Путь к каркасной концепции элементарных частиц

Ю.А.Рылов

Институт проблем механики, РАН
119526, Москва, Пр. Вернадского, 101-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: $http://rsfq1.physics.sunysb.edu/\tilde{}rylov/yrylov.htm$
or mirror Web site:
$http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/\tilde{}rylov/yrylov.htm$

Аннотация

Строится тахионная модель нейтрино на основе утверждения, что квантовое описание есть статистическое описание случайно движущихся частиц. При этом используется (1) единый формализм динамики частиц, одинаково описывающий все частицы: детерминированные, стохастические и квантовые, (2) дискретная геометрия пространства-времени и каркасная концепция динамики частиц. Единый формализм является результатом логической перезагрузки, когда статистический ансамбль становится базовым объектом динамики частиц вместо отдельной частицы. Такая перезагрузка позволяет одинаково описывать квантовые, стохастические и детерминированные частицы в терминах статистического ансамбля, не ссылаясь на принципы квантовой механики. Кроме того используется релятивистское понятие состояния частицы, когда состояние описывается каркасом частицы (несколькими пространственно-временными точками) вместо точки в фазовом пространстве, что является нерелятивистским описанием состояния частицы. Представляя уравнение Дирака в терминах статистического ансамбля, заключаем, что в детерминированном приближении мировая линия дираковской частицы может быть пространственноподобной мировой линией с времениподобной осью. Вращательная составляющая релятивистской дирковской частицы описывается нерелятивистски. Это показывает, что мировая линия может быть пространственноподобной, и дираковская частица может быть тахионом. Нейтрино является дираковской частицей, и оно является тахионом. Оказывается, что свободные квантовые частицы движутся стохастически, и это ставит вопрос о том, что является причиной стохастического движения свободных квантовых частиц. Оказывается, что дискретная геометрия является многовариантной геометрией. Это является причиной стохастического движения частиц. Если элементарная длина λ_0 дискретной геометрии пространства-времени связана с квантовой постоянной $\hbar$ соотношением $\lambda_0^2 = \hbar/bc$, где b есть некоторая универсальная постоянная, то статистическое описание движения свободной частицы совпадает с квантовым описанием в терминах уравнения Шредингера.

Ключевые слова: структурный подход; единый формализм динамики; многовариантная геометрия; динамическая расквантизация; тахион; тахионный газ; динамика тахионов; темная материя

1 Введение

Частицы, движущиеся со скоростью большей скорости света, называются тахионами [1]-[4]. Мы будем использовать это название для частиц, имеющих пространственноподобную мировую линию. Оба определения означают одно и то же, если мировая линия гладкая, и можно определить производную вдоль мировой линии. Эта производная известна как скорость. Мы покажем, что мировая линия тахиона не является гладкой. Это свойство отличает тахионы от тардионов, которые движутся со скоростью меньшей скорости света, и мировая линия тардионов гладкая.

Нейтрино является тахионом, мировая линия которого представляет собой пространственноподобную мировую линию с времениподобной осью. Однако большинство физиков полагают, что тахионы не существуют, в частности, не существуют тахионы с винтообразной мировой линией. Наша модель нейтрино основывается на каркасной концепции элементарных частиц [5]. Каркасная концепция - это новая концепция, базирующаяся на таких необычных основаниях как (1) отказ от квантовых принципов, которые заменяются дискретной геометрией пространства-времени, (2) описание состояния частицы ее каркасом (несколько пространственно-временных точек) вместо точки в фазовом пространстве координат и импульсов.

Полезно описать характерные черты этих новых оснований, используя метод книги Ли Смолина [6]. Это прекрасная книга, где все проблемы изложены без единой формулы. Ли Смолин различает принципиальные теории от конструктивных теорий. Принципиальная теория должна быть верна для всех физических явлений, тогда как конструктивная теория верна только для некоторого класса физических явлений. Конструктивная теория создается на основе некоторых экспериментальных данных, и она верна для класса физических явлений, близких к явлению, проверенному экспериментально. Например, специальная теория относительности и общая теория относительности являются принципиальными теориями. Теория элементарных частиц является конструктивной теорией.

Ли Смолин сформулировал пять нерешенных проблем современной теоретической физики:

Проблема 1: объединение общей теории относительности с квантовой теории (квантовая гравитация)

Проблема 2: Обоснование квантовой механики.

Проблема 3: Объединение частиц и полей.

Проблема 4: Объяснение, как выбрать свободные постоянные в стандартной модели элементарных частиц

Проблема 5: Объяснение феномена темной материи и темной энергии.

Кроме того, Ли Смолин описывает новые и старые фундаментальные концепции как объединения. Например, он формулирует специальную теорию относительности как объединение пространства и времени. Закон инерции формулируется как объединение покоя и движения. Общая теория относительности формулируется как объединение пространства-времени и гравитации.

Тахионная модель нейтрино строится на основе принципиальной теории (каркасная концепция). Эта принципиальная теория формулируется на основе двух объединений:

1. Объединение движения детерминированной частицы с движением стохастической частицы.

2. Объединение непрерывной геометрии пространства-времени с дискретной геометрией пространства-времени.

Эти два объединения относятся к геометрии пространства-времени и динамике частиц. Эти дисциплины относятся ко всем физическим явлениям. Эти два объединения более фундаментальны, чем проблемы, сформулированные Ли Смолиным. Они разрешают четыре из пяти проблем Ли Смолина (четвертая проблема не решается, потому что это специфическая проблема стандартной модели элементарных частиц). Первая проблема (квантовая гравитация) решается в том смысле, что гравитационное поле не надо квантовать так же как и другие геометрические поля.

Оба объединения осуществляются на основе логической перезагрузки, которая означает изменение базовых положений теории.

Объединение движения детерминированных частиц с движением стохастических частиц означает следующее. Детерминированная частица является динамической системой $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, и можно написать динамические уравнения для детерминированнойй частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Стохастическая частица $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ не является динамической системой. По этой причине для стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ не существует динамических уравнений. Нет динамических уравнений для отдельной стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Можно описывать только среднее движение стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Для описания среднего движения рассматривается статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ есть динамическая система типа сплошной среды, и можно написать динамические уравнения для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$. Можно также построить статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ детерминированных динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ также является динамической системой типа сплошной среды. Любой статистический ансамбль ($\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ и $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$) можно рассматривать как жидкость (сплошную среду). В представлении Лагранжа динамические уравнения для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ совпадают с динамическими уравнениями для $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Только число динамических уравнений будет разным. Если число степеней свободы для $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ равно n, то число степеней свободы для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ равно nN, где N есть число динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ в $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$, $N \to \infty$.

Если динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ известны, то динамические уравнения для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ тоже известны. Наоборот, если уравнения для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ известны, то можно написать динамические уравнения для для отдельной частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$. Другими словами, не имеет значения, что является базовым объектом при описании детерминированной частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ ($\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ или $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$). Однако, при описании стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ это существенно, нет динамических уравнений для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, тогда как существуют динамические уравнения для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Если статистический ансамбль является базовым объектом в динамике частиц, то динамические уравнения существуют для всех сортов базового объекта $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$ и $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Различие между $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ и $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ состоит в том, что динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ могут быть получены из динамических уравнений для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}]$, но динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ не могут быть получены из динамических уравнений для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Как это возможно, будет показано позже на простом примере.

Логическая перезагрузка приводит к единому формализму для описания детерминированных, стохастических и квантовых частиц в терминах статистического ансамбля [7]. Оказывается, что квантовые частицы являются стохастическими частицами, описываемыми в терминах статистического ансамбля. Волновая функция ψ появляется при таком описании, потому что она является просто способом описания идеальной жидкости [8]. Волновая функция ψ используется потому, что при описании статистического ансамбля квантовых частиц, внутренняя энергия "квантовой жидкости" оказывается такой, что динамические уравнения в терминах ψ линейны (уравнение Шредингера) для потенциального течения "квантовой жидкости", описывающей этот ансамбль.

Таким образом, квантовые принципы не нужны, если базовым объектом динамики частиц является статистический ансамбль. Квантовые частицы – это просто стохастические частицы. Оказывается, что квантовые принципы не являются фундаментальными принципами природы, и нет необходимости квантовать гравитационное поле, особенно если принять во внимание, что динамические уравнения для гравитационного поля не содержат квантовой постоянной.

Объяснение квантовой теории статистическим описанием стохастических частиц ставит вопрос: "Почему свободные элементарные частицы движутся стохастически?" Ответ на этот вопрос такой. Реальное пространство-время дискретно. Существует минимальное расстояние между событиями (точками) пространства-времени. Это расстояние называется называется элементарной длиной λ_0. Условие дискретности пространства-времени записывается в виде

$$|\rho(P,Q)| \notin (0,\lambda_0), \quad \forall P,Q \in \Omega \tag{1.1}$$

где Ω есть множество пространственно-временных точек и $\rho(P,Q)$ есть пространственно-временной интервал между точками P и Q. Заметим, что соотношение $\rho(P,Q) = 0$ возможно, например, если $P = Q$, и оно совместимо с (1.1).

Обычно условие (1.1) рассматривается как ограничение на множество Ω, и функция расстояния ρ определяется следующим образом

$$\rho\left(P,Q\right)=\sqrt{2\sigma\left(P,Q\right)} \tag{1.2}$$

где σ есть мировая функция σ_{M} пространства-времени Минковского. В инерциальной системе координат мировая функция σ_{M} имеет вид

$$\sigma_{\mathrm{M}}\left(x,x'\right)=\frac{1}{2}g_{ik}\left(x^{i}-x'^{i}\right)\left(x^{k}-x'^{k}\right), \quad g_{ik}=\mathrm{diag}\left(c^{2},-1,-1,-1\right) \tag{1.3}$$

Рассмотрение соотношения (1.1) в виде ограничения на Ω приводит к геометрии на решетке. Геометрия Минковского на решетке является неоднородной и анизотропной. Она не инвариантна относительно преобразований Лоренца. Тем не менее она используется теоретиками для приближенных вычислений.

Более правильно рассматривать (1.1) как ограничение на вид функции расстояния ρ и на вид мировой функции $\sigma=\frac{1}{2}\rho^{2}$. Использование мировой функции более удобно, чем использование расстояния, потому что она всегда вещественна (σ положительна для временниподобных расстояний и она отрицательна для пространственноподобных расстояний). Мировая функция σ_{d} для дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ может быть взята в виде

$$\sigma_{\mathrm{d}}\left(P,Q\right)=\sigma_{\mathrm{M}}\left(P,Q\right)+\frac{\lambda_{0}^{2}}{2}\mathrm{sgn}\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P,Q\right)\right) \quad \forall P,Q\in\Omega \tag{1.4}$$

где Ω есть то же самое множество точек (континуум), которое используется в пространственно-временной геометрии Минковского. Соотношение (1.4) совместимо с ограничением (1.1).

Многовариантность является наиболее неожиданным и важным свойством дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Многовариантность геометрии означает, что вектор $\mathbf{AB}$ в точке A имеет много эквивалентных векторов $\mathbf{CD}$, $\mathbf{CD}'$, $\mathbf{CD}''$,...в точке C, но эти векторы между собой не эквивалентны. Современные теоретики не признают свойство многовариантности в геометрии и пытаются устранить его, если оно случайно появляется в геометрии. Например, когда многовариантность появляется в римановой геометрии, ее стараются устранить, связывая каждый из многочисленных векторов $\mathbf{CD}$, $\mathbf{CD}'$, $\mathbf{CD}''$,...в точке C с путем его параллельного переноса из точки A и провозглашая отсутствие абсолютного параллелизма в римановой геометрии.

Многовариантность для пространственноподобных векторов появляется уже в пространственно-временной геометрии Минковского. Игнорируя эту многовариантность, нельзя правильно описать движение тахионов. Традиционная точка зрения, что тахионы не существуют, связана с игнорированием многовариантности эквивалентности пространственноподобных векторов.

Такое отношение к многовариантности связано с тем, что начиная с Евклида, изучали только собственно евклидову геометрию, полагая, что геометрия пространства-времени не может иметь дополнительных свойств, которых нет в евклидовой геометрии. Многовариантность отрицалась в римановой геометрии, потому что отсутствие абсолютного параллелизма считалось меньшим дефектом, чем многовариантность эквивалентности векторов. Кроме того, многовариантность не совместима с современными методами дифференциальной геометрии. Операции линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$ (суммирование векторов $u \in \mathcal{L}_n$ и умножение вектора $u \in \mathcal{L}_n$ на вещественное число) не адекватны в многовариантной геометрии. Дело в том, что линвектор $u \in \mathcal{L}_n$ существует в одном экземпляре. Мы используем название линейный вектор (линвектор) для векторов $u \in \mathcal{L}_n$, чтобы отличать их от геометрических векторов (g-векторов). g-вектор $\mathbf{AB}$ определяется как упорядоченное множество из двух точек $\mathbf{AB} = \{A, B\} \in \Omega \times \Omega$. В любой геометрии пространства-времени имеется много эквивалентных g-векторов. В евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ множество $\Omega_{\mathbf{AB}}$ g-векторов $\mathbf{CD} \in \Omega \times \Omega$, эквивалентных g-вектору $\mathbf{AB}$ образует класс эквивалентности $[\mathbf{AB}]$ g-вектора $\mathbf{AB}$. Все g-векторы класса эквивалентности $[\mathbf{AB}]$ эквивалентны между собой, и каждому классу эквивалентности $[\mathbf{AB}]$ можно поставить в соответствие один из линвекторов линейного пространства $\mathcal{L}_n$. В результате линейные операции пространства $\mathcal{L}_n$ могут использоваться для g-векторов евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$. В многовариантной геометрии множество g-векторов $\Omega_{\mathbf{AB}}$ не образует класса эквивалентности, потому что $\Omega_{\mathbf{AB}}$ содержит g-векторы, которые не эквивалентны между собой (они эквивалентны только g-вектору $\mathbf{AB}$). В результате операции линейного векторного пространства $\mathcal{L}_n$ не адекватны в многовариантной геометрии. Эти операции можно ввести, но они оказываются неоднозначными.

Многовариантность геометрии пространства-времени порождает случайное вихляние мировой линии частицы. В геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ эквивалентность времениподобных векторов не многовариантна, тогда как равенство (эквивалентность) пространственноподобных векторов многовариантна. Вихляние пространственноподобных мировых линий имеет бесконечную амплитуду, и отдельный тахион не может быть обнаружен из-за бесконечной амплитуды случайного вихляния его мировой линии. В результате принято считать, что тахионов нет.

В дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ вихляют и времениподобные, и пространственноподобные мировые линии. Однако амплитуда вихляния времениподобных мировых линий ограничена элементарной длиной λ_0, и вихляние исчезает в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, где $\lambda_0 = 0$. Амплитуда вихляния пространственноподобных мировых линий тахионов бесконечна в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$ и в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. В реальной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ ограниченное вихляние времениподобных мировых линий является причиной стохастического движения частиц. Если λ_0^2 пропорционален квантовой постоянной $\hbar$, статистическое описание вихляющих мировых линий (динамические уравнения для статистического ансамбля) приводит к уравнению Шредингера [10].

В дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ все геометрические величины являются функциями мировой функции σ_{d}. В частности, размерность n геометрии определяется ее мировой функцией σ. В $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ размерность не имеет определенной величины. Это довольно неожиданно, потому что в римановой геометрии размерность геометрии является определенным натуральным числом.

Если квантовые частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$ являются стохастическими частицами, описываемыми в терминах статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$, то динамические уравнения для любой квантовой частицы должны приводиться к динамическим уравнениям статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. В частности, уравнение Дирака должно приводиться к динамическим уравнениям для некоторого статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{Dst}}\right]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{Dst}}$. Можно ввести "детерминированную модель" $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ квантовой частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ с помощью операции динамической расквантизации (D-расквантизация) статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ [9]. Динамическая расквантизация - это динамическая операция, которая не использует квантовых принципов. В результате динамической расквантизации все производные $\partial_k \equiv \partial/\partial x^k$ в динамических уравнениях заменяются производными, параллельными 4-вектору j^k тока частиц

$$\partial_k \rightarrow \frac{j_k j^l}{j_s j^s}\partial_l \tag{1.5}$$

В результате динамической расквантизации динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\right]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ превращаются в динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\mathrm{d}}\right]$ детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$.

В лагранжевом представлении динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения, потому что они содержат производные только вдоль направления вектора j^k. Динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ имеет конечное число степеней свободы. Она может быть интерпретирована как детерминированная модель стохастической частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ могут содержать квантовую постоянную $\hbar$, потому что динамическая расквантизация использует только процедуру (1.5). Она не использует предел $\hbar \rightarrow 0$. В частности, если стохастическая частица $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является дираковской частицей $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, описываемой уравнением Дирака, детерминистическая модель дираковской частицы описывается динамической системой, имеющей десять степеней свободы [11]. Это может интерпретироваться как ротатор (две жестко связанных точечных частицы). Если следить только за одной из частиц ротатора, то можно заключить, что мировая линия детерминированной дираковской частицы оказывается винтовой линией (пространственноподобной или времениподобной) с времениподобной осью. Нейтрино считается дираковской частицей. В результате нейтрино оказывается тахионом, движущимся вдоль пространственноподобной винтовой линии с времениподобной осью. (Времениподобная мировая линия нейтрино мало вероятна, потому что в этом случае регулярная скорость нейтрино оказывается существенно меньше скорости света). Заметим, что традиционно в качестве детерминированной модели $\mathcal{S}_{\mathrm{Dd}}$ дираковской частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dst}}$ рассматривается тардион, оснащенный спином (угловым моментом). Термин "тардион" означает частицу, имеющую времениподобную мировую линию, тогда как термин "тахион" означает частицу, имеющую пространственноподобную мировую линию.

Как мы увидим, дираковская частица описывается трехточечным каркасом $\mathcal{P}^2 = \{P_0, P_1, P_2\}$, или тремя связанными векторами $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Один из векторов пространственноподобный, а два других времениподобный. Времениподобны вектор вихляет с амплитудой, ограниченной элементарной длиной λ_0, тогда как пространственноподобный вектор вихляет с неограниченной (бесконечной) амплитудой. Все точки каркаса $\mathcal{P}^2 = \{P_0, P_1, P_2\}$ жестко связаны. Вихляние мировой цепи такой частицы представляет собой смесь неограниченного вихляния тахиона и вихляния тардиона, ограниченного величиной λ_0 (или $\hbar$). В результате динамической расквантизации системы $\mathcal{S}_{\text{Dst}}$ получается динамическая система $\mathcal{S}_{\text{Dd}}$, которая описывается винтовой мировой линией (пространственноподобной или времениподобной) с времениподобной осью в пространственно-временной геометрии Минковского. Динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\text{Dd}}$ содержат квантовую постоянную $\hbar$ (в выражении для спина). Это означает, что динамическая система $\mathcal{S}_{\text{Dd}}$ не является классическим приближением к стохастической дираковской частице $\mathcal{S}_{\text{Dst}}$. Следует учесть, что обычно не рассматривается детерминированная модель $\mathcal{S}_{\text{Dd}}$, содержащая квантовую постоянную $\hbar$ и объясняющая спин частицы вращением частицы на ее винтовой мировой линии. Вместо этого рассматривают динамическую систему $\mathcal{S}_{\text{Dcl}}$, которая описывается прямой мировой линией (а не винтовой), а спин вводится аксиоматически. Из динамической системы $\mathcal{S}_{\text{Dcl}}$ нельзя получить какой-либо информации о устройстве $\mathcal{S}_{\text{Dst}}$.

Попытки получения информации об устройстве $\mathcal{S}_{\text{Dst}}$ из современной теории элементарных частиц напоминают попытки исследования устройства атома на основе периодической системы химических элементов и химических реакций между химическими элементами. Получается масса информации о различных свойствах атомов разных химических элементов и никакой информации о планетарной модели атома.

Замена квантовой теории статистическим описанием вместе с динамической расквантизацией позволяют построить новый подход к описанию элементарных частиц. Мы квалифицируем этот подход как структурный. Традиционный подход к описанию элементарных частиц (стандартная модель) квалифицируется как эмпирический. Эмпирический подход к теории элементарных частиц основан на квантовой теории. При эмпирическом подходе элементарные частицы маркируются квантовыми числами. Эмпирический подход не дает возможности определить связь квантовых чисел с устройством элементарных частиц. Структурный подход позволяет определить устройство (структуру) элементарной частицы.

Различие между структурным и эмпирическим подходами можно увидеть на примере теории химических элементов. Эмпирический подход реализуется химическими методами, когда химические элементы систематизируются на основе периодической системы химических элементов, и исследуются реакции между различными химическими веществами. При эмпирическом подходе нельзя определить структуру атома (ядро и электронную оболочку). Наоборот, при структурном подходе используются методы квантовой механики и атомной физики. Это позволяет определить устройство атома.

Таким образом, мы кратко описали путь к тахионной модели нейтрино, который основывается на двух логических перезагрузках (в динамике и в геометрии пространства-времени). Это наиболее краткий путь, но на самом деле мы шли к детерминированной модели нейтрино другим путем. Мы искали дефекты и ошибки в существующей физике микромира и устраняли их шаг за шагом. Такая исследовательская стратегия является наилучшей в случае, когда теория продолжает быть в кризисе. Насколько мне известно, никто не использует такую стратегию. Более того, меня критиковали за такую стратегию, поскольку никто не верил, что могут быть ошибки в существующей физике микромира. Все исследователи мечтали о новых счастливых идеях, которые могли бы помочь нам выйти из кризиса. Далее мы представим путь к детерминированной модели нейтрино. Это был долгий путь, занявший тридцать лет. К счастью, это был путь не только к детерминированной модели нейтрино. Это был путь к каркасной концепции элементарных частиц [12].

2 Единый формализм для динамики частиц

После объяснения тепловых явлений с помощью кинетической теории газа было естественно думать, что квантовые эффекты могут быть объяснены как некое стохастическое движение микрочастиц. Некоторые исследователи [13, 14] пытались получить квантовую механику как статистическое описание стохастически движущихся микрочастиц. Им не удалось сделать это. Мойел [13] пытался свести квантовые динамические уравнения к виду, характерному для для динамических уравнений стохастических процессов. Феньеш [14] пытался получить статистическое описание, используя сходство между уравнением Шредингера и уравнением Фоккера для процессов диффузии. Оба автора использовали понятие волновой функции, не понимая, что оно означает. Объяснение квантовых явлений едва ли возможно без понимания того, что такое волновая функция. Однако, никто не знал, что такое волновая функция.

То, что уравнение Шредингера может быть сведено к потенциальному течению некоторой квантовой жидкости было показано Маделунгом [15]. Однако представление гидродинамических уравнений для идеальной жидкости в терминах волновой функции требовало полного интегрирования гидродинамических уравнений.

Для перехода от уравнения Шредингера к системе из четырех гидродинамических уравнений комплексное уравнение Шредингера для волновой функции $\psi = \sqrt{\rho}\exp(i\varphi/\hbar)$ представлялось в виде двух вещественных уравнений для амплитуды $\sqrt{\rho}$ и для фазы φ. Чтобы получить гидродинамические уравнения, было достаточно взять градиент от уравнения для фазы φ. В результате получалось четыре динамических уравнения, которые превращались в гидродинамические уравнения после введения соответствующих обозначений. Другими словами, переход от динамических уравнений в терминах волновой функции к гидродинамической форме этих уравнений требовал дифференцирования этих уравнений. Наоборот, чтобы перейти от гидродинамической формы динамических уравнений к их представлению в терминах волновой функции, нужно было интегрировать динамические уравнения. В случае потенциального течения это интегрирование осуществлялось довольно просто, тогда как в случае завихренного течения способ интегрирования стал известным только в конце двадцатого века [8].

Бом [16] использовал гидродинамическое представление уравнения Шредингера для интерпретации квантовой механики. Он исходил из волновой функции и квантовых принципов и интерпретировал их в гидродинамических терминах. Однако, он не мог обосновать квантовую механику на основе гидродинамики, потому что для такого обоснования он должен был исходить из гидродинамических понятий и уравнений и получить при этом волновую функцию в терминах гидродинамики. Он не мог сделать этого, потому что в этом случае ему пришлось бы интегрировать гидродинамические уравнения в общем случае, а не только для потенциальных течений. Интегрирование гидродинамических уравнений не было известно почти в течение всего двадцатого века.

Информацию о других попытках статистического обоснования квантовой механики можно найти в книге Холланда [17]. Все авторы пытались обосновать нерелятивистские квантовые явления на основе нерелятивистского статистического описания. Это обстоятельство было главной причиной неудач. Нерелятивистская квантовая механика описывает среднее движение частиц, и это среднее движение является нерелятивистским. Однако нерелятивистский характер среднего движения не означает, что точное движение частицы также является нерелятивистским. Стохастическая составляющая движения частицы может быть релятивистской и эта составляющая исчезает при усреднении. Чтобы получить правильное описание, надо использовать релятивистское статистическое описание.

Нерелятивистское статистическое описание производится обычно в терминах плотности вероятности. Оно использует нерелятивистское понятие состояния частицы как точки в фазовом пространстве координат и импульсов. При надлежащей нормировке неотрицательная плотность ρ частиц в фазовом пространстве используется как плотность вероятности.

В релятивистской физике состояние частицы определяется ее мировой линией (а не точкой в фазовом пространстве). В результате плотность состояний релятивистских частиц в статистическом ансамбле в некоторой точке x пространства-времени определяется вектором $j^k(x)$ 4-тока [18]. Этот вектор нельзя описать в терминах плотности вероятности. В результате статистическое описание релятивистских стохастических частиц отличается от статистического описания нерелятивистских частиц. Релятивистское статистическое описание случайно движущихся частиц представляет собой рассмотрение многих независимых стохастических частиц (статистический ансамбль), оно является изначальным определением статистического описания. Рассмотрение статистического ансамбля стохастических частиц представляет собой рассмотрение некоторой сплошной среды, состоящей из бесконечного числа независимых стохастических частиц [18, 19, 20]. Таким образом, статистический ансамбль стохастических частиц есть динамическая система, которая описывается некоторыми динамическими уравнениями, тогда как отдельная стохастическая частица не является динамической системой, и не существует динамических уравнений, описывающих отдельную стохастичекую систему.

Рассмотрение статистического ансамбля позволяет получить динамическую систему, эволюцию которой можно исследовать. Разумеется релятивистское статистическое описание в терминах статистического ансамбля и описание в терминах сплошной среды связаны. Однако, обычно предпочитают использовать нерелятивистское статистическое описание в терминах плотности вероятности. Броуновские частицы описываются с помощью нерелятивистского статистического описания. Такой подход является правильным, потому что стохастическая составляющая движения броуновской частицы является нерелятивистской, и состояние броуновской частицы может описываться точкой в обычном пространстве.

Однако применение нерелятивистского статистического описания к квантовой частице некорректно, потому что *нерелятивистская квантовая механика является на самом деле релятивистской концепцией.* Это утверждение выглядит несколько неожиданным. Заметим однако, что если мы ничего не знаем о стохастической составляющей движения частицы, то следует рассматривать общий (релятивистский) случай. Если нерелятивистская квантовая механика рассматривается как релятивистская концепция, а квантовая механика оказывается нерелятивистской концепцией, то такое рассмотрение квантовой механики окажется правильным, потому что нерелятивистская концепция есть частный случай релятивистской концепции. Однако, если нерелятивистская квантовая механика рассматривается как нерелятивистская концепция, а она оказывается релятивистской концепцией, то такая нерелятивистская концепция будет, вообще говоря, неправильной. Различие состоит в понятии состояния частицы.

Таким образом, если пытаться получить статистическое обоснование квантовой механики как статистическое описание случайно движущихся частиц, то следует использовать адекватные релятивистские понятия. Формализм нерелятивистской квантовой механики является релятивистским. Чтобы произвести статистическое обоснование квантовой механики, следует осуществить логическую перезагрузку, т.е. переход от неадекватных (нерелятивистских) понятий к адекватным (релятивистским) понятиям. Это означает что плотность вероятности $\rho(x)$ следует заменить "вектором вероятности" $j^k(x)$ (плотностью мировых линий). Введение 4-вектора $j^k(x)$ означает рассмотрение некоторой "квантовой жидкости". Волновая функция ψ представляет собой способ описания жидкости [8], и она появляется как результат описания "квантовой жидкости", описывающей состояние статистического ансамбля. В результате главное понятие квантовой механики (волновая функция) оказывается вторичным, производным понятием. Волновая функция может быть введена и интерпретирована в терминах понятий статистического ансамбля. Это позволяет обосновать квантовую механику как статистическое описание случайно движущихся частиц.

Релятивистский характер нерелятивистской квантовой механики делает бесполезным построение релятивистской квантовой теории как результат объединения квантовых и релятивистских принципов. Такое объединение непоследовательно, потому что нерелятивистская квантовая механика уже является нерелятивистским приближением релятивистской концепции. Такое объединение напоминает объединение аксиоматической концепции термодинамики с модельной концепцией кинетической теории газов. Релятивистскую квантовую теорию надо получать, отказываясь от нерелятивистского приближения релятивистского статистического обоснования квантовой механики. Это означает, что релятивистская квантовая теория обречена на подгонку вместо логического развития существующего релятивистского статистического описания.

Главное различие между квантовой механикой и статистическим описанием стохастических частиц заключается в использовании формулы фон Неймана для вычисления средних величин.

$$\langle f \rangle = \int \psi^* f \psi d\mathbf{x} \tag{2.1}$$

В соответствии со статистическим подходом эта формула верна, если f является произвольной функцией координат $\mathbf{x}$, или она является аддитивной величиной (энергия, количество движения, угловой момент). Согласно интерпретации фон Неймана формула (2.1) верна для произвольной функции координат и импульсов $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, $\mathbf{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$. Утверждение теоремы фон Неймана о невозможности введения скрытых переменных в квантовой механике основано на применимости формулы (2.1) к произвольным функциям $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ [21]. Статистическое описание стохастических частиц может рассматриваться как введение скрытых переменных, но в этом случае формула (2.1) не будет верна для произвольных функций $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, и не возникает конфликта с теоремой о скрытых переменных.

Следует заметить, что логическая перезагрузка к релятивистским понятиям в статистическом описании не нуждается ни в каких новых гипотезах. Плотность вероятности просто нельзя использовать, потому что она является атрибутом нерелятивистского описания. Поскольку квантовая механика является динамикой статистического ансамбля стохастических частиц, то волновая функция ψ описывает состояние динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ [8]. Эта динамическая система $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ является статистическим ансамблем стохастических частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Если статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ нормирован на одну частицу, то он может интерпретироваться как среднестатистическая частица $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$. Среднестатистическая частица $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ имеет энергию, импульс и другие глобальные параметры отдельной частицы $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$, но ее движение является движением статистического ансамбля. Например, $\langle\mathcal{S}_{\mathrm{st}}\rangle$ может пролететь через две открытые щели сразу, тогда как отдельная детерминированная частица $\mathcal{S}_{\mathrm{d}}$ может пролететь только через одну из двух открытых щелей.

Копенгагенская интерпретация квантовой механики, где волновая функция описывает отдельную частицу, не совместима с формализмом квантовой механики [21, 22]. Поскольку квантовая механика является статистической теорией (динамика статистического ансамбля), то имеются два разных вида квантовых измерений: (1) массовое измерение (М-измерение), которое производится над всеми элементами (частицами) $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, и (2) отдельное измерение (S-измерение), которое производится над отдельной частицей $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$. Эти измерения обладают различными свойствами, и их нельзя путать.

S-измерение величины R дает случайное значение R', которое, вообще говоря, не может быть получено при повторном S-измерении. В S-измерении мы имеем дело с отдельной стохастической системой $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Состояние стохастической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ может измениться после S-измерения, которое является динамическим воздействием на $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Однако состояние ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ не может измениться в результате этого воздействия, потому что $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ содержит бесконечное число частиц $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Повторное S-измерение той же величины R производится над другой стохастической частицей $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Это дает, вообще говоря, другое значение R'' измеряемой величины R.

М-измерение представляет собой множество из N S-измерений ($N \to \infty$). М-измерение величины R дает распределение $F(R)$, которое может быть получено при повторных М-измерениях. М-измерение величины R в состоянии ψ статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ может изменить состояние статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$, потому что в этом случае мы имеем дело с N ($N \to \infty$) стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Каждая стохастическая система изменяется после S-измерения, произведенного над ней. N измененных систем $\mathcal{S}'_{\mathrm{st}}$ образуют статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}'_{\mathrm{st}}]$ при $N \to \infty$. В результате состояние ψ статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ изменяется.

Возможно ли получить определенное значение R' при М-измерении величины R (вместо распределения $F(R)$)? Это возможно, при условии, что измерение сопровождается дискриминирующей операцией, которая устраняет из статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}'_{\mathrm{st}}]$ все стохастические системы $\mathcal{S}'_{\mathrm{st}}$, где измеренное значение величины R не равно R'. М-измерение, сопровожденное дискриминирующей операцией называется селективным М-измерением (SM-измерение). SM-измерение величины R может дать определенное значение R' и изменить состояние ψ статистического ансамбля. Другими словами, SM-измерение может иметь свойства S-измерения и М-измерения одновременно.

При копенгагенской интерпретации квантовой механики, где ψ есть состояние отдельной $\mathcal{S}_{\mathrm{q}}$, имеется только один вид измерения. В одних ситуациях измерение интерпретируется как М-измерение, в других ситуациях - как S-измерение. Предполагается, что такое измерение величины R может дать определенное случайное значение R' величины R и одновременно изменить состояние $\psi \to \psi_{R'}$. Другими словами, в копенгагенской интерпретации предполагается, что измерение имеет свойства SM-измерения. Использование одного термина для различных видов измерения (S-,M-,SM-) приводит к многочисленным парадоксам.

Мы рассмотрим только один из парадоксов: "действие измерения на расстоянии". Рассмотрим систему $\mathcal{S} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ в состоянии ψ. Пусть $\mathcal{S}$ в состоянии ψ может распадаться на две системы (частицы): $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$. Пусть состояния этих двух систем $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$ оказываются коррелированными в том смысле, что если S-измерение дихотомической величины s (спина) в $\mathcal{S}_1$ дает результат $s' = 1/2$, то S-измерение той же самой величины s (спина) в $\mathcal{S}_2$ дает результат $s'' = -1/2$. Пусть эти частицы $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ движутся, и в некоторый момент они оказываются разделенными расстоянием L. Согласно точке зрения копенгагенской интерпретации, когда измеряется величина s в $\mathcal{S}_1$ и получается результат $s' = 1/2$, состояние системы $\mathcal{S}_1$ изменяется (SM-измерение) $\psi_1 \to \psi_1'$. В то же время состояние системы $\mathcal{S}_2$ должно измениться $\psi_2 \to \psi_2'$, потому что в $\mathcal{S}_2$ величина s принимает значение $s'' = -1/2$. В результате измерение величины s в $\mathcal{S}_1$ мгновенно изменяет состояние частицы $\mathcal{S}_2$, хотя расстояние L между частицами $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ может быть большим ("действие измерения на расстоянии"). Такая ситуация не совместима с принципами специальной теории относительности. Она рассматривается как парадокс.

Парадокс разрешается ссылкой на то, что в данном случае мы имеем дело с SM-измерением, которое сопровождается дискриминационной операцией, и информация об этой операции должна быть передана из точки A_1, в точку A_2, где находится $\mathcal{S}_2$. В самом деле, если говорить об влиянии измерения в $\mathcal{S}_1$ на волновую функцию системы $\mathcal{S}_2$, то следует рассмотреть ансамбли $\mathcal{E}[\mathcal{S}_1]$ и $\mathcal{E}[\mathcal{S}_2]$, потому что волновая функция относится к состоянию статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_1]$, а не к состоянию отдельной частицы $\mathcal{S}_1$. В SM-измерении рассматривается N $(N \to \infty)$ стохастических систем $S_1', S_2', ...S_N'$ статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_1]$ и N $(N \to \infty)$ стохастических систем $S_1'', S_2'', ...S_N''$ статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_2]$. Стохастические системы S_k' ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_1]$ коррелируют со стохастическими системами S_k'' ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_2]$. Это означает, что, если величина s имеет значение $s' = 1/2$ в S_k' of $\mathcal{S}_1$, то величина s имеет значение $s'' = -1/2$ в системах S_k'' ансамбля $\mathcal{S}_2$. Измерим величину s во всех N стохастических системах S_k', $k = 1, 2, ...N$ и получим, что величина $s' = 1/2$ оказывается в стохастических системах $S_{(k_1)}', S_{(k_2)}', ...S_{(k_m)}'$ of $\mathcal{E}[\mathcal{S}_1]$. Тогда вследствие корреляции величина s имеет значение $s' = -1/2$ в стохастических системах $S_{(k_1)}'', S_{(k_2)}'', ...S_{(k_m)}''$ ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_2]$. Можно образовать статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_1'] = \mathcal{E}\left[S_{(k_l)}'\right]$. Его состояние описывается волновой функцией ψ_2', где $s = 1/2$. Можно образовать статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_2'] = \mathcal{E}\left[S_{(k_l)}''\right]$ стохастических систем $S_{(k_1)}'', S_{(k_2)}'', ...S_{(k_m)}''$. Его состояние описывается волновой функцией ψ_2'', где $s = -1/2$. Однако, числа $(k_1), (k_2), ...(k_m)$ не известны в точке A_2, где находится система $\mathcal{S}_2$. Для того, чтобы построить $\mathcal{E}[\mathcal{S}_2'] = \mathcal{E}\left[S_{(k_l)}''\right]$ с $s = -1/2$, нужно передать эти числа из A_1 в A_2. Передача этой информации не может быть осуществлена со скоростью, большей скорости света. Конфликта со специальной теорией относительности не возникает.

Единый метод описания динамических и стохастических систем изложен в

[22]. Здесь мы представим только краткую схему применения этого метода на примере свободной квантовой частицы.

Статистический ансамбль $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm cl}\right]$ свободных нерелятивистских классических частиц $\mathcal{S}_{\rm cl}$ описывается действием

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm cl}]}\left[\mathbf{x}\right]=\int\int\limits_{V_\xi}\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)dtd\boldsymbol{\xi},\qquad \dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$, $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ суть параметры, маркирующие частицы статистического ансамбля, и ρ_0 есть статистический вес.

Если частицы ансамбля стохастические, стохастичность учитывается добавлением в действие дополнительных динамических переменных. Действие для статистического ансамбля $\mathcal{E}\left[S_{\rm st}\right]$ стохастических частиц $\mathcal{S}_{\rm st}$ записывается в виде

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\int\limits_{V_\xi}\left\{\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)dtd\boldsymbol{\xi},\qquad \dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{2.3}$$

переменная $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ описывает регулярную составляющую движения частицы. Переменная $\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ описывает среднее значение стохастической составляющей скорости, $\hbar$ есть квантовая постоянная. Второй член в (2.3) описывает кинетическую энергию стохастической составляющей скорости. Третий член описывает взаимодействие между стохастической составляющей $\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ и регулярной составляющей $\dot{\mathbf{x}}\left(t,\boldsymbol{\xi}\right)$ скорости. Оператор

$$\boldsymbol{\nabla}=\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3}\right\} \tag{2.4}$$

определен в пространстве координат $\mathbf{x}$.

Описание стохастической физической системы отличается от описания детерминированной динамической системы только дополнительными членами и дополнительными динамическими переменными в функции Лагранжа. Дополнительные динамические переменные описывают стохастичность движения частицы.

Динамические уравнения для динамической системы $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$ получаются в результате варьирования действия (2.3) по переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$.

Чтобы получить функционал действия для $\mathcal{S}_{\rm st}$ из действия (2.3) для $\mathcal{E}\left[\mathcal{S}_{\rm st}\right]$, следует опустить интегрирование по $\boldsymbol{\xi}$ в (2.3). Получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\rm st}}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\left\{\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}dt,\qquad \dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{2.5}$$

где $\mathbf{x}=\mathbf{x}\left(t\right)$ и $\mathbf{u}=\mathbf{u}\left(t,\mathbf{x}\right)$ являются зависимыми динамическими переменными. Функционал действия (2.5) не является хорошо определенным для $\hbar\neq 0$, потому что оператор $\boldsymbol{\nabla}$ определен в некоторой 3-мерной окрестности точки $\mathbf{x}$, но не в самой точке $\mathbf{x}$. Поскольку функционал (2.5) не является хорошо определенным, то нельзя получить динамические уравнения для $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$. Это означает по определению, что частица $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$ является стохастической. Полагая $\hbar = 0$ в (2.3), мы преобразуем действие (2.3) в действие (2.2), потому что в этом случае $\mathbf{u} = 0$ в силу динамических уравнений.

Квантовая постоянная $\hbar$ была введена в действие (2.3) для того, чтобы описание с помощью действия (2.3) было эквивалентно уравнению Шредингера. Если заменить член $-\hbar\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}/2$ некоторой функцией $f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u})$, то получится статистическое описание другой стохастической системы с другой формой стохастичности, которая не совпадает с квантовой стохастичностью. Другими словами, вид последнего члена в (2.3) описывает тип стохастичности.

Чтобы получить динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]$ стохастических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{st}}$, нужно варьировать действие (2.3). Варьирование (2.3) по $\mathbf{u}$ дает

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[\mathbf{x},\mathbf{u}] &= \int\int\limits_{V_\xi} \left\{m\mathbf{u}\delta\mathbf{u} - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{u}\right\}\rho_0(\boldsymbol{\xi})\, dt d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int\int\limits_{V_\mathbf{x}} \left\{m\mathbf{u}\delta\mathbf{u} - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\delta\mathbf{u}\right\}\rho_0(\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)} dt d\mathbf{x} \\
&= \int\int\limits_{V_\mathbf{x}} \delta\mathbf{u}\left\{m\mathbf{u}\rho + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho\right\} dt d\mathbf{x} - \int\oint \frac{\hbar}{2}\rho\delta\mathbf{u}\, dt d\mathbf{S}
\end{aligned}
$$

где

$$
\rho = \rho_0(\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{\partial(x^1,x^2,x^3)} = \rho_0(\boldsymbol{\xi})\left(\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}\right)^{-1} \tag{2.6}
$$

Мы получаем следующее динамическое уравнение

$$
\delta\mathbf{u}: \qquad m\rho\mathbf{u} + \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\rho = 0 \tag{2.7}
$$

где $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ определяется соотношением (2.6). Разрешая (2.7) относительно $\mathbf{u}$, получаем уравнение

$$
\mathbf{u} = \mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\ln\rho, \tag{2.8}
$$

которое напоминает выражение для средней скорости броуновской частицы с коэффициентом диффузии $D = \hbar/2m$.

Вариация действия (2.3) по $\mathbf{x}$ производится при фиксированном виде $\mathbf{u}$, но $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, и аргумент $\mathbf{x}$ функции $\mathbf{u}$ надо варьировать. Вариация действия (2.3) по $\mathbf{x}$ дает

$$
\delta\mathcal{A}_{\mathcal{S}_{\mathrm{st}}}[\mathbf{x},\mathbf{u}] = \int \left\{m\dot{\mathbf{x}}\delta\dot{\mathbf{x}} + \delta\left(\frac{m}{2}\mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right)\right\}\rho_0(\boldsymbol{\xi})\, dt d\boldsymbol{\xi}, \tag{2.9}
$$

Получаем динамическое уравнение

$$\delta\mathbf{x}: \qquad -m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}+\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right)=0 \tag{2.10}$$

Подставляя (2.8) в (2.10) и рассматривая ρ как функцию $t,\mathbf{x}$, получаем

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=-\boldsymbol{\nabla}U_{\text{B}} \tag{2.11}$$

где d/dt означает субстанциональную производную по времени t

$$\frac{dF}{dt}\equiv\frac{\partial\left(F,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}$$

$\boldsymbol{\nabla}$ есть градиент в пространстве координат x, и U_{B} есть так называемый потенциал Бома

$$\begin{aligned} U_{\text{B}}\left(t,\mathbf{x}\right) &= -\frac{m}{2}\mathbf{u}^2+\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}=U\left(\rho,\boldsymbol{\nabla}\rho,\boldsymbol{\nabla}^2\rho\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\left(\boldsymbol{\nabla}\rho\right)^2}{\rho^2}-\frac{\hbar^2}{4m}\frac{\boldsymbol{\nabla}^2\rho}{\rho}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\boldsymbol{\nabla}^2\sqrt{\rho} \end{aligned} \tag{2.12}$$

где для расчета U_{B} используется соотношение (2.8)

Получаем

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}=\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\boldsymbol{\nabla}^2\sqrt{\rho}\right) \tag{2.13}$$

Однако, соотношение (2.6) определяет переменную ρ как функцию переменных $x^{\alpha,\beta}\equiv\partial x^\alpha/\partial\xi_\beta$, и нужно учесть это обстоятельство в динамическом уравнении (2.13).

В представлении Эйлера (в терминах независимых переменных $t,\mathbf{x}$) уравнение (2.11) может быть записано в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\left(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v}=-\frac{1}{m}\boldsymbol{\nabla}U_{\text{B}}, \qquad \mathbf{v}=\mathbf{v}\left(t,\mathbf{x}\right) \tag{2.14}$$

Используя соотношение (2.6), представим величину $\rho\mathbf{v}$ в виде

$$\rho\mathbf{v}\left(t,\mathbf{x}\right)=\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial\left(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(t,x^1,x^2,x^3\right)}\frac{\partial\left(\mathbf{x},\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}=\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial\left(\mathbf{x},\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(t,x^1,x^2,x^3\right)} \tag{2.15}$$

Тогда, используя тождество

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^1,x^2,x^3\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)\frac{\partial\left(x^\alpha,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(t,x^1,x^2,x^3\right)}\right)\equiv 0 \tag{2.16}$$

получаем уравнение непрерывности для переменных $\rho=\rho\left(t,\mathbf{x}\right)$ и $\mathbf{v}=\mathbf{v}\left(t,\mathbf{x}\right)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\rho v^\alpha\right)=0 \tag{2.17}$$

Уравнения (2.14), (2.17) вместе с (2.12) образуют систему уравнений для статистического ансамбля стохастических частиц в представлении Эйлера, когда независимыми динамическими переменными являются $t, \mathbf{x}$.

Отсутствуют всякие ссылки на распределение стохастических скоростей и другие вероятностные распределения. Влияние этого распределения на среднее движение частиц описывается видом потенциала Бома U_{B} (2.12). Ситуация напоминает случай с газовой динамикой, когда влияние распределения Максвелла на движение газа описывается внутренней энергией газа. Разумеется, такое описание не является исчерпывающим, однако оно достаточно для описания среднего движения стохастических частиц. В результате мы получаем *чисто динамическое описание* среднего движения стохастических частиц.

Жидкость, описываемая динамическими уравнениями (2.14), (2.17) может описываться в терминах двух-компонентной волновой функции [8] или [7]. Получаем следующее уравнение для волновой функции ψ

$$i\hbar\partial_0\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi + \frac{\hbar^2}{8m}\boldsymbol{\nabla}^2 s_\alpha\cdot(s_\alpha - 2\sigma_\alpha)\,\psi - \frac{\hbar^2}{4m}\frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\rho}\boldsymbol{\nabla}s_\alpha\sigma_\alpha\psi = 0 \tag{2.18}$$

где

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \quad \rho = \psi^*\psi, \qquad s_\alpha = \frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{2.19}$$

σ_α суть 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

В случае потенциального течения волновая функция становится однокомпонентной, потому что при $\psi = \psi_1 = a\psi_2$, $a =$const и $s_\alpha =$ const, $\alpha = 1,2,3$. В этом случае уравнение (2.18) превращается в линейное уравнение (уравнение Шредингера)

$$i\hbar\partial_0\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi = 0 \tag{2.21}$$

Следует отметить специфику описания в терминах волновой функции. Любая идеальная (недиссипативня) жидкость может описываться в терминах волновой функции [8]

3 Случай релятивистских частиц

Вид стохастичности для нерелятивистских частиц в (2.5) определяется двумя последними членами. В релятивистском случае действие (2.5) заменяется действием [23]

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\mathrm{st}}]}[x,\kappa] = -\int\int_{V_{\boldsymbol{\xi}}} mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}\rho_0(\boldsymbol{\xi})\,d\tau d\boldsymbol{\xi}, \qquad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \tag{3.1}$$

$$K=\sqrt{1+\lambda^2\left(g_{kl}\kappa^k\kappa^l+\partial_k\kappa^k\right)},\qquad \lambda=\frac{\hbar}{mc} \tag{3.2}$$

где $x=\left\{x^k\right\}=\left\{x^k\left(\tau,\boldsymbol{\xi}\right)\right\}$, $k=0,1,2,3$. Величина g_{kl} =diag$\{c^2,-1,-1,-1\}$ представляет собой метрический тензор. Независимые переменные $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$ маркируют частицы статистического ансамбля. Зависимые переменные $\kappa^k=\kappa^k\left(x\right)$, $k=0,1,2,3$ описывают некоторое силовое поле, связанное со средней стохастической составляющей u^l 4-скорости частицы соотношением $\kappa^l=\frac{m}{\hbar}u^l$, и λ есть комптоновская длина волны частицы.

В нерелятивистском приближении можно пренебречь временной составляющей $\kappa^0=\frac{m}{\hbar}u^0$ по сравнению пространственной $\boldsymbol{\kappa}=\frac{m}{\hbar}\mathbf{u}$. Полагая $\tau=t=x^0$ в (3.1), (3.2) получим в нерелятивистском приближении вместо (3.1)

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]}\left[\mathbf{x},\mathbf{u}\right]=\int\int\limits_{V_{\boldsymbol{\xi}}}\left\{-mc^2+\frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2+\frac{m}{2}\mathbf{u}^2-\frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\right\}\rho_0\left(\boldsymbol{\xi}\right)dtd\boldsymbol{\xi},\qquad \dot{\mathbf{x}}\equiv\frac{d\mathbf{x}}{dt} \tag{3.3}$$

Действие (3.3) совпадает с действием (2.3) за исключением первого члена, который не дает вклада в динамические уравнения.

Добавим к действию (3.1) член, описывающий взаимодействие с электромагнитным полем в виде

$$\mathcal{A}\left[x,\kappa\right]=\int\left\{-mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}-\frac{e}{c}A_k\dot{x}^k\right\}d^4\xi,\quad d^4\xi=d\xi_0d\boldsymbol{\xi} \tag{3.4}$$

$$K=\sqrt{1+\lambda^2\left(\kappa_l\kappa^l+\partial_l\kappa^l\right)},\qquad \lambda=\frac{\hbar}{mc},\quad \tau=\boldsymbol{\xi}_0 \tag{3.5}$$

Здесь $x=\left\{x^i\left(\xi_0,\boldsymbol{\xi}\right)\right\}$, $i=0,1,2,3$ суть зависимые переменные. $\xi=\{\xi_0,\boldsymbol{\xi}\}=\{\xi_k\}$, $k=0,1,2,3$ являются независимыми переменными, и $\dot{x}^i\equiv dx^i/d\xi_0$. Величины $\kappa^l=\left\{\kappa^l\left(x\right)\right\}$, $l=0,1,2,3$ являются зависимыми переменными, описывающими стохастическую составляющую движения частицы, $A_k=\left\{A_k\left(x\right)\right\}$, $k=0,1,2,3$ есть 4-потенциал электромагнитного поля. Мы будем обозначать динамическую систему, описываемую действием (3.4), (3.5) как $\mathcal{S}_{\rm KG}$, потому что потенциальное течение в системе $\mathcal{S}_{\rm KG}$ описывается уравнением Клейна-Гордона [24]. Мы представим здесь это преобразование к виду уравнения Клейна-Гордона. Здесь и дальше производится суммирование по повторяющимся латинским индексам $(0-3)$ и по греческим индексам $(1-3)$.

Будем рассматривать переменные $\xi=\xi\left(x\right)$ в (3.4) как зависимые переменные, а переменные x как независимые переменные. Пусть якобиан

$$J=\frac{\partial\left(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)}=\det\left|\left|\xi_{i,k}\right|\right|,\qquad \xi_{i,k}\equiv\partial_k\xi_i,\qquad i,k=0,1,2,3 \tag{3.6}$$

рассматривается как полилинейная функция от $\xi_{i,k}$ $J=J\left(\xi_{i,k}\right)$. Тогда

$$d^4\xi=Jd^4x,\qquad \dot{x}^i\equiv\frac{dx^i}{d\xi_0}\equiv\frac{\partial\left(x^i,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}{\partial\left(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)}=J^{-1}\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,i}} \tag{3.7}$$

После преобразования к зависимым переменным ξ действие (3.4) принимает вид

$$\mathcal{A}[\xi,\kappa]=\int\left\{-mcK\sqrt{g_{ik}\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,i}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}}-\frac{e}{c}A_k\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\right\}d^4x, \tag{3.8}$$

Введем новые переменные

$$j^k=\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}},\qquad k=0,1,2,3 \tag{3.9}$$

с помощью множителей Лагранжа p_k

$$\mathcal{A}[\xi,\kappa,j,p]=\int\left\{-mcK\sqrt{g_{ik}j^ij^k}-\frac{e}{c}A_kj^k+p_k\left(\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}-j^k\right)\right\}d^4x, \tag{3.10}$$

Переменная ξ_0 является фиктивной. Вариация по ξ_i дает

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\xi_i}=-\partial_l\left(p_k\frac{\partial^2 J}{\partial\xi_{0,k}\partial\xi_{i,l}}\right)=0,\qquad i=0,1,2,3 \tag{3.11}$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial\xi_{0,k}\partial\xi_{i,l}}\equiv J^{-1}\left(\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,k}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{i,l}}-\frac{\partial J}{\partial\xi_{0,l}}\frac{\partial J}{\partial\xi_{i,k}}\right) \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial J}{\partial\xi_{i,l}}\xi_{k,l}\equiv J\delta_k^i,\qquad \partial_l\frac{\partial^2 J}{\partial\xi_{0,k}\partial\xi_{i,l}}\equiv 0 \tag{3.13}$$

можно проверить прямой подстановкой, что общее решение линейных уравнений (3.11) имеет вид

$$p_k=b_0\left(\partial_k\varphi+g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\partial_k\xi_\alpha\right),\qquad k=0,1,2,3 \tag{3.14}$$

где $b_0\neq 0$ есть постоянная, $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})$, $\alpha=1,2,3$ суть произвольные функции от $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, и φ есть динамическая переменная ξ_0, которая перестала быть фиктивной. Подставим (3.14) в (3.10). Член вида $\partial_k\varphi\partial J/\partial\xi_{0,k}$ приводится к якобиану и не дает вклада в динамические уравнения. Члены вида $\xi_{\alpha,k}\partial J/\partial\xi_{0,k}$ исчезают в силу тождеств (3.13). Получаем

$$\mathcal{A}[\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa,j]=\int\left\{-mcK\sqrt{g_{ik}j^ij^k}-j^k\pi_k\right\}d^4x, \tag{3.15}$$

где величины π_k определяются соотношениями

$$\pi_k=b_0\left(\partial_k\varphi+g^\alpha(\boldsymbol{\xi})\,\partial_k\xi_\alpha\right)+\frac{e}{c}A_k,\qquad k=0,1,2,3 \tag{3.16}$$

Интегрирование системы уравнений (3.11) в виде (3.14) – это то интегрирование, которое позволяет ввести волновую функцию. Заметим, что коэффициенты в системе уравнений (3.11) для p_k построены из миноров якобиана (3.6). Именно это обстоятельство позволяет произвести общее интегрирование.

Вариация (3.15) по κ^l дает

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{\delta\kappa^l} = -\frac{\lambda^2 mc\sqrt{g_{ik}j^i j^k}}{K}\kappa_l + \partial_l \frac{\lambda^2 mc\sqrt{g_{ik}j^i j^k}}{2K} = 0 \tag{3.17}$$

Это уравнение может быть записано в виде

$$\kappa^l = g^{lk}\partial_k\kappa, \quad \kappa = \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda^2 mc\sqrt{g_{ik}j^i j^k}}{2K\rho_0} \tag{3.18}$$

где ρ_0 есть постоянная интегрирования. Это означает, что средняя стохастическая составляющая скорости $u^l = \frac{m}{\hbar}\kappa^l$ может быть представлена в виде

$$u_l = \frac{\hbar}{m}\kappa_l = \frac{\hbar}{m}\partial_l\kappa = \frac{\hbar}{2m}\partial_l \ln\frac{\lambda^2 mc\sqrt{j_s j^s}}{2K\rho_0} = \frac{\hbar}{2m}\partial_l\ln\frac{\lambda^2 mc\sqrt{j_s j^s}}{2\rho_0\sqrt{1+\lambda^2 e^{-\kappa}\partial_s\partial^s e^{\kappa}}} \tag{3.19}$$

Подставляя (3.5) в (3.18), получаем динамическое уравнение для κ

$$\hbar^2\left(\partial_l\kappa\cdot\partial^l\kappa + \partial_l\partial^l\kappa\right) = \frac{e^{-4\kappa}j_s j^s}{\rho_0^2} - m^2c^2 \tag{3.20}$$

Оно может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} j_s j^s &= m^2c^2\rho_0^2 e^{4\kappa}\left(1+\lambda^2 e^{-\kappa}\partial_l\partial^l e^{\kappa}\right) \\ &= m^2c^2\rho_0^2 e^{4\kappa}\left(1-\lambda^2\partial_l\kappa\partial^l\kappa + \frac{\lambda^2}{2}e^{-2\kappa}\partial_l\partial^l e^{2\kappa}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Вариация (3.15) по j^k дает

$$\pi_k = -\frac{mcKj_k}{\sqrt{g_{ls}j^l j^s}} \tag{3.22}$$

или

$$\pi_k g^{kl}\pi_l = m^2c^2K^2 \tag{3.23}$$

Из соотношений (3.20), (3.22) и (3.21) следует, что

$$j_k = -\frac{\sqrt{g_{ls}j^l j^s}}{mcK}\pi_k = -\rho_0 e^{2\kappa}\pi_k, \tag{3.24}$$

Теперь исключим переменные j^k из действия (3.15), используя соотношения (3.24) и (3.21). Получаем

$$\mathcal{A}[\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa] = \int m^2c^2\rho_0 e^{2\kappa}\left\{-K\sqrt{\left(1-\lambda^2\partial_l\kappa\partial^l\kappa+\frac{\lambda^2}{2}e^{-2\kappa}\partial_l\partial^l e^{2\kappa}\right)} + \pi^k\pi_k\right\}d^4x$$

или

$$\mathcal{A}[\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa] = \int m^2c^2\rho_0 e^{2\kappa}\left\{-\left(1-\lambda^2\partial_l\kappa\partial^l\kappa+\frac{\lambda^2}{2}e^{-2\kappa}\partial_l\partial^l e^{2\kappa}\right) + \pi^k\pi_k\right\}d^4x \tag{3.25}$$

где π_k определяются соотношением (3.16). Скобка в действии (3.25) может быть преобразована следующим образом.

$$\begin{aligned} & -m^2c^2e^{2\kappa}\left(1-\lambda^2\partial_l\kappa\partial^l\kappa+\frac{\lambda^2}{2}e^{-2\kappa}\partial_l\partial^l e^{2\kappa}\right) \\ = & -m^2c^2e^{2\kappa}+\hbar^2e^{2\kappa}\partial_l\kappa\partial^l\kappa-\frac{\hbar^2}{2}\partial_l\partial^l e^{2\kappa} \end{aligned}$$

Примем во внимание, что последний член имеет вид дивергенции. Он не дает вклада в динамические уравнения и может быть опущен. Опуская этот член, получаем вместо (3.25)

$$\mathcal{A}[\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa]=\int\rho_0e^{2\kappa}\left\{-m^2c^2+\hbar^2\partial_l\kappa\partial^l\kappa+\pi^k\pi_k\right\}d^4x, \qquad (3.26)$$

Вместо динамических переменных $\varphi,\boldsymbol{\xi},\kappa$ введем n-компонентную комплексную функцию

$$\psi=\{\psi_\alpha\}=\left\{\sqrt{\rho}e^{i\varphi}w_\alpha(\boldsymbol{\xi})\right\}=\left\{\sqrt{\rho_0}e^{\kappa+i\varphi}w_\alpha(\boldsymbol{\xi})\right\}, \qquad \alpha=1,2,...n \qquad (3.27)$$

Здесь w_α суть функции только $\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$, имеющие следующие свойства

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}w_\alpha^*w_\alpha=1, \qquad -\frac{i}{2}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\left(w_\alpha^*\frac{\partial w_\alpha}{\partial\xi_\beta}-\frac{\partial w_\alpha^*}{\partial\xi_\beta}w_\alpha\right)=g^\beta(\boldsymbol{\xi}) \qquad (3.28)$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Число n составляющих волновой функции ψ выбрано таким образом, чтобы уравнения (3.28) имели решение. Тогда получаем

$$\psi^*\psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\psi_\alpha^*\psi_\alpha=\rho=\rho_0e^{2\kappa}, \qquad \partial_l\kappa=\frac{\partial_l(\psi^*\psi)}{2\psi^*\psi} \qquad (3.29)$$

$$\pi_k = -\frac{ib_0(\psi^*\partial_k\psi-\partial_k\psi^*\cdot\psi)}{2\psi^*\psi}+\frac{e}{c}A_k, \qquad k=0,1,2,3 \qquad (3.30)$$

Подставляя соотношения (3.29), (3.30) в (3.26), получаем действие, записанное в терминах волновой функции ψ

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\psi,\psi^*] = & \int\left\{\left[\frac{ib_0(\psi^*\partial_k\psi-\partial_k\psi^*\cdot\psi)}{2\psi^*\psi}-\frac{e}{c}A_k\right]\left[\frac{ib_0\left(\psi^*\partial^k\psi-\partial^k\psi^*\cdot\psi\right)}{2\psi^*\psi}-\frac{e}{c}A^k\right]\right. \\ & \left.+\hbar^2\frac{\partial_l(\psi^*\psi)\partial^l(\psi^*\psi)}{4(\psi^*\psi)^2}-m^2c^2\right\}\psi^*\psi d^4x \end{aligned} \qquad (3.31)$$

Используем тождество

$$\begin{aligned} & \frac{(\psi^*\partial_l\psi-\partial_l\psi^*\cdot\psi)\left(\psi^*\partial^l\psi-\partial^l\psi^*\cdot\psi\right)}{4\psi^*\psi}+\partial_l\psi^*\partial^l\psi \\ \equiv & \frac{\partial_l(\psi^*\psi)\partial^l(\psi^*\psi)}{4\psi^*\psi}+\frac{g^{ls}}{2}\psi^*\psi\sum_{\alpha,\beta=1}^{\alpha,\beta=n}Q_{\alpha\beta,l}^*Q_{\alpha\beta,s} \end{aligned} \qquad (3.32)$$

где

$$Q_{\alpha\beta,l}=\frac{1}{\psi^*\psi}\left|\begin{array}{cc}\psi_\alpha & \psi_\beta\\ \partial_l\psi_\alpha & \partial_l\psi_\beta\end{array}\right|,\qquad Q_{\alpha\beta,l}^*=\frac{1}{\psi^*\psi}\left|\begin{array}{cc}\psi_\alpha^* & \psi_\beta^*\\ \partial_l\psi_\alpha^* & \partial_l\psi_\beta^*\end{array}\right| \tag{3.33}$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}[\psi,\psi^*] &= \int\left\{\begin{array}{c}\left(ib_0\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\psi^*\left(-ib_0\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi\\ +\frac{b_0^2}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{\alpha,\beta=n}g^{ls}Q_{\alpha\beta,l}Q_{\alpha\beta,s}^*\psi^*\psi\end{array}\right.\\ &\qquad\left.-m^2c^2\psi^*\psi+\left(\hbar^2-b_0^2\right)\frac{\partial_l\left(\psi^*\psi\right)\partial^l\left(\psi^*\psi\right)}{4\psi^*\psi}\right\}d^4x\end{aligned} \tag{3.34}$$

Рассмотрим случай потенциального течения, когда $g^\alpha(\boldsymbol{\xi})=0$ и функция ψ имеет только один компонент. Из (3.33) следует, что $Q_{\alpha\beta,l}=0$, и только последний член в (3.34) не билинеен по ψ,ψ^*. Постоянная b_0 есть постоянная интегрирования. Можно положить $b_0=\hbar$. Тогда получаем вместо (3.34)

$$\mathcal{A}[\psi,\psi^*]=\int\left\{\left(i\hbar\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\psi^*\left(-i\hbar\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi-m^2c^2\psi^*\psi\right\}d^4x \tag{3.35}$$

Вариация действия (3.35) по ψ^* порождает уравнение Клейна-Гордона

$$\left(-i\hbar\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\left(-i\hbar\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi-m^2c^2\psi=0 \tag{3.36}$$

Таким образом, уравнение Клейна-Гордона является частным случаем описания с помощью действия (3.4), (3.5).

В случае завихренного течения волновая функция двухкомпонентна, и динамическое уравнение имеет вид (детали смотри в [24]):

$$\begin{aligned}&\left(-i\hbar\partial_k+\frac{e}{c}A_k\right)\left(-i\hbar\partial^k+\frac{e}{c}A^k\right)\psi-\left(m^2c^2+\frac{\hbar^2}{4}\left(\partial_l s_\alpha\right)\left(\partial^l s_\alpha\right)\right)\psi\\ =&\ -\hbar^2\frac{\partial_l\left(\rho\partial^l s_\alpha\right)}{2\rho}\left(\sigma_\alpha-s_\alpha\right)\psi\end{aligned} \tag{3.37}$$

где 3-вектор $\mathbf{s}=\{s_1,s_2,s_3,\}$ определяется соотношением

$$\rho=\psi^*\psi,\qquad s_\alpha=\frac{\psi^*\sigma_\alpha\psi}{\rho},\qquad \alpha=1,2,3 \tag{3.38}$$

$$\psi=\binom{\psi_1}{\psi_2},\qquad \psi^*=\left(\psi_1^*,\psi_2^*\right), \tag{3.39}$$

и матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}$ имеют вид

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{3.40}$$

Градиент единичного 3-вектора $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ описывает вращательную составляющую течения жидкости. Уравнение (3.37) превращается в традиционное уравнение Клейна-Гордона (3.36), если $\mathbf{s}$ =const. Вихрь векторного поля π_k, определяется соотношением

$$\partial_k \pi_l - \partial_l \pi_k = -4b_0 \left[\partial_k \mathbf{n} \times \partial_l \mathbf{n}\right] \mathbf{z} + \frac{e}{c} \left(\partial_k A_l - \partial_l A_k\right), \qquad k, l = 0, 1, 2, 3 \qquad (3.41)$$

Здесь величины $\mathbf{n}$ и $\mathbf{z}$ получаются из волновой функции, представленной в виде

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{i\varphi} \left(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}\right) \chi, \qquad \psi^* = \sqrt{\rho} e^{-i\varphi} \chi^* \left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right), \qquad \mathbf{n}^2 = 1, \qquad \chi^* \chi = 1 \qquad (3.42)$$

с помощью соотношений

$$\mathbf{s} = 2\mathbf{n} \left(\mathbf{n}\mathbf{z}\right) - \mathbf{z}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{s} + \mathbf{z}}{\sqrt{2 \left(1 + \left(\mathbf{s}\mathbf{z}\right)\right)}} \qquad (3.43)$$

$$\mathbf{z} = \chi^* \boldsymbol{\sigma} \chi, \qquad \mathbf{z}^2 = \chi^* \chi = 1 \qquad (3.44)$$

Фундаментальное различие между нерелятивистским описанием (2.8) и релятивистским описанием (3.19) следующее. Нерелятивистское уравнение (2.8) не содержит временных производных, и поле $\mathbf{u}$ однозначно определяется его источником (плотность частиц ρ). Релятивистское уравнение (3.19) содержит временные производные, и κ-поле $u^k = \hbar\kappa^k/m$ может существовать без своего источника. Релятивистское κ-поле $u^k = \hbar\kappa^k/m$ может удаляться от своего источника. Кроме того κ-поле изменяет эффективную массу частицы, как это можно видеть из соотношений (3.1), (3.2). Если $\boldsymbol{\kappa}^2$ достаточно велико, или $\partial_k \kappa^k < 0$ и $\left|\partial_k \kappa^k\right|$ достаточно велико, то эффективная масса частицы может стать мнимой. В этом случае мировая линия частицы может повернуть во временном направлении, и этот поворот может оказаться связанным с рождением или аннигиляцией пары.

В нерелятивистском случае средняя стохастическая составляющая скорости $\mathbf{u}$ может быть исключена и заменена ее источником (плотностью частиц ρ). В релятивистском случае κ-поле имеет дополнительно свои собственные степени свободы, Которые нельзя устранить, заменив κ-поле его источником. κ-поле может перемещаться из одной области пространства-времени в другую.

Единый формализм динамики частиц (с статистическим ансамблем в качестве базового объекта динамики) позволяет описывать такие физические явления, которые не могут быть описаны в рамках традиционного формализма динамики, когда базовым объектом является отдельная частица. В частности, можно описывать эффект рождения пар, который нельзя описать в рамках традиционной релятивистской механики, так же как в рамках нерелятивистской квантовой механики.

4 Детерминированные модели элементарных частиц

Стохастические (и квантовые) частицы $\mathcal{S}_{\rm st}$ описываются статистическим ансамблем $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$. Динамические уравнения для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ образуют систему дифференциальных уравнений в частных производных (PDE). Возможно ли упростить описание стохастических частиц, сведя систему уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей статистический ансамбль $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm d}]$ детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$? Это возможно. Нужно только спроектировать все производные в системе PDE на направление тока частиц j^k с помощью (1.5). После такого проектирования система PDE превратится в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE). Эта система ODE образует динамические уравнения для статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm d}]$ детерминированных частиц $\mathcal{S}_{\rm d}$. Детерминированная частица $\mathcal{S}_{\rm d}$ называется *детерминированной моделью стохастической частицы* $\mathcal{S}_{\rm st}$. Такая процедура называется динамической расквантизацией [9]. Динамическая расквантизация (D-расквантизация) преобразует динамическую систему $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ в более простую динамическую систему $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm d}]$, где вихляния мировой линии стохастической частицы подавлены. Можно получить динамические уравнения для отдельной $\mathcal{S}_{\rm d}$ из динамических уравнений для $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm d}]$. Введение детерминированной модели основано на том факте, что в системе координат, где состояние ансамбля однородно, стохастическая составляющая (2.8) не дает вклада в динамические уравнения для статистического ансамбля. Динамическая расквантизация является чисто динамической процедурой, которая устраняет стохастические флуктуации и порождает детерминированную модель. Вообще, динамическая расквантизация устраняет флуктуации любого сорта, а не только квантовые флуктуации. Для нерелятивистского уравнения(уравнение Шредингера) D-расквантизация эквивалентна переходу от нерелятивистской квантовой частицы к нерелятивистской классической частице. Однако, для релятивистской квантовой частицы (уравнение Клейна-Гордона) D-расквантизация приводит к переходу к релятивистской классической частице, оснащенной, κ-полем, которое ответственно за рождение пар.

Чтобы получить детерминированную модель релятивистской квантовой частицы, будем варьировать действие (3.4), (3.5)б взятое в виде

$$\mathcal{A}[x,\kappa]=\int\left\{-mcK\sqrt{g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}-\frac{e}{c}A_k\dot{x}^k\right\}d^4\xi,\qquad d^4\xi=d\xi_0 d\boldsymbol{\xi},\quad \tau=\boldsymbol{\xi}_0 \qquad (4.1)$$

$$K=\sqrt{1+\lambda^2\left(\kappa_l\kappa^l+\partial_l\kappa^l\right)},\qquad \lambda=\frac{\hbar}{mc} \qquad (4.2)$$

Здесь $x=\{x^i(\xi_0,\boldsymbol{\xi})\}$, $i=0,1,2,3$ суть зависимые переменные. $\xi=\{\xi_0,\boldsymbol{\xi}\}=\{\xi_k\}$, $k=0,1,2,3$ являются независимыми переменными, и $\dot{x}^i\equiv dx^i/d\xi_0$. Величины $\kappa^l=\left\{\kappa^l(x)\right\}$, $l=0,1,2,3$ являются зависимыми переменными, описывающими стохастическую составляющую скорости частицы. $A_k=\{A_k(x)\}$, $k=$

$0, 1, 2, 3$ есть потенциал электромагнитного поля. Вариация действия (4.1) дает

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{A}[x,\kappa]}{\delta x^k} &= \frac{d}{d\tau}\frac{mcKg_{ik}\dot{x}^i}{\sqrt{\dot{x}_s\dot{x}^s}} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right)\dot{x}^i \\ &\quad -\frac{\lambda^2 mc\sqrt{\dot{x}_s\dot{x}^s}}{K}\left(\kappa_{l,k}\kappa^l + \frac{1}{2}\partial_k\partial_l\kappa^l\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}[x,\kappa]}{\delta \kappa^k} = \frac{mc\sqrt{\dot{x}_s\dot{x}^s}J}{K}\kappa_k - \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{mc\sqrt{\dot{x}_s\dot{x}^s}J}{2K} = 0 \tag{4.4}$$

Здесь J есть якобиан (3.6), который появляется, потому что κ_l есть функция x, и нужно перейти к интегрированию по x в (4.1), для того, чтобы получить (4.4). Из (4.4) получаем

$$\kappa_k = \partial_k\kappa = \frac{1}{2}\partial_k \ln\frac{mc\sqrt{\dot{x}_s\dot{x}^s}J}{K} = \frac{1}{2}\partial_k \ln\frac{mc\sqrt{j_s j^s}}{K}, \quad j^k = \dot{x}^k J \tag{4.5}$$

Используя (4.2), можно записать (4.5) в виде динамического уравнения для переменной κ, которое может быть записано в виде

$$e^{3\kappa}\left(e^{\kappa} + \lambda^2\partial_s\partial^s e^{\kappa}\right) = C^2m^2c^2 j_s j^s \tag{4.6}$$

где C есть постоянная интегрирования. Величина C не зависит от x, но она может зависеть от координат других частиц.

Введем новую перменную

$$w = e^{\kappa} \tag{4.7}$$

Тогда уравнение (4.6) можно записать в виде

$$\hbar^2\partial_s\partial^s w + m^2c^2 w = \frac{C^2m^2c^2 j_s j^s}{w^3} \tag{4.8}$$

$$K = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{w}\partial_s\partial^s w} \tag{4.9}$$

Уравнение (4.3) записывается в виде

$$\frac{d}{d\tau}\frac{mcKg_{ik}\dot{x}^i}{\sqrt{\dot{x}_s\dot{x}^s}} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right)\dot{x}^i - mc\sqrt{\dot{x}_s\dot{x}^s}\partial_k K \tag{4.10}$$

Релятивистская стохастическая частица $\mathcal{S}_{\rm st}$ описывается уравнениями (4.8) - (4.10). Ее стохастичность обусловлена полем w, которое зависит от состояния всего статистического ансамбля $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\rm st}]$ и, может быть, от других частиц через постоянную C. Операция расквантизации не может быть применена к полю w, потому что это поле является внешним полем (по крайней мере, частично). Таким образом точные уравнения (4.8) - (4.10) являются одновременно динамическими уравнениями для детерминированной модели.

5 Уравнение Дирака в терминах гидродинамических переменных

Дираковская частица – это динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, чье динамическое уравнение является уравнением Дирака

$$i\gamma^k \partial_k \psi + mc\psi = 0 \tag{5.1}$$

Дираковская динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ изучалась многими исследователями. Нет возможности перечислить всех их, и мы упомянем только некоторых из них. Во-первых, это преобразование уравнения Дирака на основе квантовой механики [26, 27]. Сложная структура дираковской частицы была обнаружена Шредингером [28], который интерпретировал это как некое сложное квантовое движение (zitterbewegung). Исследование этого квантового движения и разные модели дираковской частицы можно найти в [29, 30, 31, 32, 33] и ссылки в них. Наше исследование отличается отсутствием каких бы то ни было предположений о модели дираковской частицы и отсутствием ссылок на квантовые принципы. Мы используем только динамические методы и *исследуем дираковскую частицу $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$ просто как динамическую систему.* Для получения детерминированной модели, нужно записать уравнение Дирака в терминах гидродинамических переменных.

Действие для свободной дираковской частицы записывается в виде

$$\mathcal{S}_{\mathrm{D}}: \qquad \mathcal{A}_{\mathrm{D}}[\bar{\psi}, \psi] = \int (-m\bar{\psi}\psi + \frac{i}{2}\hbar\bar{\psi}\gamma^l \partial_l \psi - \frac{i}{2}\hbar\partial_l \bar{\psi}\gamma^l \psi) d^4 x \tag{5.2}$$

Здесь ψ есть четырех компонентная комплексная волновая функция, ψ^* есть эрмитово сопряженная волновая функция, и $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0$ есть сопряженная волновая функция. γ^i, $i = 0, 1, 2, 3$ are 4×4 постоянные комплексные матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^l \gamma^k + \gamma^k \gamma^l = 2g^{kl} I, \qquad k, l = 0, 1, 2, 3. \tag{5.3}$$

где I есть единичная 4×4 матриц и $g^{kl} = \mathrm{diag}(c^{-2}, -1, -1, -1)$ есть метрический тензор. Рассматривая динамическую систему $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}$, мы для простоты выберем такие единицы, где скорость света $c = 1$.

В расчетах мы используем технику [35, 36], где γ-матрицы представлены гиперкомплексными числами. Используя обозначения

$$\gamma_5 = \gamma^{0123} \equiv \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \tag{5.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \} = \{-i\gamma^2\gamma^3, -i\gamma^3\gamma^1, -i\gamma^1\gamma^2\} \tag{5.5}$$

мы сделаем замену переменных

$$\psi = Ae^{i\varphi + \frac{1}{2}\gamma_5 \kappa} \exp\left(-\frac{i}{2}\gamma_5 \boldsymbol{\sigma\eta}\right) \exp\left(\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right) \Pi \tag{5.6}$$

$$\psi^* = A\Pi \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\right)\exp\left(-\frac{i}{2}\gamma_5\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\eta}\right)e^{-i\varphi-\frac{1}{2}\gamma_5\kappa} \tag{5.7}$$

где (*) означает эрмитово сопряжение, и

$$\Pi = \frac{1}{4}(1+\gamma^0)(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\sigma}), \qquad \mathbf{z} = \{z^\alpha\} = \text{const}, \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \mathbf{z}^2 = 1 \tag{5.8}$$

есть делитель нуля. Величины A, κ, φ, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n} = \{n^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ представляют собой восемь вещественных параметров, определяющих волновую функцию ψ. Эти параметры можно рассматривать как зависимые переменные, описывающие состояние динамической системы $\mathcal{S}_\mathrm{D}$. Величина φ является скаляром, а κ есть псевдоскаляр. Шесть остальных переменных A, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta^\alpha\}$, $\mathbf{n} = \{n^\alpha\}$, $\alpha = 1,2,3$, $\mathbf{n}^2 = 1$ можно выразить через 4-вектор потока

$$j^l = \bar\psi\gamma^l\psi, \qquad l = 0,1,2,3 \tag{5.9}$$

и 4-псевдовектор спина

$$S^l = i\bar\psi\gamma_5\gamma^l\psi, \qquad l = 0,1,2,3 \tag{5.10}$$

Из-за двух тождеств

$$S^lS_l \equiv -j^lj_l, \qquad j^lS_l \equiv 0. \tag{5.11}$$

имеется только шесть независимых компонент среди восьми компонент величин j^l, и S^l.

После замены переменных (5.6), (5.7) γ-матрицы исчезают из действия и динамических уравнений. Получается действие (5.2) в терминах гидродинамических переменных j, φ, ξ, κ (смотри детали расчетов в [11, 34])

$$\mathcal{S}_\mathrm{D}: \qquad \mathcal{A}_D[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}] = \int \mathcal{L}d^4x, \qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_\mathrm{cl} + \mathcal{L}_\mathrm{q1} + \mathcal{L}_\mathrm{q2} \tag{5.12}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{cl} = -m\rho - \hbar j^i\partial_i\varphi - \frac{\hbar j^l}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\partial_l\xi^\beta z^\gamma, \qquad \rho \equiv \sqrt{j^lj_l} \tag{5.13}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{q1} = 2m\rho\sin^2(\frac{\kappa}{2}) - \frac{\hbar}{2}S^l\partial_l\kappa, \tag{5.14}$$

$$\mathcal{L}_\mathrm{q2} = \frac{\hbar(\rho+j_0)}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial^\alpha\frac{j^\beta}{(j^0+\rho)}\xi^\gamma - \frac{\hbar}{2(\rho+j_0)}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\partial^0j^\beta\right)j^\alpha\xi^\gamma \tag{5.15}$$

Лагранжиан есть функция от 4-вектора j^l, скаляра φ, псевдоскаляра κ, и единичного 3-псевдовектора $\boldsymbol{\xi}$, который связан с 4-псевдовектором спина S^l (5.10) с помощью соотношений

$$\xi^\alpha = \rho^{-1}\left[S^\alpha - \frac{j^\alpha S^0}{(j^0+\rho)}\right], \qquad \alpha = 1,2,3; \qquad \rho \equiv \sqrt{j^lj_l} \tag{5.16}$$

$$S^0 = \mathbf{j}\boldsymbol{\xi}, \qquad S^\alpha = \rho\xi^\alpha + \frac{(\mathbf{j}\boldsymbol{\xi})j^\alpha}{\rho+j^0}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{5.17}$$

После замены переменных описание системы $\mathcal{S}_\mathrm{D}$ перестает быть релятивистски ковариантным, потому что постоянный матричный 4-вектор γ^k преобразуется в динамические переменные (смотри обсуждение этого вопроса в [37, 39]).

6 Динамическая расквантизация уравнения Дирака

Произведем динамическую расквантизацию [9, 41] действия (5.12)–(5.15), сделав замену переменных (1.5). Действие (5.12)–(5.15) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[j,\varphi,\kappa,\boldsymbol{\xi}] &= \int\left\{-m\rho\cos\kappa-\hbar j^{i}\left(\partial_{i}\varphi+\frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^{\alpha}\partial_{i}\xi^{\beta}z^{\gamma}}{2\left(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}\right)\right.\\ &\left.+\frac{\hbar j^{k}}{2(\rho+j_{0})\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_{k}j^{\beta}\right)j^{\alpha}\xi^{\gamma}\right\}d^{4}x \qquad (6.1)\end{aligned}$$

Заметим, что вторым членом $-\frac{\hbar}{2}S^{l}\partial_{l}\kappa$ в соотношении (5.14) пренебрегаем потому что 4-псевдовектор S^{k} ортогонален 4-вектору j^{k}, и производная $S^{l}\partial_{||l}\kappa=S^{l}\rho^{-2}j_{l}j^{k}\partial_{k}\kappa/j_{s}j^{s}$ исчезает. Действие (6.1) также релятивистски неинвариантно, потому что динамическая расквантизация (1.5) является релятивистской процедурой.

Хотя действие (6.1) содержит неклассическую переменную κ, фактически эта переменная является постоянной. В самом деле, вариация по κ приводит к динамическому уравнению

$$\frac{\delta\mathcal{A}_{Dqu}}{\delta\kappa}=m\rho\sin\kappa=0,\quad \rho\equiv\sqrt{j_{s}j^{s}} \qquad (6.2)$$

которое имеет решения

$$\kappa=n\pi,\qquad n=\text{integer} \qquad (6.3)$$

Таким образом эффективная масса $m_{\mathrm{eff}}=m\cos\kappa$ имеет два значения

$$m_{\mathrm{eff}}=m\cos\kappa=\kappa_{0}m=\pm m \qquad (6.4)$$

где κ_{0} есть дихотомическая величина $\kappa_{0}=\pm1$, введенная вместо $cos\kappa$. Величина κ_{0} является параметром динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dqu}}$. Она не варьируется. Действие (6.1), превращается в действие

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[j,\varphi,\boldsymbol{\xi}] &= \int\left\{-\kappa_{0}m\rho-\hbar j^{i}\left(\partial_{i}\varphi+\frac{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\xi^{\alpha}\partial_{i}\xi^{\beta}z^{\gamma}}{2\left(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}\right)}\right)\right.\\ &\left.+\frac{\hbar j^{k}}{2(\rho+j_{0})\rho}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_{k}j^{\beta}\right)j^{\alpha}\xi^{\gamma}\right\}d^{4}x \qquad (6.5)\end{aligned}$$

Введем лагранжевы координаты $\tau=\{\tau_{0},\boldsymbol{\tau}\}=\{\tau_{i}(x)\}$, $i=0,1,2,3$ как функции координат x таким образом, что только координата τ_{0} изменяется вдоль направления j^{l}. Действие (6.5) преобразуется к виду

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Dqu}}[x,\boldsymbol{\xi}]=\int\mathcal{A}_{\mathrm{Dd}}[x,\boldsymbol{\xi}]d\boldsymbol{\tau},\qquad \mathbf{d}\boldsymbol{\tau}=d\tau_{1}d\tau_{2}d\tau_{3} \qquad (6.6)$$

где

$$\mathcal{S}_{\mathrm{Dd}}: \quad \mathcal{A}_{\mathrm{Dd}}[x,\boldsymbol{\xi}] = \int \left\{ \begin{array}{c} -\kappa_0 m\sqrt{\dot{x}^i \dot{x}_i} + \hbar \frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}}\times\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1+\boldsymbol{\xi}\mathbf{z})} \\ +\hbar \frac{(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}}{2\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}+\dot{x}^0)} \end{array} \right\} d\tau_0 \tag{6.7}$$

После динамической расквантизации дираковская частица представляет собой статистический ансамбль динамических систем $\mathcal{S}_{\mathrm{Dd}}$, как это следует из (6.6) и (6.7). Любая динамическая система $\mathcal{S}_{\mathrm{Dd}}$ имеет 10 степеней свободы. Шесть степеней свободы описывают поступательное движение частицы и 4 степени свободы описывают вращательное движение частицы. Это детерминированная модель дираковской частицы, которая содержит квантовую постоянную. Квантовая постоянная появляется в классических динамических уравнениях, потому, что эти уравнеия содержат магнитный момент. Но магнитный момент (классическая величина!) зависит от квантовой постоянной. Переменные $\boldsymbol{\xi}$ описывают вращение, которое является детерминированным аналогом так называемого "zitterbewegung". Дираковская частица не является точечной частицей [34]. Описание внутренних степеней свободы в терминах $\boldsymbol{\xi}$ оказывается нерелятивистским [39, 37], хотя трансляционные степени свободы описываются релятивистски в терминах x.

Легко видеть, что действие (6.7) инвариантно относительно преобразования $\tau_0 \to \tilde{\tau}_0 = F(\tau_0)$, где F есть произвольная монотонная функция. Это преобразование позволяет выбрать переменную $t = x^0$ как параметр τ_0, или выбрать параметр τ_0 таким образом, что $\dot{x}^l \dot{x}_l = \dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{x}}^2 = 1$. В последнем случае параметр τ_0 является собственным временем вдоль мировой линии классической дираковской частицы. Кроме того, инвариантность относительно преобразования $\tau_0 \to \tilde{\tau}_0 = F(\tau_0)$ приводит к связи между составляющими канонического импульса

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} - \frac{d}{d\tau_0}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^k}, \qquad k = 0,1,2,3$$

где L есть функция Лагранжа для действия (6.7).

Мы не будем рассматривать здесь проблемы, связанные с релятивистской неинвариантностью членов, описывающих внутренние степени свободы, отсылая к [9], где обсуждаются эти проблемы. Мы получим динамические уравнения, порожденные действием (6.7), решим их и попытаемся интерпретировать полученные решения.

Вариация действия (6.7) по $\mathbf{x}$ дает динамическое уравнение

$$\frac{d}{d\tau_0}\left(-\kappa_0 m \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}} + \frac{\hbar Q}{2}(\boldsymbol{\xi}\times\ddot{\mathbf{x}}) - \frac{\hbar}{2}\frac{\partial Q}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi} + \frac{\hbar}{2}\frac{d}{d\tau_0}\left(Q(\boldsymbol{\xi}\times\dot{\mathbf{x}})\right)\right) = 0 \tag{6.8}$$

где

$$Q = Q(\dot{x}) = \left(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}(\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s} + \dot{x}^0)\right)^{-1}, \qquad \dot{x}^s\dot{x}_s = \dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{x}}^2 \tag{6.9}$$

Варьируя действие (6.7) по x^0, получаем

$$\frac{d}{d\tau_0}\left(\kappa_0 m \frac{\dot{x}^0}{\sqrt{\dot{x}^s\dot{x}_s}} - \frac{\hbar}{2}\frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^0}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi}\right) = 0 \tag{6.10}$$

Варьируя действие (6.7) по $\boldsymbol{\xi}$, следует принять во внимание стороннее условие $\boldsymbol{\xi}^2 = 1$. Полагая

$$\xi^\alpha = \frac{\zeta^\alpha}{\sqrt{\boldsymbol{\zeta}^2}}, \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{6.11}$$

где $\boldsymbol{\zeta}$ есть произвольный 3-псевдовектор, получаем

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\text{dcl}}}{\delta \zeta^\mu} = \frac{\delta \mathcal{A}_{\text{dcl}}}{\delta \xi^\alpha} \frac{\delta \xi^\alpha}{\delta \zeta^\mu} = \frac{\delta \mathcal{A}_{\text{dcl}}}{\delta \xi^\alpha} \frac{\delta^{\alpha\mu} - \xi^\alpha \xi^\mu}{\sqrt{\boldsymbol{\zeta}^2}} = 0 \tag{6.12}$$

Это означает, что имеется только два независимых уравнения из трех динамических уравнений (6.12). Они ортогональны 3-псевдовектору $\boldsymbol{\xi}$ и могут быть получены из уравнения $\delta \mathcal{A}_{\text{dcl}} / \delta \xi^\alpha = 0$ с помощью векторного произведения с $\boldsymbol{\xi}$.

$$-\hbar \frac{\left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{z}\right) \times \boldsymbol{\xi}}{2(1 + \mathbf{z}\boldsymbol{\xi})} + \hbar \left(-\frac{d}{d\tau_0} \frac{(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{z})}{2(1 + \mathbf{z}\boldsymbol{\xi})} - \frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{2(1 + \mathbf{z}\boldsymbol{\xi})^2} \mathbf{z} \right) \times \boldsymbol{\xi} + \hbar \frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \boldsymbol{\xi}}{2} Q = 0 \tag{6.13}$$

После преобразования это уравнение приводится к уравнению (смотри Приложение)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\boldsymbol{\xi} \times (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) Q, \tag{6.14}$$

которое не содержит вектора $\mathbf{z}$. Это означает, что $\mathbf{z}$ определяет фиктивное направление в пространстве-времени.

Используя инвариантность действия (6.7) при преобразовании параметра τ_0, выберем τ_0 таким образом, что

$$\sqrt{\dot{x}^s \dot{x}_s} = \sqrt{\dot{x}_0^2 - \dot{\mathbf{x}}^2} = 1, \qquad \dot{x}_0 = \sqrt{1 + \dot{\mathbf{x}}^2} \tag{6.15}$$

Тогда, используя условие (6.15), получим из (6.9) для величин Q, $\partial Q / \partial \dot{x}_0$, $\partial Q / \partial \dot{\mathbf{x}}$

$$Q = \frac{1}{1 + \dot{x}_0}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}_0} = -1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \frac{\dot{\mathbf{x}} (2 + \dot{x}_0)}{(1 + \dot{x}_0)^2} \tag{6.16}$$

Интегрирование уравнения (6.10) приводит к

$$\kappa_0 m \dot{x}_0 + \frac{\hbar}{2} (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\xi} = -p_0 \tag{6.17}$$

где p_0 есть постоянная интегрирования. Эта постоянная p_0 описывает временную составляющую канонического 4-импульса динамической системы $\mathcal{S}_{\text{Dd}}$.

Интегрирование уравнения (6.8) дает

$$-\kappa_0 m \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{\dot{x}^s \dot{x}_s}} + \frac{\hbar Q}{2} (\boldsymbol{\xi} \times \ddot{\mathbf{x}}) - \frac{\hbar}{2} \frac{\partial Q}{\partial \dot{\mathbf{x}}} (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\xi} + \frac{\hbar}{2} \frac{d}{d\tau_0} \left(Q (\boldsymbol{\xi} \times \dot{\mathbf{x}}) \right) = -\mathbf{p} = \text{const} \tag{6.18}$$

где $\mathbf{p}$ есть 3-импульс динамической системы $\mathcal{S}_{\text{Dd}}$ как целого.

Используя калибровку (6.9) и соотношения (6.16), перепишем уравнение (6.18) в виде

$$-m\dot{\mathbf{x}} + \frac{\hbar}{2}\frac{(\boldsymbol{\xi}\times\ddot{\mathbf{x}})}{1+\dot{x}_0} - \frac{\hbar}{2}\frac{\dot{\mathbf{x}}\,(2+\dot{x}_0)}{(1+\dot{x}_0)^2}(\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\boldsymbol{\xi} + \frac{\hbar}{2}\frac{d}{d\tau_0}\left(\frac{(\boldsymbol{\xi}\times\dot{\mathbf{x}})}{1+\dot{x}_0}\right) = -\mathbf{p} \qquad (6.19)$$

Если мы положим $\hbar = 0$ в (6.19), то получим традиционную связь $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$ между скоростью $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/d\tau_0$ и импульсом свободной частицы. Но квантовая постоянная $\hbar$ является коэффициентом пред старшей временной производной, и, полагая $\hbar = 0$, мы подавляем некоторые степени свободы.

Если эти дополнительные степени свободы не возбуждать (или подавить), то классическая дираковская частица имеет шесть степеней свободы. Мы увидим, что характерная энергия, связанная с дополнительными степенями свободы, имеет порядок энергии покоя частицы m. При низко энергетических процессах (расчет атомных спектров, квантовая электродинамика) можно пренебречь этими степенями свободы, оставив только числовые характеристики (спин, магнитный момент) этих степеней свободы. Однако, в случае высокой энергии (ультрарелятивистские столкновения, структура элементарных частиц) нельзя пренебрегать этими степенями свободы. Разумеется, используя уравнение Дирака, мы автоматически учитываем эти дополнительные степени свободы. Но это важно также для учета этих степеней свободы в нашей интерпретации высоко энергетических процессов.

Преобразование и решение уравнения (6.18) довольно громоздки. Было затрачено много усилий, чтобы доказать, что 3-векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\dot{\mathbf{x}}$, и $\ddot{\mathbf{x}}$ взаимно ортогональны и их модули постоянны [9] в системе координат, где $\mathbf{p} = 0$. Мы не будем тратить время на доказательство. Вместо этого мы выберем систему координат таким образом, что $\mathbf{p} = 0$

$$\boldsymbol{\xi} = \{0, 0, \varepsilon_0\}, \qquad \varepsilon_0 = \pm 1 \qquad (6.20)$$

и наложим ограничения

$$\dot{\mathbf{x}}^2 = \text{const}, \qquad (\dot{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad (\ddot{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}) = 0, \qquad (\dot{\mathbf{x}}\times\ddot{\mathbf{x}})\,\boldsymbol{\xi} = \text{const} \qquad (6.21)$$

Мы используем ограничения (6.21) для решения системы динамических уравнений (6.14), (6.17), (6.19) м покажем, что ограничения (6.21) совместимы с динамическими уравнениями (6.14), (6.17), (6.19).

Принимая во внимание (6.21) и (6.15), введем новые переменные

$$\mathbf{y} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1+\dot{x}_0}} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+\dot{\mathbf{x}}^2}}}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}\sqrt{(\mathbf{y}^2+2)} \qquad (6.22)$$

$$\dot{x}_0 = \sqrt{1+\mathbf{y}^2\,(\mathbf{y}^2+2)} = \mathbf{y}^2 + 1 \qquad (6.23)$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{y}^2 = \gamma - 1 = \text{const}, \qquad (6.24)$$

получаем

$$\dot{x}_0 = \sqrt{1 + \mathbf{y}^2\left(\mathbf{y}^2 + 2\right)} = \mathbf{y}^2 + 1 = \gamma = \text{const} \tag{6.25}$$

Тогда при $\mathbf{p} = 0$ уравнение (6.19) принимает вид

$$-\kappa_0 m\mathbf{y}\left(\gamma + 1\right) + \frac{\hbar}{2}(\boldsymbol{\xi} \times \dot{\mathbf{y}}) - \frac{\hbar}{2}\left(\gamma + 2\right)\left((\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi}\right)\mathbf{y} + \frac{\hbar}{2}\frac{d}{d\tau_0}\left((\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{y})\right) = 0 \tag{6.26}$$

Уравнение (6.14) принимает вид

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -(\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}}) \times \boldsymbol{\xi} = 0 \tag{6.27}$$

из-за ограничений (6.21). В терминах переменных $\mathbf{y}$ условия(6.21) имеют вид

$$\mathbf{y}^2 = \gamma - 1, \qquad (\boldsymbol{\xi}\mathbf{y}) = 0, \qquad (\boldsymbol{\xi}\dot{\mathbf{y}}) = 0, \qquad (\mathbf{y}\dot{\mathbf{y}}) = 0 \tag{6.28}$$

где γ есть постоянная интегрирования. В соответствии с (6.25) и (6.28) получаем

$$(\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}})\boldsymbol{\xi} = \varepsilon_0\omega\left(\gamma - 1\right) \tag{6.29}$$

где ω есть неопределенная постоянная (некоторая угловая скорость).

Подставляя (6.29) в (6.26), получаем после упрощений

$$(\boldsymbol{\xi} \times \dot{\mathbf{y}}) - \left(\frac{1}{2}\left(\gamma + 2\right)\left(\gamma - 1\right)\varepsilon_0\omega + \frac{\kappa_0 m}{\hbar}\left(\gamma + 1\right)\right)\mathbf{y} = 0 \tag{6.30}$$

Поскольку $\mathbf{y}^2 = \gamma - 1$, уравнение (6.29) описывает вращение вектора $\mathbf{y}$ с угловой скоростью ω. Уравнение (6.30) описывает вращение вектора $\mathbf{y}$ вокруг вектора $\boldsymbol{\xi}$ с угловой частотой $\frac{1}{2}\left(\gamma + 2\right)\left(\gamma - 1\right)\varepsilon_0\omega + \frac{\kappa_0 m}{\hbar}\left(\gamma + 1\right)$. Уравнения (6.29) и (6.30) совместны, если эти частоты совпадают. Согласно (6.28) векторы $\mathbf{y}$ и $\dot{\mathbf{y}}$ ортогональны к $\boldsymbol{\xi}$. Тогда в соответствии с (6.20) векторы $\mathbf{y}$ и $\dot{\mathbf{y}}$ могут быть представлены в виде

$$\mathbf{y} = \left\{\sqrt{\gamma - 1}\cos\Phi, \sqrt{\gamma - 1}\sin\Phi, 0\right\} \tag{6.31}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \left\{-\sqrt{\gamma - 1}\omega\sin\Phi, \sqrt{\gamma - 1}\omega\cos\Phi, 0\right\}, \qquad \omega = \frac{d\Phi}{d\tau_0} \tag{6.32}$$

С помощью (6.31) и (6.32) уравнения (6.30) принимают вид

$$-\varepsilon_0\omega y_1 - \left(\frac{1}{2}\left(\gamma + 2\right)\left(\gamma - 1\right)\varepsilon_0\omega + \frac{\kappa_0 m}{\hbar}\left(\gamma + 1\right)\right)y_1 = 0 \tag{6.33}$$

$$-\varepsilon_0\omega y_2 - \left(\frac{1}{2}\left(\gamma + 2\right)\left(\gamma - 1\right)\varepsilon_0\omega + \frac{\kappa_0 m}{\hbar}\left(\gamma + 1\right)\right)y_2 = 0 \tag{6.34}$$

Уравнения (6.33), (6.34) удовлетворяются при условии, что

$$\varepsilon_0\omega + \left(\frac{1}{2}\left(\gamma + 2\right)\left(\gamma - 1\right)\varepsilon_0\omega + \frac{\kappa_0 m}{\hbar}\left(\gamma + 1\right)\right) = 0 \tag{6.35}$$

Решение уравнения (6.35) имеет вид

$$\omega = -\frac{2\varepsilon_0 \kappa_0 m}{\hbar \gamma} \tag{6.36}$$

В соответствии с (6.22) и (6.23) динамическое уравнение (6.17) принимает вид

$$-p_0 = \kappa_0 m \gamma + \frac{\hbar}{2} (\mathbf{y} \times \dot{\mathbf{y}}) \boldsymbol{\xi} (\gamma + 1) \tag{6.37}$$

Используя соотношения (6.29) и (6.36), получаем из (6.37)

$$-p_0 = \kappa_0 m \left(\gamma - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \right) = \frac{\kappa_0 m}{\gamma}, \qquad \kappa_0 = \pm 1 \tag{6.38}$$

Тогда получаем для полной массы M_{Dd} динамической системы $\mathcal{S}_{\mathrm{Dd}}$.

$$M_{\mathrm{Dd}} = \sqrt{p_0^2 - \mathbf{p}^2} = |p_0| = \frac{m}{\gamma} \tag{6.39}$$

Заметим, что написав соотношение (6.39), мы действуем не совсем последовательно. Написав соотношение (6.39), мы предполагаем, что динамические уравнения (6.17) и (6.18) релятивистски инвариантны, и решение уравнений (6.17), (6.18) для произвольного $\mathbf{p}$ может быть получено из решения для $\mathbf{p} = 0$ с помощью надлежащего преобразования Лоренца. к сожалению, динамические уравнения (6.17), (6.18) не являются релятивистски инвариантными, и для произвольного $\mathbf{p}$ решение не будет, вообще говоря, винтовой линией, Хотя она будет винтовой линией для $\mathbf{p} = 0$. Мировая линия является винтовой линией приближенно в нерелятивистском случае, когда $|\mathbf{p}| \ll m$.

Перейдем от независимой переменной τ_0 к независимой переменной $x^0 = t$. Имеем

$$\Omega t = -\varepsilon_0 \kappa_0 \omega \tau_0, \qquad -\varepsilon_0 \kappa_0 \omega = \Omega \dot{x}_0 = \Omega \gamma = \frac{2m}{\hbar \gamma}, \qquad \Omega = \frac{2m}{\hbar \gamma^2} \tag{6.40}$$

Возвращаясь от переменных $\mathbf{y}$ к переменным $\dot{\mathbf{x}}$, получаем вместо (6.31) и (6.32)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left\{ \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \cos(\Omega t), -\frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma} \sin(\Omega t), 0 \right\}, \qquad \Omega = \frac{2m}{\hbar \gamma^2} \tag{6.41}$$

$$\mathbf{x} = \left\{ \frac{\hbar \gamma \sqrt{\gamma^2 - 1}}{2m} \sin\left(\frac{2m}{\hbar \gamma^2} t \right), \frac{\hbar \gamma \sqrt{\gamma^2 - 1}}{2m} \cos\left(\frac{2m}{\hbar \gamma^2} t \right), 0 \right\} \tag{6.42}$$

где $\gamma \geq 1$ есть произвольная постоянная.

Таким образом, в системе координат, где канонический 4-импульс имеет вид

$$P_k = \{p_0, \mathbf{p}\} = \left\{ -\frac{\kappa_0 m}{\gamma}, 0, 0, 0 \right\} \tag{6.43}$$

мировая линия детерминированной дираковской частицы является винтовой линией, которая описывается соотношением

$$\begin{aligned}\{t, \mathbf{x}\} &= \{t, a_{\mathrm{Dd}} \sin(\Omega t), a_{\mathrm{Dd}} \cos(\omega_{\mathrm{Dd}} t), 0\} \qquad (6.44)\\ a_{\mathrm{Dd}} &= \frac{\hbar\gamma\sqrt{\gamma^2-1}}{2m}, \qquad \omega_{\mathrm{Dd}} = \frac{2m}{\hbar\gamma^2} \qquad (6.45)\end{aligned}$$

Из (6.41) следует, что скорость детерминированной дираковской частицы $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ выражается следующим образом

$$\mathbf{v}^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \qquad (6.46)$$

Другими словами, величина γ является Лоренц фактором детерминированной дираковской частицы.

Мы видим, что характерная частота, связанная с внутренними степенями свободы есть $2m/\gamma^2$, а характерная энергия порядка $|-m\gamma + m\gamma^{-1}|$.

Параметры γ и ω_{Dd} как функции радиуса a_{Dd} и дираковской массы m имеют вид

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\zeta^2}\right)}, \qquad \omega_{\mathrm{Dd}} = \frac{4m}{\hbar\left(1+\sqrt{1+\zeta^2}\right)} \qquad \zeta = \frac{4ma_{\mathrm{Dd}}}{\hbar} \qquad (6.47)$$

7 Дискретная геометрия пространства-времени

Обоснование квантовой механики как статистического описания случайно движущихся частиц поставило вопрос: "Почему свободные микрочастицы движутся стохастически?" Оказалось, что пространство-время дискретно, и частицы малой массы чувствуют эту дискретность. В результате частицы малой массы движутся стохастически. Мировая функция σ_{d} дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ пространства времени ограничена соотношением (1.1).

В нерелятивистской физике состояние частицы описывается как точка в фазовом пространстве координат и импульсов. Мировая линия частицы предполагается гладкой, и 4-импульс частицы p_k описывается соотношением

$$p_k = g_{kl}\frac{dx^l}{d\tau} = g_{kl}\lim_{d\tau\to 0}\frac{x^l(\tau+d\tau) - x^l(\tau)}{d\tau} \qquad (7.1)$$

где $x^l = x^l(\tau)$, $l = 0, 1, 2, 3$ есть уравнение мировой линии. В релятивистском случае частица описывается мировой линией. В $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ мировая линия не может быть гладкой, потому что предел (7.1) не существует в $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. В $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ гладкая мировая линия заменяется последовательным множеством точек $...P_0, P_1, P_2, ...$, или ломаной линий, звеньями которой являются прямолинейные отрезки одинаковой длины

$$\mathcal{C} = \bigcup_s \mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}, \quad |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| = \mu, \quad s = ...0, 1, .. \qquad (7.2)$$

где длина $|\mu| \geq \lambda_0$, и λ_0 есть параметр (элементарная длина) мировой функции σ_{d}, определенный соотношением (1.4). Термин "мировая цепь" будет использоваться для такой мировой линии. Величина μ есть геометрическая масса частицы. Она связана с обычной массой m соотношением

$$m = b\mu \tag{7.3}$$

где b есть некоторая универсальная постоянная.

Для свободной частицы смежные векторы $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ и $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$ параллельны

$$(\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}.\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}) = |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| \cdot |\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}|, \quad s = ...0, 1, .. \tag{7.4}$$

где скалярное произведение $(\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}.\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2})$ определяется соотношением

$$(\mathbf{AB}.\mathbf{CD}) = \sigma(A, D) + \sigma(B, C) - \sigma(A, C) - \sigma(B, D) \tag{7.5}$$

В геометрии Минковского, когда $\lambda_0 \to 0$, времениподобные мировые линии превращаются в гладкие мировые линии. Вихляние пространственноподобных мировых цепей (7.2) не исчезает, потому что многовариантность пространственноподобных векторов остается при $\lambda_0 \to 0$.

Дискретная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ является многовариантной геометрией, Это является наиболее важным свойством геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Более того дискретная геометрия является неаксиоматизируемой геометрией, которая не может быть построена на основе конечного числа аксиом. Как всякая обобщенная геометрия дискретная геометрия $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ является обобщением собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$.

Собственно евклидова геометрия так же, как и геометрия Минковского, являются непрерывными геометриями. Они описываются методами дифференциальной геометрии. Однако, могут существовать дискретные геометрии, где расстояние между любыми двумя точками больше, чем некоторая элементарная длина λ_0. Если характерная шкала задачи много больше, чем элементарная длина λ_0, то можно положить $\lambda_0 = 0$ и рассматривать геометрию пространства-времени как непрерывную геометрию. Однако, в микромире, где характерная шкала порядка λ_0, следует рассматривать дискретную геометрию пространства-времени, потому что реальная геометрия пространства-времени может быть дискретной, и такая возможность должна быть исследована.

При традиционном построении евклидовой геометрии используются понятия многообразия, размерности, системы координат, линейного векторного пространства, которые могут быть использованы только в непрерывной (дифференциальной) геометрии. Дискретная геометрия рассматривается как обобщение собственно евклидовой геометрии, потому что это единственная геометрия, непротиворечивость которой была доказана. Строя дискретную геометрию, нельзя использовать вышеупомянутые понятия. Единственным понятием, которое можно использовать в непрерывной и дискретной геометриях, является понятие расстояния ρ. Но расстояние ρ должно быть введено как фундаментальная величина. В римановой геометрии расстояние ρ вводится как интеграл вдоль геодезической от бесконечно малого расстояния

$$ds = \sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}$$

Такой метод введения расстояния ρ не годится в дискретной геометрии, потому что он использует бесконечно малое расстояние, которого нет в дискретной геометрии. Кроме того, в случае, когда имеется несколько геодезических, соединяющих две точки, получаются многозначные выражения для расстояния и мировой функции. Многозначная мировая функция недопустима в геометрии.

Чтобы построить дискретную геометрию, нужно использовать метрический подход к геометрии. Собственно евклидова геометрия представляется в терминах расстояния ρ (или в терминах мировой функции $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$), и это представление используется для обобщения собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ на случай дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$. Такая замена базовых понятий евклидовой геометрии означает логическую перезагрузку концепции евклидовой геометрии. Представление геометрии в терминах мировой функции мы будем называть σ-имманентным представлением. σ-имманентное представление собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ всегда возможно.

Функция расстояния ρ_{d} дискретной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ удовлетворяет условию (1.1). Это означает, что в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ нет расстояний, более коротких, чем элементарная длина λ_0. Расстояние $\rho_{\mathrm{d}}(P, Q) = 0$ допустимо. Это условие выполнено, если $P = Q$.

Заметим, что условие (1.1) является ограничением на значения функции расстояния, но не на значения ее аргумента (точки множества Ω), хотя обычно рассматривают дискретную геометрию как геометрию на решетке. Верно, что геометрии на решетке являются дискретными геометриями (они удовлетворяют условию (1.1)), но они образуют особый класс дискретных геометрий. Такие геометрии являются по существу традиционной дифференциальной геометрией, заданной на счетном множестве точек, где расстояния те же самые, что и в дифференциальной геометрии, заданной на континуальном множестве точек. Кроме того, такая дискретная геометрия не может быть однородной и изотропной. Ощий случай дискретной геометрии возникает, когда ограничения накладываются на допустимые значения мировой функции (или функции расстояния).

Простейший случай дискретной геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{d}}$ получается, если $\mathcal{G}_{\mathrm{d}} = \{\sigma_{\mathrm{d}}, \Omega_{\mathrm{M}}\}$ задается на многообразии Ω_{M}, где задается геометрия Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}} = \{\sigma_{\mathrm{M}}, \Omega_{\mathrm{M}}\}$. Мировая функция σ_{d} выбирается в виде (1.4). Легко проверить, что $\rho_{\mathrm{d}} = \sqrt{2\sigma_{\mathrm{d}}}$, определенное соотношением (1.4) удовлетворяет ограничению (1.1). Такая дискретная геометрия однородна и изотропна как и геометрия Минковского.

8 Метрический подход к геометрии

Имеется другое обстоятельство, которое препятствует построению дискретной геометрии. Собственно евклидова геометрия является аксиоматизируемой геометрией. Это означает, что все утверждения собственно евклидовой геометрии могут быть выведены из системы нескольких аксиом (базовых утверждений геометрии). Обычно рассматривают аксиоматизируемость геометрии, как неотъемлемое свойство любой геометрии. Считается, что неаксиоматизируемых геометрий не существует. Причина такой точки зрения довольно проста. В течении двух тысяч лет была известна единственная геометрия – геометрия Евклида, которая аксиоматизируема. Все дифференциальные геометрии, построенные как обобщение собственно евклидовой геометрии, тоже аксиоматизируемы. Не известно другого метода построения геометрии, отличного от Евклидова метода выведения геометрии из системы аксиом. Все дифференциальные геометрии строятся с помощью этого метода. Математики полагают, что всякая геометрия является логическим построением. Такая дисциплина как симплектическая геометрия используется в динамике, а не для описания свойств геометрических объектов. Тем не менее, она называется геометрией, потому что ее структура напоминает структуру евклидовой геометрии.

На самом деле, любая геометрия исследует форму и взаимное расположение геометрических объектов в пространстве или в пространстве-времени. Это свойство есть исконное свойство геометрии. Однако, в течение двух тысяч лет используется только евклидов метод, и в результате аксиоматизируемость геометрии рассматривается как неотъемлемое свойство любой геометрии, тогда как описание геометрических объектов рассматривается как вторичное свойство дисциплины, называемой геометрией.

Вообще-то, существует метрический подход к геометрии, когда геометрия рассматривается как наука, исследующая форму и взаимное расположение геометрических объектов. Такая геометрия известна как метрическая геометрия (метрическое пространство), если она использует аксиому треугольника. Если аксиома треугольника не используется, то геометрию называют дистантной геометрией (distant geometry) [42, 43]. Предполагается, что дистантная геометрия $\mathcal{G}_{\rm ds} = \{\sigma, \Omega\}$ полностью описывается мировой функцией $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$

$$\sigma : \quad \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma(P, Q) = \sigma(Q, P), \quad \forall P, Q \in \Omega \tag{8.1}$$

где Ω есть множество точек, на котором задана геометрия. Мировая функция σ используется вместо функции расстояния ρ, потому что в геометрии Минковского расстояние ρ может быть или положительным, или чисто мнимым, поскольку $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2$ всегда вещественна.

При метрическом подходе к геометрии геометрия может быть построена на любом множестве точек (а не обязательно на многобразии) без использования координат. В метрическом пространстве функция расстояния ρ удовлетворяет дополнительным ограничениям

$$\rho(P, Q) \geq 0, \quad \forall P, Q \in \Omega, \quad \rho(P, Q) = \sqrt{2\sigma(P, Q)} \tag{8.2}$$

$$\rho(P, Q) + \rho(P, R) \geq \rho(Q, R), \quad \forall P, Q, R \in \Omega \tag{8.3}$$

Условие (8.3) известно как аксиома треугольника. Эта аксиома позволяет ввести прямую линию в метрическом пространстве как кратчайшую линию между двумя точками. В дистантной геометрии, где ограничение (8.3) отсутствует, и не удается ввести прямую линию в терминах функции расстояния ρ. Блюменталь [43] ввел кривую как непрерывное отображение $(0,1) \rightarrow \Omega$. Непрерывное отображение представляет собой операцию, которая не может быть описана в терминах функции расстояния. В результате чисто метрический подход к геометрии, когда геометрия полностью описывается в терминах функции расстояния, не состоялся. Причина неудачи заключается в том, Блюменталь полагал, что прямая линия не имеет толщины, тогда как, на самом деле, в дистантной геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{ds}}$ прямая линия может быть полой трубкой. На самом деле, дистантная геометрия является неаксиоматизируемой геометрией, которая не может быть построена методом Евклида.

Что лежит в основе евклидова метода построения геометрии? Взглянем на этот метод извне. Расстояние не воспринимается непосредственно. Можно воспринимать физические тела. Геометрический объект – это абстракция пространственно-временных свойств физического тела. Физическое тело, эволюционируя во времени, может перемещаться из одной области пространства-времени с геометрией $\{\sigma_1, \Omega_1\}$ в другую область с другой пространственно-временной геометрией $\{\sigma_2, \Omega_2\}$. Мы должны иметь возможность опознать и один и тот же геометрический объект в различных геометриях пространства-времени. Для того, чтобы это было возможно, каждый геометрический объект должен описываться в терминах функции расстояния ρ и только функции расстояния ρ. Всякий геометрический объект описывается его каркасом и оболочкой каркаса. Мы рассмотрим простые примеры геометрических объектов. Общее определение геометрического объекта будет дано позже.

Сфера $\mathcal{SP}_{P_0P_1}$ является простейшим геометрическим объектом, определяемым двумя точками P_0, P_1 (каркасом). Точка P_0 есть центр сферы, P_1 есть некоторая точка на поверхности сферы. Точки $\{P_0, P_1\}$ образуют каркас сферы. Поверхность сферы (ее оболочка) представляет собой множество точек

$$\mathcal{SP}_{P_0P_1} = \{R | \rho(P_0, R) = \rho(P_0, P_1)\}, \quad \rho = \sqrt{2\sigma} \tag{8.4}$$

Сфера представляет собой полый геометрический объект в том смысле, что существуют внутренние точки сферы, которые не принадлежат поверхности сферы (ее оболочке).

Другим простым геометрическим объектом является эллипсоид $\mathcal{EL}_{F_1F_2P}$, определяемый тремя точками F_1, F_2, P. Точки F_1, F_2 являются фокусами эллипсоида, а точка P есть некоторая точка на поверхности эллипсоида

$$\mathcal{EL}_{F_1F_2P} = \{R | \rho(F_1, R) + \rho(F_2, R) = \rho(F_1, P) + \rho(F_2, P)\}, \quad \rho = \sqrt{2\sigma} \tag{8.5}$$

Если $F_1 = P \vee F_2 = P$, то эллипсоид вырождается в отрезок прямой линии $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$

$$\mathcal{T}_{[P_0P_1]} \equiv \mathcal{EL}_{P_0P_1P_1} = \mathcal{EL}_{P_0P_1P_0} = \{R | \rho(P_0, R) + \rho(P_1, R) = \rho(P_0, P_1)\} \tag{8.6}$$

Вырожденный эллипсоид $\mathcal{EL}_{P_0P_1P_1}$ по определению является отрезком прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. Это определение используется потому, что в собственно евклидовой геометрии вырожденный эллипсоид является отрезком прямой линии. В других геометриях геометрический объект (8.6) может быть полым геометрическим объектом. Это означает, что он не является одномерным множеством точек, как в собственно евклидовой геометрии, но тем не менее мы будем считать его отрезком прямой линии.

Отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ определяется двумя точками. Все точки отрезка $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ являются точками оболочки, которая состоит только из точек границы. В собственно евклидовой геометрии это не полый геометрический объект, потому что он не содержит внутренних точек.

Является ли отрезок прямой линии $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ полым геометрическим объектом в других дистантных геометриях? Это зависит от ограничений (8.2),(8.3). Если они выполнены, отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ является сплошным (не полым). Если функция расстояния ρ не удовлетворяет аксиоме треугольника (8.3), отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ может быть полым. Другими словами, отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ может быть полой трубкой.

Почему отрезок является сплошным, если выполнена аксиома треугольнка (8.3)? Рассмотрим замкнутую поверхность $\mathcal{S}$, определенную соотношением

$$\mathcal{S}: \quad S_{P_0P_1}(R) = 0, \quad S_{P_0P_1}(R) = \rho(P_0, R) + \rho(P_1, R) - \rho(P_0, P_1) \tag{8.7}$$

Внутренние точки R' (точки внутри замкнутой поверхности $\mathcal{S}$) удовлетворяют соотношению $S_{P_0P_1}(R') < 0$. Внешние точки R'' удовлетворяют соотношению $S_{P_0P_1}(R'') > 0$. Если аксиома треугольника выполнена, то может быть записано в виде

$$\rho(P_0, R) + \rho(P_1, R) \geq \rho(P_0, P_1), \quad \forall P_1, P_2, R \in \Omega \tag{8.8a}$$

Из (8.7) и (8.8a) следует, что $S_{P_0P_1}(R') \geq 0, \quad \forall R' \in \Omega$. Это означает, что поверхность $\mathcal{S}$, которая совпадает с отрезком $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$, не может иметь внутренних точек.

Почему так важно, является полым или нет отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$? Геометрия сводится к конструкции геометрических объектов и к исследованию их свойств. В собственно евклидовой геометрии все геометрические объекты строятся из блоков (точка, отрезок прямой). Блоки должны быть простыми сплошными геометрическими объектами. Отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ определяется двумя точками и является сплошным в собственно евклидовой геометрии. Он может использоваться как строительный блок для построения геометрических объектов. Например, в собственно евклидовой геометрии куб может быть заполнен прямолинейными отрезками, параллельными одному из ребер куба таким способом, что каждая точка куба принадлежит одному и только одному отрезку. Такая ситуация не возможна, если блок является полым геометрическим объектом. Если блоки есть полые трубки, то нельзя заполнить куб этими трубками таким образом, чтобы каждая точка куба принадлежала одной и только одной трубке. Это означает, что куб не может быть построен из полых блоков. То же относится к любому геометрическому объекту.

Евклидов метод построения геометрического объекта основан на возможности построения любого геометрического объекта из блоков. Имеется конечное число правил, описывающих свойства блоков, и конечное число правил, описывающих комбинации блоков при построении геометрического объекта. Евклид сформулировал эти правила в виде аксиом логического построения. Таким образом, аксиоматика собственно евклидовой геометрии описывает процедуру построения геометрических объектов из блоков. Если отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ является сплошным, дистантная геометрия является аксиоматизируемой геометрией, потому что она может быть реализована как геометрия, где геометрические объекты можно строить из блоков, т.е. с помощью метода Евклида.

Если блоки полые, они не могут быть использованы для построения геометрических объектов. В этом случае дистантная геометрия неаксиоматизируема, потому что в этом случае нельзя использовать евклидов метод для построения геометрических объектов. Формально отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ является полым, если отношение эквивалентности интранзитивно (и геометрия многовариантна). Если отношение эквивалентности транзитивно, отрезок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ может быть сплошным.

Строительный блок $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ является ориентированным объектом, направление которого описывается вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \overrightarrow{P_0P_1} = \{P_0, P_1\}$, который представляет собой упорядоченное множество из двух точек. Точка P_0 является началом вектора, точка P_1 является концом вектора. Всякий вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ описывается его модулем

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = \rho(P_0, P_1) = \sqrt{2\sigma(P_0, P_1)} \tag{8.9}$$

Векторы являются направленными величинами, и взаимоотношение двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ описывается углом φ между ними. В собственно евклидовой геометрии имеется много векторов $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, которые образуют угол $\varphi \neq 0$ с вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Однако, в собственно евклидовой геометрии имеется только один вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ в точке Q_0 с фиксированной длиной $|\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$, который образует с вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ угол $\varphi = 0$. По определению такой вектор $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ является вектором параллельным ($\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \upuparrows \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$) вектору $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$.

Вместо угла φ взаимное направление двух векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ можно описывать скалярным произведением $(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1)$ этих векторов, определяемым соотношением

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \cos\varphi \tag{8.10}$$

В собственно евклидовой геометрии определение скалярного произведения можно выразить в терминах мировой функции

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = \sigma(P_0, Q_1) + \sigma(P_1, Q_0) - \sigma(P_1, Q_1) - \sigma(P_0, Q_0) \tag{8.11}$$

Поскольку определение скалярного произведения дано в терминах мировой функции, это определение можно использовать в дистантной геометрии.

Тогда условие параллельности векторов получается из (8.10) при $\varphi = 0$. Оно записывается в виде

$$(\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1 \upuparrows \mathbf{P}_0\mathbf{P}_1): \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{8.12}$$

В собственно евклидовой геометрии все векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$,$\mathbf{P}_0\mathbf{P}'_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}''_1$, которые параллельны вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, параллельны между собой. Такое положение очень специально. Оно связано с вырожденным характером собственно евклидовой геометрии. В дистантной геометрии векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$,$\mathbf{P}_0\mathbf{P}'_1$, $\mathbf{P}_0\mathbf{P}''_1$, которые параллельны вектору $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$, не параллельны между собой, вообще говоря. Это обстоятельство порождает полые отрезки прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$. Это зависит от свойств мировой функции σ, которая полностью описывает дистантную геометрию.

В собственно евклидовой геометрии два вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$ по определению эквивалентны, если они параллельны ($\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \upuparrows \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1$) и их длины равны $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1|$

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 \mathrm{eqv} \mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1): \quad (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| \cdot |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \wedge |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1| = |\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_1| \tag{8.13}$$

Это определение эквивалентности (равенства) двух векторов вместе с определениями (8.9), (8.11) формулирует эквивалентность двух векторов в терминах мировой функции и только в этих терминах. Оно не содержит ссылки на размерность, систему координат и другие средства описания. Это определение эквивалентности векторов следует использовать в любой дистантной геометрии.

Существуют такие дистантные геометрии, где отрезки прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ являются полыми трубками. тогда определение (8.13), (8.11) оказывается интранзитивным, и дистантная геометрия оказывается неаксиоматизируемой. Некоторые математики возражают, что определение (8.13), (8.12) не может использоваться как отношение эквивалентности, потому что отношение эквивалентности транзитивно по определению. Они настаивают, следует использовать другой термин для определения (8.13), (8.11), (например, общая эквивалентность). Причина такого возражения заключается в том обстоятельстве, что математики имели дело только с аксиоматизируемыми геометриями, которые являются логическими построениями. В самом деле, если используется логическое построение, то можно выводить заключения, только если отношение эквивалентности транзитивно, и из $a \backsim b$ и $b \backsim c$ следует, что $a \backsim c$. Если отношение эквивалентности не обладает этим свойством, то нельзя выводить следствия аксиом и теорем. Таким образом, если кто-то настаивает на транзитивности отношения эквивалентности, он настаивает на невозможности неаксиомтизируемых геометрий и, в частности, на невозможности дискретных геометрий, где отрезки прямой $\mathcal{T}_{[P_0P_1]}$ являются полыми трубками. Мы полагаем, что несовершенство методов описания не может быть причиной пренебрежения дискретными геометриями. Неаксиоматизируемость дискретной геометрии $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ не означает, что $\mathcal{G}_\mathrm{d}$ не существует.

Транзитивность отношения эквивалентности была получена из нашего опыта работы с аксиоматизируемыми геометриями (евклидова геометрия и ее модификации). Мы не имеем права обобщать это свойство на все геометрии пространства-времени. Является ли реальное пространство-время дискретным – это вопрос эксперимента, а не вопрос математических спекуляций. Другая проблема заключается в том факте, что мы можем строить только аксиоматизируемые геометрии, и мы не умеем строить дискретные геометрии. В результате мы строим только геометрии на решетке, которые не являются полноценными дискретными геометриями. Вопрос, как строить дискретные (неаксиоматизируемые) геометрии, мы рассмотрим немного позднее.

9 Описание геометрических объектов

Если дистантная геометрия включает неопределенную метрику (как в геометрии Минковского), условие (8.2) должно быть опущено, и геометрия строится в терминах мировой функции. Геометрию полностью описываемую мировой функцией (8.1) будем называть физической геометрией.

Геометрический объект представляет собой геометрический образ физического тела. Всякий геометрический объект есть некоторое подмножество точек пространства-времени. Однако геометрический объект – это не произвольное множество точек. Геометрический объект определяется в физической геометрии таким образом, что одинаковые геометрические объекты(которые являются образами одинаковых физических тел) могут быть опознаны в различных геометриях пространства-времени.

Определение 1: Геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ геометрии $\mathcal{G}=\{\sigma,\Omega\}$ есть подмножество $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}\subset\Omega$ точечного множества Ω. Этот геометрический объект $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ есть множество корней $R\in\Omega$ функции $F_{\mathcal{P}_n,\sigma}$

$$g_{\mathcal{P}_n,\sigma}=\left\{R|F_{\mathcal{P}_n,\sigma}\left(R\right)=0\right\},\quad F_{\mathcal{P}_n,\sigma}:\quad \Omega\rightarrow\mathbb{R} \tag{9.1}$$

где $F_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ зависит от точки R через мировые функции от аргументов $\{\mathcal{P}_n,R\}=\{P_0,P_1,...P_n,R\}$

$$F_{\mathcal{P}_n,\sigma}:\quad F_{\mathcal{P}_n,\sigma}\left(R\right)=G_{\mathcal{P}_n,\sigma}\left(u_1,u_2,...u_s\right),\qquad s=\frac{1}{2}\left(n+1\right)\left(n+2\right) \tag{9.2}$$

$$u_l=\sigma\left(w_i,w_k\right),\quad i,k=0,1,...n+1,\quad l=1,2,...\frac{1}{2}\left(n+1\right)\left(n+2\right) \tag{9.3}$$

$$w_k=P_k\in\Omega,\qquad k=0,1,...n,\qquad w_{n+1}=R\in\Omega \tag{9.4}$$

Здесь $\mathcal{P}_n=\{P_0,P_1,...,P_n\}\subset\Omega$ суть $n+1$ точек, которые являются параметрами, определяющими $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}$

$$g_{\mathcal{P}_n,\sigma}=\left\{R|F_{\mathcal{P}_n,\sigma}\left(R\right)=0\right\},\qquad R\in\Omega,\qquad \mathcal{P}_n\in\Omega^{n+1} \tag{9.5}$$

$F_{\mathcal{P}_n,\sigma}\left(R\right)=G_{\mathcal{P}_n,\sigma}\left(u_1,u_2,...u_s\right)$ есть функция от $\frac{1}{2}\left(n+1\right)\left(n+2\right)$ аргументов u_k и от $n+1$ параметров $\mathcal{P}_n$. Множество $\mathcal{P}_n=\{P_0,P_1,...P_n\}\in\Omega^{n+1}$ параметров геометрического объекта будем называть каркасом геометрического объекта. Подмножество $g_{\mathcal{P}_n,\sigma}\subset\Omega$ будем называть оболочкой каркаса. Каркас является аналогом системы отсчета, жестко прикрепленной к физическому телу.

Следя за движением каркаса, можно следить за движением физического тела. Когда частица рассматривается как геометрический объект, ее движение в пространстве-времени описывается движением ее каркаса $\mathcal{P}_n$. При таком подходе (приближение твердого тела) форма оболочки не имеет значения.

Замечание: Произвольное подмножество Ω' точечного множества Ω не является, вообще говоря, геометрическим объектом. Предполагается, что физические тела могут иметь только форму геометрических объектов, потому что только в этом случае можно отождествить одинаковые физические тела (геометрические объекты) в различных геометриях пространства-времени.

Существование одного и того же геометрического объекта в различных областях пространства-времени поднимает вопрос об эквивалентности геометрических объектов в различных областях пространства-времени, имеющих разную геометрию. Такой вопрос не возникал прежде, потому что не рассматривалась такая ситуация, когда физическое тело перемещается из одной области в другую область пространства-времени, имеющую другую геометрию. Вообще, математический формализм традиционной геометрии пространства-времени (дифференциальной геометрии) не применим для одновременного рассмотрения нескольких различных геометрий разных областей пространства-времени.

Мы можем воспринимать геометрию пространства-времени только через движение физических тел или через построение геометрических объектов, соответствующих этим физическим телам. Как следует из *определения 1* геометрического объекта, функция $G_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ как функция ее аргументов u_k, $k = 1, 2, ...n\left(n+1\right)/2$ (мировые функции различных точек) одна и та же для всех физических геометрий. Это означает, что геометрический объект $\mathcal{O}_1$ в геометрии $\mathcal{G}_1 = \{\sigma_1, \Omega_1\}$ получается из того же самого геометрического объекта $\mathcal{O}_2$ в геометрии $\mathcal{G}_2 = \{\sigma_2, \Omega_2\}$ с помощью замены $\sigma_2 \to \sigma_1$ в определении этого геометрического объекта.

Определение 2: Геометрический объект $g_{P'_n,\sigma'}$ ($\mathcal{P}'_n = \{P'_0, P'_1, ..P'_n\}$) в геометрии $\mathcal{G}' = \{\sigma', \Omega'\}$ и геометрический объект $g_{P_n,\sigma}$ ($\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ..P_n\}$) в геометрии $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ являются одинаковыми геометрическими объектами, если

$$\sigma'\left(P'_i, P'_k\right) = \sigma\left(P_i, P_k\right), \qquad i, k = 0, 1, ..n \tag{9.6}$$

и функции $G'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}$ для $g_{P'_n,\sigma'}$ и $G_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ для $g_{P_n,\sigma}$ в формуле (9.2) являются теми же функциями аргументов $u_1, u_2, ...u_s$

$$G'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}\left(u_1, u_2, ...u_s\right) = G_{\mathcal{P}_n,\sigma}\left(u_1, u_2, ...u_s\right) \tag{9.7}$$

В этом случае

$$u_l \equiv \sigma\left(P_i, P_k\right) = u'_l \equiv \sigma'\left(P'_i, P'_k\right), \quad i, k = 0, 1, ...n, \quad l = 1, 2, ..n\left(n+1\right)/2 \tag{9.8}$$

Функции $F'_{\mathcal{P}'_n,\sigma'}$ для $g_{P'_n,\sigma'}$ и $F_{\mathcal{P}_n,\sigma}$ для $g_{P_n,\sigma}$ в формуле (9.2) имеют те же самые корни, если выполняются соотношения (9.7). В результате возникает одно-однозначная связь между геометрическими объектами $g_{P'_n,\sigma'}$ и $g_{P_n,\sigma}$.

Поскольку физическая геометрия определяется построением ее геометрических объектов, то физическая геометрия $\mathcal{G} = \{\sigma, \Omega\}$ может быть получена из некоторой известной стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\rm st} = \{\sigma_{\rm st}, \Omega\}$ с помощью деформации стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\rm st}$. Деформация стандартной геометрии $\mathcal{G}_{\rm st}$ осуществляется заменой $\sigma_{\rm st} \to \sigma$ во всех определениях геометрических объектов стандартной геометрии. Собственно евклидова геометрия $\mathcal{G}_{\rm E}$ является аксиоматизируемой геометрией. Она построена как логическая конструкция с помощью метода Евклида. Одновременно собственно евклидова геометрия является физической геометрией. Она может быть использована как стандартная геометрия $\mathcal{G}_{\rm st}$. Построение физической геометрии в результате деформации собственно евклидовой геометрии будем называть принципом деформации [44, 45]. Большинство физических геометрий являются неаксиоматизируемыми геометриями. Они могут быть построены только с помощью принципа деформации.

10 Общегеометрические соотношения

Описывая физическую геометрию в терминах мировой функции, следует различать между общегеометрическими соотношениями и специальными геометрическими соотношениями. Общегеометрические соотношения – это определения собственно евклидовой геометрии, которые записываются в терминах и только в терминах мировой функции. Общегеометрические соотношения соотношения верны для любой физической геометрии.

Первое общегеометрическое определение – это определение скалярного произведения двух векторов (8.11). Определение эквивалентности двух векторов (8.13) есть тоже общегеометрическое соотношение.

Линейная зависимость n векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2, ...\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ определяется соотношением

$$F_n(\mathcal{P}_n) = 0, \quad F_n(\mathcal{P}_n) \equiv \det ||(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_k)||, \qquad i,k = 1,2,...n \tag{10.1}$$

где $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ...P_n\}$ и $F_n(\mathcal{P}_n)$ есть определитель Грама. Обращение в нуль определителя Грама $F_n(\mathcal{P}_n)$ является необходимым и достаточным условием линейной зависимости n векторов. Условие линейной зависимости обычно рассматривается как свойство линейного векторного пространства, потому что оно определяется через операции в $\mathcal{L}_n$. Кажется, что довольно бессмысленно использовать его, если линейное векторное пространство не введено. Тем не менее, соотношение (10.1) записанное как общегеометрическое соотношение, описывает некоторые общегеометрические свойства векторов. Оно преобразуется в свойство линейной зависимости в собственно евклидовой геометрии. В частности, метрическая размерность собственно евклидовой геометрии определяется в терминах мировой функции с помощью соотношений типа (10.1) как максимальное число линейно независимых векторов, которое возможно в евклидовом пространстве. Это обстоятельство кажется несколько неожиданным, потому что обычно при изложении евклидовой геометрии размерность ее постулируется в самом начале изложения.

Как мы видели, определение геометрических объектов в виде общегеометрических соотношений (т.е. определение геометрических объектов в терминах мировой функции) необходимо для распознавания одного и того же физического тела (и соответствующих геометрических объектов) в разных геометриях пространства-времени.

Общегеометрические соотношения параметризуются видом мировой функции σ. При изменении вида мировой функции σ, общегеометрические соотношения получаются для нового значения параметра σ (для нового вида мировой функции).

11 Специфические свойства n-мерного евклидова пространства

Наряду с общегеометрическими свойствами, описывающими линейное векторное пространство, имеются специальные геометрические соотношения, описывающие свойства мировой функции. Например, имеются соотношения, которые являются необходимыми и достаточными условиями того, что мировая функция $\sigma = \sigma_{\mathrm{E}}$ является мировой функцией n-мерного евклидова пространсва. Они имеют вид [46]:

I. Определение размерности:

$$\exists \mathcal{P}^n \equiv \{P_0, P_1, ...P_n\} \subset \Omega, \quad F_n(\mathcal{P}^n) \neq 0, \quad F_k\left(\Omega^{k+1}\right) = 0, \qquad k > n \tag{11.1}$$

где $F_n(\mathcal{P}^n)$ есть определитель Грама (10.1) n-ого порядка. Векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i, \ i = 1, 2, ...n$ являются базисными векторами прямолинейной системы координат K_n с началом в точке P_0. Метрические тензоры $g_{ik}(\mathcal{P}^n)$, $g^{ik}(\mathcal{P}^n), \ i, k = 1, 2, ...n$ в K_n определяются соотношениями

$$\sum_{k=1}^{k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) g_{lk}(\mathcal{P}^n) = \delta_l^i, \quad g_{il}(\mathcal{P}^n) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}_l), \quad i, l = 1, 2, ...n \tag{11.2}$$

$$F_n(\mathcal{P}^n) = \det ||g_{ik}(\mathcal{P}^n)|| \neq 0, \qquad i, k = 1, 2, ...n \tag{11.3}$$

II. Линейная структура евклидова пространства:

$$\sigma(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{i,k=n} g^{ik}(\mathcal{P}^n) (x_i(P) - x_i(Q)) (x_k(P) - x_k(Q)), \quad \forall P, Q \in \Omega \tag{11.4}$$

где координаты $x_i(P), x_i(Q), i = 1, 2, ...n$ точек P и Q являются ковариантными координатами соответственно векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}$ в системе координат K. Ковариантные координаты определяются соотношением

$$x_i(P) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}), \qquad i = 1, 2, ...n \tag{11.5}$$

III: Матрица метрического тензора $g_{lk}(\mathcal{P}^n)$ имеет только положительные собственные значения g_k

$$g_k > 0, \qquad k = 1, 2, ..., n \tag{11.6}$$

IV. Условие непрерывности: система уравнений

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_i.\mathbf{P}_0\mathbf{P}) = y_i \in \mathbb{R}, \qquad i = 1, 2, ...n \tag{11.7}$$

рассматриваемая как уравнения для определения точки P как функции координат $y = \{y_i\}$, $i = 1, 2, ...n$ всегда имеет одно и только одно решение.

Условия I – IV содержат ссылку на размерность n евклидова пространства, которая определяется соотношениями (11.1). Все соотношения I – IV записаны в терминах мировой функции. Они являются ограничениями на вид мировой функции собственно евклидовой геометрии. Ограничения (11.1), определяющие размерность через вид мировой функции, выглядят довольно неожиданно. Они содержат массу ограничений, налагаемых на мировую функцию собственно евклидовой геометрии, и они являются необходимыми. При традиционном подходе к геометрии используется очень простое предположение: "Пусть размерность евклидова пространства равна n." Традиционно используется этот очень короткий постулат вместо многочисленных ограничений (11.1), используемых в σ-представлении геометрии (описание в терминах мировой функции).

В векторном представлении собственно евклидовой геометрии, применение которого основывается на использовании линейного векторного пространства, размерность рассматривается как изначальное свойство евклидовой геометрии. Не рассматривается ситуация, когда размерность геометрии различна в разных точках пространства Ω, или размерность является неопределенной величиной. При векторном представлении евклидовой геометрии не делается различия между общегеометрическими соотношениями и специальными соотношениями геометрии.

Вместо ограничений (11.1) – (11.7) можно использовать явный вид мировой функции

$$\sigma_{\mathrm{E}}(x, x') = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(x^k - x'^k\right)^2 \tag{11.8}$$

где $x^k, x'^k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ...n$ суть декартовы координаты точек P и P' соответственно. Соотношение (11.8) удовлетворяет всем ограничениям (11.1) – (11.7). Оно использует понятия размерности и координат как изначальные понятия геометрии. Используя мировую функцию в такой явной форме, нельзя вообразить обобщенную геометрию без таких понятий как размерность и система координат, хотя эти понятия являются только средствами описания геометрии.

Вообще, после логической перезагрузки к σ-представлению собственно евклидова геометрия выглядит достаточно неожиданно. Некоторые понятия выгладят простыми в векторном представлении. Те же самые понятия выглядят сложными в σ-предстаслении и наоборот. В результате собственно евклидова геометрия в σ-представлении воспринимается с трудом.

В векторном представлении имеется несколько фундаментальных понятий и величин: размерность, система координат, линейная зависимость, тогда как в σ-представлении имеется только одна фундаментальная величина: мировая функция. Размерность, система координат и линейная зависимость являются производными величинами и понятиями. Согласование между этими величинами достигается автоматически в любой физической геометрии, потому что все они определяются как некие атрибуты мировой функции.

12 Каркасная концепция динамики частиц

Элементарная частица является физическим телом. В дискретной геометрии пространства-времени физическое тело описывается его каркасом $\mathcal{P}_n = \{P_0, P_1, ..P_n\}$. Такое описание положения физического тела может быть использовано в любой геометрии пространства-времени. Каркас является аналогом системы отчета, жестко прикрепленной к частице (физическому телу). Следя за движением каркаса, можно следить за движением физического тела. Направление перемещения каркаса описывается ведущим вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$. Движение каркаса описывается мировой цепью $\mathcal{C}$, связанной с каркасом.

$$\mathcal{C} = \bigcup_{s=-\infty}^{s=+\infty} \mathcal{P}_n^{(s)} \tag{12.1}$$

Каркасы $\mathcal{P}_n^{(s)}$ мировой цепи являются связанными в том смысле, что точка P_1 каркаса является точкой P_0 смежного каркаса. Это означает

$$P_1^{(s)} = P_0^{(s+1)}, \qquad s = ...0, 1, ... \tag{12.2}$$

Вектор $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)} = \mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_0^{(s+1)}$ является ведущим вектором, который определяет направление мировой цепи. Случай (7.2), когда каркас $\mathcal{P}_1 = \{P_s, P_{s+1}\}$ точечной частицы описывается двумя точками, является специальным случаем соотношения (12.1).

Если движение частицы является свободным, то смежные каркасы эквивалентны.

$$\mathcal{P}_n^{(s)} \mathrm{eqv} \mathcal{P}_n^{(s+1)}: \qquad \mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)} \mathrm{eqv} \mathbf{P}_i^{(s+1)}\mathbf{P}_k^{(s+1)}, \qquad i, k = 0, 1, ...n, \qquad s = ..0, 1, .. \tag{12.3}$$

Если частица описывается каркасом $\mathcal{P}_n^{(s)}$, то мировая цепь (12.1) имеет $n(n+1)/2$ инвариантных величин

$$\mu_{ik} = \left|\mathbf{P}_i^{(s)}\mathbf{P}_k^{(s)}\right|^2 = 2\sigma\left(P_i^{(s)}, P_k^{s}\right), \qquad i, k = 0, 1, ...n, \qquad s = ...0, 1, ... \tag{12.4}$$

которые постоянны вдоль всей мировой цепи.

Уравнения (12.3) образуют систему из $n\,(n+1)$ уравнений в конечных разностях для описания эволюции nD координат n точек каркаса $\{P_1, ..P_n\}$, где

D есть размерность пространства-времени. Число динамических переменных, которые ответственны за определение мировой цепи, вообще говоря отличается от числа динамических уравнений. Это главное отличие каркасной концепции динамики частиц от традиционной концепции динамики частиц, где число динамических переменных совпадает с числом динамических уравнений.

В случае точечной частицы, когда $n = 1$, $D = 4$, число уравнений $n_\mathrm{e} = 2$, тогда как число переменных $n_\mathrm{v} = 4$. Число уравнений меньше, чем число динамических переменных. В случае дискретной геометрии пространства-времени (1.4) положение смежного каркаса не определяется однозначно. В результате мировая цепь вихляет. В нерелятивистском случае статистическое описание стохастических мировых цепей приводит к уравнению Шредингера [10], если элементарная длина λ_0 имеет вид $\lambda_0^2 = \hbar/bc$, где $\hbar$ есть квантовая постоянная, c есть скорость света и b есть некоторая универсвльная постоянная, связывающая массу частицы m с длиной (геометрической массой) μ звена мировой цепи.

$$m = b\mu$$

Динамические уравнения (12.3) являются уравнениями в конечных разностях. При больших масштабах, когда можно перейти к пределу $\lambda_0 = 0$, динамические уравнения (12.3) превращаются в дифференциальные уравнения. В случае точечной частицы ($n = 1$) и пятимерной геометрии Калуцы-Клейна эти уравнения описывают движение заряженной частицы в заданном электромагнитном поле. На этом примере можно видеть, геометрия пространства-времени "поглощает" электромагнитное поле. Это означает, что можно рассматривать только свободное движение частицы, имея в виду, что геометрия пространства-времени может "поглотить" все силовые поля.

Динамические уравнения (12.3) реализуют каркасную концепцию динамики частиц в микромире. Каркасная концепция динамики отличается от традиционной концепции динамики частиц в том отношении, что число динамических уравнений может отличаться от числа динамических переменных, эволюцию которых требуется определить. В традиционной концепции динамики частиц число динамических уравнений (первого порядка по времени) всегда совпадает с числом динамических переменных, эволюция которых должна быть определена. В результате движение частицы (или усредненной частицы) оказывается детерминированным. В случае квантовых частиц, движение которых является стохастическим (недетерминированным), динамические уравнения пишутся для статистического ансамбля недетерминированных частиц.

В традиционной концепции динамики можно получить динамические уравнения для среднестатистических частиц (т.е. для статистического ансамбля, нормированного на одну частицу), но нет динамических уравнений для отдельной стохастической частицы. В каркасной концепции динамики частиц имеются динамические уравнения для отдельной частицы. Эти уравнения неоднозначны (многовариантны), но они существуют. В традиционной концепции динамики частиц можно получить динамические уравнения для среднестатистической частицы, которые являются разновидностью гидродинамических уравнений (уравнений для сплошной среды). Но нельзя получить динамических уравнений для отдельной недетерминированной частицы [7].

Каркасная концепция динамики частиц реализует более детальное описание элементарной частицы. Можно надеяться получить некоторую информацию о структуре элементарных частиц.

Сейчас имеется только два примера применения каркасной концепции. Рассматривая компактификацию в 5-мерной дискретной геометрии пространства-времени Калуцы-Клейна и налагая условие однозначности мировой функции, получаем, что электрический заряд стабильной элементарной частицы ограничен элементарным электрическим зарядом [47]. Этот результат известен из экспериментов, но его не могли объяснить теоретически, потому что в непрерывной геометрии никто не рассматривает мировую функцию как фундаментальную величину и не требует ее однозначности.

Другой пример касается структуры дираковской частицы (фермиона). Рассмотрение в рамках каркасной концепции [48] показывает, что что мировая цепь фермиона (пространственноподобная или времениподобная) является винтовой линией с времениподобной осью. Усредненная мировая цепь свободного фермиона является времениподобной прямой линией. Винтовое движение каркаса порождает угловой момент (спин) и магнитный момент. Такой результат выглядит достаточно разумным. В традиционной концепции динамики частиц спин и магнитный момент фермиона постулируются без ссылки на его структуру. Таким образом, детерминированная модель дираковской частицы дает более детальную информацию об устройстве дираковской частицы. В классической модели спин и магнитный момент являются аксиоматическими, содержащими квантовую постоянную. Классическая модель не дает информации об устройстве спина и магнитного момента.

Чтобы в каркасной концепции получить винтообразную мировую цепь, рассматривается геометрия пространства-времени $\mathcal{G}_{\rm g}$, описываемая квази-дискретной мировой функцией

$$\sigma_{\rm g}=\sigma_{\rm M}+d\left(\sigma_{\rm M}\right),\qquad d\left(\sigma_{\rm M}\right)=\lambda_0^2 f\left(\frac{\sigma_{\rm M}}{\sigma_0}\right),\qquad f\left(x\right)=\begin{cases}1 & \text{если}\quad x\geq 1\\ x^3 & \text{если}\quad -1<x<1\\ -1 & \text{если}\quad x\leq -1\end{cases}\tag{12.5}$$

где $d\left(\sigma_{\rm M}\right)$ есть дисторсия, описывающая отклонение мировой функции $\sigma_{\rm g}$ от мировой функции $\sigma_{\rm M}$ геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\rm M}$. Величина λ_0 есть элементарная длина и σ_0 есть некоторая постоянная. Геометрия $\mathcal{G}_{\rm g}$ не претендует на то, чтобы быть реальной геометрией пространства-времени. Геометрия $\mathcal{G}_{\rm g}$ есть гранулированная геометрия, т.е. $\mathcal{G}_{\rm g}$ есть геометрия пространства-времени, которая дискретна только частично. Она рассматривается как возможная геометрия пространства-времени, где мировая цепь частицы может быть винтовой линией. Каркас частицы состоит из трех точек $\mathcal{P}_2=\{P_0,P_1,P_2\}$. Ведущий вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ может быть времениподобным или пространственноподобным. Вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ является времениподобным. Он направлен вдоль оси винтовой линии. Векторы

$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2$ удовлетворяют ограничениям

$$\left||\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2\right| < \sigma_0, \quad |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|^2 < \sigma_0 \tag{12.6}$$

При этих ограничениях мировая цепь вихляет, но амплитуда вихляния может быть ограничена, даже если вектор $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ является пространственноподобным. Детали этого исследования можно найти в [48].

13 Тахионы

Тахионы – это частицы с пространственноподобной мировой цепью. Они не обнаруживаются экспериментально, и они не предусмотрены существующей стандартной моделью элементарных частиц. Невозможность существования тахионов обусловлена использованием операций линейного векторного пространства в случае, когда они не адекватны. Операции линейного векторного пространства применяются к пространственноподобным векторам пространственно-временной геометрии Минковского. Это – ошибка, потому что отношение эквивалентности интранзитивно и многовариантно для пространственноподобных векторов в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Например, все векторы $\{r, r\cos\phi, r\sin\phi, z\}$, где r и ϕ произвольные числа эквивалентны вектору $\{0,0,0,z\}$, но они не эквивалентны между собой. По этой причине мировая цепь тахиона вихляет с бесконечной амплитудой. Такой тахион не может быть обнаружен из-за этого вихляния. Невозможность обнаружения отдельного тахиона не означает, что тахионы не существуют. Отдельный тахион не может быть обнаружен, но тахионный газ может быть обнаружен по его гравитационному полю. Свойства тахионного газа таковы, что тахионный газ является наилучшим кандидатом для темной материи [49, 50].

В соответствии с (7.2) мировая цепь двухточечного каркаса $\mathcal{P}_1 = \{P_0, P_1\}$ имеет вид

$$\mathcal{C} = \bigcup_s \mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}, \quad |\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}| = \mu = \mathrm{const}, \quad s = ...0,1,2,... \tag{13.1}$$

Для свободной частицы смежные векторы $\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}$ и $\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$ являются эквивалентными ($\mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s+1}\mathrm{eqv}\mathbf{P}_{s+1}\mathbf{P}_{s+2}$). Условия эквивалентности записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma(P_s, P_{s+2}) &= 4\sigma(P_s, P_{s+1}), \quad \sigma(P_s, P_{s+1}) = \sigma(P_{s+1}, P_{s+2}) \\ s &= 0, \pm1, \pm2, ... \end{aligned} \tag{13.2}$$

Если существует предел $\mu \to 0$, мировая цепь (13.1) превращается в гладкую мировую линию. Имея в виду, что мировая функция $\sigma(P_s, P_{s+1}) = \frac{1}{2}\rho^2(P_s, P_{s+1})$, где ρ есть расстояние между точками P_s и P_{s+1}, получаем, что в собственно евклидовой геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{E}}$ соотношение (13.2) описывает правило построения прямой линии с помощью только циркуля.

В случае тахиона $\sigma\left(P_s, P_{s+1}\right) < 0$ μ мнимо $\mu^2 = -\left|\mu^2\right|$. Мы рассмотрим три смежных точки P_0, P_1, P_2 мировой цепи

$$P_0 = \{x_0, \mathbf{x}\}, \quad P_1 = \{x_0 + p_0, \mathbf{x} + \mathbf{p}\}, \quad P_2 = \{x_0 + 2p_0 + \alpha_0, \mathbf{x}+2\mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha}\} \tag{13.3}$$

4-вектор $\alpha = \{\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}\}$ является дискретным аналогом вектора ускорения. Мы запишем уравнения (13.2) для точек (13.3). Величины $x = \{x_0, \mathbf{x}\}$ и $\{x_0 + p_0, \mathbf{x} + \mathbf{p}\}$ предполагаются заданными, а составляющие 4-вектора $\alpha = \{\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}\}$ должны быть определены из двух уравнений (13.2) (ускорение определяется из динамических уравнений).

Рассмотрим геометрию пространства-времени с мировой функцией

$$\sigma\left(x, x'\right) = \frac{1}{2}\left(\left(c^2 - 2V\left(\mathbf{y}\right)\right)\left(x_0 - x_0'\right)^2 - \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right)^2\right), \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}'}{2} \tag{13.4}$$

где $\{x^0, \mathbf{x}\} = \{x^0, x^1, x^2, x^1\}$ суть координаты в некоторой инерциальной системе координат, $V = V\left(x\right)$ есть гравитационный потенциал ($V \ll c^2$).

Получаем следующее неединственное решение [49, 50]

$$\alpha_{\|} = \frac{r\sqrt{c^2 - 2V}}{\sqrt{\left(v^2 - c^2 + 2V\right)}}, \quad v = \frac{p}{p_0} \tag{13.5}$$

$$\alpha_{\perp 1} = r\cos\phi, \quad \alpha_{\perp 2} = r\sin\phi \quad v = \frac{p}{p_0} = \frac{p\sqrt{\left(c^2 - 2V\right)}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 - \left|\mu\right|^2}} \tag{13.6}$$

$$\alpha_0 = \frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{p_0\left(c^2 - 2V\right)} = \frac{p}{p_0}\left(\frac{r}{\sqrt{\left(v^2 - c^2 + 2V\right)\left(c^2 - 2V\right)}}\right) \tag{13.7}$$

где r, ϕ суть произвольные вещественные числа $r \geq 0$. Длина $|\boldsymbol{\alpha}|$ многовариантного 3-вектора $\boldsymbol{\alpha}$ есть величина порядка r, а составляющие вектора $\boldsymbol{\alpha}$ определяются соотношениями

$$\boldsymbol{\alpha}_{\|} = \mathbf{p}\frac{\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\right)}{\mathbf{p}^2}, \quad \boldsymbol{\alpha}_{\perp} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_{\|}, \quad \alpha_{\|}^2 = \frac{\left(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\right)^2}{\mathbf{p}^2}, \quad \alpha_{\|} = \frac{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{p}, \quad p = |\mathbf{p}| \tag{13.8}$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}_{\|}$ есть составляющая 3-вектора $\boldsymbol{\alpha}$, параллельная 3-вектору $\mathbf{p}$, тогда как $\boldsymbol{\alpha}_{\perp}$ есть составляющая 3-вектора $\boldsymbol{\alpha}$, перпендикулярная 3-вектору $\mathbf{p}$. Поскольку величина r может быть бесконечной, то вихляние мировой цепи тахиона может иметь бесконечную амплитуду. Усредняя по r и ϕ, получим макроскопические параметры тахионного газа (средние составляющие скорости тахионного газа) [50].

$$\left\langle u_{\|}\right\rangle = \left\langle\frac{p\sqrt{c^2 - 2V}}{r}\right\rangle = 0, \quad \left\langle\mathbf{u}_{\perp}\right\rangle = 0 \tag{13.9}$$

$$\left\langle\mathbf{u}_{\perp}^2\right\rangle = \left\langle\left|\frac{\boldsymbol{\alpha}_{\perp}}{\alpha_0}\right|^2\right\rangle = \left\langle\frac{r^2}{r^2}\left(c^2 - 2V\right)\right\rangle = c^2 - 2V \tag{13.10}$$

$$\left\langle u_{\parallel}^2\right\rangle = \left\langle u_{\parallel}\right\rangle^2 = 0, \quad \left\langle \mathbf{u}^2\right\rangle = \left\langle u_{\parallel}^2\right\rangle + \left\langle \mathbf{u}_{\perp}^2\right\rangle = c^2 - 2V \tag{13.11}$$

Можно видеть из (13.9) - (13.11), что результаты для $\left\langle u_{\parallel}\right\rangle$, $\langle \mathbf{u}_{\perp}\rangle$, $\left\langle u_{\parallel}^2\right\rangle$, $\langle \mathbf{u}_{\perp}^2\rangle$ не зависят от геометрической массы μ тахиона.

Тензор энергии-импульса также не зависит от μ [50]

$$T^{00} = \rho, \quad T^{\alpha 0} = T^{0\alpha} = \rho \langle u^{\alpha}\rangle \tag{13.12}$$

$$T^{\alpha\beta} = \rho \langle u^{\alpha}\rangle \left\langle u^{\beta}\right\rangle + P^{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \tag{13.13}$$

$$P^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\rho\left(\delta^{\alpha\beta} - \frac{\langle u^{\alpha}\rangle \left\langle u^{\beta}\right\rangle}{\langle \mathbf{u}\rangle^2}\right)\left(c^2 - 2V - \langle \mathbf{u}\rangle^2\right) \tag{13.14}$$

Другими словами, макроскопические параметры тахионного газа такие же, как и для обычного газа с большим давлением. Можно работать с тахионным газом как с обычным газом, молекулы которого нельзя обнаружить. Можно обнаружить только гравитационное поле тахионного газа.

14 Мировая цепь тахиона с двухточечным каркасом

Теперь исследуем, может ли мировая цепь с пространственноподобным ведущим вектором образовать винтовую линию с времениподобной осью. Если это возможно, то мы попытаемся исследовать при каких мировых функциях возможна такая ситуация. Рассмотрим мировую функцию σ_{g}, имеющую вид

$$\sigma_{\mathrm{g}} = \sigma_{\mathrm{M}} + \frac{\lambda_0^2}{2} f\left(\frac{\sigma_{\mathrm{M}}}{\sigma_0}\right), \qquad f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} \operatorname{sgn}(x) & \text{если} & |x| > 1 \\ Cx + \varepsilon g(x) & \text{если} & |x| \leq 1 \end{array}\right., \tag{14.1}$$

$$\sigma_0 = \mathrm{const} > 0, \quad g(x) = -g(-x), \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1 \tag{14.2}$$

где C есть постоянная, которая определяется из соотношения

$$C + \varepsilon g(1) = 1$$

Такой выбор геометрии пространства-времени не претендует на реальность геометрии пространства-времени. Это только модель, которая проста для исследования. Функцию $f\left(\frac{\sigma_{\mathrm{M}}}{\sigma_0}\right)$ следует определять из условия, что мировая цепь с пространственноподобным ведущим вектором $\mathbf{P}_0^{(s)}\mathbf{P}_1^{(s)}$ образует винтовую линию с времениподобной осью. Форма цепи определяется ведущими векторами.

Чтобы оценить вид мировой функции σ_{g} как функции от σ_{M} при $\sigma_{\mathrm{M}} < \sigma_0$, полезно рассмотреть мировую цепь, состоящую только и пространственноподобных ведущих векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$,...Другие векторы каркаса будут рассмотрены позднее, когда понадобится уменьшить вихляние цепи. Цепь описывает свободное движение частицы, и ее звенья удовлетворяют уравнениям

(12.3). Мы предполагаем, что мировая цепь представляет собой винтовую линию с времениподобной осью в пространстве-времени. Точки цепи $...P_0, P_1, ...$ имеют координаты

$$P_k = \{kl_0, R\cos(k\varphi), R\sin(k\varphi), 0\}, \qquad k = ...0, 1, 2, ... \tag{14.3}$$

Все точки (14.3) лежат на винтовой линии с времениподобной осью. Величины R, l_0, φ являются параметрами цепи.

Исследуем возможна ли такая геометрия пространства-времени (14.1), что мировая цепь, состоящая из связанных векторов $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$,... образует винтовую линию с радиусом R. Параметры l_0, $l_1 = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$ предполагаются малыми в том смысле, что

$$|l_0|, |l_1| < \sqrt{2\sigma_0}, \quad l_1 = 2R\sin\frac{\varphi}{2} \tag{14.4}$$

Чтобы получить связь между параметрами l_0, l_1, φ, достаточно решить уравнения, связывающие смежные ведущие векторы $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$. Динамические уравнения имеют вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_{\mathrm{g}} = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{g}}^2 \tag{14.5}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{g}}^2 = |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|_{\mathrm{g}}^2 \tag{14.6}$$

Здесь индекс "g" означает, что величины подсчитаны в геометрии пространства-времени $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$, мировая функция которого σ_{g} выбрана в виде (14.1) где g есть некоторая функция $g(x) = -g(-x)$, $x \in (-1, 1)$ и $\varepsilon \ll 1$.

Мы должны проверить, что два смежных вектора $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ удовлетворяют соотношениям (14.5), (14.6), если

$$P_0 = \{0, 0, 0, 0\}, \quad P_1 = \{l_0, l_1, 0, 0\}, \quad P_2 = \{2l_0, l_1\cos\varphi, l_1\sin\varphi, 0\} \tag{14.7}$$

и $l_0^2 < l_1^2$. Если параметр $l_1 = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$, то точки (14.7) соответствуют трем точкам винтовой линии (14.3). Достаточно проверить, что точки (14.7) удовлетворяют уравнениям (14.5), (14.6), потому что в этом случае все другие пары смежных точек (14.3) будут удовлетворять уравнениям вида (14.5), (14.6).

Важно иметь в виду, что векторы

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = \{l_0, l_1, 0, 0\}, \quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \{l_0, l_1(\cos\varphi - 1), l_1\sin\varphi, 0\} \tag{14.8}$$

не являются единственным решением уравнений (14.5), (14.6). Имеется масса других решений, которые приводят к непредсказуемому вихлянию мировой цепи (14.3). Амплитуда этого вихляния бесконечна. Мировая цепь точечной частицы, описываемой двухточечным каркасом $\mathcal{P}_2 = \{P_0, P_1\}$ с пространственноподобным вектором $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, не наблюдаема, из-за невозможности проследить за такой мировой цепью. За цепью нельзя проследить, потому что пространственное расстояние между точками P_s и P_{s+1} может быть бесконечно большим в любой системе координат. Это означает, что утверждение теории относительности о невозможности существования тахионов сильно преувеличено. Тахионы могут существовать, но они не наблюдаемы.

Рассматривая уравнения (14.5), (14.6), мы запишем их в пространстве-времени Минковского, положив

$$\sigma_{\mathrm{g}}(P_0, P_1) = \sigma_{\mathrm{M}}(P_0, P_1) + d(P_0, P_1), \quad d(P_0, P_1) \equiv \frac{\lambda_0^2}{2} f\left(\frac{\sigma_{\mathrm{M}}(P_0, P_1)}{\sigma_0}\right) \tag{14.9}$$

Тогда уравнения (14.5), (14.6) принимают вид

$$(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1.\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)_{\mathrm{M}} + w(P_0, P_1, P_1, P_2) = |\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}}^2 + 2d(P_0, P_1) \tag{14.10}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}}^2 = |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|_{\mathrm{M}}^2 \tag{14.11}$$

где

$$w(P_0, P_1, P_3, P_4) = d(P_0, P_4) + d(P_1, P_3) - d(P_0, P_3) - d(P_1, P_4) \tag{14.12}$$

Динамические уравнения (14.10), (14.11) могут интерпретироваться как описание движения частицы в пространственно-временной геометрии Минковского под действием силовых полей w и d. Другими словами, мы переходим от описания в геометрии $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$ к описанию в геометрии Минковского $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$, вводя дополнительные силовые поля, порожденные геометрией $\mathcal{G}_{\mathrm{g}}$. Такой переход позволяет использовать традиционный математический формализм геометрии Минковского.

Далее мы будем использовать скалярное произведение только в пространстве-времени Минковского. Индекс "M" будет опускаться для краткости. Представим точки (14.7) в виде

$$P_0 = \{0, 0, 0, 0\}, \qquad P_1 = l, \qquad P_2 = l + q + \alpha \tag{14.13}$$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 = l, \quad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = q + \alpha, \quad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = l + q + \alpha \tag{14.14}$$

Здесь

$$l = \{l_0, l_1, 0, 0\}, \quad q = \{l_0, l_1 \cos\varphi, l_1 \sin\varphi, 0\} \tag{14.15}$$

$$\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{\alpha_0, \boldsymbol{\alpha}\} \tag{14.16}$$

Вектор α описывает вихляние точки P_2 вблизи положения точки $P_2 = l + q$ на винтовой линии.

Чтобы определить вид мировой функции, мы положим $\alpha = 0$ в (14.13), (14.14). Для $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|^2$, $|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|^2$, $|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|^2$ и w в (14.10) получаем динамические уравнения

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1|_{\mathrm{M}}^2 = |\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2|_{\mathrm{M}}^2 = 2\sigma_{\mathrm{M}}(P_0, P_1) = l_0^2 - l_1^2 \equiv l^2, \quad l_0^2 < l_1^2 \tag{14.17}$$

$$|\mathbf{P}_0\mathbf{P}_2|_{\mathrm{M}}^2 = 4l^2 + 4l_1^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad l^2 < 0, \quad l_0^2, l_1^2 < \sigma_0 \tag{14.18}$$

$$w(P_0, P_1, P_1, P_2) = \frac{\lambda_0^2}{2}\left(f\left(\frac{2l_1^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} + 2(l_0^2 - l_1^2)}{\sigma_0}\right) - 2f\left(\frac{l_0^2 - l_1^2}{2\sigma_0}\right)\right) \tag{14.19}$$

Полагая

$$l^2 = l_0^2 - l_1^2 = -2\nu\sigma_0, \qquad \nu > 0 \tag{14.20}$$

$$a = \frac{2l_1^2}{\sigma_0}\sin^2\frac{\varphi}{2}, \qquad \varkappa = \frac{\sigma_0}{\lambda_0^2} \tag{14.21}$$

можно записать динамическое уравнение (14.5) в виде

$$a\varkappa + f\,(a - 4\nu) = -4f\,(\nu) \tag{14.22}$$

Здесь функция f есть антисимметричная функция определенная соотношением (14.1). Динамическое уравнение (14.6) преобразуется в тождество.

После использования (14.1) уравнение (14.22) превращается в

$$a\,(\varkappa + 1) - \varepsilon g\,(1) - \varepsilon g\,(4\nu - a) + 4\varepsilon g\,(\nu) = 0 \tag{14.23}$$

$$a = \frac{\varepsilon\,(g\,(4\nu) - 4g\,(\nu))}{\varkappa + 1 - \varepsilon g\,(1) - \varepsilon g'\,(4\nu)} = \frac{\varepsilon\,(g\,(4\nu) - 4g\,(\nu))}{\varkappa + 1} + O\left(\varepsilon^2\right) \tag{14.24}$$

Из (14.24) следует, что a может быть малой величиной, если $\varepsilon \ll 1$. В соответствии с (14.21) величина a должна быть положительной. Это возможно, если

$$g\,(4\nu) > 4g\,(\nu)\,, \quad \nu > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{14.25}$$

В соответствии с (14.4) и (14.21) получаем

$$R = \frac{l_1}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{l_1^2}{\sqrt{2a\sigma_0}} = \frac{l_1}{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\frac{l_1}{\sqrt{2\sigma_0}}\sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{\lambda_0^2}}}{\sqrt{(g\,(4\nu) - 4g\,(\nu))}} \tag{14.26}$$

Это означает, что радиус R винтовой линии может быть макроскопическим, если ε достаточно мало.

Полученный результат

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = q, \quad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = l + q \tag{14.27}$$

соответствует положению точки P_2 на винтовой линии (14.3). Однако имеются другие решения уравнений (14.5), (14.6), где точка P_2 описывается соотношениями (14.13) и векторами (14.14)

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = q + \alpha, \quad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = l + q + \alpha \tag{14.28}$$

Здесь вектор α описывает вихляния точки P_2. Он удовлетворяет динамическим уравнениям

$$l^2 = (q + \alpha)^2 \tag{14.29}$$

$$(l.q + \alpha) + w\,(P_0, P_1, P_1, P_2) = l^2 + 2d\left(\frac{l^2}{2}\right) \tag{14.30}$$

который приводится к виду

$$\alpha^2 + 2\,(q.\alpha) = 0 \tag{14.31}$$

$$2l_1^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (l.\alpha) + \frac{\lambda_0^2}{2} f \left(\frac{2l^2 + 2l_1^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + (l.\alpha)}{\sigma_0} \right) - 2\lambda_0^2 f \left(\frac{l^2}{2\sigma_0} \right) = 0 \tag{14.32}$$

Предполагая, что $(l.\alpha) = l_0\alpha_0 - \mathbf{l}\boldsymbol{\alpha}$ есть малая величина, разложим (14.32) по $(l.\alpha)$. Поскольку нулевой член разложения совпадает с(14.22), первый член разложения соотношения (14.32) имеет вид

$$(l.\alpha) + \varepsilon \frac{\lambda_0^2}{2} g' \left(\frac{2l^2 + 2l_1^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\sigma_0} \right) \frac{(l.\alpha)}{\sigma_0} = 0 \tag{14.33}$$

или

$$(l.\alpha) = l_0\alpha_0 - l_1\alpha_1 = 0, \quad \alpha_0 = \frac{l_1\alpha_1}{l_0} \tag{14.34}$$

Подставляя α_0 из (14.34) в (14.31), получаем

$$2\,(l_1 - l_1\cos\varphi)\,\alpha_1 - 2l_1\sin\varphi\alpha_2 + \left(\frac{l_1\alpha_1}{l_0}\right)^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0 \tag{14.35}$$

Принимая во внимание, что φ мало и подставляя для простоты $\varphi = 0$, получаем для пространственных составляющих вектора α

$$\left(\left(\frac{l_1}{l_0} \right)^2 - 1 \right) \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0 \tag{14.36}$$

Поскольку $l_1^2 > l_0^2$, первый член в (14.36) положителен, то составляющие 3-вектора $\boldsymbol{\alpha}$ могут быть бесконечно большими. Таким образом винтовая мировая цепь (14.3) с двухточечным пространственноподобным каркасом $\mathcal{P}_1^{(s)} = \left\{P_0^{(s)}, P_1^{(s)}\right\}$ не стабильна по отношению к вихлянию.

15 Винтовая мировая цепь с трехточечным каркасом

Уменьшение вихляний мировой цепи, состоящей из пространственноподобных векторов, может быть достигнуто, если рассмотреть мировую цепь с более сложными звеньями, каркас которых состоит из трех точек $\{P_k, P_{k+1}, Q_{k+1}\}$, $k = ...1.2, ...$ Пусть $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_{k+1}$ будет пространственноподобным вектором, тогда как вектор $\mathbf{P}_k\mathbf{Q}_{k+1}$ будет времениподобным вектором в $\mathcal{G}_{\mathrm{M}}$. Чтобы исследовать эффект стабилизации, достаточно рассмотреть точки P_0, P_1, P_2, Q_1, Q_2, имеющие координаты

$$\begin{aligned} P_0 &= \{0\}, \qquad P_1 = \{l\}, \qquad P_2 = \{l + q + \alpha\}, \\ Q_1 &= \{s\}, \qquad Q_2 = \{s + q + \beta\}, \end{aligned} \tag{15.1}$$

Соответствующие векторы имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1 &= l, \qquad \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = q+\alpha, \qquad \mathbf{P}_0\mathbf{P}_2 = l+q+\alpha, &(15.2)\\
\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1 &= s, \quad \mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2 = s+q-l+\beta, \quad \mathbf{P}_0\mathbf{Q}_2 = s+q+\beta, &(15.3)\\
\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1 &= s-l, \qquad \mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2 = s-l+\gamma, \qquad \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = q+\beta, &(15.4)\\
\mathbf{Q}_1\mathbf{P}_2 &= l+q-s+\alpha, \quad \gamma=\beta-\alpha &(15.5)
\end{aligned}$$

Здесь l, q, s суть 4-векторы в пространстве-времени Минковского

$$l=\{l_0,l_1,0,0\} \qquad q=\{l_0,l_1\cos\varphi,l_1\sin\varphi,0\}, \qquad s=\{s_0,s_1,s_2,0\} \tag{15.6}$$

Векторы α, β, $\gamma=\beta-\alpha$ являются векторами, описывающими вихляния, связанные с точками P_2 и Q_2. Нужно написать шесть динамических уравнений, соответствующих равенствам $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2$, и $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2$. Два уравнения, соответствующие $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, были уже написаны и исследованы (уравнения (14.5), (14.6))

В случае $\mathbf{P}_0\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_2$ получаем

$$s^2=(s+q-l+\beta)^2 \tag{15.7}$$

$$s^2+(\beta.s)+w\left(P_0,Q_1,P_1,Q_2\right)=s^2+2d\left(\frac{s^2}{2}\right) \tag{15.8}$$

где в соответствии с (14.12) и (15.2) - (15.5)

$$w\left(P_0,Q_1,P_1,Q_2\right)=d\left(P_0,Q_2\right)+d\left(Q_1,P_1\right)-d\left(P_0,P_1\right)-d\left(Q_1,Q_2\right)$$

$$=\frac{\lambda_0^2}{2}\left(f\left(\frac{(s+q+\beta)^2}{2\sigma_0}\right)+f\left(\frac{(s-l)^2}{2\sigma_0}\right)-f\left(\frac{l^2}{2\sigma_0}\right)-f\left(\frac{(q+\beta)^2}{2\sigma_0}\right)\right) \tag{15.9}$$

Определим s таким образом, чтобы

$$2\left(s.q-l\right)=-\left(q-l\right)^2=4l_1^2\sin^2\frac{\varphi}{2} \tag{15.10}$$

Тогда

$$s=\{s_0,l_1\left(1-\cos\varphi\right),l_1\sin\varphi,0\} \tag{15.11}$$

Уравнения (15.7), (15.8) преобразуются к виду

$$2\left(\beta.s+q-l\right)+\beta^2=0 \tag{15.12}$$

$$\begin{aligned}
&(s.\beta)+2l_1^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{\lambda_0^2}{2}\left(\begin{array}{c} f\left(\frac{(s+q+\beta)^2}{2\sigma_0}\right)+f\left(\frac{(s-l)^2}{2\sigma_0}\right) \\ -f\left(\frac{l^2}{2\sigma_0}\right)-f\left(\frac{(q+\beta)^2}{2\sigma_0}\right)+2f\left(\frac{s^2}{2\sigma_0}\right)\end{array}\right)\\
&= \; -2d\left(\frac{s^2}{2}\right) \qquad (15.13)
\end{aligned}$$

Необходимое условие того, что уравнение (15.13) имеет решение $\beta = 0$, имеет вид

$$2l_1^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{\lambda_0^2}{2} \left(\begin{array}{c} f\left(\frac{(s+q)^2}{2\sigma_0}\right) + f\left(\frac{(s-l)^2}{2\sigma_0}\right) \\ -2f\left(\frac{l^2}{2\sigma_0}\right) - 4f\left(\frac{s^2}{2\sigma_0}\right) \end{array} \right) = 0 \qquad (15.14)$$

Подставляя f из (14.1) в (15.14), получаем

$$\frac{4l_1^2}{\lambda_0^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \varepsilon g \left(\frac{(s_0 + l_0)^2 - l_1^2 \left(1 + 4\sin^2 \varphi\right)}{2\sigma_0} \right) + \varepsilon g \left(\frac{(s_0 - l_0)^2 - l_1^2}{2\sigma_0} \right)$$

$$-2\varepsilon g \left(\frac{l_0^2 - l_1^2}{2\sigma_0} \right) - 4\varepsilon g \left(\frac{s_0^2}{2\sigma_0} \right) = -\frac{(1 - \varepsilon g(1))}{\sigma_0} s_0^2 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right) \qquad (15.15)$$

Это уравнение вместе с (14.22) определяют параметры винтовой мировой цепи: l_0, l_1, s_0, R, где R определяется уравнением (14.21), (14.26) $R = l_1 \left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{-1}$). Эти параметры зависят от вида функции g.

В случае $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathrm{eqv}\mathbf{P}_2\mathbf{Q}_2$ получаем

$$(s - l)^2 = (s - l + \gamma)^2 \qquad (15.16)$$

$$(s - l.s - l + \gamma) + w\left(P_1, Q_1, P_2, Q_2\right) = (s - l)^2 + 2d\left(\frac{(s - l)^2}{2}\right) \qquad (15.17)$$

где согласно (14.12) и (15.2) - (15.5)

$$\begin{aligned} & w\left(P_1, Q_1, P_2, Q_2\right) \\ = \; & d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_1, Q_2\right)\right) + d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(Q_1, P_2\right)\right) - d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(P_1, P_2\right)\right) - d\left(\sigma_{\mathrm{M}}\left(Q_1, Q_2\right)\right) \end{aligned}$$

$$= f\left(\frac{(s + q - l + \beta)^2}{2\sigma_0}\right) + f\left(\frac{(l + q - s + \alpha)^2}{2\sigma_0}\right) - f\left(\frac{l^2}{2\sigma_0}\right) - f\left(\frac{(q + \beta)^2}{2\sigma_0}\right)$$

Уравнения (15.16) и (15.17) принимают вид

$$\gamma^2 + 2\left((s - l).\gamma\right) = 0, \quad \gamma = \beta - \alpha \qquad (15.18)$$

$$((s - l).\gamma) + \frac{\lambda_0^2}{2} f\left(\frac{(s + q - l + \beta)^2}{2\sigma_0}\right) + \frac{\lambda_0^2}{2} f\left(\frac{(l + q - s + \alpha)^2}{2\sigma_0}\right)$$

$$-\frac{\lambda_0^2}{2} f\left(\frac{l^2}{2\sigma_0}\right) - \frac{\lambda_0^2}{2} f\left(\frac{(q + \beta)^2}{2\sigma_0}\right) - \lambda_0^2 f\left(\frac{(s - l)^2}{2\sigma_0}\right) = 0 \qquad (15.19)$$

В случае $\alpha = \beta = \gamma = 0$ уравнение (15.19) превращается в уравнение

$$\varepsilon\left(g\left(\frac{(s + q - l)^2}{2\sigma_0}\right) + g\left(\frac{(l + q - s)^2}{2\sigma_0}\right) - 2g\left(\frac{l^2}{2\sigma_0}\right) - 2g\left(\frac{(s - l)^2}{2\sigma_0}\right)\right) = 0$$

или

$$\begin{aligned}
&\varepsilon g\left(\frac{s_0^2-4l_1^2\sin^2\varphi}{2\sigma_0}\right)+\varepsilon g\left(\frac{(2l_0-s_0)^2-4l_1^2\cos^2\varphi}{2\sigma_0}\right)\\
=\ &2\varepsilon g\left(\frac{l_0^2-l_1^2}{2\sigma_0}\right)+2g\left(\frac{(s-l)^2}{2\sigma_0}\right) \qquad (15.20a)
\end{aligned}$$

Предположим, что функция g имеет такой вид, что система из трех уравнений (14.22), (15.15), (15.20a), рассматриваемая как система уравнений для переменных l_0, l_1, s_0, R ($l_0^2, l_1^2, s_0^2 < \sigma_0$) имеет решение. Таким образом, предполагается, что параметры l_0, l_1, s_0, R не произвольны. Они удовлетворяют уравнениям (14.22), (15.15), (15.20a). Возможны другие решения с $\alpha, \beta \neq 0$

Вернемся к уравнениям (15.18), (15.19)

$$\gamma^2+2\left((s-l).\gamma\right)=0, \quad \gamma=\beta-\alpha \qquad (15.21)$$

Разлагая их по γ, и принимая во внимание (15.20a), получаем

$$\begin{aligned}
&((s-l).\gamma)+\varepsilon\frac{\lambda_0^2}{2}g'\left(\frac{s^2}{2\sigma_0}\right)\left(2(s+q-l.\beta)+\beta^2\right)\\
&+\varepsilon\frac{\lambda_0^2}{2}g'\left(\frac{(l+q-s)^2}{2\sigma_0}\right)\left(\alpha^2+2(l+q-s+\alpha)\right)\\
&-\varepsilon\frac{\lambda_0^2}{2}f\left(\frac{q^2}{2\sigma_0}\right)\left(\beta^2+2(q.\beta)\right)=0 \qquad (15.22)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание (15.12) и (14.31), получаем из (15.22)

$$\begin{aligned}
&((s-l).\gamma)+\varepsilon\lambda_0^2g'\left(\frac{(s_0-2l_0)^2-4l_1^2\cos^2\varphi}{2\sigma_0}\right)((l-s.\alpha))\\
&-\varepsilon\lambda_0^2g'\left(\frac{(l_0)^2-l_1^2}{2\sigma_0}\right)(l-s.\beta)=0 \qquad (15.23)
\end{aligned}$$

Или

$$((s-l).\gamma)=\mathcal{O}(\varepsilon) \qquad (15.24)$$

Предполагая, что β мало и разлагая (15.13) по β, получаем

$$(s.\beta)+2l_1^2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\varepsilon\frac{\lambda_0^2}{2}\left(\begin{array}{c} g'\left(\frac{(s+q)^2}{2\sigma_0}\right)(2(\beta.l)) \\ -g'\left(\frac{q^2}{2\sigma_0}\right)\left(\beta^2+2(\beta.l-s)\right)\end{array}\right)=0$$

Поскольку $\sin^2\frac{\varphi}{2}=\mathcal{O}(\varepsilon)$, получаем

$$(s.\beta)=\mathcal{O}(\varepsilon) \qquad (15.25)$$

Из (15.25) и (15.11) следует

$$\beta_0 = \frac{\boldsymbol{\beta}\mathbf{s}}{s_0} + \mathcal{O}(\varepsilon) = \frac{l_1(\beta_1(1-\cos\varphi) + \beta_2\sin\varphi)}{s_0} + \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \qquad (15.26)$$

Подставляя (15.26) в (15.12) и принимая во внимание, что

$$s + q - l = \{s_0, 0, 2l_1\sin\varphi, 0\} \qquad (15.27)$$

получаем

$$\left(\frac{\boldsymbol{\beta}\mathbf{s}}{s_0}\right)^2 - \boldsymbol{\beta}^2 - 4l_1\sin\varphi\beta_2 = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \boldsymbol{\beta}^2 = -4l_1\sin\varphi\beta_2 + \mathcal{O}(\varepsilon) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \quad (15.28)$$

$$\beta_1^2 + \left(1 - \frac{4l_1^2\sin^2\varphi}{s_0^2}\right)\beta_2^2 + 4\beta_2 l_1\sin\varphi + \beta_3^2 = \mathcal{O}(\varepsilon) \qquad (15.29)$$

Тогда

$$\beta_1, \beta_3 = \mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right), \quad \beta_2 = \mathcal{O}(1), \quad \text{если } s_0^2 > 4l_1^2\sin^2\varphi \qquad (15.30)$$

Рассмотрим уравнения для γ (15.24), (15.21). Из (15.24) и (15.11) следует

$$\gamma_0 = \frac{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{s}-\mathbf{l})}{s_0 - l_0} = \frac{-l_1\cos\varphi\gamma_1 + l_1\sin\varphi\gamma_2}{s_0 - l_0} = \frac{-l_1\gamma_1}{s_0 - l_0} + \mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \qquad (15.31)$$

Подставляя (15.31) в (15.21), получаем

$$\left(\frac{l_1}{s_0 - l_0}\right)^2 \gamma_1^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2 = \mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \qquad (15.32)$$

Из (15.32) следует, что

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/4}\right), \quad \text{если } \ l_1^2 < (s_0 - l_0)^2 \qquad (15.33)$$

Ограничение (14.36) на $\boldsymbol{\alpha}$ верно, но $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\beta}$, и $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\beta}$ ограничены условиями (15.30) и (15.33), тогда $\boldsymbol{\alpha}$ ограничено условием

$$\alpha_1, \alpha_3 = \mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right), \quad \alpha_2 = \mathcal{O}(1), \text{ если } \ l_1^2 < (s_0 - l_0)^2, \quad \varepsilon \ll 1 \qquad (15.34)$$

Таким образом, в случае трехточечного каркаса вихляние винтовой мировой цепи ограничено, при условии что составляющая s_0 времениподобного вектора $\mathbf{P}_s\mathbf{Q}_{s+1}$ достаточно велика. В соответствии с (14.26) радиус винтовой линии порядка $\varepsilon^{-1/2}$, тогда как амплитуда вихляния порядка 1. Это означает, что в случае, когда $\varepsilon \ll 1$ и $l_1^2 < (s_0 - l_0)^2$, вихляния мировой цепи мало нарушают форму винтовой линии.

Это свойство тахиона с трехточечным каркасом напоминает дискретные состояния атомных электронов. Дискретность состояний атомных электронов обусловлено электромагнитным излучением атома. Он излучает до тех пор, пока плотность заряда в электронной оболочке изменяется во времени. Как только плотность электрического заряда перестанет изменяться, атом перестанет излучать, и состояние электронов становится стабильным. В случае тахионной винтовой линии имеется вихляние мировой линии тахиона. При некоторых значениях параметров l, q, s вихляние мировой цепи уменьшается, и возникает квази-стабильная мировая цепь тахиона.

16 Заключение

На нашем пути к тахионной модели нейтрино мы следовали физическим принципам (а не произвольным гипотезам), исправляя ошибки и дефекты. Сначала нерелятивистское понятие состояния частицы было заменено релятивистским понятием. В результате нам удалось построить единый формализм для описания детерминированных и стохастических частиц. Оказалось, что нерелятивистская квантовая механика является релятивистской концепцией в том смысле, что стохастическая составляющая движения квантовой частицы является релятивистской. Следует использовать релятивистское описание нерелятивистской квантовой частицы. Эта стохастическая (и релятивистская) составляющая исчезает после усреднения. Средняя регулярная составляющая движения остается. Она является нерелятивистской. В результате нерелятивистская квантовая теория выглядит как нерелятивистская концепция, хотя, на самом деле, она может быть понята только с точки зрения релятивистского статистического описания.

Единый формализм динамики позволяет интерпретировать квантовую механику как динамику релятивистских стохастических частиц. Тогда идея объединения специальной теории относительности с принципами квантовой механики оказывается излишней. Вместо этого возникает вопрос о причине стохастичности движения элементарных частиц. Обычно стохастическое поведение квантовых частиц объясняют квантовыми принципами, т.е. аксиоматически. Теперь, когда квантовые принципы не используются, следовало найти причины стохастического поведения элементарных частиц. Оказалось, что причиной стохастического движения элементарных частиц является дискретность геометрии пространства-времени. Точнее, причиной стохастичности является многовариантность дискретной геометрии. Элементарная длина λ_0 геометрии пространства-времени связана с квантовой постоянной $\hbar$. В результате квантовая постоянная оказывается параметром дискретной геометрии пространства-времени. Этот факт объясняет всеобщий характер квантовой постоянной (он объясняется свойствами пространства-времени).

При использовании квантовой механики каждая квантовая частица маркируется классической частицей, которая представляет собой упрощенную (классическую) модель квантовой частицы. Например, с классической точки зрения свободный электрон имеет спин s и магнитный момент μ, зависящий от $\hbar$. Мировая линия свободного электрона является прямой линией. Классическая модель для возникновения s и μ отсутствует. Величины s и μ являются просто квантовыми числами, приписываемыми электрону. Величины s и μ получаются из понятия квантового электрона в результате перехода к пределу $\hbar \to 0$, но тем не менее s и μ зависят от $\hbar$.

Используя статистическое описание свободного электрона как стохастической частицы, можно маркировать свободный электрон детерминированной ("классической") частицей. Однако в этом случае мировая линия детерминированной частицы будет винтовой линией. Спин s и магнитный момент μ объясняются винтообразным характером мировой линии. В этом случае детерминированная модель позволяет определить более детальное устройство электрона. На этом примере мы видим, что статистический подход позволяет определить устройство элементарной частицы более детально. Это становится более ясно, если мы сравним ситуацию с устройством элементарных частиц с ситуацией при изучении устройства атома.

При исследовании свойств атомов имеются два различных направления: (1) структурный подход, (2) эмпирический подход. При структурном подходе исследуют устройство атома, его компоненты (ядро и электронная оболочка), динамику этих компонентов и их взаимодействие. При структурном подходе используется квантовая механика и атомная физика. При эмпирическом подходе исследуются свойства различных химических элементов, классификация химических элементов по их свойствам, реакции между химическими элементами. Эмпирический подход используется в химии.

Если известно устройство атомов, то в принципе можно рассчитать свойства химических элементов. Но эти расчеты очень сложны, и они не используются на практике. Предпочитают использовать периодическую систему химических элементов для того, чтобы классифицировать и исследовать химические реакции. Периодическая система элементов была получена эмпирически. Технически это более просто, хотя в принципе химические реакции можно рассчитывать, если известно устройство атомов. Однако нельзя исследовать устройство атомов, основываясь на эмпирических данных, полученных при эмпирическом подходе (периодическая система химических элементов). В этом смысле структурный подход более фундаментален, чем эмпирический.

В современных исследованиях элементарных частиц используется только эмпирический подход. Нельзя надеяться исследовать устройство элементарных частиц, используя только эмпирический подход, когда элементарной частице приписывают квантовые числа вместо исследования ее структуры. Основываясь на квантовой теории, эмпирический подход не может объяснить, откуда взялись эти квантовые числа. Формализм квантовой теории не позволяет получить такое объяснение. Разрыв между структурным и эмпирическим подходами больше в теории элементарных частиц, чем в атомной теории.

Заметим, что структурный подход к теории элементарных частиц использует новый формализм динамики частиц и новый формализм в геометрии пространства-времени. При структурном подходе используется новая операция: динамическая расквантизация.

17 Приложение. Преобразование уравнения для переменной $\boldsymbol{\xi}$

Умножая уравнение (6.13) на $2(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})/\hbar$ и имея в виду $\boldsymbol{\xi}^2 = 1$ и $\mathbf{z}^2 = 1$, получаем

$$
\begin{aligned}
&-\left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{z}\right) \times \boldsymbol{\xi} + \left(-(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{z}) + \frac{(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{z})\mathbf{z}\dot{\boldsymbol{\xi}}}{(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})} - \frac{(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \boldsymbol{\xi})\mathbf{z}}{(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})}\mathbf{z}\right) \times \boldsymbol{\xi} \\
&= -(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \boldsymbol{\xi} Q(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}
\tag{17.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{z}\right) \times \boldsymbol{\xi} - (\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{z}) \times \boldsymbol{\xi} + \left(\frac{(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{z})\left(\mathbf{z}\dot{\boldsymbol{\xi}}\right)}{(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})} - \mathbf{z}\frac{\left((\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{z})\,\dot{\boldsymbol{\xi}}\right)}{(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})}\right) \times \boldsymbol{\xi} \\
&= -(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \boldsymbol{\xi} Q(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}
\tag{17.2}
$$

Член в скобках может быть записан как двойное векторное произведение

$$
-2\left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{z}\right) \times \boldsymbol{\xi} + \frac{\dot{\boldsymbol{\xi}} \times ((\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{z})}{(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})} \times \boldsymbol{\xi} + (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \boldsymbol{\xi} Q(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{17.3}
$$

$$
-2\left(\dot{\boldsymbol{\xi}} \times \mathbf{z}\right) \times \boldsymbol{\xi} - \frac{\dot{\boldsymbol{\xi}} \times (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{z}(\boldsymbol{\xi}\mathbf{z}))}{(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})^2} \times \boldsymbol{\xi} + (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \boldsymbol{\xi} Q(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{17.4}
$$

Преобразуя двойное векторное произведение в первом и втором членах, получаем

$$
\dot{\boldsymbol{\xi}}\left(\boldsymbol{\xi}\left(2\mathbf{z} - \frac{(\mathbf{z}\boldsymbol{\xi})\,\mathbf{z} - \boldsymbol{\xi}}{(1+\mathbf{z}\ \boldsymbol{\xi})}\right)\right) + (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \boldsymbol{\xi} Q(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{17.5}
$$

$$
\dot{\boldsymbol{\xi}}\left((2\mathbf{z}\boldsymbol{\xi} - (\mathbf{z}\boldsymbol{\xi} - 1))\right) + (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) \times \boldsymbol{\xi} Q(1+\mathbf{z}\boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{17.6}
$$

$$
\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\left(\boldsymbol{\xi} \times (\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})\right) Q \tag{17.7}
$$

Список литературы

[1] A. Sommerfeld, Simplified deduction of the field and the forces of an electron moving in any given way". *Knkl. Acad. Wetensch* **7**, *345–367, (1904).*

[2] O.-M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande, E. C. G. Sudarshan, “Meta’ Relativity". *American Journal of Physics* **30***(10), 718, (1962).*

[3] Ya.P. Terletsky, Positive, negative and imaginary rest masses. *J. de Physique at le Radium* **23,** *iss 11, 910-920 (1963).*

[4] G. Feinberg, "Possibility of Faster-Than-Light Particles". *Physical Review* **159 (5)**: *1089–1105. (1967)*

[5] Yu. A.Rylov, Discrete space-time geometry and skeleton conception of particle dynamics. *Int. J. Theor. Phys.* **51**, *iss. 6 1847-1865, (2012)*, see also *e-print 1110.3399v1*

[6] L.Smolin, The *trouble with physics: the rise of string theory, the fall of science, and what comes next.* Houghton Mifflin, Boston, 2006.

[7] Yu. A.Rylov, Uniform formalism for description of dynamic, quantum and stochastic systems. *http://arXiv.org/abs/physics/0603237v6*

[8] Yu.A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. (*Journ. Math. Phys.* **40**, *pp. 256 - 278, (1999).*

[9] Yu.A.Rylov, Dynamic disquantization of Dirac equation *e-print /quant-ph/0104060.*

[10] Yu.A.Rylov, "Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects. *Journ. Math. Phys.* **32(8)**, *2092-2098, (1991)*

[11] Yu.A.Rylov, Dirac equation in terms of hydrodynamic variables. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **5**, *pp 1-40, (1995)*). See also *e-print /1101.5868.*

[12] Yu. A.Rylov, Discrete space-time geometry and skeleton conception of particle dynamics. *Int. J. Theor. Phys.* **51**, iss. 6 (2012), pp/ 1847-1865, (2012), see also *e-print* /1110.3399v1.

[13] J.E. Moyal, Quantum mechanics as a statistical theory. *Proc.Phil. Soc.* **45**, 99 (1949).

[14] I.Fenyes, Foundation and interpretation of quantum mechanics from viewpoint of probability theory. *Zs. f. Physics* **132**, 81, (1952)

[15] E. Madelung, Quantentheorie in hydrodynamischer Form, Z. Physik, **40**, 322-326, (1926).

[16] D. Bohm, On interpretation of quantum mechanics on the basis of the "hidden"variable conception. *Phys.Rev.* **85,** 166, 180, (1952).

[17] P. Holland, *The Quantum Theory of Motion*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1993) and references therein.

[18] Yu.A.Rylov, Quantum Mechanics as a theory of relativistic Brownian motion. *Ann. Phys. (Leipzig).* **27**, *1-11, (1971)*

[19] Yu.A.Rylov, Quantum mechanics as relativistic statistics.I: The two-particle case. *Int. J. Theor. Phys.* **8**, *65-83,(1973).*

[20] Yu.A.Rylov, Quantum mechanics as relativistic statistics.II: The case of two interacting particles. *Int. J. Theor. Phys.* 8, *123-139, (1973*).

[21] Yu. A. Rylov, Hydrodynamical interpretation of quantum mechanics: the momentum distribution. *e-print, /physics/0402068*.

[22] Yu. A.Rylov, Incompatibility of the Copenhagen interpretation with quantum formalism and its reasons, *e-print /physics/0604111. Concepts of Physics* **5**, *iss.2, 323-328, (2008).*

[23] Yu.A.Rylov, Classical description of pair production, *e-print /abs/physics/0301020)*

[24] Yu.A.Rylov, Quantum mechanics as a dynamic construction. *Found. Phys.* **28**, No.2, 245-271, (1998).

[25] Yu. A.Rylov. Model conception of quantum phenomena: logical structure and investigation methods. *e-print /physics/0310050v2*.

[26] P. A. M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics,* 4th ed. Oxford, 1958.

[27] L. L. Foldy, and S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.,* **78**, 29, (1950).

[28] E. Schrödinger, *Sitzungsber. Preuss. Wiss. Phys. Math. Kl.* **24**, 418, (1930).

[29] A. O. Barut, N. Zanghi, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2009, (1984).

[30] A. O. Barut, A. J. Bracken, *Phys. Rev.* **D23**, 2454, (1981).

[31] J. C. Aron, *Found. Phys.* **11**, 863, (1981).

[32] D. Hestenes, *Found. Phys.* **20**, 45, (1990).

[33] W. A. Rodriges Jr., J. Vaz Jr. *Phys. Lett.* **B318**, 623, (1993)

[34] Yu. A.Rylov, Is the Dirac particle composite? *e-print* /physics/0410045.

[35] F. Sauter, *Zs. Phys.* **63,** 803, (1930), **64**, 295, (1930).

[36] A. Sommerfeld, *Atombau and Spektrallinien.* bd.2, Braunschweig, 1951.

[37] Yu. A. Rylov (2004), Is the Dirac particle completely relativistic? *e-print* /physics/0412032.

[38] J. L. Anderson, *Principles of relativity physics.* Academic Press, New-York, 1967, pp 75-88.

[39] Yu. A. Rylov, Anderson's absolute objects and constant timelike vector hidden in Dirac matrices. *e-print quant-ph/0112091*

[40] Yu.A.Rylov, Ptolemyness of conventional program for microcosm investigations and alternative research program. *e-print /quant-ph/0011044. (*Russan version: *Fizicheskaya Mysl Rossii*, iss.1, pp. 1-23, (2001)).

[41] Yu. A. Rylov, Formalized procedure of transition to classical limit in application to the Dirac equation. *e-print physics/0507183*

[42] K. Menger, Untersuchen über allgemeine Metrik, *Mathematische Annalen,* **100**, 75-113, (1928).

[43] L.M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, Clarendon Press, 1953

[44] Yu. A.Rylov, Deformation principle and further geometrization of physics.*e-print* /0704.3003

[45] Yu. A.Rylov, Non-Euclidean method of the generalized geometry construction and its application to space-time geometry. in *Pure and Applied Differential geometry* pp.238-246. eds. Franki Dillen and Ignace Van de Woestyne. Shaker Verlag, Aachen, 2007. see also *e-print* /Math.GM/0702552

[46] Yu.A.Rylov, Geometry without topology as a new conception of geometry. *Int. Jour. Mat. & Mat. Sci.* **30**, *iss. 12, 733-760, (2002)*, see also /math.MG/0103002.

[47] Yu. A. Rylov, Discriminating properties of compactification in discrete uniform isotropic space-time. *e-print 0809.2516v2*

[48] Yu. A. Rylov, Geometrical dynamics: spin as a result of rotation with superluminal speed. *e-print 0801.1913.*

[49] Rylov Yu. A., Тахионный газ как кандидат на темную материю. *Вестник РУДН серия математика, информатика, физика, (2013) є 2 стр.159-173.*

[50] Rylov Yu. A. Dynamic equations for tachyon gas. *submitted to Int. J. Theor. Phys.* (2012)