_i^{x'}$ по x^i с символом Кристоффеля $\Gamma_{kl}^i (x,x')$ действует только на нештихованные индексы. Она называется касательной производной, потому что она представляет собой ковариантную производную в евклидовом пространстве $E_{x'}$, которое касается риманова пространства R_n в точке x'. Ковариантная производная $\tilde{\nabla}_{i'}^{x}$ по x'^i с символом Кристоффеля $\Gamma_{k'l'}^{i'} (x,x')$ действует только на точку x' и на штрихованные индексы. Это – ковариантная производная в евклидовом пространстве E_x, которое касается σ-риманова пространства V в точке x [7].

Вообще, мировая функция σ осуществляет геодезическое отображение $G_{x'}: R_n \to E_{x'}$ риманова пространства $R_n = \{\mathbf{g}, K, D\}$ на евклидово пространство $E_{x'} = \{\mathbf{g}, K_{x'}, D\}$, касательное к $R_n = \{\mathbf{g}, K, D\}$ в точке x' [7]. Это отображение преобразует систему координат K в пространстве R_n в систему координат $K_{x'}$ в пространстве $E_{x'}$. Отображение является геодезическим в том смысле, что оно сохраняет длины сегментов всех геодезических, проходящих через точку касания x', и углы между геодезическими в точке касания.

Тензор G_{ik}, определенный соотношением (4.2) является метрическим тензором в точке x в касательном евклидовом пространстве $E_{x'}$. Коварантные производные $\tilde{\nabla}_i^{x'}$ и $\tilde{\nabla}_k^{x'}$ коммутируют как ковариантные производные в плоском пространстве $E_{x'}$, т.е. $(\tilde{\nabla}_i^{x'} \tilde{\nabla}_k^{x'} - \tilde{\nabla}_k^{x'} \tilde{\nabla}_i^{x'}) A_{ls} \equiv 0$, для любого двухточечного тензора A_{ls} [7].

Система уравнений (4.1) содержит только мировую функцию σ и ее производные. Тем не менее система уравнений (4.1) не является σ-имманентной, так как она содержит ссылку на систему координат. Она не содержит явно метрического тензора, и справедлива для любого риманова пространства $R_n = \{\mathbf{g}, K, D\}$. Все соотношения, выписанные выше, верны также для σ-риманова пространства $V = \{\sigma, D\}$, при условии что мировая функция σ связана с метрическим тензором соотношением (1.22).

σ-имманентное выражение для скалярного произведения $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в собственно евклидовом пространстве имеет вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) \equiv \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(Q_0, P_1) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1). \tag{4.3}$$

Это соотношение легко доказать следующим образом.

В собственно евклидовом пространстве три вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1$, и $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1$ связаны соотншением

$$\mid \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 \mid^2 = \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid^2 = \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid^2 + \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 \mid^2 - 2(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1), \tag{4.4}$$

где $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1)$ означает скалярное произведение двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1$ в собственно евклдовом пространстве. Из (4.4) следует

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1) = \frac{1}{2}\{\mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 \mid^2 + \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid^2 - \mid \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 \mid^2\}. \tag{4.5}$$

Заменяя в (4.5) точку Q_1 точкой Q_0, получаем

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0) = \frac{1}{2}\{\mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 \mid^2 + \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mid^2 - \mid \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_0 \mid^2\}. \tag{4.6}$$

Вычитая (4.6) из (4.5) и используя свойства скалярного произведения в евклидовом пространстве, получаем

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \frac{1}{2}\{\mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 \mid^2 + \mid \mathbf{Q}_0\mathbf{P}_1 \mid^2 - \mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_0 \mid^2 - \mid \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 \mid^2\}. \tag{4.7}$$

Принимая во внимание, что $\mid \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 \mid^2 = 2\sigma(P_0, Q_1)$, получаем соотношение (4.3) из соотношения (4.7).

Два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ коллинеарны $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 || \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ (параллельны или антипараллельны), если $\cos^2\theta = 1$, где θ есть угол между векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$. Принимая во внимание, что

$$\cos^2\theta = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)^2}{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)} = \frac{(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)^2}{|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2}, \tag{4.8}$$

получаем следующее σ-имманентное условие коллинеарности двух векторов

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 || \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 : \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)^2 = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2. \tag{4.9}$$

Условие коллинеарности (4.9) является σ-имманентным, потому что с помощью (4.3) оно может быть записано в терминах только σ-функции. Итак, соотношения (4.9), (4.3) описывают коллинеарность векторов в случае произвольного σ-пространства.

Запишем это соотношение для случая σ-римановой геометрии. Пусть координаты точек P_0, P_1, Q_0, Q_1 будут соответственно координаты x, $x+dx$, x', $x'+dx'$. Тогда подставляя это в (4.3) и разлагая по dx и dx', получаем

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) \quad \equiv \quad & \sigma\left(x, x'+dx'\right)+\sigma\left(x', x+dx\right)-\sigma\left(x, x'\right)-\sigma\left(x+dx, x'+dx'\right)= \\ & \sigma+\sigma_{l'}dx'^{l'}+\frac{1}{2}\sigma_{l',s'}dx'^{l'}dx'^{s'}+\sigma+\sigma_i dx^i+\frac{1}{2}\sigma_{i,k}dx^i dx^k-\sigma \\ & -\sigma-\sigma_i dx^i-\sigma_{l'}dx'^{l'}-\frac{1}{2}\sigma_{i,k}dx^i dx^k-\sigma_{i,l'}dx^i dx'^{l'}-\frac{1}{2}\sigma_{l',s'}dx'^{l'}dx'^{s'}\end{aligned}$$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)=-\sigma_{i,l'}dx^i dx'^{l'}=-\sigma_{il'}dx^i dx'^{l'}. \tag{4.10}$$

Здесь запятая означает дифференцирование. Например, $\sigma_{i,k}\equiv\partial\sigma_i/\partial x^k$. Получаем для $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2$ и $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2=g_{ik}dx^i dx^k, \qquad |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|^2=g_{l's'}dx'^{l'}dx'^{s'}, \tag{4.11}$$

где $g_{ik}=g_{ik}(x)$ и $g_{l's'}=g_{l's'}(x')$. Тогда условие коллинеарности (4.9) записывается в виде

$$\left(\sigma_{il'}\sigma_{ks'}-g_{ik}g_{l's'}\right)dx^i dx^k dx'^{l'}dx'^{s'}=0. \tag{4.12}$$

Примем во внимание, что в римановом пространстве метрический тензор $g_{l's'}$ в точке x' может быть выражен [7] через мировую функцию σ точек x, x' с помощью соотношения

$$g_{l's'}=\sigma_{il'}G^{ik}\sigma_{ks'}, \qquad g^{l's'}=\sigma^{il'}G_{ik}\sigma^{ks'}, \tag{4.13}$$

где тензор G_{ik} определяется соотношением (4.2), и G^{ik} определяется соотношением

$$G^{il}G_{lk}=\delta_k^i. \tag{4.14}$$

Подставляя первое соотношение (4.2) в (4.12) и используя обозначение

$$u_i=-\sigma_{il'}dx'^{l'}, \qquad u^i=G^{ik}u_k=-\sigma^{il'}g_{l's'}dx^{s'}, \tag{4.15}$$

получаем

$$\left(\delta_i^l\delta_k^s-g_{ik}G^{ls}\right)u_l u_s dx^i dx^k=0. \tag{4.16}$$

Вектор u_i есть вектор $dx'_{i'}=g_{i'k'}dx'^{k'}$, перенесенный параллельно из точки x' в точку x в евклидовом пространстве $E_{x'}$, касательном к риманову пространству R_n. В самом деле,

$$u_i=-\sigma_{il'}g^{l's'}dx'_s, \qquad \tilde{\nabla}_k^{x'}\left(-\sigma_{il'}g^{l's'}\right)\equiv 0, \qquad i,k=1,2,\ldots n \tag{4.17}$$

и тензор $-\sigma_{il'}g^{l's'}$ есть оператор параллельного переноса в $E_{x'}$, потому что $\left[-\sigma_{il'}g^{l's'}\right]_{x=x'} = \delta_{i'}^{s'}$ и касательная производная от этого оператора тождественно равна нулю. По той же причине $G^{ik} = \sigma^{il'}g_{l's'}\sigma^{ks'}$ есть контравариантный метрический тензор в $E_{x'}$, $\left(\tilde{\nabla}_s^{x'}(\sigma^{il'}g_{l's'}\sigma^{ks'}) \equiv 0\right)$ в точке x.

Соотношение (4.16) содержит только векторы в точке x. При фиксированном $u_i = -\sigma_{il'}dx'^{l'}$ оно описывает конус коллинеарности, т.е. конус бесконечно малых векторов dx^i в точке x праллельных вектору $dx'^{i'}$ в точке x'. При некоторых условиях конус коллинеарности может вырождаться в линию. В этом случае имеется только одно направление, параллельное фиксировнному вектору u^i. Исследуем, когда возникает эта ситуация.

В точке x два метрических тензора g_{ik} и G_{ik} связаны соотношением [7]

$$G_{ik}(x,x') = g_{ik}(x) + \int\limits_x^{x'} F_{ikj''s''}(x,x'')\sigma^{j''}(x,x'')dx''^{s''}, \tag{4.18}$$

где в соответствии с [7]

$$\sigma^{i'} = \sigma^{li'}\sigma_l = G^{l'i'}\sigma_{l'} = g^{l'i'}\sigma_{l'}. \tag{4.19}$$

Результат интегрирования не зависит от пути, так как оно производится в евклидовом пространстве $E_{x'}$. Двухточечный тензор $F_{ilk'j'} = F_{ilk'j'}(x,x')$ есть двухточечный тензор кривизны, определенный соотношением

$$F_{ilk'j'} = \sigma_{ilj'||k'} = \sigma_{ilj',k'} - \sigma_{sj'k'}\sigma^{sm'}\sigma_{ilm'} = \sigma_{i|l||k'||j'}, \tag{4.20}$$

где одна верткальная черта означает обычную ковариантную производную, а две черты означают касательную производную. Двухточечный тензор кривизны $F_{ilk'j'}$ имеет следующие свойства симметрии

$$F_{ilk'j'} = F_{lik'j'} = F_{ilj'k'}, \qquad F_{ilk'j'}(x,x') = F_{k'j'il}(x',x). \tag{4.21}$$

Он связан с одноточечным тензором кривизны Римана–Кристоффеля r_{iljk} с помощью соотношений

$$r_{iljk} = \left[F_{ikj'l'} - F_{ijk'l'}\right]_{x'=x} = f_{ikjl} - f_{ijkl}, \qquad f_{iklj} = \left[F_{ikj'l'}\right]_{x'=x} ю \tag{4.22}$$

В евклидовом пространстве двухточечный тензор кривизны $F_{ilk'j'}$ обращается в нуль так же как тензор кривизны Римана–Кристоффеля r_{iljk}.

Введем обозначение

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ik}(x,x') = \int\limits_x^{x'} F_{ikj''s''}(x,x'')\sigma^{j''}(x,x'')dx''^{s''} \tag{4.23}$$

и выберем геодезическую $\mathcal{L}_{xx'}$ в качестве пути интегрирования. Он описывается соотношением

$$\sigma_i(x,x'') = \tau\sigma_i(x,x')б \tag{4.24}$$

которое определяет x'' как функцию параметра τ. Дифференцируя по τ, получаем

$$\sigma_{ik''}(x,x'')dx''^{k''} = \sigma_i(x,x')d\tau ю \tag{4.25}$$

Разрешая уравнения (4.25) относительно dx'' и подставляя в (4.23), получаем

$$\Delta_{ik}(x,x') = \sigma_l(x,x')\sigma_p(x,x') \int\limits_0^1 F_{ikj''s''}(x,x'')\sigma^{lj''}(x,x'')\sigma^{ps''}(x,x'')\tau d\tau ю \tag{4.26}$$

Положим

$$F_{ik}^{..lp}(x,x') = F_{ikj's'}(x,x')\sigma^{lj'}(x,x')\sigma^{ps'}(x,x'), \tag{4.27}$$

тогда

$$G_{ik}(x,x') = g_{ik}(x) + \Delta_{ik}(x,x'), \tag{4.28}$$

$$\Delta_{ik}(x,x') = \sigma_l(x,x')\sigma_p(x,x') \int\limits_0^1 F_{ik}^{..lp}(x,x'')\tau d\tau, \tag{4.29}$$

где x'' есть функция τ, вид которой определяется из (4.24). Подставляя g_{ik} из (4.28) в (4.16), получаем

$$\left[\delta_i^l\delta_k^s - G^{ls}\left(G_{ik} - \Delta_{ik}\right)\right] u_l u_s dx^i dx^k = 0. \tag{4.30}$$

Будем искать решение уравнения в виде разложения

$$dx^i = \alpha u^i + v^i, \qquad G_{ik}u^i v^k = 0. \tag{4.31}$$

Подставляя (4.31) в (4.30), получаем уравнение для v^i

$$G_{ls}u^l u^s \left[G_{ik}v^i v^k - \Delta_{ik}\left(\alpha u^i + v^i\right)\left(\alpha u^k + v^k\right)\right] = 0. \tag{4.32}$$

Если σ-риманово пространство $V = \{\sigma, D\}$ есть σ-евклидово, то как это следует из (4.29) $\Delta_{ik} = 0$. Если $V = \{\sigma, D\}$ есть собственно σ-евклидово пространство, то $G_{ls}u^l u^s \neq 0$, и мы получаем два уравнения для определения v^i

$$G_{ik}v^i v^k = 0, \qquad G_{ik}u^i v^k = 0. \tag{4.33}$$

Их единственное решение

$$v^i = 0, \qquad dx^i = \alpha u^i, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{4.34}$$

где α есть произвольная постоянная, является решением уравнения (4.30). В собственно евклидовом пространстве конус коллинеарности всегда вырождается в линию.

Пусть теперь пространство $V = \{\sigma, D\}$ является σ-псевдоевклидовым пространством индекса 1, и вектор u^i времениподобный, т.е. $G_{ik}u^i u^k > 0$. Тогда уравнения (4.33) также имеют решение (4.34). Если вектор u^i пространственно-подобный, $G_{ik}u^iu^k < 0$, то два уравнения (4.33) имеют нетривиальное решение, и конус коллинеарности не вырождается в линию. Конус коллинеарности есть сечение светового конуса $G_{ik}v^iv^k = 0$ плоскостью $G_{ik}u^iv^k = 0$. Если вектор u^i изотропный, $G_{ik}u^iu^k = 0$, то уравнение (4.32) приводится к виду

$$G_{ik}u^iu^k = 0, \qquad G_{ik}u^iv^k = 0. \tag{4.35}$$

В этом случае (4.34) есть решение, но кроме него имеются пространственно-подобные векторы v^i которые ортогональны изотропному вектору u^i и конус коллинеарности не вырождается в линию.

В случае собственно σ-риманова пространства $G_{ik}u^iu^k > 0$, уравнение (4.32) приводится к виду

$$G_{ik}v^iv^k - \Delta_{ik}\left(\alpha u^i + v^i\right)\left(\alpha u^k + v^k\right) = 0. \tag{4.36}$$

В этом случае, вообще говоря, $\Delta_{ik} \neq 0$ и конус коллинеарности не вырождается. Δ_{ik} зависит от кривизны и от расстояния между точками x и x'. Чем больше кривизна пространства и расстояние $\rho(x, x')$, тем больше апертура конуса коллинеарности.

В кривом собственно σ-римановом пространстве существует интересный частный случай, когда конус коллинеарности вырождается. В любом σ-римановом пространстве выполнено следующее равенство [7]

$$G_{ik}\sigma^k = g_{ik}\sigma^k, \qquad \sigma^k \equiv g^{kl}\sigma_l. \tag{4.37}$$

Тогда из (4.28) следует, что

$$\Delta_{ik}\sigma^k = 0. \tag{4.38}$$

Это означает, что в случае, когда вектор u^i направлен вдоль геодезической, соединяющей точки x и x', т.е. $u^i = \beta\sigma^i$, уравнение (4.36) приводится к виду

$$\left(G_{ik} - \Delta_{ik}\right)v^iv^k = 0, \qquad u^i = \beta\sigma^i. \tag{4.39}$$

Если Δ_{ik} достаточно мало по сравнению с G_{ik}, то собственные значения матрицы $G_{ik} - \Delta_{ik}$ имеют один и тот же знак, что и собственные значения матрицы G_{ik}. В этом случае уравнение (4.39) имеет только решение (4.34), и конус коллинеарности вырождается в линию.

5 Обсуждение

Итак, мы видим, что в σ-римановой геометрии в точке x имеется много векторов, параллельных данному в точке x' вектору. Это множество коллинеарных векторов описывается конусом коллинеарности. Вырождение конуса коллинеарности в линию, когда есть только одно направление параллельное данному, является скорее исключением, чем правилом, хотя в собственно евклидовой геометрии это вырождение всегда присутствует. Неоднородность пространства разрушает вырождение конуса коллинеарности. В собственно римановой геометрии, где мировая функция удовлетворяет системе (4.1), удается сохранить это вырождение для направлений вдоль геодезической, соединяющей точки x и x'. Это обстоятельство очень важно для вырождения ЕГО первого порядка в геодезическую, потому что вырождение ЕГО тесно связано с вырождением конуса коллинеарности.

В самом деле, определение трубки первого порядка (1.11), или (3.3) может быть также записано в виде

$$\mathcal{T}\left(\mathcal{P}^1\right) \equiv \mathcal{T}_{P_0P_1} = \left\{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{P}_0\mathbf{R}\right\}, \qquad P_0, P_1, R \in \Omega, \tag{5.1}$$

где коллинеарность $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{R}$ определяется σ-имманентным соотношением (4.9), которое можно записать в форме

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{P}_0\mathbf{R}: \quad F_2\left(P_0, P_1, R\right) = \left| \begin{array}{cc} (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) \\ (\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) & (\mathbf{P}_0\mathbf{R}.\mathbf{P}_0\mathbf{R}) \end{array} \right| = 0. \tag{5.2}$$

Вид (5.1) определения трубки первого порядка позволяет определить трубку первого порядка $\mathcal{T}(P_0, P_1; Q_0)$, проходящую через точку Q_0 коллинеарно данному вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Это определение имеет σ-имманентный вид

$$\mathcal{T}(P_0, P_1; Q_0) = \left\{R \mid \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{Q}_0\mathbf{R}\right\}, \qquad P_0, P_1, Q_0, R \in \Omega, \tag{5.3}$$

где коллинеарность $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1||\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{R}$ определяется σ-имманентными соотношениями (4.9), (4.7). В собственно евклидовом пространстве трубка (5.3) вырождается в прямую, проходящую через точку Q_0 коллинеарно данному вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Определим множество $\omega_{Q_0} = \{\mathbf{Q}_0\mathbf{Q})|Q \in \Omega\}$ векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$. Тогда

$$\mathcal{K}(P_0, P_1; Q_0) = \{\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}|Q \in \mathcal{T}(P_0, P_1; Q_0)\} \subset \omega_{Q_0} \tag{5.4}$$

есть конус коллинеарности векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}$, коллинеарных вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Итак, одномерность трубок первого порядка и вырождение конуса коллинеарности связанные явления.

В римановой геометрии очень специальное свойство собственно евклидовой геометрии (вырождение конуса коллинеарности) рассматривается как свойство любой геометрии и распространяется на случай римановой геометрии. Линия $\mathcal{L}$, определенная как непрерывное отображение (1.21) рассматривается как самый важный геометрический объект. Этот объект считается более важным, чем метрика, и метрика в римановой геометрии определяется в терминах кратчайших линий.

Использование неметрического определения линии как важнейшего понятия геометрии неадекватно описанию геометрии и порождает проблемы, которые оказываются искусственными. Например, проблема выпуклости, когда удаление части точек пространства, порождает изменение свойств других областей, есть результат определения метрики через понятие линии. Хотя, выбирая мировую функцию надлежащим образом (удовлетворение уравнений (4.1)), удается сохранить вырождение конуса коллинеарности для геодезических линий, но для далеких точек x и x' конус коллинеарности все же не вырождается, и в римановой геометрии нет абсолютного параллелизма. Вместо конуса коллинеарности вводится понятие параллельного переноса вектора, где результат переноса зависит от пути переноса. Практически это означает, что из конуса векторов выбирается какой-то один вектор, который связывается с некоторой кривой, соединяющей точки x и x'.

Будучи частным случаем Т-геометрии, σ-риманова геометрия, вообще, не использует неметрическое определение линии. Здесь линия есть геометрический объект, характерный для собственно евклидовой геометрии, где линия есть результат вырождения конуса коллинеарности. В Т-геометрии вместо фундаментального непрерывного отображения (1.21) используется другое фундаментальное отображение

$$m_n: \quad I_n \to \Omega, \qquad I_n = \{0, 1, \dots n\} \subset \mathbb{Z}, \tag{5.5}$$

которое определяет геометрический объект m_n, называемый мультивектором n-ого порядка [6]. Мультивектор n-ого порядка может рассматриваться как некоторое обобщение σ-подпространства n-ого порядка $M(\mathcal{P}^n)$. Для описания любой геометрии оказывается достаточным отображения (5.5), поскольку все геометрические объекты определяются как области (подмножества точек) пространства Ω (а не как отображения). Использование столь сложного фундаментального отображения, как (1.21) не является необходимым. Например, чтобы исследовать свойства трубки первого порядка $\mathcal{T}_{P_0P_1} \subset \Omega$ (геодезической), нужно исследовать множество $\mathcal{T} = \{P_0\} \otimes \{P_1\} \otimes \mathcal{T}_{P_0P_1} \subset \Omega^3$, удовлетворяющее условию $F_3(\mathcal{T}) = 0$. Здесь отображение F_3 известно и фиксировано. Исследуются только нули функции F_3, имеющие вид $\mathcal{T} = \{P_0\} \otimes \{P_1\} \otimes \mathcal{T}_{P_0P_1}$. Мощность множества $\mathcal{T}$ существенно меньше, чем мощность множества всех отображений (1.21), и исследование $\mathcal{T}$ не столь сложно, как исследование отображений (1.21).

Можно уменьшить мощность множества всех отображений (1.21), налагая ограничения на отображение (1.21), но нельзя изменить то обстоятельство, что отображение (1.21) является атрибутом собственно евклидовой геометрии и не является атрибутом самой геометрии. Проблема выпуклости подтверждает это. Настаивая на отображении (1.21) как основном инструменте исследования геометрии, мы указываем неправильный путь и закрываем дверь для исследований геометрии.

Кроме чисто логических аргументов в пользу подхода Т-геометрии следует привести аргументы прикладного характера. Дело в том, что применение Т - геометрии к построению модели пространства-времени приводит к новым и обнадеживающим результатам [10, 11]. Рассмотрение однородной, изотропной и непрерывной модели с нулевой кривизной приводит к целому классу моделей, различающихся формой трубки (первого порядка). Этот класс содержит в себе известную модель Минковского, для которой времениподобные трубки вырождаются в линии и которая не является оптимальной, так как она не способна описать квантовые явления без использования принципов квантовой механики. Для других (невырожденных) моделей этого класса характерна: (1) геометризация массы частицы, описываемой ломаной трубкой (1.20), (2) стохастичность мировой трубки свободной частицы, обусловленная невырожденностью конуса коллинеарности.

Оказывается возможным выбрать оптимальную модель пространства-времени, для которой статистическое описание стохастических трубок свободных частиц совпадает с квантовым описанием в терминах уравнения Шредингера. При этом квантовая постоянная $\hbar$ оказывается характеристикой пространства-времени (она связана с толщиной мировых трубок частиц), вводящей в геометрию пространства-времени некую "элементарную длину". В результате отпадает необходимость в принципах квантовой механики, и квантовая теория воспринимается как концепция, созданная для того, чтобы компенсировать наши неправильные представления о геометрии пространства-времени на малых масштабах.

Список литературы

[1] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953.

[2] J.L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1960.

[3] А.Д. Александров, В.Н. Берестовский, И.Г. Николаев, Обобщенные римановы пространства. *УМН,* **41**, вып. 3, 1-44, (1986).

[4] А.Д. Александров, *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.* ГИТТЛ. Москва, 1948.

[5] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928).

[6] Ю.А. Рылов, Описание метрического пространства как классификация его конечных подпространств. *ФПМ* (представлено для публикации).

[7] Ю.А. Рылов, Описание риманова пространства с помощью конечного интервала. *Известия высших учебных заведений*, сер. мат. 3, 132, (1962).

[8] Yu.A. Rylov, Relative gravitational field and conservation laws in general relativity. *Ann. Phys.* (Leipzig) **12**, 329, (1964).

[9] Yu.A. Rylov, Distorted Riemannian space and technique of differential geometry. *J. Math. Phys.* **33**, 4220, (1992).

[10] Yu.A. Rylov, Extremal properties of Synge's world function and discrete geometry. *J. Math. Phys.* **31**, 2876, (1990).

[11] Yu.A. Rylov, Non-Riemannian model of space-time responsible for quantum effects. *J. Math. Phys.* **32**, 2092, (1991).