Какой объект описывает волновая функция?

Ю.А. Рылов

Институт проблем механики РАН,
119526, Москва, Проспект Вернадского, 101-1,
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Показано, что волновая функция описывает состояние статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$ индивидуальных частиц, или среднестатистическую частицу $\langle\mathcal{S}\rangle$. Этот результат следует из того, что в классическом пределе $\hbar = 0$ уравнение Шредингера превращается в динамическое уравнение для статистического ансамбля классических частиц. Представление, что волновая функция описывает состояние индивидуальной частицы, несовместимо с формализмом квантовой механики. Показывается, что статистическая интерпретация квантовой механики есть следствие того факта, что КМ формализм есть формализм статистического ансамбля, ограниченный условиями линейности динамического уравнения.

1 Введение

По определению квантовая система $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ есть непрерывная динамическая система, состояние которой описывается волновой функцией. Имеются два различных мнения о квантовой системе $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$. Является ли квантовая система $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ индивидуальной динамической (или стохастической) системой $\mathcal{S}$, или она является статистическим ансамблем $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$ динамических (или стохастических) систем $\mathcal{S}$? В традиционной копенгагенской интерпретации [1] квантовой механики $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \mathcal{S}$, тогда как в другой версии, известной как статистическая интерпретация [2, 3, 4, 5, 6], $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}]$. Обсуждение этой проблемы длится многие годы на словесном уровне без заметного прогресса. Имеется масса работ по этому вопросу [7]-[25], где дискуссия ведется на качественном (вербальном) уровне без всякой связи с формализмом квантовой мехмники. Все авторы верят в принципы и формализм традиционной квантовой механики, но их интерпретация квантовой механики, вообще говоря, различна. Имеется широкий спектр мнений, потому что различные авторы используют различные исходные положения, и невозможно решить, какие из них правильны. Бесполезно рассматривать и сравнивать позиции разных авторов выполненых на словесном уровне, если можно решить вопрос на математическом уровне, используя точно определенные понятия и величины.

Однако, вопрос о том, что описывает волновая функция не есть вопрос веры. Этот вопрос может быть разрешен на основе принципа соответствия и формализма квантовой механики (КМ). Если в классическом пределе квантовая система $\mathcal{S}_\mathrm{q}$ превращается в отдельную классическую динамическую систему $\mathcal{S}$, то квантовая система $\mathcal{S}_\mathrm{q}$ есть индивидуальная динамическая система $\mathcal{S}$. Если в классическом пределе квантовая система $\mathcal{S}_\mathrm{q}$ превращается в статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$ классических динамических систем, то квантовая система $\mathcal{S}_\mathrm{q}$ есть статистический ансамбль (стохастических) систем. В настоящей работе мы пытаемся решить этот вопрос математически на основе формализма квантовой механики без привлечения каких-либо дополнительных предположений.

Прежде всего мы будем различать индивидуальную квантово-стохастическую частицу (систему) $\mathcal{S}_\mathrm{st}$ от квантовой частицы (системы) $\mathcal{S}_\mathrm{q}$, состояние которой описывается волновой функцией ψ. Частица $\mathcal{S}_\mathrm{st}$ есть дискретная стохастическая система в том смысле, что она имеет конечное число (шесть) степеней свободы, и для нее не существует динамических уравнений. Наоборот, квантовая частица (система) $\mathcal{S}_\mathrm{q}$ является непрерывной динамической системой в том смысле, что она имеет бесконечное число степеней свободы, и существуют динамические уравнения для волновой функции, которая описывает состояние частицы $\mathcal{S}_\mathrm{q}$. Мы покажем, что в пределе $\hbar \to 0$ квантовая частица (система) $\mathcal{S}_\mathrm{q}$ превращается в статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{cl}]$ классических частиц $\mathcal{S}_\mathrm{cl}$. Строго говоря, мы ничего не можем сказать о преобразовании квантово-стохастической частицы $\mathcal{S}_\mathrm{st}$ при $\hbar \to 0$, потому что мы не имеем никакой информации о $\mathcal{S}_\mathrm{st}$ (для $\mathcal{S}_\mathrm{st}$ нет динамических уравнений). Мы можем только предполагать, что при $\hbar \to 0$ квантово-стохастическая частица $\mathcal{S}_\mathrm{st}$ превращается в детерминированную классическую частицу $\mathcal{S}_\mathrm{cl}$, но мы не можем использовать это предположение, потому что КМ формализм не имеет дела с $\mathcal{S}_\mathrm{st}$. Он работает только с $\mathcal{S}_\mathrm{q}$. Мы можем только показать, что такое предположение совместимо с формализмом квантовой механики.

Итак мы намерены доказать, что

$$\text{при } \hbar \to 0, \qquad \mathcal{S}_\mathrm{q} \to \mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{cl}] \tag{1.1}$$

Альтернативное утверждение имеет вид

$$\text{при } \hbar \to 0, \qquad \mathcal{S}_\mathrm{q} \to \mathcal{S}_\mathrm{cl} \tag{1.2}$$

Мы имеем чисто математическую проблему. Системы $\mathcal{S}_\mathrm{q}$ и $\mathcal{E}[\mathcal{S}_\mathrm{cl}]$ суть известные непрерывные динамические системы. Зависимость квантовой частицы $\mathcal{S}_\mathrm{q}$ от параметра $\hbar$ аналитическая. Мы можем проверить какое из соотношений (1.1), (1.2) правильно. Это будет математическое решение рассматриваемой проблемы.

Можно сразу сказать, что преобразование (1.2) непрерывной динамической системы $\mathcal{S}_{\rm q}$ в дискретную динамическую систему $\mathcal{S}_{\rm cl}$ кажется проблематичным, хотя мы не можем полностью игнорировать возможность такого вырождения непрерывной динамической системы. Преобразование (1.1) непрерывной динамической системы $\mathcal{S}_{\rm q}$ в непрерывную $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm cl}\right]$ представляется более правдоподобным.

Для свободной нерелятивистской частицы мы имеем следующие выражения для действий

$$\mathcal{S}_{\rm q}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm q}}\left[\psi,\psi^*\right]=\int\left\{\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi\right\}dtd\mathbf{x} \tag{1.3}$$

где $\psi=\psi\left(t,\mathbf{x}\right)$ есть комплексная одно-компонентная волновая функция, $\psi^*=\psi^*\left(t,\mathbf{x}\right)$ есть величина комплексно сопряженная к ψ, и m есть масса частицы.

$$\mathcal{S}_{\rm cl}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm cl}}\left[\mathbf{x}\right]=\int\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2dt \tag{1.4}$$

где $\mathbf{x}=\left\{x^1\left(t\right),x^2\left(t\right),x^3\left(t\right)\right\}$ и m есть масса частицы.

По определению чистый статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm cl}\right]$ классических частиц $\mathcal{S}_{\rm cl}$ есть такой статистический ансамбль, где функция распределения $F\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right)$ имеет вид

$$F\left(t,\mathbf{x},\mathbf{p}\right)=\rho\left(t,\mathbf{x}\right)\delta\left(\mathbf{p}-\mathbf{P}\left(t,\mathbf{x}\right)\right) \tag{1.5}$$

где ρ и $\mathbf{P}$ суть функции только от $t,\mathbf{x}$.

Действие для чистого статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm cl}\right]$ классических частиц $\mathcal{S}_{\rm cl}$ может быть представлено в виде [26]

$$\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm cl}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm cl}\right]}\left[\mathbf{x}\right]=\int\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2dtd\boldsymbol{\xi} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{x}=\left\{x^1\left(t,\boldsymbol{\xi}\right),x^2\left(t,\boldsymbol{\xi}\right),x^3\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)\right\}$. Параметры $\boldsymbol{\xi}=\left\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\right\}$ маркируют элементы (частицы) статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm cl}\right]$. Действие (1.6) есть сумма (интеграл) действий (1.4). Мы видим из (1.4) и (1.6), что имеется одно-однозначное соответствие между функциями Лагранжа для $\mathcal{S}_{\rm cl}$ и для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm cl}\right]$.

Математическая постановка вопроса очень проста и очевидна. Но, насколько нам известно, она не рассматривалась и не решалась в такой форме. Почему? Имеются две математические проблемы, которые должны быть решены для того, чтобы сравнение действий (1.3) и (1.6) оказалось возможным. Чтобы сравнить действия (1.3) и (1.6) мы должны привести их к одним и тем же зависимым и независимым переменным.

Первая поблема связана с описанием действия (1.6) в терминах волновой функции. Действие (1.6) записано в лагранжевых (независимых) координатах $t,\boldsymbol{\xi}$. Оно легко может быть переписано в эйлеровых (независимых) координатах

$t, \mathbf{x}$, и динамическая система $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm cl}\right]$ превратится в некоторую жидкость без давления. Хорошо известно [27], что уравнение Шредингера

$$i\hbar\partial_0\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi, \qquad -i\hbar\partial_0\psi^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi^* \tag{1.7}$$

порожденное действием (1.3) также может быть записано в гидродинамической форме. Достаточно сделать замену переменных

$$\psi = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}, \qquad \psi^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}, \tag{1.8}$$

подставить (1.8) в (1.7) и разделить вещественую и мнимую части уравнения. В результате получаются выражения для $\partial_0\rho$ и $\partial_0\varphi$. Взяв градиент $\boldsymbol{\nabla}\partial_0\varphi$ и введя скорость $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$, получаем четыре гидродинамических уравнения для четырех зависимых переменных ρ, $\mathbf{v}$. Таким образом, чтобы перейти от описания $\mathcal{S}_{\rm q}$ в терминах волновой функции к гидродинамическому описанию, нужно продифференцировать динамические уравнения. Это означает, что для перехода от гидродинамического описания к описанию в терминах волновой функции, мы должны интегрировать динамические уравнения. Проблема интегрирования гидродинамических уравнений довольно проста в случае потенциального течения, но это сложная проблема в общем случае завихренного течения. Это означает, что для сравнения действий (1.3) и (1.6), мы должны проинтегрировать динамические уравнения для идеальной жидкости без давления в общем случае. Общее интегрирование гидродинамических уравнений, сопровождаемое появлением трех произвольных функций от трех аргументов, есть первая математическая проблема. Эта проблема была решена только в конце восьмидесятых годов XX века [28]. До решения этой проблемы сравнение действий (1.3), (1.6) было невозможно, потому что динамические уравнения, порожденные действием (1.3) являются уравнениями для интегралов гидродинамических уравнений.

Эти интегралы имеют вид [29]

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{b}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\varphi + g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\nabla}\xi_{\alpha}\right), \tag{1.9}$$

где φ есть новая зависимая переменная, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ суть лагранжевы координаты, рассматриваемые как функции от $t, \mathbf{x}$, $b \neq 0$ есть произвольная постоянная (постоянная интегрирования) и $g^{\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}\right)$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть произвольные функции (результат интегрирования). Если $b = 0$, интегралы (1.9) вырождаются в нули, и описание в терминах лагранжевых координат $\boldsymbol{\xi}$ исчезает.

Функция ψ строится из переменной φ, плотности жидкости ρ и лагранжевых координат $\boldsymbol{\xi}$, рассматриваемых как как функции от $(t, \mathbf{x})$, следующим образом [29]. n-компонентная комплексная функция $\psi = \{\psi_{\alpha}\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ определяется соотношениями

$$\psi_{\alpha} = \sqrt{\rho}e^{i\varphi}u_{\alpha}(\boldsymbol{\xi}), \qquad \psi_{\alpha}^* = \sqrt{\rho}e^{-i\varphi}u_{\alpha}^*(\boldsymbol{\xi}), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.10}$$

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha^* \psi_\alpha, \tag{1.11}$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Величины $u_\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ суть функции только переменных $\boldsymbol{\xi}$, и удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\left(u_\alpha^* \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \xi_\beta} u_\alpha\right) = g^\beta(\boldsymbol{\xi}), \qquad \beta = 1,2,3, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha^* u_\alpha = 1. \tag{1.12}$$

n есть такое натуральное число, что уравнения (1.12) допускают решение. Вообще говоря, n зависит от вида произвольных функций $\mathbf{g} = \{g^\beta(\boldsymbol{\xi})\}$, $\beta = 1, 2, 3$. Функции $\mathbf{g}$ определяют завихренность течения жидкости. Если $\mathbf{g} = 0$, уравнения (1.12) имеют решение $u_1 = 1$, $u_\alpha = 0$, $\alpha = 2, 3, \ldots n$. В этом случае функция ψ может иметь один компонент, и течение жидкости потенциальное. Функция ψ имеет вид (1.8) и не зависит от лагранжевых координат $\boldsymbol{\xi}$. Чтобы сравнить динамическую систему (1.6) и динамическую систему (1.3) с $\hbar \to 0$, мы предположим, что функция ψ, построенная с помощью соотношений (1.9) - (1.12) для динамической системы (1.6), есть волновая функция, которая появляется в действии (1.3) как зависимая переменная.

Вторая проблема связана с переходом к пределу $\hbar \to 0$ в действии (1.3). Мы не можем перейти к этому пределу, потому что действие (1.3) обращается в нуль, и динамическая система $\mathcal{S}_{\rm q}$ вырождается. Динамическая система (1.3) есть квантовая система. Квантовые системы образуют особый класс динамических систем для которых выполнены принципы КМ, т.е. динамические уравнения (1.7) линейны. Состояние всякой квантовой системы описывается специальной зависимой комплексной переменной ψ, известной как волновая функция. Волновая функция рассматривается как специфический квантовый объект, который можно рассматривать как вектор в гильбертовом пространстве. Преобразования волновых функций (векторов состояния) могут быть только линейными. При нелинейных преобразованиях зависимой переменной (волновой функции) динамическая система $\mathcal{S}_{\rm q}$ остается той же самой динамической системой, но она перестает удовлетворять принципам КМ. Другими словами, свойство динамической системы быть квантовой системой связано с некоторыми ограничениями на зависимые переменные.

Динамическая система (1.7) является квантовой системой для любого значения параметра $\hbar$ кроме значения $\hbar = 0$. Пусть $\mathcal{SQ}$ есть множество квантовых систем $Q_\hbar = \mathcal{S}_{\rm q}$ для всех $\hbar \neq 0$. Мы можем сказать, что $Q_\hbar \in \mathcal{SQ}$, для всех значений параметра $\hbar$ за исключением $\hbar = 0$. Пусть $\mathcal{SD}$ есть множество всех динамических систем. Тогда $\mathcal{SQ} \subset \mathcal{SD}$. Мы ожидаем, что для $\hbar \to 0$ квантовая система $Q_\hbar \in \mathcal{SQ}$ превратится в классическую (не-квантовую) систему $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} = \lim_{\hbar \to 0} Q_\hbar, \qquad \mathcal{C} \notin \mathcal{SQ}, \qquad \mathcal{C} \in \mathcal{SD} \tag{1.13}$$

Чтобы осуществить предельный переход (1.13) в действии (1.7) мы должны выйти из множества $\mathcal{SQ}$ квантовых систем во множество $\mathcal{SD}$ всех динамических систем, потому что предельная динамическая система C не принадлежит множеству $\mathcal{SQ}$.

2 Преобразование действия для квантовой частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$.

С действием $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{q}}}[\psi,\psi^*]$, определяемым соотношением (1.3) ассоциируются следующие канонические величины:

$$j^k=\{\rho,\mathbf{j}\}=\frac{i}{\hbar}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k\psi^*\right)}\psi^*-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k\psi\right)}\psi\right),\qquad \partial_k\equiv\frac{\partial}{\partial x^k},\qquad k=0,1,2,3 \quad (2.1)$$

$$T_l^k=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k\psi^*\right)}\partial_l\psi^*+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k\psi\right)}\partial_l\psi-\delta_l^k\mathcal{L},\qquad k,l=0,1,2,3 \quad (2.2)$$

где $\mathcal{L}$ есть плотность функции Лагранжа для действия (1.3)

$$\mathcal{L}=\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi-\partial_0\psi^*\cdot\psi\right)-\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi \quad (2.3)$$

Получаем

$$\rho=\psi^*\psi,\qquad \mathbf{j}=-\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi-\boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi\right) \quad (2.4)$$

$$T_0^0=\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi,\qquad T_\alpha^0=\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\partial_\alpha\psi-\partial_\alpha\psi^*\cdot\psi\right)=mj_\alpha=-mj^\alpha,\qquad \alpha=1,2,3 \quad (2.5)$$

$$T_0^\alpha=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\partial_\alpha\psi\partial_0\psi^*+\partial_\alpha\psi^*\partial_0\psi\right)=-\frac{i\hbar^3}{4m^2}\left(\partial_\alpha\psi^*\boldsymbol{\nabla}^2\psi-\boldsymbol{\nabla}^2\psi^*\partial_\alpha\psi\right),\qquad \alpha=1,2,3 \quad (2.6)$$

$$T_\beta^\alpha=\frac{\hbar^2}{2m}\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi^*+\frac{\hbar^2}{2m}\partial_\alpha\psi^*\partial_\beta\psi-\delta_\beta^\alpha\mathcal{L},\qquad \alpha,\beta=0,1,2,3 \quad (2.7)$$

Заметим, что эта ассоциация осуществляется на динамическом уровне, т.е. независимо от принципов КМ. Смысл канонических величин ρ, $\mathbf{j}$, T_l^k может быть выяснен при помощи принципа соответствия из смысла этих величин в классическом пределе $\hbar\to 0$.

Легко видеть, что мы не можем положить $\hbar=0$ в действии (1.3) и в выражении для канонических величин (2.4) - (2.7), потому что в этом случае мы не получаем никакого описания динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$. Перед переходом к классическому описанию следует преобразовать фазу волновой функции ψ. Сделаем замену переменных

$$\psi\to\Psi_b=|\psi|\exp\left(\frac{\hbar}{b}\log\frac{\psi}{|\psi|}\right),\qquad \psi=|\Psi_b|\exp\left(\frac{b}{\hbar}\log\frac{\Psi_b}{|\Psi_b|}\right) \quad (2.8)$$

где $b \neq 0$ есть некоторая вещественная постоянная. После этой замены переменных действие (1.3) превратится в

$$\mathcal{S}_{\mathrm{q}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{q}}}[\Psi_b, \Psi_b^*] = \int \left\{ \frac{ib}{2}\left(\Psi_b^*\partial_0\Psi_b - \partial_0\Psi_b^* \cdot \Psi_b\right) - \frac{b^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\Psi_b^*\boldsymbol{\nabla}\Psi_b \right.$$
$$\left. - \frac{\hbar^2 - b^2}{2m}\left(\boldsymbol{\nabla}\left|\Psi_b\right|\right)^2 \right\} dt d\mathbf{x} \tag{2.9}$$

Динамическое уравнение принимает вид

$$ib\partial_0\Psi_b = -\frac{b^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\Psi_b - \frac{\hbar^2 - b^2}{8m}\left(\frac{(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2}{\rho^2} + 2\boldsymbol{\nabla}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\right)\Psi_b, \qquad \rho \equiv \Psi_b^*\Psi_b \tag{2.10}$$

Соотношения (2.4), (2.5) превращаются в

$$\rho = \Psi_b^*\Psi_b, \qquad \mathbf{j} = -\frac{ib}{2m}\left(\Psi_b^*\boldsymbol{\nabla}\Psi_b - \boldsymbol{\nabla}\Psi_b^* \cdot \Psi_b\right) \tag{2.11}$$

$$T_0^0 = \frac{b}{2m}\boldsymbol{\nabla}\Psi_b^*\boldsymbol{\nabla}\Psi_b + \frac{\hbar^2 - b^2}{8m\rho^2}\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2 \tag{2.12}$$

$$T_\alpha^0 = \frac{ib}{2}\left(\Psi_b^*\partial_\alpha\Psi_b - \partial_\alpha^*\Psi_b \cdot \Psi_b\right) = mj_\alpha = -mj^\alpha, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{2.13}$$

Выражения для других компонентов тензора энергии-импульса довольно сложны, и мы их не выписываем.

Действие (2.9) описывает ту же самую динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ что и действие (1.3) при любом значении постоянной $b \neq 0$, потому что оно получается из действия (1.3) с помощью замены переменных. Динамические уравнения (2.10) нелинейны в терминах функции Ψ_b для всех значений b за исключением случая, когда $b^2 = \hbar^2$. Следовательно динамическая система (2.9) престает быть квантовой, если $b \neq \pm\hbar$, но описание квантовой частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ не вырождается при $\hbar = 0$. Устранение вырождения при $\hbar = 0$ связано с тем, что преобразование (2.8) зависит от параметра $\hbar$ аналитически для всех значений $\hbar$ за исключением $\hbar = 0$.

Зависимость функции Ψ_b от произвольной постоянной b связана с тем, что функция Ψ_b является разновидностью комплексного потенциала. Характерным свойством потенциала является выражение физических величин через производные потенциала. В результате любое физическое состояние может быть описано различными потенциалами. Функция Ψ_b является потенциалом в том смысле, что одно и то же состояние динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ может быть описано различными функциями Ψ_b. Электромагнитные потенциалы A_k, $k = 0, 1, 2, 3$ имеют то же самое свойство, потому что состояние $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ определяет электромагнитные потенциалы с точностью до калибровочного преобразования. Соответствующее калибровочное преобразование существует и для функции Ψ_b, но оно существенно сложнее чем калибровочное преобразование для электромагнитных потенциалов [29]. В данном случае постоянная b есть один из параметров калибровочного преобразования для функции Ψ_b. Калибровочное преобразование, связанное с заменой $b \to \tilde{b}$ имеет вид

$$\Psi_b \to \Psi_{\tilde{b}} = |\Psi_b| \exp\left(\frac{b}{\tilde{b}} \log \frac{\Psi_b}{|\Psi_b|}\right) \tag{2.14}$$

Действие (1.3) записано в калибровке, где $b = \hbar$. В этом случае $\Psi_{b=\hbar} = \psi$, динамическое уравнение линейно, принципы КМ выполнены, и динамическая система является квантовой. Однако, такая калибровка неудачна с точки зрения перехода к классическому пределу. Всякая другая калибровка $b \neq \hbar$ удачна с точки зрения перехода к классическому пределу, но она неудачна с точки зрения принципов КМ, потому что динамическое уравнение (2.10) в этом случае нелинейно. В калибровке $b \neq \hbar$ функция Ψ_b не является волновой функцией в том смысле, что она не является вектором гильбертова пространства. В этом случае функция Ψ_b есть просто комплексная зависимая переменная, описывающая динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$.

Полагая $\hbar = 0$ в соотношениях (2.9) - (2.13), мы получаем классическое приближение описания квантовой частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$. Получаем действие для динамической системы $\mathcal{C}$, определенной соотношением (1.13)

$$\mathcal{A}[\Psi_b, \Psi_b^*] = \int \left\{ \frac{ib}{2} \left(\Psi_b^* \partial_0 \Psi_b - \partial_0 \Psi_b^* \cdot \Psi_b\right) - \frac{b^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \Psi_b^* \boldsymbol{\nabla} \Psi_b + \frac{b^2}{8m} \left(\boldsymbol{\nabla} |\Psi_b|\right)^2 \right\} dt d\mathbf{x} \tag{2.15}$$

Динамическая система (2.15) может рассматриваться как предел квантовой частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ при $\hbar = 0$. Разумеется, это не квантовая система. Тем не менее, если мы описываем динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ в терминах функций Ψ_b с некоторым фиксированным значением $b \neq 0$, мы можем добавить предельную систему $\mathcal{C} = Q_{\hbar=0}$ к множеству $\mathcal{SQ}$. В результате мы получаем множество $\mathcal{SG} = \mathcal{SD} \cup \{\mathcal{C}\}$, содержащее динамические системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = Q_\hbar$ с всеми значениями параметра $\hbar$, включая $\hbar = 0$.

Уже на этой стадии исследования мы можем сделать заключение, что действие (2.15) не может описывать отдельную классическую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$, потому что действие (2.15) описывает непрерывную динамическую систему, тогда как $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$ является дискретной системой. Другими словами, предельный переход $\hbar \to 0$ не подавляет степени свободы динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$. Этот результат можно сформулировать в виде.

Утверждение, что волновая функция описывает состояние отдельной частицы (системы), несовместимо с формализмомы квантовой механики.

Это важное заключение является грубым в том смысле, что оно не зависит от того, описывают ли действия (2.15) и (1.6) одну и ту же динамическую систему.

В работе [29] было показано, что волновая функция (функция ψ) представляет собой метод описания любой идеальной жидкости (или флюидообразной динамической системы), а не специфический квантовый объект. Сделав замену переменных и используя формализм, разработанный в [29], можно привести действие (1.6) к описанию в терминах функции ψ (волновой функции). Тогда оказывается, что действие (2.15) описывает потенциальное течение жидкости. Другими словами, динамическая система $\mathcal{C}$ есть частный случай динамической системы $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}\right]$. В общем случае произвольное течение описывается действием (1.6) (Смотри доказательство в приложении).

Заметим, что преобразование (2.8) фазы волновой функции хорошо известно (смотри, например, [30], параграф 17). Показано, что после преобразования (2.8) квантовое описание превращается в классическое, если только $\hbar \to 0$. Однако, вопрос о том, какой объект (отдельную классическую частицу или статистический ансамбль классических частиц) описывается полученным уравнением Гамильтона-Якоби не рассматривается.

3 Статистическая интерпретация или статистическая основа?

Итак, мы показали, что соотношение (1.2) несовместимо с формализмом квантовой механики, тогда как соотношение (1.1) выполняется. Возникает следующий вопрос. Как соотносятся квантово-стохастическая частица $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ и классическая частица $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$? Можем мы положить

$$\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right], \qquad \text{при } \hbar \to 0, \quad \mathcal{S}_{\mathrm{st}} \to \mathcal{S}_{\mathrm{cl}}? \tag{3.1}$$

Можем мы рассматривать соотношение (1.1) как следствие соотношения (3.1)? На самом деле, мы не можем проверить второе соотношение (3.1), потому что $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ не является динамической системой, и мы не имеем никакой информации о $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Что касается первого соотношения (3.1), то мы можем сказать только, что оно совместимо с действием (1.3), Поскольку действие (1.3) обладает главным свойством действия для статистического ансамбля $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}}\left[a\rho, ...\right] = a\mathcal{A}_{\mathcal{E}}\left[\rho, ...\right], \qquad a = \mathrm{const} > 0 \tag{3.2}$$

где ρ есть плотность элементов (частиц) в статистическом ансамбле. В случае действия (1.3) $\rho = \psi^*\psi$, и действие (1.3) может рассматриваться как как действие для статистического ансамбля. Свойство (3.2) описывает тот факт, что элементы (частицы) статистического ансамбля независимы. Действие для любой квантовой системы обладает свойством (3.2), потому что оно всегда билинейно по волновой функции ψ. Свойство (3.2) не нарушается при любой замене переменных. Например, действие (2.9) обладает свойством (3.2), хотя действие (2.9) порождает нелинейное динамическое уравнение (2.10) и, следовательно, оно несовместимо с принципами КМ. С другой стороны, действие (2.9) описывает ту же самую динамическую систему что и действие (1.3), совместимое с принципами КМ.

Фактически любая интерпретация КМ тесно связана с формализмом КМ. Статистическая интерпретация квантовой механики обусловлена особым формализмом, который отличается от ортодоксального формализма КМ. Этот фомализм, порождающий статистическую интерпретацию, есть формализм статистического ансамбля (ФСА). Имеются различия между ФСА и ортодоксальным формализмом КМ. ФСА является более общим формализмом, чем формализм КМ. ФСА не использует принципы КМ. Вводя принципы КМ, мы накладываем ограничения на ФСА и превращаем ФСА в ортодоксальный формализм КМ. В традиционном формализме квантовой механики волновая функция есть специфический квантовый объект, это вектор в гильбертовом пространстве, тогда как в ФСА функция ψ (волновая функция) есть метод описания непрерывной динамической системы. В частности, описание в терминах волновой функции есть метод описания чистого статистического ансамбля.

Чистый статистический ансамбль свободной классической (детерминированной) частицы есть динамическая система $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}\right]$, действие для которой имеет вид (1.6). Если частицы стохастические, действие (1.6) преобразуется к виду

$$\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}dt\,d\boldsymbol{\xi} \tag{3.3}$$

где $\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ есть векторная функция аргументов $t,\mathbf{x}$ (а не $t,\boldsymbol{\xi}$), и $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ есть векторная функция независимых переменных $t,\boldsymbol{\xi}$. 3-вектор $\mathbf{u}$ описывает среднюю величину случайной составляющей скорости частицы, которая есть функция переменных $t,\mathbf{x}$. Первый член $\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2$ описывает энергию регулярной составляющей движения стохастической частицы. Второй член $m\mathbf{u}^2/2$ описывает энергию случайной составляющей скорости. Составляющие $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и $\mathbf{u}$ полной скорости связаны с разными степенями свободы, и их энергии должны складываться в выражении для плотности функции Лагранжа. Последний член $-\hbar\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}/2$ описывает взамодействие между регулярной составляющей $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ и случайной $\mathbf{u}$. Заметим, что $m\mathbf{u}^2/2$ есть функция от $t,\mathbf{x}$. Этот член влияет на регулярную составляющую $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ как некоторая потенциальная энергия $U\left(t,\mathbf{x},\nabla\mathbf{x}\right)=-m\mathbf{u}^2/2$, порожденная случайной составляющей.

Динамическая система (3.3) является статистическим ансамблем, потому что плотность функции Лагранжа в действии (3.3) не зависит явно от $\boldsymbol{\xi}$, и мы можем записать действие для отдельной системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$

$$\mathcal{S}_{\mathrm{st}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{st}}}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}dt \tag{3.4}$$

К сожалению, выражение для действия (3.4) только символическое, потому что дифференциальный оператор $\boldsymbol{\nabla}=\{\partial/\partial x^\alpha\}$, $\alpha=1,2,3$ определен только в непрерывной окрестности точки $\mathbf{x}$, а не для одной только точки $\mathbf{x}$. Выражение (3.4) перестает быть символическим, если только $\hbar=0$. В этом случае последний член, содержащий $\boldsymbol{\nabla}$, обращается в нуль. Вариация действия (3.4) по $\mathbf{u}$

дает $\mathbf{u}=0$, и действие (3.4) совпадает с действием (1.4) для $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$. Если $\hbar\neq 0$, выражение для действия (3.4) не будет хорошо определенным математически, и динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ отсутствуют.

Если квантовая постоянная $\hbar=0$, то из динамического уравнения для $\mathbf{u}$ следует, что $\mathbf{u}=0$, и действие (3.3) приводится к виду (1.6). Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ с действием (1.3) является частным случаем динамической системы (3.3). Чтобы получить этот результат, следует использовать ФСА, описанный в работах [29, 26]. Применение ФСА к статистическому ансамблю $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}\right]$ можно найти в Приложении. В нашем изложении мы не будем входить в математические детали и ограничимся рассмотрением принципиальной стороны дела.

Написав действие (3.3), мы поставили математически проблему описания (регулярной части) движения стохастической частицы. Интерпретация полученного решения для динамических переменных $\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ и $\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ также ясна. Величина $\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ описывает средние траектории частиц ансамбля и закон движения вдоль них. Мы можем сказать, что $\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ описывает движение среднестатистической частицы $\left\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right\rangle$. Построив канонический тензор энергии-импульса, мы можем приписать средний импульс и среднюю энергию среднестатистической частице $\left\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right\rangle$. Мы можем описать только среднее движение частиц. Реальное движение стохастических частиц не может быть описано рассмотрением динамического уравнения для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, так же как мы не можем описать движение реальных молекул газа в рамках уравнений газовой динамики (уравнений Эйлера). Мы можем описать только среднее движение, т.е. движение "частиц газа", содержащих много молекул.

Действие (3.3) не содержит временны́х производных от $\mathbf{u}$. Это означает, что $\mathbf{u}$ есть функция состояния ансамбля, и эволюция величины $\mathbf{u}$ определяется эволюцией переменных $\mathbf{x}$. Переменные $\mathbf{u}$ могут быть легко исключены. Динамические уравнения для $\mathbf{u}$ получаются вариацией действия (3.3) по $\mathbf{u}$. Поскольку $\mathbf{u}$ есть функция только от $t,\mathbf{x}$, перед вариацией следует преобразовать действие (3.3) к независимым переменным $t,\mathbf{x}$. После такого преобразования и вариации по $\mathbf{u}$ получаем

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{stl}}\right]}}{\delta\mathbf{u}}=m\mathbf{u}\rho+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho=0, \tag{3.5}$$

где

$$\rho=\rho\left(t,\mathbf{x}\right)=\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}=\left(\frac{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}\right)^{-1} \tag{3.6}$$

Здесь $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$. Плотность $\rho=\rho\left(t,\mathbf{x}\right)$ есть сложная функция производных $\mathbf{x}$ по $\boldsymbol{\xi}$, представленных как функции от $t,\mathbf{x}$. Динамические уравнения (3.5) можно разрешить относительно $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)=-\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\left(t,\mathbf{x}\right), \tag{3.7}$$

Используя решение (3.7), можно исключить переменные $\mathbf{u}$ из действия (3.3) [31]. Получаем вместо (3.3)

$$\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\mathbf{x}\right] = \int \left\{ \frac{m}{2}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 - U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho\right) \right\} dt d\boldsymbol{\xi} \tag{3.8}$$

$$U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho\right) = \frac{\hbar^2}{8m}\left(\boldsymbol{\nabla}\ln\rho\right)^2, \qquad \rho = \rho\left(t, \mathbf{x}\right) \tag{3.9}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}\left(t, \boldsymbol{\xi}\right)$, а $\rho = \rho\left(t, \mathbf{x}\right)$ определяется последним соотношением (3.6).

Используя ФСА [29, 26], можно преобразовать действие (3.8) к независимым переменным ψ, ψ^*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}\left[\psi, \psi^*\right] \;&=\; \int \left\{ \frac{ib}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi\right) - \frac{b^2}{2}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi \right. \\ &\left. + \frac{b^2}{8m}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2\rho + \frac{b^2-\hbar^2}{8\rho m}(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2 \right\} dt d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$\psi = \left\{\psi_1, \psi_2\right\}, \qquad \psi^* = \left\{ \begin{array}{c} \psi_1^* \\ \psi_2^* \end{array} \right\}, \qquad \rho \equiv \psi^*\psi, \qquad s_\alpha \equiv \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}, \qquad \alpha = 1, 2, 3, \tag{3.11}$$

и σ_α суть матрицы Паули.

Если компоненты функции ψ линейно зависимы: $a_1\psi_1 + a_2\psi_2 = 0$, $a_1, a_2 =$const, то величины $s_\alpha =$const, $\alpha = 1, 2, 3$. Тогда третий член в (3.10) обращается в нуль. В этом частном (потенциальном) случае действие совпадает с действием (2.9) для $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$.

Действие (2.9) есть частный случай статистического ансамбля стохастических (или классических, если $\hbar = 0$) частиц. Прямая интерпретация действия (2.9) отсутствует. Его следует интерпретировать, используя тот факт, что динамическая система (2.9) является частным случаем динамической системы (3.3). Динамическое уравнение (2.10), порожденное действием (2.9) нелинейно, и динамическая система (2.9) не является квантовой в том смысле, что она несовместима с принципами КМ.

С чисто математической точки зрения ситуация выглядит следующим образом. Действие (3.8) описывает статистический ансамбль, потому что функционал (3.8) обладает свойством (3.2), которое является главным свойством статистического ансамбля. Кроме того действие (3.8) получено из действия (3.3) для статистического ансамбля. Динамические уравнения, порожденные действием (3.8) являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Если $\hbar = 0$, эти уравнения приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, как это можно видеть прямо из (3.8). В общем случае $\hbar \neq 0$ такое приведение невозможно. Этот факт интерпретируется в том смысле, что в частном случае $\hbar = 0$ статистический ансамбль (3.8) превращается в статистический ансамбль классических частиц.

С одной стороны, функционал (3.8) является действием для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$. С другой стороны, функционал (3.8) есть действие для некоторого непрерывного множества $\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}\right]$ классических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$, маркируемых параметрами $\boldsymbol{\xi}$. Это множество $\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}\right]$ не является статистическим ансамблем классических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$, потому что эти классические частицы взаимодействуют между собой через потенциальную энергию $U\left(\rho, \boldsymbol{\nabla}\rho\right)$, определяемую соотношением (3.9) и, следовательно, эти классические частицы не являются независимыми. Если $\hbar = 0$, это взаимодействие исчезает, и множество $\mathcal{S}_{\mathrm{eff}}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}\right]$ классических частиц превращается в статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}\right]$ классических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$, потому что частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$ становятся независимыми.

ФСА описывает длинную цепь преобразований динамических переменных, которая ведет от действия (3.3) для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ к действию (1.3) для квантовой частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$. Эта цепь содержит интегрирование системы динамических уравнений (A.8). Интегрирование уравнений (A.8) достаточно сложно (по крайней мере, оно не было известно в течение долгого времени). Эти уравнения не зависят от вида лагранжиана классической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}$, и они могут быть принтегрированы для любого вида лагранжмана $L\left(t, \mathbf{x}\right)$, а не только для $L\left(t, \mathbf{x}\right) = m\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2/2$, как это было сделано в настоящей работе.

Заметим, что статистическая интерпретация квантовой механики основана на том факте, что динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ (1.3) есть частный случай статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, описываемого действием (3.3). Для такой интерпретации нам *не нужны ни принципы квантовой механики, ни дополнительные гипотезы.*

Представление (3.3) является явно статистическим, и статистическая интерпретация квантовой механики может быть получена из действия (3.3), или (3.8). Но эти действия порождают динамические уравнения, которые трудно решить и исследовать. Начало цепи просто для интерпретации, но трудно для исследования. Наоборот, конец цепи (действие (1.3) для $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$) просто для решения, но трудно для интерпретации, поскольку конечное действие (1.3) не похоже на действие для статистического ансамбля. Итак, для решения динамических уравнений и правильной интерпретации этих решений нужны оба действия (1.3), (3.3) и математические соотношения между ними.

Интерпретация квантовой механики, получаемая на основе словесных рассужений [7]-[25], не может конкурировать со статистической интерпретацией квантовой механики, полученной на основе цепи точных математических соотношений. Например, даже наиболее развитая гидродинамическая интерпретация Бома [32] использует только часть цепи соотношений между действиями (3.3) и (1.3). Кроме того в интерпретации Бома можно двигаться вдоль цепи только в одном направлении: от действия (1.3) к действию (3.3), т.е. от волновой функции к гидродинамике. Движение вдоль цепи в обратном напровлении блокировано, потому что результат интегрирования (A.11) динамических уравнений (A.8) был известен только для частного случая потенциальных течений. В результате интерпретация КМ, данная Бомом, использует принципы КМ, переформулированные в гидродинамических терминах.

Очень трудно осуществлять последовательную статистическую интерпретацию квантовой механики на словесном уровне без использования точных математических соотношений цепи (3.3) – (1.3). Легко совершить ошибку, особенно если не учитывать, что статистическое описание квантовой механики является *безвероятностным статистическим описанием.* В статистической физике мы встречаемся только со статистическим описанием в терминах теории вероятностей, и некоторые исследователи считают, что термины "статистический" и "вероятностный" синонимы. На самом деле, термин "статистическое описание" означает, что описание имеет дело со многими одинаковыми или почти одинаковыми объектами, тогда как термин "вероятностное описание" означает логическое построение на основе теории вероятностей.

В теории вероятностей вероятность и число объектов должны быть неотрицательными числами. Это условие может быть выполнено, если объекты статистики могут быть представлены как точки в некотором пространстве (например, фазовое пространство в статистической физике). Однако, если объекты статистики суть протяженные объекты, например, мировые линии, то их плотность (и число) может быть отрицательной. В самом деле, плотность j^k мировых линий в окрестности пространственно-временной точки x определяется соотношением

$$dN = j^k dS_k \tag{3.12}$$

где dN есть поток мировых линий через бесконечно малую площадку dS_k, и j^k есть коэффициент пропорциональности между этими двумя величинами. Величина $j^k = j^k(x)$ есть по определению плотность мировых линий в окрестности точки x. Величина j^k может быть отрицательной, и вероятностное описание мировых линий оказывается невозможным. С другой стороны, статистическое описание в терминах мировых линий не может быть заменено статистическим описанием в терминах частиц, потому что последнее описание является нерелятивистским.

В теории относительности мировая линия частицы есть реальный физический объект, тогда как частица является атрибутом мировой линии (пересечение мировой линии с плоскостью $t =$const). В нерелятивистской теории, где можно предполагать существование абсолютной одновременности, частица может рассматриваться как реальный физический объект, а мировая линия как атрибут частицы (ее история). Случайная составляющая движения квантово-стохастической частицы всегда релятивистская, даже в нерелятивистской КМ, поэтому следует использовать релятивистское статистическое описание даже в нерелятивистской квантовой механике, где нерелятивистским является только среднее движение частицы (его регулярная составляющая). В этом смысле нерелятивистская квантовая механика имеет релятивистские корни.

Вообще говоря, вероятностное статистическое описание более информативно, чем безвероятностное, потому что, используя теорию вероятности, можно получать такие распределения, которые не удается получить в безвероятностном статистическом описании. В квантовой механике статистическое описание получается в результате описания и исследования статистического ансамбля, который исследуется просто как динамическая система. Для реализации этой программы очень полезно ввести понятие среднестатистического объекта (частицы). Математически это осуществляется следующим образом.

Число N частиц $\mathcal{S}$, образующих статистический ансамбль $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]$, предполагается достаточно большим, и свойства статистического ансамбля не зависят от числа N его элементов $\mathcal{S}$ (свойство (3.2) статистического ансамбля). Поскольку свойства статистического ансамбля не зависят от N, мы можем формально положить $N=1$ и ввести понятие среднестатистической частицы $\langle\mathcal{S}\rangle=\mathcal{E}[1,\mathcal{S}]$, которая по определению представляет собой статистический ансамбль, нормированный на одну частицу. Хотя число частиц N в $\langle\mathcal{S}\rangle=\mathcal{E}[1,\mathcal{S}]$ равно 1, среднестатистическая частица $\langle\mathcal{S}\rangle$ представляет собой статистический ансамбль, и $\langle\mathcal{S}\rangle$ имеет все свойства статистического ансамбля. В частности, $\langle\mathcal{S}\rangle$ имеет бесконечное число степеней свободы.

Статистический ансамбль $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]$ $(N\to\infty)$ из N частиц $\mathcal{S}$ есть динамическая система с действием $\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]}$. Среднестатистическая частица $\langle\mathcal{S}\rangle$ есть динамическая система с действием $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}$. Действия $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]}$ связаны соотношением

$$\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}\rangle}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathcal{A}_{\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]} \tag{3.13}$$

Таким образом, мы можем говорить о среднестатистической частице $\langle\mathcal{S}\rangle$ вместо статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$.

В то же самое время из-за нормирования на одну частицу среднестатистическая частица $\langle\mathcal{S}\rangle$ может восприниматься как диффузная индивидуальная частица. Вектор энергии-импульса P_k для среднестатистической частицы $\langle\mathcal{S}\rangle$, рассматриваемой как динамическая система, может ассоциироваться с энергией-импульсом P_k индивидуальной частицы $\mathcal{S}$. То же относится к угловому моменту и другим аддитивным величинам.

Если решить динамические уравнения для статистического ансамбля (3.8), то получим

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\boldsymbol{\xi}) \tag{3.14}$$

При фиксированных $\boldsymbol{\xi}$ соотношение (3.14) описывает некоторые мировые линии, которые следует интерпретировать как средние мировые линии стохастической частицы $\mathcal{S}$, или как мировые линии среднестатистической частицы $\langle\mathcal{S}\rangle$. Такая интерпретация возможна, потому что статистический ансамбль $\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]$, $N\to\infty$ может рассматриваться: (1) как статистический ансамбль из N стохастических частиц $\mathcal{S}$ и (2) как статистический ансамбль из N среднестатистических частиц (динамических систем) $\langle\mathcal{S}\rangle$. Другими словами,

$$\mathcal{E}[N,\mathcal{S}]=\mathcal{E}[N,\langle\mathcal{S}\rangle] \tag{3.15}$$

Итак, статистическое описание квантовой механики позволяет получить средние мировые линии и приписать им некоторое среднее значение энергии-импульса. Точно так же газовая динамика может приписать энергию-импульс частицам газа, состоящим из многих молекул. Но в квантовой механике нельзя приписать стохастическим частицам распределение по импульсам, точно так же, как в рамках газовой динамики мы не можем приписать молекулам газа распределение Максвелла по импульсам, потому что формализм газовой динамики не позволяет сделать это. Ортодоксальная интерпретация квантовой механики претендует на то, что КМ может предсказать распределение по импульсам частиц на основе принципов КМ. Это распределение по импульсам не может быть приписано какому-либо определенному состоянию (определенной волновой функции), потому что при экспериментальном определении импульсного распределения каждое отдельное измерение импульса требует длительного времени, а состояние существенно изменяется за это время. (Смотри детальное обсуждение в [33]). На самом деле, ортодоксальный формализм КМ, основанный на принципах КМ, не может дать больше, чем дает интерпретация основанная на ФСА, потому что с математической точки зрения принципы КМ представляют собой ряд ограничений, налагаемых на возможные зависимые переменные. Например, действия (1.3) и (2.9) различаются только своими зависимыми переменными. В то же время (1.3) удовлетворяет принципам КМ, тогда как (2.9) – нет.

Среднестатистический объект может иметь свойства, являющиеся альтернативными для индивидуальных объектов, и эти свойства суть статистические свойства, а не особые квантовые свойства. Например, среднестатистический житель страны является гермафродитом (полумужчиной – полуженщиной), тогда как каждый отдельный житель той же страны или мужчина, или женщина. Если квантовая частица $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ есть среднестатистическая частица $\langle\mathcal{S}\rangle$, то она может проходить сразу через две щели, тогда как каждая индивидуальная частица $\mathcal{S}$ может проходить только через одну из щелей, и в факте прохождения через две щели одновременно нет ничего мистического. Если шредингеровский кот есть среднестатистический $\langle$кот$\rangle$, он может быть мертвым и живым одновременно, хотя каждый отдельный кот может быть либо жив, либо мертв.

Если интенсивность потока частиц в двухщелевом эксперименте очень мала, то только одна частица может оказаться в пространстве между щелями и экраном. В этом случае свойство среднестатистической частицы проходить сразу через две щели кажется довольно очевидным статистически, но оно не может быть объяснено с точки зрения терии вероятностей, потому что не удается надлежащим образом ввести вероятность. Иногда этот факт рассматривается как дефект статистической интерпретации. Однако, это не является дефектом, потому что, как мы упоминали выше, квантовая механика является безвероятностной статистической концепцией.

4 Сближение статистической и копенгагенской интерпретаций

Традиционно дискретная динамическая система $\mathcal{S}_{\text{cl}}$ (отдельная частица) рассматривается в классической динамике как главный объект динамики. Дискретная динамическая система $\mathcal{S}_{\text{cl}}$ описывается действием

$$\mathcal{S}_{\text{cl}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\text{cl}}}[\mathbf{x}] = \int L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) dt \tag{4.1}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ и $L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)$ есть функция Лагранжа для $\mathcal{S}_{\text{cl}}$.

Чистый статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{cl}}]$ с действием вида

$$\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{cl}}]: \qquad \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{cl}}]}[\mathbf{x}] = \int L\left(\mathbf{x}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) dt d\boldsymbol{\xi} \tag{4.2}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$, рассматривается как производный объект динамики, потому что он составлен из многих главных объектов динамики $\mathcal{S}_{\text{cl}}$. Статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{cl}}]$ имеет бесконечное число степеней свободы. Функция Лагранжа L для $\mathcal{S}_{\text{cl}}$ есть плотность функции Лагранжа для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{cl}}]$, и имеется одно-однозначное соответствие между динамическими системами (4.1) и (4.2). Действие $\mathcal{A}_{\langle\mathcal{S}_{\text{cl}}\rangle}$ для среднестатистической частицы (динамической системы) $\langle\mathcal{S}_{\text{cl}}\rangle$ связано с действием $\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{cl}}]}$ для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{cl}}]$ соотношением (3.13), и имеется одно-однозначное соответствие между $\langle\mathcal{S}_{\text{cl}}\rangle$ и $\mathcal{S}_{\text{cl}}$.

В такой ситуации непрерывная динамическая система $\langle\mathcal{S}_{\text{cl}}\rangle$ может рассматриваться как главный объект классической динамики. Дискретная динамическая система $\mathcal{S}_{\text{cl}}$ тогда может трактоваться как производный объект: частный случай среднестатистической динамической системы $\langle\mathcal{S}_{\text{cl}}\rangle$, когда распределения всех величин в $\langle\mathcal{S}_{\text{cl}}\rangle$ являются δ-образными.

Такое переопределение понятия главного объекта классической динамики полезно в двух отношениях.

1. В динамике стохастических систем $\mathcal{S}_{\text{st}}$ главным объектом динамики является среднестатистическая систем $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$, потому что $\mathcal{S}_{\text{st}}$ не является динамической системой и не может быть объектом динамики, тогда как среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}_{\text{st}}\rangle$ всегда является непрерывной динамической системой. В динамике классических систем $\mathcal{S}_{\text{cl}}$ обе системы $\langle\mathcal{S}_{\text{cl}}\rangle$ и $\mathcal{S}_{\text{cl}}$ суть динамические системы, но $\langle\mathcal{S}_{\text{cl}}\rangle$ всегда является непрерывной динамической системой, тогда как $\mathcal{S}_{\text{cl}}$ может быть дискретной динамической системой. Определяя в классической динамике непрерывную динамическую систему $\langle\mathcal{S}_{\text{cl}}\rangle$ как главный объект динамики, мы получаем единообразное определение главного объекта в классической динамике и динамике стохастических систем. Такое единообразное определение позволяет рассматривать классическую динамику, как частный случай стохастической динамики (динамики стохастических систем), который возникает, когда интенсивность стохастичности обращается в нуль. Мы можем ввести понятие физической системы $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_{\text{cl}}, \mathcal{S}_{\text{st}}\}$, которое является коллективным

понятием по отношению к понятиям дискретной динамической системы $\mathcal{S}_{\rm cl}$ и стохастической системы $\mathcal{S}_{\rm st}$. Единообразное определение главного объекта динамики тесно связано с математическим формализмом динамики, котрый оказывается общим для всех физических систем $\mathcal{S}=\{\mathcal{S}_{\rm cl},\mathcal{S}_{\rm st}\}$. Этот формализм есть формализм статистического ансамбля (ФСА), и это вполне естественно, поскольку среднестатистическая система $\langle\mathcal{S}\rangle$ (т.е. статистический ансамбль) является главным объектом динамики. Как мы видели, ФСА представляет собой ряд преобразований динамических уравнений (или действий) для статистического ансамбля, которые включают замену динамических переменных и интегрирование некоторых динамических уравнений.

Ситуацию можно проиллюстрировать на примере течения одноатомного газа. Движение молекул газа случайно. Оно описывается распределением Максвелла. Уравнения газовой динамики не имеют дела с молекулами. Они описывают движение частиц газа. Каждая частица газа состоит из N молекул ($N\rightarrow\infty$) и и формально имеет $6N$ степеней свободы, но газовая динамика игнорирует все эти степени свободы за исключением тех шести , которые описывают движение частицы газа как целого. Хотя движение молекул случайно, движение частиц газа детерминировано (не случайно), и можно говорить, что частицы газа суть "среднестатистические молекулы". Можно усмотреть некоторую аналогию между молекулой и частицей газа с одной стороны, и стохастической системой $\mathcal{S}_{\rm st}$ и среднестатистической системой $\langle\mathcal{S}_{\rm st}\rangle$ – с другой. Уравнения газовой динамики образуют замкнутую систему уравнений, так же как и уравнения квантовой механики. Обе системы описывают среднее движение частиц газа (в случае газовой динамики) и среднестатистической частицы (в случае квантовой механики). В случае движения газа мы имеем еще одну, более детальную кинетическую теорию, описывающую эволюцию распределения Максвелла. В случае квантовой частицы такого детального описания сегодня нет.

2. Во всех статистических концепциях (в физике, биологии социологии и т.д.) вводится два объекта: (1) индивидуальный (случайный) объект $\mathcal{S}$ и (2) среднестатистический объект $\langle\mathcal{S}\rangle$. В любой статистической концепции все законы устанавливаются для $\langle\mathcal{S}\rangle$, и все предсказания на основе этих законов делаются для $\langle\mathcal{S}\rangle$. Термин "среднестатистический объект" описывает очень важное понятие в любой статистической концепции. Хотя термин "нормированный на единицу среднестатистический ансамбль частиц" и термин "среднестатистическая частица" означают один и тот же объект, второй термин более удобен в следующем смысле. Главное слово первого термина "ансамбль", тогда как главное слово второго термина "частица". Если для краткости используется сокращение термина, то оставляется главное слово, а определения опускаются. Рассмотрим например, такое выражение "состояние электрона описывается волновой функцией ψ". Выражение такого типа можно встретить практически в любой работе по квантовой механике. Если понятие среднестатистического объекта не введено, это выражение кажется бессмысленным (с точки зрения статистической интерпретации КМ), потому что волновая функ-

ция может описывать только состояние ансамбля, а не состояние индивидуального электрона. Однако, если понятие среднестатистического объекта введено, то термин "электрон" может быть интерпретирован как сокращение термина "среднестатистический электрон". В этом случае рассматриваемое выражение имеет смысл, совместимый со статистической интерпретацией КМ. Использование термина "среднестатистический объект" уменьшает различие между копенгагенской и статистической интерпретациями. Это позволяет использовать физический жаргон, который устраивает сторонников обеих (копенгагенской и статистической) интерпретаций. Иными словами, утверждение копенгагенской интерпретации "волновая функция описывает состояние частицы" и другие аналогичные утверждения становятся вполне корректными, если под частицей понимать среднестатистическую частицу. Однако, при этом частица означает не обычную классическую частицу, а некую "квантовую частицу", обладающую "статистическими свойствами ансамбля", отличающими ее от обычной классической частицы.

Во многих случаях газовой динамики мы можем говорить о детерминированном движении частиц газа, рассматривая их как классические частицы с шестью степенями свободы. В этом случае мы игнорируем тот факт, что любая частица газа есть сложный объект, состоящий из многих молекул и имеющий много степеней свободы. Аналогично, в случае квантовой механики мы можем игнорировать тот факт, что среднестатистическая частица $\langle\mathcal{S}\rangle$ есть непрерывная система. Формально это так же связано с возможным сокращением термина "среднестатистическая частица", когда оставляется главное слово термина.

5 Обсуждение

Итак, рассмотрение среднестатистического объекта $\langle\mathcal{S}\rangle = \{\langle\mathcal{S}_{\mathrm{cl}}\rangle, \langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle\}$ как главного объекта динамики позволяет рассматривать квантовую механику и классическую динамику как два частных случая динамики стохастических систем. Динамика стохстических систем есть статистическое построение, которое стартует с действия (3.3) для чистого ансамбля стохастических систем. Заменяя функцию Лагранжа для свободной частицы функцией Лагранжа L в исходном действии (3.3), мы получаем квантовое описание для физической системы, чье классическое описание определяется функцией Лагранжа L. Заменяя два последних "стохастических" члена в исходном действии (3.3), мы получаем статистическое описание стохастической системы с другим типом стохастичности, отличном от квантовой стохастичности. Формально тип стохастичности описывается видом члена взаимодействия (3.9) в действии (3.8) для непрерывного множества взаимодействующих классических систем.

Динамические уравнения, порожденные действиями (3.3), или (3.8), трудны для решения. Выбирая надлежащим образом динамические переменные, мы можем получить линейные уравнения квантовой механики, которые легче для решения и исследования, чем первичные динамические уравнения, порожденные действиями (3.3), или (3.8). Принципы КМ регламентируют, как следует выбирать эти переменные, чтобы получить линейные динамические уравнения. Ограничения принципов КМ достаточно жестки, чтобы получить правильные нерелятивистские динамические уравнения без ссылок на исходное статистическое описание. Однако, сами по себе принципы КМ не могут дать правильной статистической интерпретации. Кроме того они не могут дать правильное расширение нерелятивистской КМ в релятивистскую область, потому что принципы КМ являются нерелятивистскими. Применяя ортодоксальную квантовую механику к проблеме столкновения релятивистских частиц, мы получаем только S-матричное рассмотрение, тогда как использование исходных действий (3.3), или (3.8) позволяет получить более детальную картину в области столкновения [34]. Вообще, квантово-механический принцип линейности динамических уравнений не является физическим принципом, потому что принцип логической простоты и принцип простоты решения динамических уравнений суть совсем разные вещи.

Как мы уже упоминали, в любой статистической концепции есть два сорта объектов: индивидуальный $\mathcal{S}$ и среднестатистический $\langle\mathcal{S}\rangle$. Формализм статистического описания и квантовой механики позволяет рассматривать только среднестатистический объект $\langle\mathcal{S}\rangle$ и делать предсказания касающиеся только $\langle\mathcal{S}\rangle$. Индивидуальный объект остается вне рамок формализма. Однако мы не можем полностью игнорировать индивидуальные стохастические системы $\mathcal{S}$, потому что они появляются в измерениях и порождают проблемы, связанные с интерпретацией КМ. Основной проблемой такого сорта является поблема редукции волновой функции при измерении.

Отождествление $\mathcal{S}_{\mathrm{q}} = \langle S\rangle$ снимает все проблемы, связанные с интерпретацией редукции волновой функции. Правильная интерпретация связана с правильной интерпретацией понятия измерения. Математический формализм квантовой механики имеет дело только со среднестатистическими частицами $\langle S\rangle$, и все предсказания квантовой механики имеют вероятностный (статистический) характер. Квантовый формализм может предсказать распределение $F(R)$ величины $\mathcal{R}$ в состоянии ψ, или вероятность $w(R)$ величины $\mathcal{R}$ в состоянии ψ. Правильность предсказания может быть проверена с помощью измерения. Но это измерение является массовым измерением (M-измерение), т.е. множеством многих отдельных измерений (S-измерений), потому что ни распределение $F(R)$, ни вероятность $w(R)$ нельзя проверить с помощью отдельного измерения величины $\mathcal{R}$. Таким образом, измерение в квантовой механике есть M-измерение, состоящее из многих S-измерений.

Даже если в состоянии ψ величина $\mathcal{R}$ имеет единственное значение R', квантовая механика предсказывает, что измерение дает значение величины R' величины $\mathcal{R}$ с вероятностью равной 1. Это означает, что предсказывается δ-образное распределение, а не значение R' измеряемой величины $\mathcal{R}$. Для проверки предсказания мы должны проверить, равна ли вероятность $w(R') = 1$ (а не равенство измеренного значения величины $\mathcal{R}$ значению R'). Чтобы проверить распределение $w(R) = \delta(R - R')$, мы должны провести много S-измерений (т.е. M-измерение), а не отдельное измерение величины $\mathcal{R}$.

Влияние M-измерения на волновую функцию ψ измеряемой системы (частицы) известно как редукция волновой функции. В случае, когда получается единственное значение R' измеряемой величины $\mathcal{R}$, M-измерение называется селективным M-измерением (или SM-измерением). Вообще говоря, мы можем получить единственное значение R', только в том случае, когда M-измерение сопровождается селекцией. Отбираются только те элементы среднестатистической частицы $\langle \mathcal{S} \rangle$ (или статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$), для которых измеренное значение величины $\mathcal{R}$ равно R'. В результате выбранные элементы среднестатистической частицы $\langle \mathcal{S} \rangle$ образуют новый статистический ансамбль (или новую среднестатистическую частицу), чье состояние описывается другой волновой функцией ψ'. Преобразование $\psi \to \psi'$ есть редукция волновой функции. Эта редукция обусловлена селекцией элементов статистического ансамбля. В этой редукции нет никакой мистики, потому что причина ее совершенно ясна. Однако, если мы рассматриваем селективное квантовое измерение как отдельное измерение, где селекция невозможна, редукция волновой функции выглядит как некая мистическая процедура, сопровождающая квантовое измерение. Таким образом, утверждение, что волновая функция описывает среднестатистическую частицу $\langle \mathcal{S} \rangle$, а не индивидуальную частицу $\mathcal{S}$, является ключевым утверждением в объяснении редукции волновой функции.

Если в M-измерении величины $\mathcal{R}$ измеренное значение зафиксировно измерительным прибором, но селекция не производится, редукция волновой функции тоже происходит, но в этом случае она имеет другой характер. В этом случае элементы статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$, для которых измеренное значение величины $\mathcal{R}$ равно R_i, образуют статистический подансамбль $\mathcal{E}_i[\mathcal{S}]$. Эти подансамбли эволюционируют с различными гамильтонианами, зависящими от значений R_i. В результате статистическимй ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}]$, чье состояние описывается волновой функцией ψ превращается в множество статистических ансамблей $\mathcal{E}_i[\mathcal{S}]$, взятых со статистическими весами (вероятностями) $w(R_i)$. В этом случае редукция волновой функции сводится к преобразованию чистого состояния (волновой функции) в смешанное состояние (матрицу плотности). Если вместо M-измерения мы рассматриваем отдельное измерение, редукция волновой функции представляется мистической процедурой, потому что селекцию невозможно осуществить в отдельном измерении. Снова утверждение, что волновая функция описывает среднестатистическую частицу $\langle \mathcal{S} \rangle$, а не индивидуальную частицу $\mathcal{S}$, является ключевым утверждением в объяснении редукции волновой функции.

Описанные свойства квантового эксперимента не новы для представителей статистической интерпретации квантовой механики [2, 3, 4, 5], но они кажутся парадоксальными представителям копенгагенской интерпретации.

Приложение А. Преобразование действия

Преобразуем действие (1.6) к описанию в терминах функции ψ. Вместо независимой переменной $t = x^0$ мы введем переменную ξ_0, и перепишем действие (1.6) в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm cl}]}[x] = \int \left\{ \frac{m\dot{x}^\alpha \dot{x}^\alpha}{2\dot{x}^0} \right\} d^4\xi, \qquad \dot{x}^k \equiv \frac{\partial x^k}{\partial \xi_0}, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{A.1}$$

где $\xi = \{\xi_0, \boldsymbol{\xi}\} = \{\xi_k\}$, $k = 0,1,2,3$, $x = \left\{x^k(\xi)\right\}$, $k = 0,1,2,3$. Здесь переменная x^0 фиктивна. Здесь и далее по повторяющимся греческим индексам производится суммирование $(1-3)$.

Рассмотрим переменные $\xi = \xi(x)$ в (A.1) как зависимые переменные, а переменные x как независмые переменные. Пусть якобиан

$$J = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det ||\xi_{i,k}||, \qquad \xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i, \qquad i,k = 0,1,2,3 \tag{A.2}$$

рассматривается как полилинейная функция от $\xi_{i,k}$. Тогда

$$d^4\xi = J d^4x, \qquad \dot{x}^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0} \equiv \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J^{-1} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}}, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{A.3}$$

После преобразования зависимых переменных ξ действие (A.1) принимает вид

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm cl}]}[\xi] = \int \frac{m}{2} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \right)^{-1} d^4x, \tag{A.4}$$

Введем новые переменные

$$j^k = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{A.5}$$

с помощью множителей Лагранжа p_k

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm cl}]}[\xi, j, p] = \int \left\{ \frac{m}{2} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \right)^{-1} + p_k \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} - j^k \right) \right\} d^4x, \tag{A.6}$$

Здесь и далее по повторяющимся латинским индексам производится суммирование $(0-3)$.

Заметим, что в соответствии с (A.3), соотношения (A.5) могут быть записаны в виде

$$j^k = \left\{ \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}}, \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \left(J^{-1} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \right) \left(J^{-1} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \right)^{-1} \right\} = \left\{ \rho, \rho \frac{dx^\alpha}{dt} \right\}, \qquad \rho \equiv \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} \tag{A.7}$$

Из (A.7) следует, что j^k есть 4-поток частиц, причем ρ есть их плотность.

Варьирование (A.6) по ξ_i дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm cl}]}}{\delta \xi_i} = -\partial_l \left(p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \right) = -\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \partial_l p_k = 0, \qquad i = 0,1,2,3 \tag{A.8}$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}} \right) \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} \xi_{k,l} \equiv J \delta_k^i, \qquad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \tag{A.10}$$

можно проверить прямой подстановкой, что общее решение линейных уравнений (A.8) имеет вид

$$p_k = \frac{b}{2} \left(\partial_k \varphi + g^\alpha (\boldsymbol{\xi}) \, \partial_k \xi_\alpha \right), \qquad k = 0,1,2,3 \tag{A.11}$$

где $b \neq 0$ – постоянная, $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1,2,3$ суть произвольные функции аргументов $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, и φ есть динамическая переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной. Заметим, что это то самое принципиальное интегрирование (1.9), которое обсуждалось во введении. Подставим (A.11) в (A.6). Член вида $\partial_k \varphi \partial J / \partial \xi_{0,k}$ приводится к якобиану и не дает вклада в динамические уравнения. Член вида $\xi_{\alpha,k} \partial J / \partial \xi_{0,k}$ исчезает в силу тождеств (A.10). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm cl}]} [\varphi, \boldsymbol{\xi}, j] = \int \left\{ \frac{m}{2} \frac{j^\alpha j^\alpha}{j^0} - j^k p_k \right\} d^4 x, \tag{A.12}$$

где величины p_k определяются соотношениями (A.11).

Вариация действия (A.12) по j^k дает

$$p_0 = -\frac{m}{2} \frac{j^\alpha j^\alpha}{\rho^2}, \qquad p_\beta = m \frac{j^\beta}{\rho}, \qquad \beta = 1,2,3 \tag{A.13}$$

Исключаем переменные $\mathbf{j} = \{j^1, j^2, j^3\}$ из действия (A.12), используя соотношение (A.13). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm cl}]} [\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}] = -\int \left\{ p_0 - \frac{p_\beta p_\beta}{2m} \right\} \rho d^4 x, \tag{A.14}$$

где p_k определяется сотношением (A.11).

Вместо зависимых переменных $\rho, \varphi, \boldsymbol{\xi}$ мы введем n-компонентную комплексную функцию ψ, определив ее соотношениями (1.10) – (1.12)

Легко проверить,что

$$\rho = \psi^* \psi, \qquad \rho p_0 (\varphi, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{ib}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi) \tag{A.15}$$

$$\rho p_\alpha(\varphi,\boldsymbol{\xi}) = -\frac{ib}{2}(\psi^*\partial_\alpha\psi - \partial_\alpha\psi^*\cdot\psi), \qquad \alpha=1,2,3, \tag{A.16}$$

Вариационная проблема с действием (A.14) оказывается эквивалентной вариационной проблеме с функционалом действия

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm cl}]}[\psi,\psi^*] = \int\left\{\frac{ib}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) + \frac{b^2}{8m}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)^2\right\}\mathrm{d}^4x. \tag{A.17}$$

Для двухкомпонентной функции ψ $(n=2)$ имеет место следующее тождество

$$(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2 - (\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\psi)^2 \equiv 4\rho\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \rho^2\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2, \tag{A.18}$$

$$\rho\equiv\psi^*\psi, \qquad s\equiv\frac{\psi^*\boldsymbol{\sigma}\psi}{\rho}, \qquad \boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_\alpha\}, \qquad \alpha=1,2,3, \tag{A.19}$$

где σ_α суть матрицы Паули. В силу тожества (A.18) действие (A.17) приводится к виду

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm cl}]}[\psi,\psi^*] = \int\left\{\frac{ib}{2}(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\cdot\psi) - \frac{b^2}{2}\boldsymbol{\nabla}\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi + \frac{b^2}{8m}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=3}(\boldsymbol{\nabla}s_\alpha)^2\rho + \frac{b^2}{8\rho m}(\boldsymbol{\nabla}\rho)^2\right\}\mathrm{d}^4x, \tag{A.20}$$

где $\mathbf{s}$ и ρ определяются соотношениями (A.19).

В случае потенциального течения, когда двухкомпонентная функция ψ имеет линейно зависимые компоненты, например, $\psi=\{\psi_1,0\}$ 3-вектор $\mathbf{s}$ =const, и член, содержащий 3-вектор $\mathbf{s}$ обращается в нуль. Тогда действие (A.20) для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm cl}]$ совпадает с действием (2.15) для $\mathcal{S}_{\rm q}$ с $\hbar=0$.

Список литературы

[1] W. Heisenberg, Development of the Quantum Mechanics Interpretation. in *Niels Bohr and the Development of Physics.* ed. W.Pauli , London. Pergamon Press Ltd., 1955. (Русс. пер. *Нильс Бор и развитие физики.* под ред. В. Паули. ИИЛ, Москва, 1958)

[2] Д.И. Блохинцев *Основы квантовой механики.* Наука, ГФМЛ, Москва, 1976.

[3] L.E. Ballentine, The statistical interpretation of quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.,* **72**, 358. (1970).

[4] L.E. Ballentine, *Quantum Mechanics,* World Scientific, Singapore, 1998.

[5] C. Fuchs and A. Peres, Quantum theory needs no 'Interpretation', *Phys. Today., March 2000, 70, (2000).*

[6] L.E. Ballentine, Yumin Yang and J.P. Zibin, Inadequacy of Ehrenfest's theorem to Characterize the classical regime, *Phys. Rev.* **A**, **50**, 2854-2859, (1994).

[7] C. Piron, *Helv.Phys.Acta* **37**, 439 (1964)

[8] G. Ludwig, *Z.Phys.* **181**, 233 (1964)

[9] G. Ludwig, *Z. Naturforsch.* **22a**, 1303 (1967)

[10] G. Ludwig, *Commun. Math. Phys.* **37**, 221 (1974)

[11] B. Mielnik, *Commun.Math.Phys.* **31** 221 (1974)

[12] M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York 1966; -

[13] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc. 1974

[14] J.A. Wheeler and W.H. Zurek (Eds.) *Quantum Theory of Measurement*, Princeton Univ. Press, Princeton (1983)

[15] H. Primas, *Chemistry, Quantum Mechanics and Reductionism*, Springer-Verlag, Berlin (1983)

[16] C.H. Bennet, G. Brassard, C. Crćpeau, R. Jozsa, A.Peres, W.K. Wootters, Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, *Phys.Rev.Lett.* **70**, 1895-1899, (1993)

[17] A.C. Elitzur and L. Vaidman, *Found.Phys.* **23**, 987 (1993)

[18] N. Gisin, *Helv.Phys.Acta,* **62**, 363 (1989);

[19] R. Penrose, *Shadows of the Mind; An Approach to the missing Science of Consciousness*, OUP (1994);

[20] R. Penrose, *The Large, the Small and the Human Mind*, CUP (1997)

[21] R.B. Griffiths, Probabilities and Quantum Reality: Are There Correlata? *Found.Phys.* **33**, 1423 (2003)

[22] R.G. Newton, What is a state in quantum mechanics? *Am.J.Phys.* **72**(3), 348-350 (2004).

[23] Comments in *Phys.Rev.Lett.* **72**, 780 (1994)

[24] Discussion in *Phys.Today*, Feb.1999, pp.11-15, 89-92

[25] N. Gisin, Weinberg's non-linear quantum mechanics and superluminal communications, *Phys.Lett.A,* **143**, 1-2, (1990);

[26] Yu.A. Rylov, Hamilton variational principle for statistical ensemble of deterministic systems and its application for ensemble of stochastic systems. *Russ. J. Math. Phys.*, **9**, iss. 3, 335-348, (2002).

[27] E. Madelung, Quanten theorie in hydrodynamischer Form. *Z.Phys.* **40,** 322-326, (1926).

[28] Yu.A. Rylov, The equation for isentropic motion of inviscid fluid in terms of wave function. *J. Math. Phys.* **30**, 2516-2520, (1989).

[29] Yu.A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *J. Math. Phys.* **40**, No.1, 256-278, (1999).

[30] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория.* Наука, Москва, 1989.

[31] Yu. A. Rylov, Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0210003).

[32] D. Bohm, A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. *Phys. Rev.,* **85**, 166, (1952); **85**, 180, (1952).

[33] Yu. A. Rylov, Hydrodynamical interpretation of quantum mechanics: the momentum distribution. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0402068).

[34] Yu. A. Rylov, Classical description of pair production. (Available at http://arXiv.org/abs/physics/0301020).