Что такое геометрия? Математическая геометрия и физическая геометрия как два аспекта собственно евклидовой геометрии

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Первоначально геометрия возникла как наука о свойствах геометрических объектов и их взаимном расположении. Такая интерпретация термина "геометрия" квалифицируется как физическая геометрия. Долгое использование только евклидовой геометрии породило другую интерпретацию термина "геометрия", которая стала интерпретироваться как логическое построение. Такая интерпретация термина "геометрия" квалифицируется как математическая геометрия. Математическую геометрию, вообще говоря, нельзя использовать для описания пространства-времени. Тем не менее, математическая геометрия использовалась для описания пространства-времени в течение всего двадцатого века. Это обстоятельство привело к проблемам в общей теории относительности.

Ключевые слова: физическая геометрия; математическая геометрия; многовариантная геометрия; метрический подход; тахионный газ; темная материя

1 Введение

Геометрия возникла много лет назад как наука о форме геометрических объектов и их взаимном расположении в пространстве. Это была собственно евклидова геометрия, которая могла быть построена как логическое построение. В евклидовой геометрии все логические утверждения выводятся из нескольких базовых утверждений (аксиом). Изучение евклидовой геометрии состоит из доказательства многочисленных теорем. Поскольку только эта геометрия изучалась в течение нескольких столетий, то возникла иллюзия, что доказательство теорем представляет собой содержание геометрии и что не может быть геометрии без теорем.

На самом деле доказательство теорем представляет собой только метод построения геометрии, но не саму геометрию. Любая геометрия представляет собой множество утверждений о свойствах $\mathcal{P}$ геометрических объектов. В принципе эти свойства $\mathcal{P}$ могут быть получены другими методами. Однако был известен только Евклидов метод построения геометрии, и возникла иллюзия, что этот метод и есть сама геометрия.

В соответствии с таким представлением о геометрии всякая геометрия рассматривается в современной математике как логическое построение. Первоначальное представление о геометрии как о науке о форме геометрических объектов и их взаимном расположении в пространстве оказалось забытым. Хотя геометрия применяется для описания геометрических объектов в пространстве или в пространстве-времени, но это применение рассматривается как нечто вторичное. Первичным представлением о геометрии является утверждение, что геометрия является логическим построением. Например, симплектическая геометрия, которая не имеет отношения к описанию геометрических объектов, квалифицируется как геометрия, потому что это логическое построение очень близкое к собственно евклидовой геометрии.

Наряду с представлением о геометрии как о логическом построении существует изначальное представление о геометрии как о науке о форме геометрических объектов и их взаимном расположении в пространстве или в пространстве-времени [1]. Именно это представление о геометрии важно в физических приложениях, и мы будем называть его физической геометрией. Наоборот, представление о геометрии как о логическом построении будем называть математической геометрией. В современной математике доминирует математическая геометрия, и она применяется как геометрия пространства-времени. Физическая геометрия практически отсутствует в современной математике. Некоторые математики даже утверждают, что физическая геометрия (т.е. геометрия полностью описываемая метрикой) не является разделом математики, потому что в физической геометрии отсутствуют расчеты и теоремы.

Физическая геометрия полностью определяется заданием расстояния $\rho(P, Q)$ между любыми парами точек P, Q. Все геометрические соотношения физической геометрии определяются в терминах расстояния ρ и только в терминах ρ. Эти соотношения берутся из собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$, которая является одновременно математической геометрией и физической геометрией. Используя тот факт, что собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ является логическим построением, можно построить все геометрические соотношения и геометрические объекты собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. После этого эти соотношения выражаются в терминах функции расстояния ρ_{E} евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. Заменяя расстояние ρ_{E} в геометрических соотношениях геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ расстоянием ρ физической геометрии $\mathcal{G}$, получаем геометрические соотношения физической геометрии $\mathcal{G}$. Таким образом, физическая геометрия не нуждается в использовании Евклидова метода построения геометрии, который использует сложные доказательства многочисленных теорем. Построение физической геометрии использует уже построенную евклидову геометрию вместо использования евклидова метода построения геометрии.

Вместо расстояния ρ физическая геометрия может описываться мировой функцией $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$. Такое описание является более простым и эффективным, потому что в пространстве-времени мировая функция σ всегда вещественна, тогда как расстояние ρ мнимо для пространственноподобных расстояний.

Такое свойство евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\rm E}$ как размерность не может быть введено в некоторых физических геометриях, потому что введение размерности в евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\rm E}$ связано со специальными свойствами мировой функции $\sigma_{\rm E}$ евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\rm E}$.

В $\mathcal{G}_{\rm E}$ эквивалентность (равенство) двух векторов $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{AB}$ определяется в терминах мировой функции $\sigma_{\rm E}$ следующим образом

$$(\mathbf{AB}\mathrm{eqv}\mathbf{PQ}): \quad (\mathbf{AB}.\mathbf{PQ}) = |\mathbf{AB}| \cdot |\mathbf{PQ}| \wedge |\mathbf{AB}| = |\mathbf{PQ}| \tag{1.1}$$

где скалярное произведение $(\mathbf{AB}.\mathbf{PQ})$ векторов $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{PQ}$ определяется соотношением

$$(\mathbf{AB}.\mathbf{PQ}) = \sigma_{\rm E}(A,Q) + \sigma_{\rm E}(B,P) - \sigma_{\rm E}(A,P) - \sigma_{\rm E}(B,Q) \tag{1.2}$$

Длина вектора $|\mathbf{AB}|$ определяется соотношением

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{2\sigma_{\rm E}(A,B)} \tag{1.3}$$

В $\mathcal{G}_{\rm E}$ n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, ...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ являются линейно зависимыми, если и только если определитель Грама $F_n(\mathcal{P}^n)$ обращается в нуль

$$F_n(\mathcal{P}^n) \equiv \det||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)|| = 0, \quad i,k = 1,2,...n \tag{1.4}$$

где $\mathcal{P}^n = \{P_0, P_2, ...P_n\}$, и скалярное произведение $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)$ определяются соотношением (1.2).

В n-мерном евклидовом пространстве Ω_n выполняются следующие условия

$$\exists\mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega_n, \qquad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \qquad F_k\left(\Omega_n^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{1.5}$$

которые означают, что n есть максимальное число линейно независимых векторов. Это число n есть метрическая размерность пространства Ω_n, или размерность физической геометрии на Ω_n.

Условия (1.5) формулируются в терминах и только в терминах $\sigma_{\rm E}$. В случае произвольной физической геометрии $\mathcal{G}$ определения скалярного произведения и линейной зависимости векторов имеют вид (1.1) – (1.4) с мировой функцией $\sigma_{\rm E}$, замененной мировой функцией σ физической геометрии $\mathcal{G}$. Эти условия довольно ограничительны. Они не выполняются для многих физических геометрий. В этих физических геометриях нельзя ввести размерность геометрии.

Такое утверждение выглядит несколько неожиданным. Например, построение римановой геометрии начинается с введения многообразия, имеющего фиксированную размерность n.

2 Пространственно-временная геометрия Минковского

Пространственно-временная геометрия Минковского должна быть физической геометрией, потому что она используется для описания пространства-времени. Это означает, что равенство двух векторов $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{AB}$ определяется бескоординатными соотношениями (1.1) – (1.3). Обычно используется математическая геометрия Минковского, где два вектора $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{AB}$ эквивалентны, если и только если их координаты $\mathbf{PQ}_k$ и $\mathbf{AB}_k$ равны

$$\mathbf{PQ}_k = \mathbf{AB}_k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \tag{2.1}$$

Для времениподобных векторов $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{AB}$ соотношения (1.1) и (2.1) совпадают, но для пространственноподобных векторов $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{AB}$ соотношения (1.1) и (2.1) различны. В соответствии с (2.1) в точке A имеется один и только один вектор $\mathbf{AB}$, который эквивалентен пространственноподобному вектору $\mathbf{PQ}$. В соответствии с (1.1) в точке A имеется много пространственноподобных векторов $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AB}'$, $\mathbf{AB}''$..., которые эквивалентны вектору $\mathbf{PQ}$, но векторы $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AB}'$, $\mathbf{AB}''$...не эквивалентны между собой. Например, в физической геометрии векторы $\mathbf{AB} = \{r, r\sin\phi, r\cos\phi, z\}$, $\mathbf{AB}' = \{r', r'\sin\phi', r'\cos\phi', z\}$ эквивалентны пространственноподобному вектору $\mathbf{PQ} = \{0, 0, 0, z\}$ для произвольных значений величин $r, r'\phi, \phi'$, но векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{AB}'$, вообще говоря, не эквивалентны. Физическая геометрия, где векторы имеют свойство, что имеется много векторов $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AB}'$, $\mathbf{AB}''$...эквивалентных некоторому вектору $\mathbf{PQ}$, но векторы $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AB}'$, $\mathbf{AB}''$...не эквивалентны между собой, называется многовариантной физической геометрией. В многовариантной геометрии отношение эквивалентности интранзитивно, и эта геометрия неаксиоматизируема, т.е. она не может быть представлена в виде логического построения, потому что в любом логическом построении отношение эквивалентности транзитивно.

Таким образом, если математическая геометрия Минковского используется для описания пространства-времени, то описание пространственноподобных векторов и описание пространственноподобных мировых линий будет неправильным. Причиной подобной некорректности является координатное определение (2.1) эквивалентности векторов. Правильное определение эквивалентности векторов должно быть бескоординатным. Это определение должно формулироваться в терминах мировой функции и только в терминах мировой функции (1.1).

Описывая тахионы, т.е. частицы с пространственноподобными мировыми линиями, в математической геометрии Минковского, мы заключаем, что мировые линии тахионов гладкие. Поскольку такие частицы экспериментально не обнаружили, то считают, что тахионы не существуют.

Описывая тахионы в физической геометрии Минковского, получаем, что мировая линия тахиона не является гладкой. Она вихляет с бесконечной амплитудой, потому что геометрия многовариантна относительно пространственноподобных векторов. Отдельный тахион не может быть обнаружен из-за вихляния его мировой линии. Тот факт, что отдельный тахион не может быть обнаружен экспериментально, не означает, что тахионы не существуют. Отдельный тахион не может быть детектирован, но тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационному полю. Тахионный газ образует так называемую темную материю, которая была обнаружена в космосе [2, 3].

Разумеется обнаружение тахионного газа не означает, что не может быть других частиц темной материи. Но существование тахионного газа разрешает проблему темной материи, если даже не окажется других частиц темной материи. Следует заметить, что объяснение темной материи не требует каких-либо специальных гипотез. Использование физической геометрии пространства-времени непринужденно решает эту проблему.

3 Риманова геометрия пространства-времени

Описывая общую теорию относительности, обычно используют математическую риманову геометрию пространства-времени как наиболее общий вид геометрии. Однако, псевдо-риманова геометрия, которая используется не является математической геометрией, потому что она многовариантна по отношению к пространственноподобным векторам как и геометрия Минковского. Кроме того, она многовариантна по отношению к векторам $\mathbf{PQ}$ и $\mathbf{AB}$, если точки P и A не совпадают $P \neq A$. Это явление известно как отсутствие фернпараллелизма в римановой геометрии, параллелизм рассматривается как понятие математической геометрии. Хотя проблема фернпараллелизма решается с помощью так называемого параллельного переноса, тем не менее непоследовательность римановой геометрии пространства-времени как математической геометрии остается.

Но главный дефект римановой геометрии как геометрии пространства-времени обусловлен тем фактом, что риманова геометрия не является наиболее общей геометрией пространства-времени. Множество физических геометрий является более мощным, чем множество римановых геометрий. Это означает, что при описании произвольного пространства-времени следует использовать физическую геометрию. Уравнения общей теории относительности, записанные в терминах физической геометрии, являются бескоординатными. Они написаны прямо для мировой функции. Кроме того, они отличаются от традиционных гравитационных уравнений, записанных для метрического тензора на основе математической геометрии пространства-времени.

Динамические уравнения общей теории относительности (ОТО) могут быть распространены на случай неримановой (физической) геометрии пространства-времени [4]. В результате получилась расширенная общая теория относительности (РОТО). Динамические уравнения РОТО записаны в бескоординатном виде прямо для мировой функции σ пространства-времени, а не для метрического тензора g_{ik} как в ОТО. Динамические уравнения РОТО позволяют генерировать индуцированную антигравитацию, которая препятствует образованию черных дыр [5].

Список литературы

[1] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, *iss. 12, 733-760, (2002)*, (see also *e-print math.MG/0103002*).

[2] Ю.А.Рылов, Тахионный газ как кандидат на темную материю, *Вестнил РУДН сер. математика, информатика, физика* (2013), iss 2 pp.159-173 (In Russian)

[3] Yu. A. Rylov, Dynamic equations for tachyon gas, *Int. J. Theor. Phys.* **52**, 133(10), 3683- 3695, (2013).

[4] Yu. A. Rylov, General relativity extended to non-Riemannian space-time geometry. *e-print* /0910.3582v7

[5] Yu. A. Rylov, Induced antigravitation in the extended general relativity. *Gravitation and Cosmology*, *Vol.* ***18****, No. 2, pp. 107–112,(2012).*