Постановка проблемы о завихренном невязком течении баротропной и несжимаемой жидкостей.

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН.
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101, кор.1.
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: *http://rsfq1.physics.sunysb.edu/˜rylov/yrylov.htm*

Аннотация

Изучается вопрос, какая информация нужна для определения единственного решения гидродинамических уравнений для идеальной жидкости. Рассматриваются произвольные невязкие течения баротропной и несжимаемой жидкостей. После интегрирования гидродинамических уравнений вся информация о течении концентрируется в динамических уравнениях в виде неопределенных функций, тогда как начальные и граничные условия содержат информацию о маркировке частиц жидкости. Показано, что для однозначного определения стационарного течения несжимаемой жидкости, нужно задать завихренность на всех линиях тока. Задание скорости на границе, вообще говоря, не определяет завихренности. Если имеются замкнутые линии тока, то завихренность на них не может быть задана через граничные условия. Этим объясняется существование различных стационарных завихренных течений при одних и тех же граничных условиях.

Ключевые слова: идеальная жидкость, потенциалы Клебша, завихренность

1 Введение

В настоящей работе мы рассматриваем постановку задачи о течении баротропной жидкости. Если сжимаемость жидкости стремится к нулю, мы получаем несжимаемую жидкость. Несжимаемая жидкость рассматривается как частный случай баротропной жидкости, когда ее сжимаемость стремится к нулю. При переходе к пределу динамические уравнения, описывающие эволюцию плотности ρ и потенциала скорости φ, теряют временны́е производные и превращаются в ограничения на состояние несжимаемой жидкости.

$$\partial_0 \rho + \boldsymbol{\nabla} (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v} = 0 \tag{1.1}$$

В результате постановка задачи о течении жидкости оказывается различной для баротропной и несжимаемой жидкостей. С одной стороны, описание несжимаемой жидкости проще, чем описание баротропной, но с другой стороны, несжимаемая жидкость есть нефизическая жидкость, потому что в ней скорость звука бесконечна, и ограничения на состояние несжимаемой жидкости оказываются нефизическими ограничениями. Постановка проблемы обтекания оказывается более сложной для несжимаемой жидкости, чем для баротропной.

Нестационарные течения слишком трудны для расчета, и как правило рассматривают стационарные течения, которые не содержат временны́х производных. Это обстоятельство усложняет проблему обтекания, потому что эта задача не может рассматриваться как эволюционная проблема. Наконец, завихренные стационарные течения тоже слишком сложны для расчетов, и обычно рассматриваются потенциальные стационарные течения несжимаемой жидкости. Постановка задачи для завихренных и потенциальных течений несжимаемой жидкости оказывается различной. В частности, стационарное потенциальное течение несжимаемой жидкости однозначно определяется граничными условиями. Завихренное стационарное течение может содержать линии тока, которые не пересекают границы. и нельзя поставить задачу обтекания, используя только граничные условия.

Мы рассмотрим постановку проблемы обтекания, начиная с простого случая произвольного течения баротропной жидкости, когда постановка задачи наиболее проста. Последовательно налагая ограничения несжимаемости и стационарности, мы проследим эволюцию постановки задачи обтекания.

В нашем исследовании мы существенно используем тот факт, что динамические уравнения для баротропной жидкости могут быть проинтегрированы [1]. В результате этого интегрирования в динамических уравнениях появляются неопределенные функции. Как правило, исследование интегралов дифференциальных уравнений проще и эффективнее, чем исследование самих дифференциальных уравнений, и мы используем это обстоятельство. Интегрирование гидродинамических уравнений тесно связано с использованием обобщенной функции тока (ОФТ) [2] и с ОФТ-формализмом, который позволяет осуществить это интегрирование.

Мы получаем гидродинамические уравнения из вариационного принципа, который представляется в виде [2]

$$\mathcal{A}_{\mathrm{E}}[\rho, \mathbf{j}, \boldsymbol{\xi}, p] = \int \left\{ \frac{\mathbf{j}^2}{2\rho} - \rho E - p_k \left(j^k - \rho_0 (\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right) \right\} dt d\mathbf{x} \tag{1.2}$$

где $j^k = \{j^0, \mathbf{j}\} = \{\rho, \rho \mathbf{v}\}$ есть 4-поток жидкости, ρ есть плотность и $\mathbf{v}$ есть ее скорость. Величина $E = E(\rho)$ есть внутренняя энергия жидкости на единицу массы. Она зависит только от плотности ρ. Величина $\rho_0 = \rho_0 (\boldsymbol{\xi})$ есть заданная весовая функция аргумента $\boldsymbol{\xi}$. Переменные $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ суть лагранжевы координаты, маркирующие частицы жидкости. Обычно лагранжевы координаты рассматривают как независимые переменные. Здесь они рассматриваются как как зависимые переменные $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}\{t, \mathbf{x}\}$. Рассматривая $\boldsymbol{\xi}$ как зависимые переменные, мы будем называть их потенциалами Клебша. Эти потенциалы были использованы Клебшем для описания несжимаемой жидкости [3, 4]. В (1.2) и далее по двум повторяющимся индексам производится суммирование $(0-3)$. Все зависимые динамические переменные j, $\boldsymbol{\xi}$, p рассматриваются как функции переменных $x = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{t, \mathbf{x}\}$.

Величины $\partial J/\partial\xi_{0,k}$, $k = 0, 1, 2, 3$ суть производные якобиана

$$J \equiv \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \equiv \det\left|\left|\xi_{i,k}\right|\right|, \qquad \xi_{i,k} \equiv \partial_k\xi_i \equiv \frac{\partial\xi_i}{\partial x^k}, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

по переменным $\xi_{0,k} \equiv \partial_k\xi_0$. Здесь $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\} = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ суть четыре скаляра, рассматриваемые как функции от $x = \{x^0, \mathbf{x}\} = \{t, \mathbf{x}\}$, $\xi = \xi(x)$. Функции $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ предполагаются независимыми в том смысле, что $J \neq 0$. Удобно рассматривать якобиан J как 4-линейную функцию переменных $\xi_{i,k} \equiv \partial_k\xi_i$, $i, k = 0, 1, 2, 3$. Тогда можно ввести производные от J по $\xi_{i,k}$. Производная $\partial J/\partial\xi_{i,k}$ появляется как результат замены ξ_i величиной x^k в соотношении (1.3).

$$\frac{\partial J}{\partial\xi_{i,k}} \equiv \frac{\partial(\xi_0, ...\xi_{i-1}, x^k, \xi_{i+1}, ...\xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}, \qquad i, k = 0, 1, 2, 3 \qquad (1.4)$$

Переменные $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ суть пространственные лагранжевы координаты частиц жидкости, тогда как ξ_0 есть временна́я лагранжева координата. В действии (1.2) она фиктивна. Величины $\partial J/\partial\xi_{i,k}$ полезны, поскольку они тождественно удовлетворяют уравнениям

$$\partial_k\frac{\partial J}{\partial\xi_{i,k}} \equiv 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial\xi_{k,i}}\xi_{l,i} \equiv J\delta_l^k, \qquad \frac{\partial J}{\partial\xi_{i,k}}\xi_{i,l} \equiv J\delta_l^k, \qquad l, k = 0, 1, 2, 3 \qquad (1.5)$$

Отождествляя 4-поток жидкости j^k с величиной $\rho_0(\boldsymbol{\xi})\,\partial J/\partial\xi_{0,k}$

$$j^k = \rho_0(\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \qquad (1.6)$$

мы получаем из двух первых уравнений (1.5), что 4-поток j^k удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_k j^k = \partial_k\left(\rho_0(\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\right) = \rho_0(\boldsymbol{\xi})\,\partial_k\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}} + \frac{\partial\rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial\xi_\alpha}\xi_{\alpha,k}\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}} \equiv 0 \qquad (1.7)$$

Здесь и далее производится суммирование по повторяющимся греческим индексам $(1-3)$. Из второго тождества (1.5) следует, что величины $\boldsymbol{\xi}$ маркируют частицы жидкости, и их субстанциональная производная обращается в нуль.

$$\left(\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,0}}\right)^{-1}\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\partial_k\xi_\alpha = \frac{j^k}{\rho}\partial_k\xi_\alpha = (\partial_0\xi_\alpha + \mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha) = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \qquad (1.8)$$

Использование обозначений (1.6) очень удобно, и мы ввели это обозначение в вариационный принцип (1.2) с помощью множителей Лагранжа $p_k = p_k(x)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Для получения гидродинамических уравнений следует варьировать действие (1.2) по переменным $\xi_k, j^k, p_k,\ \ k = 0, 1, 2, 3$. Переманная ξ_0 фиктивна, и вариация по ξ_0 дает тождество.

Динамические уравнения имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \xi_i} = -\partial_l \left(\rho_0(\boldsymbol{\xi}) \, p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \right) + \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} p_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{1.9}$$

Поскольку переменная ξ_0 фиктивна, динамическое уравнение (1.9) с $i = 0$ есть тождество в силу других динамических уравнений. Другие динамические уравнения имеют вид

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta j^\alpha} = \frac{j^\alpha}{\rho} - p_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{1.10}$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \rho} = -\frac{\mathbf{j}^2}{2\rho^2} - \frac{\partial(\rho E)}{\partial \rho} - p_0 = 0 \tag{1.11}$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta p_k} = -j^k + \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \qquad k = 0, 1, 2, 3 \tag{1.12}$$

Преобразуем (1.9), используя тождества

$$\partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv 0, \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}} \right), \qquad i, k, l = 0, 1, 2, 3, \tag{1.13}$$

С помощью первого тождества (1.13) уравнения (1.9) могут быть записаны в виде

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \rho_0(\boldsymbol{\xi}) \, \partial_l p_k - \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} p_k \partial_l \rho_0(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} p_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{1.14}$$

Два последних члена в (1.14) компенсируют друг друга. В самом деле, используя второе тождество (1.13) мы можем переписать два последних члена соотношения (1.14) в виде

$$-J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}} \right) p_k \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\beta} \xi_{\beta,l} + \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} p_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{1.15}$$

В (1.15) и далее производится суммирование по двум повторяющимся греческим индексам $(1 - 3)$.

Используя второе тождество (1.5), можно преобразовать выражение (1.15) к виду

$$-\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} p_k \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_\beta} \delta^i_\beta + \frac{\partial \rho_0(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} p_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{1.16}$$

где два члена компенсируются для $i = \beta = 1, 2, 3$. Для $i = 0$ первый член соотношения (1.16) обращается в нуль из-за множителя δ^i_β, тогда как второй член обращается в нуль из-за $\partial\rho_0(\boldsymbol{\xi})/\partial\xi_0 = 0$.

Таким образом, два последних члена в уравнении (1.14) обращаются в нуль. Используя второе тождество (1.13), преобразуем уравнение (1.14) к виду

$$-J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial\xi_{0,l}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{i,k}}\right)\rho_0(\boldsymbol{\xi})\,p_{k,l} = 0, \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{1.17}$$

Свернем (1.17) с $\xi_{i,s}$. Используя последнее тождество (1.5) и уравнение (1.12), получаем из (1.17)

$$\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}(p_{k,s} - p_{s,k}) = 0, \qquad s = 0, 1, 2, 3, \qquad p_{k,s} \equiv \partial_s p_k \tag{1.18}$$

Из (1.10) - (1.12) следует, что

$$\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,0}} = \frac{\rho}{\rho_0(\boldsymbol{\xi})}, \qquad p_0 = -\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \frac{\partial(\rho E)}{\partial\rho}, \qquad p_\alpha = v^\alpha, \qquad \frac{\partial J}{\partial\xi_{0,\alpha}} = \frac{\rho v^\alpha}{\rho_0(\boldsymbol{\xi})}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{1.19}$$

Подставляя (1.19) в (1.18), получаем для $s = \beta = 1, 2, 3$ после преобразований

$$v^\alpha{}_{,0} + v^\beta v^\alpha{}_{,\beta} = -\partial_\alpha\frac{\partial(\rho E)}{\partial\rho} = -\frac{1}{\rho}\partial_\alpha\left(\rho^2\frac{\partial E}{\partial\rho}\right), \qquad \beta = 1, 2, 3 \tag{1.20}$$

и для $s = 0$

$$v^\beta v^\beta{}_{,0} + v^\beta\partial_\beta\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{\partial(\rho E)}{\partial\rho}\right) = 0 \tag{1.21}$$

Здесь запятая перед индексом k означает дифференцирование по x^k. Легко видеть, что (1.21) есть результат свертывания соотношения (1.20) с v^α. Это связано с тем, что уравнение (1.21) появляется как результат варьирования по фиктивной переменной ξ_0.

Уравнения (1.7), (1.20) и (1.8) образуют полную систему динамических уравнений, которая состоит из семи уравнений первого порядка для семи зависимых переменных $\rho, \mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}$. Эта система уравнений может быть записана в векторном виде

$$\partial_0\rho + \boldsymbol{\nabla}(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{1.22}$$

$$\partial_0\mathbf{v} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} = -\frac{\boldsymbol{\nabla}p}{\rho}, \qquad p = \rho^2\frac{\partial E}{\partial\rho} \tag{1.23}$$

$$\partial_0\boldsymbol{\xi} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{1.24}$$

Четыре уравнения (1.22), (1.23) образуют замкнутую подсистему динамических уравнений (уравнения Эйлера). Эти уравнения могут быть решены независимо от динамических уравнений (1.24), которые описывают способ маркировки частиц жидкости и характер движения частицы жидкости вдоль ее тректории.

В самом деле, пусть три величины $\xi_1(t,\mathbf{x})$, $\xi_2(t,\mathbf{x})$, $\xi_3(t,\mathbf{x})$ суть три независимых решения уравнений (1.24), известных как условия Лина [5]. Тогда эти три величины представляют собой три независимых интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t,x) \tag{1.25}$$

Если три независимых интеграла $\xi_1(t,\mathbf{x})$, $\xi_2(t,\mathbf{x})$, $\xi_3(t,\mathbf{x})$ системы уравнений (1.5) известны, то мировые линии (траектории) $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi}_{\text{in}})$ частиц жидкости определяются неявно алгебраическими уравнениями

$$\xi_\alpha(t,\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\xi}_{\text{in}})_\alpha = \text{const}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{1.26}$$

Три величины $\boldsymbol{\xi}_{\text{in}} = \boldsymbol{\xi}$ маркируют частицы жидкости и их мировые линии.

2 Интегрирование динамических уравнений для баротропной жидкости

Существует другой вид гидродинамических уравнений. Дело в том, что уравнения (1.18) можно принтегрировать. Заметим, что уравнения (1.18) суть линейные дифференциальные уравнения в частных производных для переменных p_k, $k=0,1,2,3$. Они могут быть проинтегрированы в виде

$$p_k = g^0(\xi_0)\,\xi_{0,k} + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\xi_{\alpha,k}, \qquad k=0,1,2,3 \tag{2.1}$$

где переменная ξ_0 перестает быть фиктивной и становится новой динамической переменной. Величины g^0 и g^α, $\alpha=1,2,3$ суть произвольные функции аргументов ξ_0 and $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ соответственно.

Подставляя (2.1) в (1.18) и используя тождества (1.5), можно проверить, что (2.1) есть решение уравнений (1.18) для любых функций g^i, $i=0,1,2,3$. Это означает, что выражение (2.1) дает общее решение уравнений (1.18). Принимая во внимание, что первый член в правой части равенства (2.1) является градиентом некоторой величины φ, мы можем записать (2.1) в виде

$$p_k = \partial_k\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\xi_{\alpha,k}, \qquad k=0,1,2,3 \tag{2.2}$$

Первое уравнение (1.19) принимает вид

$$\rho = \rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \equiv \rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x,y,z)} \equiv \rho_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)} \tag{2.3}$$

Из (2.2) и (1.19) следует, что

$$v^\mu = \partial_\mu\varphi + g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\xi_{\alpha,\mu}, \qquad \mu=1,2,3 \tag{2.4}$$

Тогда уравнения (1.24) преобразуются к виду

$$\partial_0\xi_\mu + \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_\mu = 0, \qquad \mu = 1,2,3 \tag{2.5}$$

Положим $k = 0$ в (2.2). Исключая $\xi_{\alpha,0}$ с помощью (2.5), получаем

$$\partial_0\varphi - g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^\beta\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_\beta\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha\right)^2 + P = 0 \tag{2.6}$$

$$P = \left[\frac{\partial\left(\rho E\right)}{\partial\rho}\right]_{\rho=\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial J/\partial\xi_{0,0}}$$

Уравнение (2.6) может быть записано в виде

$$\partial_0\varphi + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2 - \frac{1}{2}g^\alpha\left(\boldsymbol{\xi}\right)g^\beta\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_\beta\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha + \left[\frac{\partial\left(\rho E\right)}{\partial\rho}\right]_{\rho=\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial J/\partial\xi_{0,0}} = 0 \tag{2.7}$$

что позволяет интерпретировать переменную φ. С одной стороны, переменная φ есть функция временно́й лагранжевой координаты ξ_0. С другой стороны, в случае, когда $g^\alpha = 0$ и φ есть потенциал скорости, уравнение (2.7) может рассматриваться как уравнение Гамильтона-Якоби с функцией Гамильтона

$$H\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + U\left(t,\mathbf{x}\right), \qquad U\left(t,\mathbf{x}\right) = \left[\frac{\partial\left(\rho E\right)}{\partial\rho}\right]_{\rho=\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\partial J/\partial\xi_{0,0}}$$

В этом случае потенциал Клебша φ может быть истолкован как переменная действия.

Итак, мы имеем систему из четырех уравнений (2.5), (2.6) для четырех зависимых переменных $\boldsymbol{\xi}$, φ. Если получено решение системы (2.5), (2.6), переменные ρ, $\mathbf{v}$ выражаются через это решение с помощью соотношений (2.3), (2.4).

Если нас интересует определение течения жидкости, т.е. определение переменных ρ, $\mathbf{v}$ как функции переменных $t, \mathbf{x}$, мы должны решить либо систему из четырех уравнений Эйлера (1.22), (1.23) с надлежащими начальными и граничными условиями, либо систему из четырех уравнений (2.5), (2.6) с заданными функциями g^α, $\alpha = 1,2,3$ и надлежащим образом заданными начальными и граничными условиям для переменных $\boldsymbol{\xi}$, φ.

Прежде чем произвдить сравнительный анализ этих двух систем динамических уравнений, мы рассмотрим переход к случаю несжимаемой жидкости. Чтобы перейти к случаю несжимаемой жидкости, мы рассмотрим слабо сжимаемую жидкость с внутренней энергией вида

$$E\left(\rho\right) = E_0\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{1/\varepsilon}, \qquad E_0, \rho_1 = \text{const}, \qquad \varepsilon \ll 1 \tag{2.8}$$

Несжимаемая жидкость появляется в пределе $\varepsilon \to 0$.

Подставим (2.8) в (2.6) и разрешим полученное уравнение относительно члена, содержащего постоянную E_0. Получаем

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}E_0\right)^{\varepsilon}\frac{\rho}{\rho_1}=\left|\partial_0\varphi+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)^2-\frac{1}{2}g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)g^{\beta}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\beta}\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right|^{\varepsilon} \tag{2.9}$$

В пределе $\varepsilon\to 0$ уравнения (2.9) и (2.3) превращаются соответственно в

$$\rho=\rho_1=\mathrm{const},\qquad \rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}=\rho_1=\mathrm{const} \tag{2.10}$$

Другие динамические уравнения системы (2.3) - (2.6) не зависят от ρ.

Обычная процедура перехода к несжимаемой жидкости в (1.22), (1.23) представляет собой добавление ограничения

$$\rho=\rho_1=\mathrm{const} \tag{2.11}$$

к уравнениям Эйлера и разрыв связи между плотностью ρ и давлением p. В результате давление p в (1.23) оказывается неопределенным.

Принимая во внимание (2.11), запишем систему уравнений для несжимаемой жидкости в виде

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}=0,\qquad \partial_0\mathbf{v}+\left(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v}=-\frac{\boldsymbol{\nabla}p}{\rho_0},\qquad \rho_0=\mathrm{const} \tag{2.12}$$

Уравнения (2.3) - (2.6) имеют вид

$$\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,0}}\equiv\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}=\frac{\rho_1}{\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)} \tag{2.13}$$

$$\partial_0\xi_{\mu}+\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi+g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right)\boldsymbol{\nabla}s\xi_{\mu}=0,\qquad \mu=1,2,3 \tag{2.14}$$

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\nabla}\varphi+g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha} \tag{2.15}$$

В системе проинтегрированных уравнений условие

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}=\boldsymbol{\nabla}^2\varphi+\boldsymbol{\nabla}\left(g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right)=0 \tag{2.16}$$

также появляется, но теперь оно не является независимым соотношением. Оно является следствием динамических уравнений (2.13), (2.14), (2.15).

Действительно, разрешая (2.14) относительно $v^{\alpha}=\partial_{\alpha}\varphi+g^{\beta}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\xi_{\beta,\alpha}$, мы получаем в соответствии с (1.5)

$$v^{\alpha}=\partial_{\alpha}\varphi+g^{\beta}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\xi_{\beta,\alpha}=\left(\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,0}}\right)^{-1}\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,\alpha}},\qquad \alpha=1,2,3 \tag{2.17}$$

Тогда (2.17) удовлетворяет соотношению (2.16), как это следует из (1.7) и (2.13).

Таким образом, в случае несжимаемой жидкости мы имеем три эволюционных динамических уравнения, содержащих временны́е производные, и одно динамическое уравнение, не содержащее временно́й производной (первое уравнение (2.12) и уравнение (2.13)). Это уравнение представляет собой ограничение, налагаемое на состояние несжимаемой жидкости.

3 Проблема Коши для баротропной жидкости в бесконечном объеме

Чтобы получить единственное решение при определении течения баротропной жидкости в бесконечном объеме, следует задать начальное состояние $\rho, \mathbf{v}$ жидкости в момент времени $t = 0$.

$$\rho(0,\mathbf{x}) = \rho_{\text{in}}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{v}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\text{in}}(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

Эволюция состояния жидкости $\rho, \mathbf{v}$ определяется эволюционными динамическими уравнениями (2.12).

В случае проинтегрированной системы (2.3) - (2.6) начальные условия (3.1) должны быть заданы, но этих условий недостаточно для определения единственного решения уравнений (2.3) - (2.6). Нужно еще задать начальные условия для потенциалов Клебша φ, $\boldsymbol{\xi}$. Мы выберем самые простые начальные условия для величин φ, $\boldsymbol{\xi}$

$$\varphi(0,\mathbf{x}) = \varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{\xi}(0,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \tag{3.2}$$

Подставляя(3.1) и (3.2) в (2.4), получаем

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\text{in}}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \left\{g^1(\mathbf{x}), g^2(\mathbf{x}), g^3(\mathbf{x})\right\} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в динамические уравнения (2.3) - (2.7), получаем

$$\rho_0(\boldsymbol{\xi}) = \rho_{\text{in}}(\mathbf{x}) \left(\frac{\partial(\xi_{\text{in}1}, \xi_{\text{in}2}, \xi_{\text{in}3})}{\partial(x,y,z)}\right)^{-1} = \rho_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \rho_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi}) \tag{3.4}$$

$$\partial_0 \xi_\mu + \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + v_{\text{in}}^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha\right) \boldsymbol{\nabla}\xi_\mu = 0, \qquad \mu = 1,2,3 \tag{3.5}$$

$$\partial_0 \varphi + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 - \frac{1}{2} v_{\text{in}}^\alpha(\boldsymbol{\xi}) v_{\text{in}}^\beta(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\nabla}\xi_\beta \boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha + \left[\frac{\partial(\rho E)}{\partial\rho}\right]_{\rho=\rho_0(\boldsymbol{\xi})\partial J/\partial\xi_{0,0}} = 0 \tag{3.6}$$

Тогда соотношения (2.3), (2.4) принимают вид

$$\rho = \rho_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x,y,z)}, \qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi + v_{\text{in}}^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha \tag{3.7}$$

где φ, $\boldsymbol{\xi}$ суть решения уравнений (3.6), (3.5) с начальными условиями(3.2).

Выбор начальных условий для потенциалов Клебша φ, $\boldsymbol{\xi}$ в виде (3.3) не существенен. Переменные $\boldsymbol{\xi}$ маркируют частицы жидкости, и можно использовать любой однозначный способ маркировки. Это означает, что уравнения (3.5), (3.6) инвариантны относительно преобразований перемаркировки.

$$\xi_\alpha \to \tilde{\xi}_\alpha = \tilde{\xi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \qquad v_{\text{in}}^\alpha(\boldsymbol{\xi}) \to \tilde{v}_{\text{in}}^\alpha\left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}\right) = \frac{\partial\xi_\beta}{\partial\tilde{\xi}_\alpha} v_{\text{in}}^\beta(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{3.8}$$

Выбор начального условия φ_{in} в виде (3.2) также не важен. Выберем начальные условия (2.3), (2.4) в общем виде

$$\varphi(0,\mathbf{x}) = \varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}), \qquad \boldsymbol{\xi}(0,\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \{\xi_{\text{in}1}(\mathbf{x}), \xi_{\text{in}2}(\mathbf{x}), \xi_{\text{in}3}(\mathbf{x})\} \tag{3.9}$$

Подставляя (3.1) и (3.9) в (2.3) и (2.4), получаем

$$\rho_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \rho_0(\boldsymbol{\xi}_{\text{in}}(\mathbf{x}))\, D_{\text{in}}(\mathbf{x}), \qquad g^{\alpha}(\mathbf{x}) = \left(v_{\text{in}}^{\mu}(\mathbf{x}) - \partial_{\mu}\varphi_{\text{in}}(\mathbf{x})\right)\frac{\partial D_{\text{in}}(\mathbf{x})}{\partial\zeta_{\alpha,\mu}}, \tag{3.10}$$

$$D_{\text{in}}(\mathbf{x}) \equiv \det||\zeta_{\alpha,\beta}|| \equiv \frac{\partial(\xi_{\text{in}1}, \xi_{\text{in}2}, \xi_{\text{in}3})}{\partial(x^1, x^2, x^3)}, \qquad \zeta_{\alpha,\beta} \equiv \frac{\partial \xi_{\text{in}\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \qquad \alpha,\beta = 1,2,3 \tag{3.11}$$

Тогда вместо (3.7) получаем

$$\rho = \left[\frac{\rho_{\text{in}}(\mathbf{x})}{D_{\text{in}}(\mathbf{x})}\right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}} \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)}, \tag{3.12}$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi + \left(v_{\text{in}}^{\mu}(\boldsymbol{\xi}) - \partial_{\mu}\varphi_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi})\right)\left[\frac{\partial D_{\text{in}}}{\partial\zeta_{\alpha,\mu}}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha} \tag{3.13}$$

где φ, $\boldsymbol{\xi}$ суть решения уравнений (2.3), (2.7) с начальными условиями (3.9),(3.1). Эти уравнения имеют вид

$$\partial_0\xi_{\mu} + \left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + \left(v_{\text{in}}^{\nu}(\boldsymbol{\xi}) - \partial_{\nu}\varphi_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi})\right)\left[\frac{\partial D_{\text{in}}}{\partial\zeta_{\alpha,\nu}}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\mu} = 0, \qquad \mu = 1,2,3 \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} \partial_0\varphi \;\; = \;\; & -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\varphi)^2 - \left[\frac{\partial(\rho E)}{\partial\rho}\right]_{\rho=\rho_0(\boldsymbol{\xi})\partial J/\partial\xi_{0,0}} \\ & +\frac{1}{2}\left(v_{\text{in}}^{\mu}(\boldsymbol{\xi}) - \partial_{\mu}\varphi_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi})\right)\left[\frac{\partial D_{\text{in}}}{\partial\zeta_{\alpha,\mu}}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}} \\ & \times\left(v_{\text{in}}^{\nu}(\boldsymbol{\xi}) - \partial_{\nu}\varphi_{\text{in}}(\boldsymbol{\xi})\right)\left[\frac{\partial D_{\text{in}}}{\partial\zeta_{\beta,\nu}}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\boldsymbol{\nabla}\xi_{\beta} \end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$\rho_0(\boldsymbol{\xi}) = \left[\frac{\rho_{\text{in}}(\mathbf{x})}{D_{\text{in}}(\mathbf{x})}\right]_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}} \tag{3.16}$$

Уравнения (3.14), (3.15) следует решать при начальных условиях (3.9). Вместо этого можно решить уравнения (3.5), (3.6) при начальных условиях (3.2).

Мы видим, что проинтегрированные динамические уравнения (2.5), (2.7) (или в развернутом виде (3.14), (3.15), (3.16)) содержат полную информацию о течении жидкости. Начальные условия (3.9), необходимые для определения единственного решения динамических уравнений (2.5), (2.7), относятся только к физически несущественной информации: маркировке частиц жидкости и разделению скорости на потенциальную и завихренную составляющие.

Если мы рассматриваем лагранжевы координаты $\boldsymbol{\xi}$ как независимые переменные, динамические уравнения (3.5), (3.6) (3.7) приводятся к виду

$$\varphi^{,0}-\frac{1}{2}\left(\varphi^{,\alpha}+v_{\mathrm{in}}^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\right)\left(\varphi^{,\alpha}+v_{\mathrm{in}}^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\right)X^{-2}\frac{\partial X}{\partial x^{\mu,\alpha}}\frac{\partial X}{\partial x^{\mu,\alpha}}+P(\rho)=0, \tag{3.17}$$

$$x^{\beta,0}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_{\alpha}}+v_{\mathrm{in}}^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})\right)X^{-1}\frac{\partial X}{\partial x^{\beta,\alpha}}, \qquad \beta=1,2,3 \tag{3.18}$$

$$P(\rho)=\left[\frac{\partial(\rho E(\rho))}{\partial\rho}\right]_{\rho=X^{-1}\rho_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{\xi})} \tag{3.19}$$

где $\mathbf{x}=\{x^{\alpha}(t,\boldsymbol{\xi})\}$, $\alpha=1,2,3$, и $\varphi=\varphi(t,\boldsymbol{\xi})$. Якобиан

$$X=\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}=\det\left\|x^{\alpha,\beta}\right\|, \qquad x^{\alpha,\beta}\equiv\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial\xi_{\beta}}, \qquad \alpha,\beta=1,2,3 \tag{3.20}$$

рассматривается как функция переменных $x^{\alpha,\beta}$. Величины типа $u^{,0}$ означают временну́ю производную величины u при постоянных $\boldsymbol{\xi}$

$$x^{\beta,0}\equiv\frac{dx^{\beta}}{dt}=\frac{\partial\left(x^{\beta},\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3)}, \qquad \varphi^{,0}\equiv\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial(\varphi,\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3)} \tag{3.21}$$

Гидродинамические уравнения (3.17), (3.18) довольно громоздки, но они содержат произвольные начальные условия как функции независимых переменных $\boldsymbol{\xi}$.

4 Проблема Коши для несжимаемой жидкости в бесконечном объеме

Главное различие между баротропной и несжимаемой жидкостями состоит в ограничении, налагаемом на состояние несжимаемой жидкости первым уравнением (2.12). Это условие не содержит временно́й производной, и оно справедливо в начальный момент времени $t=0$

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})=0 \tag{4.1}$$

Это означает, что начальное состояние $\mathbf{v}_{\mathrm{in}}$ несжимаемой жидкости не может быть задано произвольно. Но главное свойство начального состояния есть возможность задать его произвольно. Чтобы сохранить это свойство, следует переопределить понятие состояния несжимаемой жидкости. Рассмотрим обобщенную функцию тока (ОФТ) $\{\psi_2,\psi_3\}$ [2] как величину, описывающую состояние несжимаемой жидкости. Скорость $\mathbf{v}$, определяемая через ОФТ соотношением

$$v^{\mu}=\frac{\partial(x^{\mu},\psi_2,\psi_3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)}, \qquad \mu=1,2,3, \tag{4.2}$$

удовлетворяет первому уравнению (2.12) при любом выборе функций $\{\psi_2, \psi_3\}$. Рассматривая ОФТ как состояние несжимаемой жидкости, мы используем две величины $\{\psi_2, \psi_3\}$ вместо трех составляющих скорости, но эти две величины $\{\psi_2, \psi_3\}$ могут быть заданы произвольно в начальный моент времени $t = 0$. Это очень важно и удобно.

С другой стороны, переменные $j^0 = \rho$ и $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ описываются сотношениями (1.12). Выбирая $\rho_0(\boldsymbol{\xi}) = \rho_1 = \text{const}$, получаем из (1.12) в случае несжимаемой жидкости

$$\rho = \rho_1 \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \rho_1 = \text{const}, \qquad j^\mu = \rho_1 v^\mu = \rho_1 \frac{\partial(x^\mu, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}, \qquad \mu = 1, 2, 3 \tag{4.3}$$

Скорость $\mathbf{v}$, определяемая вторым уравнением (4.3), тождественно удовлетворяет первому уравнению(2.12), потому что

$$\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = 1 \tag{4.4}$$

Выберем начальные условия в виде

$$\boldsymbol{\xi}(0, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \qquad \varphi(0, \mathbf{x}) = \varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}) = 0 \tag{4.5}$$

$$v^\mu(0, \mathbf{x}) = v^\mu_{\text{in}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial(x^\mu, \psi_{\text{in}2}(\mathbf{x}), \psi_{\text{in}3}(\mathbf{x}))}{\partial(x^1, x^2, x^3)}, \qquad \mu = 1, 2, 3 \tag{4.6}$$

где $\psi_{\text{in}2}$, $\psi_{\text{in}3}$ суть заданные функции пременных $\mathbf{x}$ (начальные значения ОФТ). Тогда из уравнения (2.15), записанного при $t = 0$ следует

$$g^\mu(\mathbf{x}) = \frac{\partial(x^\mu,\ \psi_{\text{in}2}(\mathbf{x}), \psi_{\text{in}3}(\mathbf{x}))}{\partial(x^1, x^2, x^3)}, \qquad \mu = 1, 2, 3 \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) В динамические уравнения (2.14) и полагая $\rho_1/\rho_0(\mathbf{x}) = \text{const}$, получаем три динамических уравнения для переменных $\boldsymbol{\xi}$

$$\partial_0 \xi_\alpha + \left(\varphi_{,\nu} + \frac{\partial(\xi_\mu, \psi_{\text{in}2}(\boldsymbol{\xi}), \psi_{\text{in}3}(\boldsymbol{\xi}))}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \xi_{\mu,\nu}\right) \xi_{\alpha,\nu} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{4.8}$$

и ограничение (4.4), налагаемое на значения величин $\boldsymbol{\xi}$.

Четыре уравнения (4.8), (4.4) образуют систему динамических уравнений для четырех динамических переменных $\boldsymbol{\xi}$,φ. Уравнение (4.4) может быть заменено уравнением (2.16), которое после подстановки (4.7) принимает вид

$$\varphi_{,\nu\nu} + \partial_\nu \left(\frac{\partial(\xi_\mu, \psi_{\text{in}2}(\boldsymbol{\xi}), \psi_{\text{in}3}(\boldsymbol{\xi}))}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \xi_{\mu,\nu}\right) = 0 \tag{4.9}$$

где $\psi_{\text{in}2}(\boldsymbol{\xi})$, $\psi_{\text{in}3}(\boldsymbol{\xi})$ суть заданные функции аргумента $\boldsymbol{\xi}$. Подчеркнем, что уравнения (4.8), (4.9) должны быть решены при начальных условиях (4.5).

Можно ли положить $\varphi = 0$ в уравнении (4.9)? Вообще говоря, нет. Если мы положим $\varphi = 0$, уравнение (4.9) превратится в уравнение

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \left(\xi_\mu, \psi_{\mathrm{in}2} \left(\boldsymbol{\xi} \right), \psi_{\mathrm{in}3} \left(\boldsymbol{\xi} \right) \right)}{\partial \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \right)} \xi_{\mu,\nu} \right) = 0 \tag{4.10}$$

которое верно при $t = 0$, когда $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$. Если же $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{x}$, то уравнение (4.10), вообще говоря, неверно.

Итак, четыре уравнения (4.8), (4.9) образуют систему динамических уравнений для четырех динамических переменных $\boldsymbol{\xi}$, φ. Динамические уравнения (4.8) являются эволюционными уравнениями, описывающими эвлюцию $\boldsymbol{\xi}$ в том смысле, что они содержат временны́е производные величин $\boldsymbol{\xi}$. Если состояние $\boldsymbol{\xi}\left(t, \mathbf{x}\right)$, $\varphi\left(t, \mathbf{x}\right)$ жидкости задано в момент времени t, динамические уравнения (4.8) однозначно определяют величины $\boldsymbol{\xi}\left(t + dt, \mathbf{x}\right)$ в следующий момент времени.

Уравнение (4.9) и уравнение (4.4) не являются эволюционными уравнениями, потому что они не содержат временны́х производных. Величина $\varphi\left(t + dt, \mathbf{x}\right)$ не связана прямо с величиной $\varphi\left(t, \mathbf{x}\right)$. Можно определить единственное решение уравнения (4.9), если имеется некоторая дополнительная информация о переменной φ на границе ∂V объема V, где рассматривается течение жидкости. Формально это следует из того факта, что уравнение Пуассона (4.9) имеет единственное решение в области V, если задана надлежащая информация на границе ∂V объема V.

В случае баротропной жидкости соответствующее уравнение (3.15) для φ является эволюционным, и нет необходимости в такой информации. По крайней мере, в точке $\mathbf{x}$, которая достаточно далека от границы ∂V, значения величины $\varphi\left(t, \mathbf{x}\right)$ в интервале $0 < t < T$ могут быть определены однозначно для времени T, которое необходимо для прохождения сигнала от ближайшей точки границы ∂V до точки $\mathbf{x}$. Скорость сигнала равна скорости звука в жидкости. В несжимаемой жидкости скорость звука бесконечна, временно́й интервал $T = 0$, и динамическое уравнение (4.9) не является эволюционным. В соответствии с этим обстоятельством значение $\varphi\left(t + dt, \mathbf{x}\right)$ зависит от граничных условий в момент времени $t + dt$, а не от значений $\varphi\left(t, \mathbf{x}\right)$ и $\boldsymbol{\xi}\left(t, \mathbf{x}\right)$.

Можно выделить две части в динамических уравнениях (4.8): нелокальный потенциальный член $\varphi_{,\nu}\xi_{\alpha,\nu}$ и локальный "завихренный" член $v^\mu_{\mathrm{in}}\xi_{\mu,\nu}\xi_{\alpha,\nu}$. "Завихренный" член описывает влияние "вмороженной" завихренности на течение жидкости. Потенциалный член описывает нелокальное взаимодействие в жидкости, связанное с потенциалом φ и с бесконечной скоростью звука. В баротропной жидкости скорость звука конечна и потенциальный член описывает локальное взаимодействие.

5 Стационарное течение несжимаемой жидкости

Представим себе, что ставя проблему Коши, мы выбрали начальные условия таким образом, что течение несжимаемой жидкости оказалось стационарным, т.е.

$$\partial_0 \rho = 0, \qquad \partial_0 \mathbf{v} = 0 \tag{5.1}$$

В этом случае линии тока стационарны. Пусть потенциалы Клебша ξ_2 and ξ_3 маркируют эти линии тока. Потенциалы Клебша ξ_2 and ξ_3 можно выбрать не зависящими от времени. Динамические уравнения (2.13), (2.14), (2.15), (2.17) принимают вид

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \equiv \rho_1 \frac{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x^1, x^2, x^3)} = \rho_1 = \text{const} \tag{5.2}$$

$$v^\mu = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\mu}} \equiv \frac{\partial (x^\mu, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x^0, x^1, x^2, x^3)} = -\xi_{1,0} \frac{\partial (x^\mu, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x^1, x^2, x^3)}, \qquad \mu = 1, 2, 3 \tag{5.3}$$

$$\partial_0 \xi_1 + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}) \xi_1 = 0, \qquad (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}) \xi_2 = 0, \qquad (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}) \xi_3 = 0 \tag{5.4}$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} \varphi + g^\alpha (\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\nabla} \xi_\alpha \tag{5.5}$$

Запишем уравнения (5.3), (5.2) соответственно в виде

$$\mathbf{v} = -\xi_{1,0} (\boldsymbol{\nabla} \xi_2 \times \boldsymbol{\nabla} \xi_3), \qquad \boldsymbol{\nabla} \xi_1 (\boldsymbol{\nabla} \xi_2 \times \boldsymbol{\nabla} \xi_3) = 1 \tag{5.6}$$

Положим $\xi_{1,0} = -1$. Получаем

$$\mathbf{v} = (\boldsymbol{\nabla} \xi_2 \times \boldsymbol{\nabla} \xi_3), \qquad \xi_{1,0} = -1 \tag{5.7}$$

Первое уравнение (5.4) принимает вид

$$(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}) \xi_1 = 1, \tag{5.8}$$

Интегрируем второе уравнение (5.6), рассматривая переменные ξ_2, ξ_3 как заданные функции аргумента $\mathbf{x}$. Оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x, y, z)} = \frac{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (s, \xi_2, \xi_3)} D(\mathbf{x}) = 1, \qquad D(\mathbf{x}) = \frac{\partial (s, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x, y, z)} \tag{5.9}$$

где s есть некоторая функция переменных $\mathbf{x}$, выбранная таким образом, что

$$D(\mathbf{x}) = \frac{\partial (s, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x, y, z)} \neq 0 \tag{5.10}$$

Разрешим уравнения

$$\xi_2 = \xi_2 (x, y, z), \qquad \xi_3 = \xi_3 (x, y, z), \qquad s = s (x, y, z) \tag{5.11}$$

в виде

$$x = F_1(s, \xi_2, \xi_3), \qquad y = F_2(s, \xi_2, \xi_3), \qquad z = F_3(s, \xi_2, \xi_3) \tag{5.12}$$

и рассчитаем

$$\Delta(s, \xi_2, \xi_3) = D\left(F_1(s, \xi_2, \xi_3), F_2(s, \xi_2, \xi_3), F_3(s, \xi_2, \xi_3)\right) \tag{5.13}$$

Уравнение (5.9) может быть записано в виде

$$\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(s, \xi_2, \xi_3)} = \frac{1}{\Delta(s, \xi_2, \xi_3)} \tag{5.14}$$

Оно интегрируется в виде

$$\xi_1 = \int \frac{ds}{\Delta(s, \xi_2, \xi_3)} \tag{5.15}$$

где интегрирование производится при фиксированных ξ_2, ξ_3.

Исключим переменную φ из уравнения (5.5), взяв его ротор. Получаем

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} = \frac{1}{2}\Omega^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\nabla}\xi_\alpha \times \boldsymbol{\nabla}\xi_\beta) = \Omega^{23}(\boldsymbol{\nabla}\xi_2 \times \boldsymbol{\nabla}\xi_3) + \Omega^{31}(\boldsymbol{\nabla}\xi_3 \times \boldsymbol{\nabla}\xi_1) + \Omega^{12}(\boldsymbol{\nabla}\xi_1 \times \boldsymbol{\nabla}\xi_2) \tag{5.16}$$

где

$$\Omega^{\alpha\beta} = \Omega^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \frac{\partial g^a}{\partial \xi_\beta}(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\partial g^\beta}{\partial \xi_\alpha}(\boldsymbol{\xi}) = g^{a,\beta}(\boldsymbol{\xi}) - g^{\beta,\alpha}(\boldsymbol{\xi}) \tag{5.17}$$

Величины $\Omega^{\alpha\beta}$ описывают завихренность течения жидкости в координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3, как это следует из соотношения (5.16), записанного в виде

$$\partial_\mu v^\nu(\mathbf{x}) - \partial_\nu v^\mu(\mathbf{x}) = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\nu}\Omega^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}) \tag{5.18}$$

Это соотношение можно интерпретировать как преобразование тензора $\partial_\mu v^\nu - \partial_\nu v^\mu$ от координат $\boldsymbol{\xi}$ к координатам $\mathbf{x}$.

Переменные ξ_2 и ξ_3 не зависят от t, тогда как ξ_1 есть линейная функция времени t. Левая часть равенства (5.16) не зависит от t. Это означает, что величины $\Omega^{\alpha\beta}$ тоже не зависят от t. Они зависят только от ξ_2, ξ_3, но не от ξ_1, потому что ξ_1 зависит от t. Дифференцируя (5.15), получаем

$$\boldsymbol{\nabla}\xi_1 \times \boldsymbol{\nabla}\xi_2 = \frac{\boldsymbol{\nabla}s \times \boldsymbol{\nabla}\xi_2}{\Delta(s, \xi_2, \xi_3)} + (\boldsymbol{\nabla}\xi_3 \times \boldsymbol{\nabla}\xi_2)\frac{\partial}{\partial \xi_3}\int \frac{ds}{\Delta(s, \xi_2, \xi_3)} \tag{5.19}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\xi_1 \times \boldsymbol{\nabla}\xi_3 = \frac{\boldsymbol{\nabla}s \times \boldsymbol{\nabla}\xi_3}{\Delta(s, \xi_2, \xi_3)} + (\boldsymbol{\nabla}\xi_2 \times \boldsymbol{\nabla}\xi_3)\frac{\partial}{\partial \xi_2}\int \frac{ds}{\Delta(s, \xi_2, \xi_3)} \tag{5.20}$$

Подставляя соотношения (5.19), (5.20) в (5.16) и используя (5.7), получаем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} &= \left(\Omega^{23} - \Omega^{31}\frac{\partial}{\partial \xi_2}\int \frac{ds}{\Delta(s, \xi_2, \xi_3)} - \Omega^{12}\frac{\partial}{\partial \xi_3}\int \frac{ds}{\Delta(s, \xi_2, \xi_3)}\right)\mathbf{v} \\ &\quad + \frac{\boldsymbol{\nabla}s \times (\Omega^{12}\boldsymbol{\nabla}\xi_2 - \Omega^{31}\boldsymbol{\nabla}\xi_3)}{\Delta(s, \xi_2, \xi_3)}, \qquad \Omega^{\alpha\beta} = \Omega^{\alpha\beta}(\xi_2, \xi_3)\end{aligned} \tag{5.21}$$

Три независимых уравнения (5.21) осуществляют описание стационарного течения несжимаемой жидкости в терминах обобщенной функции тока (ОФТ) $\{\xi_2, \xi_3\}$. Скорость $\mathbf{v}$ выражается через ОФТ с помощью соотношения (5.7). Переменная s выбрана таким образом, чтобы имело место неравенство (5.10). Например, можно положить $s = x$. Тогда получаем из (5.10)

$$\Delta = \frac{\partial (x, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x, y, z)} = v^1 (x, \xi_2, \xi_3)$$

В этом случае уравнения (5.21) имеют особую точку, когда составляющая скорости v^1 равна нулю. При другом выборе переменной s особая точка не возникает, или появляется в другом месте. Это означает, что возможная особая точка есть результат неудачного описания. Она может быть устранена при надлежащем выборе переменной s.

Традиционная постановка задачи о стационарном течении несжимаемой жидкости может быть получена из динамических уравнений (2.12) и (5.1). Она имеет вид

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = 0 \tag{5.22}$$

Первое уравнение (5.22) может быть решено введением ОФТ $\{\xi_2, \xi_3\}$. Тогда скорость выражается с помощью (5.7), и мы получаем динамические уравнения для стационарного течения несжимаемой жидкости

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v} = (\boldsymbol{\nabla}\xi_2 \times \boldsymbol{\nabla}\xi_3) \tag{5.23}$$

Сравним две различные постановки задачи о стационарном течении несжимаемой жидкости. Сравним уравнения (5.21) с уравнениями (5.22). Сначала рассмотрим уравнения (5.22). В случае потенциального течения, когда

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi, \tag{5.24}$$

второе уравнение (5.22) удовлетворяется тождественно. Первое уравнение (5.22) приводит к уравнению Лапласа

$$\boldsymbol{\nabla}^2\varphi = 0 \tag{5.25}$$

которое имеет единственное решение при условии, что нормальная производная $(\mathbf{n}\boldsymbol{\nabla})\,\varphi$ задается на границе ∂V объема V, где рассматривается течение жидкости. Другими словами, для определения единственного потенциального течения достаточно задать скорость $\mathbf{v}$ на границе ∂V. Какую информацию нужно задать для определения единственного завихренного течения? Считается, что в случае завихренного течения достаточно той же информации, что и для потенциального течения. Почему? Потому что в случае нестационарного течения достаточно задать начальную скорость $\mathbf{v}_{\mathrm{in}}(\mathbf{x})$ во всем объеме V и скорость $\mathbf{v}_{\mathrm{b}}(t, , \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial V$ на границе ∂V. Эта информация одна и та же для потенциального и завихренного течений. В стационарном случае определение завихренного течения требует дополнительной информации по сравнению с потенциальным течением. Нужно задать еще завихренность $\Omega^{\alpha\beta}$ на каждой линии тока. На самом деле, завихренность задается и в стационарном потенциальном течении. Она просто равна нулю, и эта информация воспринимается как отсутствие информации.

Почему нужно дополнительно задавать завихренность в стационарном течении? Почему можно не задавать завихренность в нестационарном случае? На самом деле, нужно задавать завихренность во всех случаях, но в нестационарном случае завихренность определяется полем начальной скорости $\mathbf{v}_{\rm in}(\mathbf{x})$, заданной во всем объеме V. В стационарном случае скорость задается только на границе ∂V, и завихренность не может быть определена на основе этой информации. В этом случае можно определить только одну составляющую вектора завихренности $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$. В результате завихренность должна быть задана дополнительно.

Замечание. Обычно считается, что проблема движения тела в жидкости эквивалентана задче обтекания неподвижного тела потоком жидкости. Решение первой проблемы зависит от скорости тела. Переход от первой проблемы ко второй осуществляется с помощью перехода к системе координат, где тело покоится. Это преобразование координат зависит только от скорости тела и не зависит от других характеристик жидкости (например, от завихренности жидкости). Движение тела в неподвижной жидкости со скоростью $\mathbf{v} = 0$ отличается от движения тела в практически неподвижной жидкости, где средняя скорость $\langle\mathbf{v}\rangle = 0$, но в жидкости имеются вихри. В последнем случае нельзя задать течение жидкости с произвольными вихрями, потому что это течение должно быть совместно с гидродинамическими уравнениями. Чтобы задать течение "практически неподвижной" жидкости, нужно решить динамические уравнения. Имеется масса различных течений жидкости с нулевой средней скоростью $\langle\mathbf{v}\rangle = 0$ и вихрями расположенными в различных местах течения. Множество этих течений описывается завихренностью $\Omega^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})$, заданной на всех линиях тока.

Теперь мы рассмотрим уравнения (5.21), которые содержат неопределенные функции $\Omega^{\alpha\beta}(\xi_2, \xi_3)$. Как мы видели в разделе 4, функции $g^{\alpha}(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1, 2, 3$ содержат полную информацию, необходимую для определения единственного течения жидкости, тогда как начальные и граничные условия для переменных $\boldsymbol{\xi}$ не влияют на течение жидкости и могут быть выбраны произвольно. В случае потенциального течения все функции $\Omega^{\alpha\beta}(\xi_2, \xi_3) = 0$, и мы получаем из (5.21)

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{v} = (\boldsymbol{\nabla}\xi_2 \times \boldsymbol{\nabla}\xi_3) \tag{5.26}$$

Заменяя второе уравнение (5.26) эквивалентным уравнением $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} = 0$, сводим задачу к уравнениям (5.24), (5.25).

В случае завихренного течения завихренность $\Omega^{\alpha\beta}$ должна быть задана на каждой линии тока, помеченной переменными ξ_2, ξ_3. Если течение жидкости содержит замкнутые линии тока, которые не пересекают границу ∂V, то нельзя определить завихренность $\Omega^{\alpha\beta}$ на этих линиях тока, задавая граничные условия. В этом случае нужна дополнительная информация, отличная от граничных условий. Можно получить стационарное течение в результате процесса установления течения. В этом случае мы должны задать начальную скорость $\mathbf{v}_{\text{in}}(\mathbf{x})$ во всем объеме V, и завихренность на замкнутых линиях тока определяется начальной скоростью $\mathbf{v}_{\text{in}}(\mathbf{x})$. Используя разные процессы установления, получим различные стационарные течения при одних и тех же граничных условиях. Экспериментаторам, работающим с завихренными течениями, этот факт хорошо известен.

Уравнения (5.21) суть уравнения для обобщенной функции тока (ОФТ) $\{\xi_2, \xi_3\}$. Эти уравнения нелинейны. В терминах переменных $\mathbf{v}, \xi_2, \xi_3$ уравнения (5.21) содержат члены, линейные относительно $\mathbf{v}$. Уравнения (5.21) становятся простыми в том частном случае, когда Ω^{23} =const и $\Omega^{13} = \Omega^{12} = 0$. В этом случае мы получаем линейные уравнения

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = \Omega^{23}\mathbf{v}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} = 0, \qquad \Omega^{23} = \text{const} \tag{5.27}$$

которые можно решать без рассмотрения переменных ξ_2, ξ_3.

6 Стационарное течение несжимаемой жидкости, описываемое в лагранжевых координатах

Динамические уравнения (5.21) содержат произвольные функции $\Omega^{\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi})$ как функции зависимых переменных. Иногда удобно иметь динамические уравнения, где неопределенные функции были бы функциями независимых переменных. Преобразуем динамические уравнения (5.4), (5.9) и (5.16) к независимым переменным $t, \boldsymbol{\xi}$.

Введем обозначения(3.20)

$$x^\alpha = x^\alpha(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \qquad x^{\alpha,\beta} \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi_\beta}, \qquad \alpha, \beta = 1,2,3 \tag{6.1}$$

$$X \equiv \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \det\left|\left|x^{\alpha,\beta}\right|\right|, \qquad \alpha, \beta = 1,2,3 \tag{6.2}$$

Мы рассматриваем якобиан X как 3-линейную функцию аргументов $x^{\alpha,\beta}$. Получаем

$$\xi_{\alpha,\beta} = X^{-1}\frac{\partial X}{\partial x^{\beta,\alpha}}, \qquad \alpha, \beta = 1,2,3 \tag{6.3}$$

$$v^\alpha = \frac{\partial(x^\alpha, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \frac{\partial(x^\alpha, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = x^{\alpha,1}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{6.4}$$

Запишем динамические уравнения (5.4), (5.9) и (5.16) в виде

$$X \equiv \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = 1 \tag{6.5}$$

$$v^{\alpha}\xi_{1,\alpha}=1,\qquad v^{\alpha}\xi_{2,\alpha}=0,\qquad v^{\alpha}\xi_{3,\alpha}=0,\tag{6.6}$$

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\partial_{\alpha}v^{\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\Omega^{\rho\sigma}\left(\xi_2,\xi_3\right)\xi_{\rho,\alpha}\xi_{\sigma,\beta}\tag{6.7}$$

где $\varepsilon_{\mu\alpha\beta}$ есть псевдотензор Леви-Чивита.

Подставляя $\xi_{\alpha,\beta}$ и v^{α}, взятые из (6.3), (6.4) в (6.6), получаем уравнения

$$x^{\alpha,1}X^{-1}\frac{\partial X}{\partial x^{\alpha,1}}=1,\qquad x^{\alpha,1}X^{-1}\frac{\partial X}{\partial x^{\alpha,2}}=0,\qquad x^{\alpha,1}X^{-1}\frac{\partial X}{\partial x^{\alpha,3}}=0,\tag{6.8}$$

которые удовлетворяются тождественно. Подставим $\xi_{\alpha,\beta}$ и v^{α}, взятые из (6.3), (6.4) в (6.7). Принимая во внимание (6.5), получаем

$$x^{\beta,1\gamma}\frac{\partial X}{\partial x^{\alpha,\gamma}}-x^{\alpha,1\gamma}\frac{\partial X}{\partial x^{\beta,\gamma}}=\Omega^{\rho\sigma}\left(\xi_2,\xi_3\right)\frac{\partial X}{\partial x^{\alpha,\rho}}\frac{\partial X}{\partial x^{\beta,\sigma}}\tag{6.9}$$

Свертывая (6.9) с $x^{\alpha,\mu}$ и $x^{\beta,\nu}$ и принимая во внимание (6.5), получаем

$$x^{\alpha,1\mu}x^{\alpha,\nu}-x^{\alpha,1\nu}x^{\alpha,\mu}=\Omega^{\mu\nu}\left(\xi_2,\xi_3\right),\qquad \mu,\nu=1,2,3\tag{6.10}$$

где производится суммирование по $\alpha=1,2,3$.

В трехмерном пространстве координат ξ_1,ξ_2,ξ_3 уравнения (6.10) могут быть записаны в векторном виде

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}\boldsymbol{\nabla}_{\xi}v^{\alpha}\times\boldsymbol{\nabla}_{\xi}x^{\alpha}=\boldsymbol{\omega}\left(\xi_2,\xi_3\right),\qquad \boldsymbol{\nabla}_{\xi}=\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_1},\frac{\partial}{\partial\xi_2},\frac{\partial}{\partial\xi_3}\right\},\qquad v^{\alpha}=x^{\alpha,1},\qquad \alpha=1,2,3\tag{6.11}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\left\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\right\},\qquad \omega_{\mu}\left(\xi_2,\xi_3\right)=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}\left(\xi_2,\xi_3\right),\qquad \mu=1,2,3\tag{6.12}$$

Наконец, уравнение (6.5) может быть разрешено относительно x^1 тем же самым способом, каким уравнение (5.9) было разрешено относительно ξ_1. Получаем

$$x^1=\int\frac{ds}{\Delta_1\left(s,x^2,x^3\right)},\qquad \Delta_1=\frac{\partial\left(s,x^2,x^3\right)}{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}\tag{6.13}$$

где s есть некоторая функция аргументов ξ_1,ξ_2,ξ_3, а якобиан Δ_1 рассматривается как функция аргументов s,x^2,x^3. В частности, если $s=\xi_1$,

$$\Delta_1=\frac{\partial\left(x^2,x^3\right)}{\partial\left(\xi_2,\xi_3\right)}=\frac{1}{v^1\left(\xi_1,x^2,x^3\right)},\qquad x^1=\int v^1\left(\xi_1,x^2,x^3\right)d\xi_1\tag{6.14}$$

Используя соотношение (6.13) или (6.14), можно исключить переменные x^1 и $v^1=x^{1,1}$ из уравнений (6.11). Получаем систему динамических уравнений для переменных x^2,x^3 в двумерном пространстве координат ξ_2,ξ_3 с переменной ξ_1, рассматриваемой как эволюционная переменная (время).

Уравнения (6.11), (6.14) довольно сложны, особенно из-за уравнения (6.14), которое содержит операцию перехода от независимых переменных $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$

к независимым переменным $\{\xi_1, x^2, x^3\}$. Свойства этой операции слабо изучены. По-видимому, эта операция является атрибутом несжимаемой жидкости, потому что она присутствует в динамических уравнениях (5.21), записанных в эйлеровых координатах. Неопределенные функции $\Omega^{\alpha\beta}$ описывающие завихренность являются функциями независимых переменных в уравнениях (6.11), тогда как в уравнениях (5.21) они являются функциями зависимых переменных. С этой точки зрения уравнения (6.11) более удобны для исследования завихренных течений.

7 Заключительные замечания

Мы видели, что постановка проблемы обтекания более сложна для стационарных течений, чем для нестационарных, хотя динамические уравнения для нестационарного случая более сложны. Стационарные граничные условия не предопределяют единственности стационарного течения, даже если они определяют завихренность на всех линиях тока, пересекающих границу рассматриваемой области течения. Есть некоторая надежда, что описание стационарных течений идеальной жидкости в лагранжевых координатах окажется более эффективным.

Список литературы

[1] Rylov Yu.A. Integration of complete system of dynamic equations for ideal fluid. (Available at http://arXiv.org/abs /physics/9905044).)

[2] Rylov Yu. A. Hydrodynamic equations for incompressible inviscid fluid in terms of generalized stream function". *Int. J. Math. & Mat. Sci.* (in print, Available at http://arXiv.org/abs /physics/0303065, v6).

[3] Clebsch, A. Über eine allgemaine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).

[4] Clebsch, A. Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).

[5] Lin, C.C. Hydrodynamics of Helium II. *Proc. Int. Sch Phys.* Course XXI, pp. 93-146, New York, Academic, 1963.