# Некоторые тонкости римановой геометрии

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
Россия, Москва 119526, Проспект Вернадского 101-1.
e-mail: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

**Аннотация**

Показывается, что традиционное представление уравнений Максвелла для электромагнитного поля в римановом пространстве-времени оказывается сомнительным. Причиной сомнений является тот факт, что решение уравнений Максвелла в пространстве-времени Минковского не переходит в решение уравнений Максвелла в римановом пространстве-времени после замены в решении мировой функции Минковского $\sigma_{\mathrm{M}}$ на мировую функцию $\sigma_{\mathrm{R}}$ риманова пространства-времени.

## 1 Введение

Рассматриваемая проблема возникла при попытке обобщения динамики в римановом пространстве-времени на случай не-римановой пространственно-временной геометрии. Физическая геометрия $\mathcal{G}$ является геометрией, которая описывается в терминах мировой функции $\sigma$ и только в терминах $\sigma$ [1, 2]. Физическая геометрия $\mathcal{G}$и все ее соотношения могут быть сформулированы без ссылки на систему координат и другие средства описания (многообразие, размерность, линейное векторное пространство). При традиционном подходе к геометрии пространства-времени утверждается, что риманова геометрия является наиболее общим видом геометрии пространства-времени. Это утверждение представляет собой необоснованное ограничение, потому что многие физические геометрии могут рассматриваться как возможные геометрии пространства-времени. Вообще говоря, физическая геометрия многовариантна и неаксиоматизируема, тогда как риманова геометрия претендует на то, чтобы быть аксиоматизируемой геометрией.

Многовариантность геометрии означает, что в точке $P_0$ имеется много векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, ..$ , которые эквивалентны вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в точке $Q_0$, но векторы

$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, ..$ не эквивалентны между собой. Векторы эквивалентны ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \text{eqv} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$), если векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ параллельны и их длины $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ и $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$ равны

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 : \qquad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{1.1}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{1.2}$$

где скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1)$ и длина $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|$ вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ определяются соотношениями

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_0, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) \tag{1.3}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2 = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1) = 2\sigma(P_0, P_1) \tag{1.4}$$

Подчеркнем, что эквивалентность (1.1), (1.2) двух векторов определяется в терминах мировой функции $\sigma$ и только в терминах $\sigma$, которая определяется следующим образом

$$\sigma : \qquad \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \sigma(P, P) = 0, \qquad \forall P \in \Omega \tag{1.5}$$

Здесь $\Omega$ есть множество точек, на котором задана физическая геометрия $\mathcal{G}$. Мировая функция представляет собой $\sigma(P, Q) = \frac{1}{2}\rho^2(P, Q)$, где $\rho(P, Q)$ есть расстояние между точками $P$ и $Q$.

В собственно евклидовой геометрии отношение эквивалентности (1.1), (1.2) совпадает с традиционным определение эквивалентности двух векторов, которое формулируется как равенство составляющих векторов в декартовой системе координат

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}, \text{ если} \qquad p_i = q_i, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{1.6}$$

где $p_i$ и $q_i$ суть координаты векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ в некоторой декартовой системе координат, а $n$ есть размерность собственно евклидова пространства.

Определение (1.1), (1.2) отличается от традиционного определения (1.6) в том отношении, что определение (1.1), (1.2) не содержит таких вспомогательных средств описания как размерность, система координат и понятие линейного векторного пространства. Кроме того, определение (1.1), (1.2) содержит два уравнения для собственно евклидовой геометрии любой размерности, тогда как в традиционном определении число уравнений зависит от размерности пространства. Все это означает, что определение (1.1), (1.2) более фундаментально, чем определение (1.6), которое может использоваться, только если в геометрии можно ввести понятие линейного векторного пространства с заданным на нем скалярным произведением. Отношение эквивалентности (1.1), (1.2) может быть использовано в любой физической геометрии, тогда как отношение эквивалентности (1.6) может использоваться только в той геометрии пространства-времени, где может быть введено линейное векторное пространство.

Вообще говоря, физическая геометрия многовариантна, потому что определение (1.1), (1.2) допускает существование многих векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, которые эквивалентны заданному вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, но не эквивалентны между собой. Если физическая геометрия $\mathcal{G}$ многовариантна, то отношение эквивалентности (1.1), (1.2) интранзитивно. В этом случае физическая геометрия не может быть аксиоматизируемой, потому что в любой аксиоматизируемой геометрии отношение эквивалентности транзитивно.

В римановой геометрии мировая функция $\sigma_{\mathrm{R}}$ определяется отношением

$$\sigma_{\mathrm{R}}\left(P,Q\right)=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathcal{L}_{[PQ]}}\sqrt{g_{ik}dx^{i}dx^{k}}\right)^{2} \tag{1.7}$$

где $\mathcal{L}_{[PQ]}$ является отрезком геодезической, соединяющей точки $P$ и $Q$. Можно построить риманову геометрию как физическую геометрию $\mathcal{G}_{\sigma\mathrm{R}}$, используя соотношение (1.7), как определение мировой функции. Мы будем ссылаться на геометрию $\mathcal{G}_{\sigma\mathrm{R}}$ как на $\sigma$-риманову геометрию, которая отличается от традиционного построения римановой геометрии.

Традиционная риманова геометрия строится как множество бесконечно малых евклидовых геометрий "склеенных" между собой некоторым способом. Способ склеивания определяет свойства римановой геометрии. Этот способ склеивания описывает характер зависимости метрического тензора от координат. Вообще говоря, риманова геометрия оказывается многовариантной в том смысле, что эквивалентность удаленных векторов зависит от пути их параллельного переноса. Чтобы устранить многовариантность римановой геометрии, отношение эквивалентности для удаленных векторов устраняется. В результате традиционная риманова геометрия претендует на одновариантность и аксиоматизируемость. Однако такой подход непоследователен, потому что многовариантная геометрия неаксиоматизируема, и нельзя превратить неаквиоматизируемую геометрию в аксиоматизируемую с помощью запрещения рассмотрения эквивалентности удаленных векторов.

Итак, $\sigma$-риманова геометрия многовариантна и, вообще говоря, последовательна. $\sigma$-риманова геометрия не может быть непоследовательной в принципе, потому что она не выводится из аксиоматики. Непоследовательность геометрии является атрибутом метода построения геометрии, когда геометрия выводится из системы аксиом. $\sigma$-риманова геометрия строится как деформация собственно евклидовой геометрии. Все утверждения $\mathcal{P}_{\mathrm{E}}$ собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ представляются в терминах мировой функции $\sigma_{\mathrm{E}}$ в виде $\mathcal{P}_{\mathrm{E}}\left(\sigma_{\mathrm{E}}\right)$. Заменяя $\sigma_{\mathrm{E}}$ мировой функцией $\sigma_{\sigma\mathrm{R}}$ $\sigma$-римановой геометрии, получаем все утверждения $\mathcal{P}_{\mathrm{E}}\left(\sigma_{\sigma\mathrm{R}}\right)$ $\sigma$-римановой геометрии. Процедура деформации не использует логических рассуждений, и она не может быть непоследовательной в принципе.

Традиционная риманова геометрия одновариантна, но не последовательна. Эта непоследовательность проявляет себя, в частности, в обобщении динамики в римановом пространстве-времени на случай произвольной физической геометрии пространства-времени.

## 2 Обобщение динамики в римановом пространстве-времени на случай произвольного пространства-времени

Если геометрия пространства-времени может быть произвольной физической геометрией, мы должны обобщить динамику в римановом пространстве-времени на случай произвольной физической геометрии пространства-времени. Первая часть этого обобщения (движение точечной частицы в заданных классических полях:гравитационном и электромагнитном) была успешно осуществлена в [3]. Это обобщение приводит к динамическим уравнениям в конечных разностях. Это совершенно естественно, потому что пространственно-временная геометрия может быть дискретной, а использование дифференциальных динамических уравнений в дискретной геометрии пространства-времени кажется противоестественным, тогда как динамические уравнения в конечных разностях годятся для употребления как в непрерывной, так и в дискретной геометрии пространства-времени. Такое обобщение дает неожиданные результаты. Оказывается, что подходящий выбор геометрии пространства-времени, свободный от необоснованных ограничений римановой геометрии, позволяет объяснить квантовые эффекты с помощью статистического описания многовариантного движения частиц, порожденного многовариантностью геометрии пространства-времени. Кроме того, устройство элементарной частицы определяется структурой ее каркаса. Каркас представляет собой несколько точек в пространстве-времени. Взаимное расположение этих точек определяет структуру каркаса [3]. Квантовые свойства (волновая функция, квантование, перенормировка) оказываются излишними. В частности дираковская частица оказывается составной [4]. Ее каркас состоит из трех точек. Мировая цепь такой частицы представляет собой пространственноподобную винтовую линию с времениподобной осью. Таким образом, обобщение, предлагаемое в работе [3], осуществляет обобщение специальной теории относительности на случай произвольной физической геометрии пространства-времени.

Вторая часть обобщения представляет собой рассмотрение влияния распределения материи на геометрию пространства-времени. Общая теория относительности рассматривает это влияние в рамках римановой геометрии пространства-времени. Необходимо обобщить общую теорию относительности на случай произвольной геометрии пространства-времени. В принципе эта проблема решается представлением уравнений Максвелла и уравнений тяготения в терминах мировой функции $\sigma_{\sigma\mathrm{R}}$ римановой геометрии пространства-времени. После этого мироввая функция $\sigma_{\sigma\mathrm{R}}$ заменяется мировой функцией $\sigma$ произвольной физической геометрии пространства-времени. Тогда нужно будет выбрать такую геометрию пространства-времени, которая согласуется с экспериментальными данными.

Однако, попытка обобщения уравнений Максвелла для электромагнитного поля встречает трудности. В пространственно-временной геометрии Минковского динамические уравнения для электромагнитного потенциала $A_k$ имеют вид

$$g_{\mathrm{M}}^{ik}\partial_i\partial_k A_l = \frac{4\pi}{c}j_l, \qquad F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \tag{2.1}$$

где $F_{ik}$ есть тензор электромагнитного поля, а $j_l(x)$ есть 4-вектор электрического тока, порождающего электромагнитное поле. Мировая функция между точками $x$ и $x'$ имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{M}}(x,x') = \frac{1}{2}g_{\mathrm{M}ik}\left(x^i - x'^i\right)\left(x^k - x'^k\right) \tag{2.2}$$

Первое уравнение (2.1) может быть проинтегрировано в виде

$$A_l(x) = -\frac{4\pi}{c}\int G_{\mathrm{ret}}(x-x')\, j_l(x')\, d^4x' \tag{2.3}$$

где запаздывающая функция Грина $G_{\mathrm{ret}}(x-x')$ удовлетворяет уравнению

$$g_{\mathrm{M}}^{ik}\partial_i\partial_k G_{\mathrm{ret}}(x-x') = -\delta^{(4)}(x-x') = -\prod_{i=0}^{i=3}\delta\left(x^i - x'^i\right) \tag{2.4}$$

и имеет вид

$$G_{\mathrm{ret}}(x-x') = \frac{1}{2\pi}\theta\left(x^0 - x^{0\prime}\right)\delta\left(2\sigma_{\mathrm{M}}(x,x')\right) \tag{2.5}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad x > 0 \\ 0 & \text{если} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Здесь для простоты рассматривается случай, когда плотность 4-тока концентрируется внутри малой пространственной области.

Чтобы записать динамические уравнения (2.1) в римановой геометрии пространства-времени, заменяют частные производные на ковариантные производные. Вместо (2.1)получается

$$g^{ik}\nabla_i\nabla_k A_l = \frac{4\pi}{c}j_l, \qquad F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \partial_i A_k - \partial_k A_i \tag{2.6}$$

где $\nabla_k$ означает ковариантную производную.

Довольно трудно представить дифференциальные уравнения в терминах мировой функции $\sigma_{\sigma\mathrm{R}} = \sigma_{\mathrm{R}}$ $\sigma$-римановой геометрии, потому что мировая функция является интегральной (двух-точечной) величиной. Конечные соотношения и интегральные соотношения выражаются в терминах мировой функции более эффективно. Заменим в выражении (2.5) мировую функцию $\sigma_{\mathrm{M}}$ мировой функцией $\sigma_{\mathrm{R}}$ и подставим полученное выражение в соотношение типа (2.4). Опускаем первый множитель $\frac{1}{2\pi}\theta\left(x^0 - x^{0\prime}\right)$, потому что он дает вклад в динамическое уравнение только при $x^0 = x^{0\prime}$. получаем

$$\begin{aligned} & g^{ik}\nabla_i\nabla_k\left(\delta\left(2\sigma_{\mathrm{R}}(x,x')\right)\right) \\ = \; & g^{ik}\nabla_i\left(\delta'\left(2\sigma_{\mathrm{R}}(x,x')\right)2\sigma_{\mathrm{R}|k}\right) \\ = \; & g^{ik}\left(\delta''\left(2\sigma_{\mathrm{R}}(x,x')\right)4\sigma_{\mathrm{R}|k}\sigma_{\mathrm{R}|i} + \delta'\left(2\sigma_{\mathrm{R}}(x,x')\right)2\sigma_{\mathrm{R}|k|i}\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

где вертикальная черта означает ковариантную производную.

$$\sigma_{\mathrm{R}|k} = \nabla_k \sigma_{\mathrm{R}}(x, x') = \frac{\partial \sigma_{\mathrm{R}}(x, x')}{\partial x^k}$$

Мы используем мировую функцию $\sigma_{\mathrm{R}}$ вместо $\sigma_{\sigma\mathrm{R}}$, потому что эти величины совпадают.

Примем во внимание тождество

$$x\delta''(x) + 2\delta'(x) = 0 \tag{2.8}$$

и тот факт, что риманова мировая функция удовлетворяет уравнению [5]

$$\sigma_{\mathrm{R}|k} g^{ik} \sigma_{\mathrm{R}|i} = 2\sigma_{\mathrm{R}} \tag{2.9}$$

Получаем из (2.7)

$$g^{ik} \nabla_i \nabla_k \left(\delta\left(2\sigma_{\mathrm{R}}(x, x')\right)\right) = 2\delta'\left(2\sigma_{\mathrm{R}}(x, x')\right)\left(g^{ik}\sigma_{\mathrm{R}|k|i} - 4\right) \tag{2.10}$$

Если риманов пространство время совпадает с 4-мерным пространством-временем Минковского, то правая часть уравнения (2.10) обращается в нуль, потому что величина $g^{ik}\sigma_{\mathrm{M}|k|i}$ является скаляром, который в инерциальной системе координат имеет вид

$$g^{ik}\sigma_{\mathrm{M}|k|i} = 4 \tag{2.11}$$

Заметим, что соотношение (2.11) выполняется только в 4-мерном пространстве-времени Минковского.

В случае произвольного риманова пространства-времени это соотношение не верно, вообще говоря, и правая часть соотношения(2.10), вообще говоря, не обращается в нуль. Это означает, что переход от пространства-времени Минковского к риманову пространству-времени с помощью замены мировой функции Минковского в соотношениях (2.3) - (2.5) и процедура замены частных производных ковариантными в динамических уравнениях (2.1) являются двумя различными процедурами.

Таким образом, записывая уравнения Максвелла в терминах мировой функции, мы должны выбрать одну из альтернатив: (1) использовать традиционное представление римановой геометрии, которое претендует на одно-вариантность, но на самом деле одно-вариантным не является, или (2) использовать $\sigma$-риманову геометрию, которая многовариантна и, вообще говоря, неаксиоматизируема.

$\sigma$-риманова геометрия имеет преимущество перед римановой геометрией в том смысле, что она последовательна, тогда как риманова геометрия не является последовательной.

Процедура выведения динамических уравнений (2.6) в римановой геометрии основана на использовании криволинейных систем координат. Динамические уравнения (2.1) записываются в криволинейных координатах в пространстве-времени Минковского в виде (2.6). После этого провозглашается, что форма

(2.6) динамических уравнений верна в произвольном римановом пространстве-времени. Однако, оказывается, что эта декларация не совместима с заменой мировой функции $\sigma_{\mathrm{M}}$ мировой функцией $\sigma_{\mathrm{R}}$ в решениях динамических уравнений (2.6) в пространстве-времени Минковского. Использование системы координат при выводе динамических уравнений (2.6) в случае римановой геометрии представляется сомнительным (сравните с ролью системы координат (1.6) в определении эквивалентности (1.1), (1.2)).

## 3 Заключительные замечания

Таким образом, пытаясь обобщить уравнения Максвелла на случай нериманововой геометрии пространства-времени, мы сталкиваемся с неожиданной проблемой, что традиционное представление уравнений Максвелла в римановой геометрии оказывается сомнительным. Возможно, что аналогичная проблема возникнет при попытке обобщения уравнений тяготения. Следует поискать путь обхода этих проблем.

## Список литературы


[1] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, iss. 12, 733-760, (2002), (Available at http://arXiv.org/abs/math.MG/0103002 ).

[2] Yu. A.Rylov, Tubular geometry construction as a reason for new revision of the space-time conception. Printed in *What is Geometry?* polimetrica Publisher, Italy, pp.201-235, 2005.

[3] Yu. A. Rylov, Generalization of relativistic particle dynamics on the case of non-Riemannian space-time geometry *e-print http://arXiv.org/abs/0811.4562*

[4] Yu. A. Rylov, Geometrical dynamics: spin as a result of rotation with superluminal speed. *e-print http://arXiv.org/abs/0801.1913*

[5] J.L.Synge, *Relativity: the general theory,* North-Holland Publishing company, Amsterdam, 1960.