

Что такое волновая функция и почему она используется в квантовой механике

Ю.А.РЫЛОВ

Институт проблем механики, РАН
Россия 117526, Москва, Пр. Вернадского 01-1
email: rylov@ipmnet.ru
Web site: <http://gasdyn-ipm.ipmnet.ru/~rylov/yrylov.htm>

Аннотация

Показано, что квантовая механика может быть представлена как гидродинамика некоторого квантового флюида. В этом случае квантовая механика перестает быть аксиоматической концепцией, потому что аксиоматический объект КМ (волновая функция) перестает быть аксиоматическим объектом. В гидродинамике волновая функция является методом описания идеальной (недиссипативной) жидкости. Квантовая механика превращается в классическую динамику стохастических частиц. Проблема интерпретации квантовой механики исчезает, потому что интерпретация определяется математическим формализмом классической динамики.

Ключевые слова: классическая динамика стохастических частиц; κ -поле; динамика классического газа; волновая функция.

1 Введение

Проблема интерпретации квантовой механики существует почти сто лет. Имеются многочисленные версии интерпретации. Это связано с тем обстоятельством, что квантовая механика является аксиоматической концепцией. Это означает, что квантовая механика содержит аксиоматический объект, определяемый только его свойствами. Этим аксиоматическим объектом является волновая функция. Никто не знает, что такое волновая функция. Нельзя точно интерпретировать аксиоматическую концепцию из-за неопределенного аксиоматического объекта. В классической механике не существует проблемы интерпретации, потому что математический формализм классической механики позволяет интерпретировать любое физическое явление, описываемое в терминах классической механики.

Было показано, что уравнение Шредингера описывает потенциальное течение некоторой "квантовой" жидкости [1]. Д.Бом использовал это обстоятельство для гидродинамической интерпретации квантовой механики [2]. К сожалению, связь между

квантовой механикой и гидродинамикой была односторонней весь двадцатый век. Можно было получить гидродинамическое описание из квантовой механики, не удавалось получить уравнение Шредингера из гидродинамических уравнений. Причиной такого положения был аксиоматический объект - волновая функция. Волновая функция рассматривалась как естественный атрибут квантовой механики, тогда как связь между волновой функцией и гидродинамикой была не ясна. Ситуация изменилась, когда было доказано, что волновая функция появляется как метод описания любой идеальной (недиссипативной) жидкости [3]. Описание в терминах волновой функции связано с традиционным описанием в терминах гидродинамических переменных: плотности и скорости.

Благодаря этой связи волновая функция перестала быть аксиоматическим объектом. Волновая функция и спин превратились в естественные атрибуты классической динамики сплошных сред. Квантовая механика, рассматриваемая как гидродинамика, стала классической динамикой, где нет проблемы интерпретации. Кроме того появилось некоторое силовое поле, ответственное за квантовые эффекты. В квантовой механике имеется проблема объединения нерелятивистских принципов квантовой механики с принципами теории относительности. В квантовой механике, рассматриваемой как гидродинамика, такая проблема отсутствует, потому что отсутствуют принципы квантовой механики. Вместо этого имеется силовое поле κ_l , $l = 0, 1, 2, 3$, которое ответственно за квантовые эффекты.

Использование флюида является естественным методом описания стохастических частиц. Не существует динамических уравнений для описания отдельной стохастической частицы. Можно описывать только среднее движение стохастической частицы. Использование функции распределения для описания движения стохастической частицы возможно только для нерелятивистской стохастической частицы, потому что функция распределения в фазовом пространстве координат и импульсов является нерелятивистским построением. Однако, нерелятивистскую квантовую механику следует рассматривать как релятивистскую концепцию, потому что случайная составляющая скорости частицы может быть релятивистской, если даже регулярная составляющая скорости частицы является нерелятивистской.

Для описания релятивистских частиц нужно использовать статистический ансамбль. Статистический ансамбль $\mathcal{E}[S_d]$ детерминированных частиц S_d представляет собой N ($N \rightarrow \infty$) независимых частиц S_d . $\mathcal{E}[S_d]$ есть флюидоподобная динамическая система. Можно получить динамические уравнения для S_d из динамических уравнений для $\mathcal{E}[S_d]$. Наоборот, можно получить динамические уравнения для $\mathcal{E}[S_d]$ из динамических уравнений для S_d . Таким образом описание в терминах $\mathcal{E}[S_d]$ и в терминах S_d эквивалентны если S_d есть детерминированная частица и существуют динамические уравнения для S_d .

Пусть теперь частицы S_d взаимодействуют между собой через некоторое силовое поле κ . Тогда статистический ансамбль $\mathcal{E}[S_d]$ перестает быть статистическим ансамблем, потому что его элементы S не являются независимыми частицами. Частицы S_d превращаются во взаимодействующие частицы S_{st} . Множество $\mathcal{E}[S_{st}]$ перестает быть статистическим ансамблем, но оно остается флюидоподобной динамической системой. Мы будем использовать термин инт-ансамбль для динамической системы $\mathcal{E}[S_{st}]$. Нельзя получить динамические уравнения для S_{st} из динамических уравнений

для $\mathcal{E}[S_{st}]$. Это означает, что элементы S_{st} инт-ансамбля $\mathcal{E}[S_{st}]$ не являются детерминированными частицами. Они являются стохастическими частицами. Динамические уравнения для $\mathcal{E}[S_{st}]$ описывают среднее движение стохастических частиц S_{st} .

Идеальный газ представляет собой простой пример такой ситуации. Молекулы идеального газа являются стохастическими частицами, и не существует динамических уравнений для отдельной молекулы внутри идеального газа. Движение "частиц газа" описывается уравнениями классической газовой динамики. Любая частица газа содержит много молекул, и движение частицы газа описывает среднее движение молекул газа. Взаимодействие между молекулами осуществляется столкновениями молекул. Отдельная молекула (вне газа) является детерминированной частицей. Для описания отдельной молекулы вне газа существуют динамические уравнения. Что касается стохастических частиц, то они не являются детерминированными частицам, и не существует динамических уравнений для отдельной частицы S_{st} . Использование инт-ансамбля $\mathcal{E}[S_{st}]$, где стохастические частицы S_{st} взаимодействуют через некоторое силовое поле κ является только математическим приемом, который позволяет описывать среднее движение частиц S_{st} при помощи инт-ансамбля $\mathcal{E}[S_{st}]$, который представляет собой флюидоподобную динамическую систему. Разумеется, вид стохастичности частицы зависит от силового поля κ . Это обстоятельство позволяет классифицировать стохастические частицы с помощью силового поля κ , которое появляется в динамических уравнениях для инт-ансамбля $\mathcal{E}[S_{st}]$. Это позволяет также рассматривать силовое поле κ как источник стохастичности частицы, хотя κ -поле появляется как математическое средство описания стохастической частицы.

2 Потенциалы Клебша

Полная система гидродинамических уравнений содержит семь уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p(\rho)}{\rho} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (2.2)$$

Три уравнения (2.2) описывают движение жидкой частицы в заданном поле скоростей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$. Они могут быть представлены в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \quad (2.3)$$

Решения $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1(t, \mathbf{x}), \xi_2(t, \mathbf{x}), \xi_3(t, \mathbf{x})\} = \text{const}$ уравнений (2.2) представляют собой три независимых интеграла уравнений (2.3). В самом деле в силу (2.3) и (2.2) выражение

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}(t)) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}(t))}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \nabla \right) \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}(t)) = 0 \quad (2.4)$$

обращается в нуль. Это означает, что $\boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x}(t)) = \text{const}$ суть интегралы уравнений (2.3). Если $\xi_1(t, \mathbf{x}), \xi_2(t, \mathbf{x}), \xi_3(t, \mathbf{x})$ суть три независимых решения уравнений (2.2),

то уравнения (2.2) и (2.3) эквивалентны. Переменные ξ известны как лагранжевы координаты, которые по определению постоянны вдоль траекторий жидких частиц.

Четыре уравнения (2.1) образуют замкнутую подсистему системы динамических уравнений (2.1), (2.2). По этой причине обычно рассматривают четыре уравнения (2.1) как систему гидродинамических уравнений, игнорируя (2.2). Имеется в виду, что обыкновенные уравнения (2.3) могут быть решены сравнительно легко, если поле скоростей $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ определяется из (2.1). Кроме того, во многих гидродинамических задачах траектории жидких частиц не представляют интереса.

Полная система гидродинамических уравнений (2.1), (2.2) может быть частично проинтегрирована в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} = b_0 (\nabla \varphi + g^\alpha(\xi) \nabla \xi_\alpha) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \xi = 0 \quad (2.6)$$

где $g^\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть произвольные функции, которые определяются из начальных условий для \mathbf{v} . Переменная φ есть новая переменная, введенная вместо \mathbf{v} . Величина b_0 есть произвольная постоянная. Второе соотношение (2.5) известно как потенциалы Клебша. Клебш получил их для несжимаемой жидкости [4, 5].

Волновая функция $\psi = \{\psi_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ является n -компонентной комплексной функцией. Она строится из потенциалов Клебша при помощи соотношений

$$\psi_\alpha = \sqrt{\rho} e^{i\varphi} w_\alpha(\xi), \quad \psi_\alpha^* = \sqrt{\rho} e^{-i\varphi} w_\alpha^*(\xi), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

$$\psi^* \psi \equiv \sum_{\alpha=1}^n \psi_\alpha^* \psi_\alpha, \quad (2.8)$$

где (*) означает комплексное сопряжение, $w_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ суть функции только переменных ξ . Они удовлетворяют соотношениям

$$-\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^n (w_\alpha^* \frac{\partial w_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial w_\alpha^*}{\partial \xi_\beta} w_\alpha) = g^\beta(\xi), \quad \beta = 1, 2, 3, \quad \sum_{\alpha=1}^n w_\alpha^* w_\alpha = 1. \quad (2.9)$$

Число n - это такое натуральное число, что уравнения (2.9) допускают решение. Вообще говоря, n может зависеть от вида произвольных функция интегрирования $\mathbf{g} = \{g^\beta(\xi)\}$, $\beta = 1, 2, 3$.

Гидродинамические уравнения, описываемые в терминах потенциалов Клебша или в терминах волновой функции, довольно громоздки. Гидродинамики не используют их, и такое представление гидродинамических уравнений мало известно. Единственное известное исключение имеет место, когда внутренняя энергия E жидкости имеет вид

$$E = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_{\text{dif}}^2, \quad \mathbf{v}_{\text{dif}} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla \log \rho, \quad E = \frac{\hbar^2}{8m^2} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho} \quad (2.10)$$

Если кроме того течение жидкости потенциально, то можно положить в (2.5) $g^\alpha(\xi) = 0$. В этом случае волновая функция однокомпонентна, и полагая $b_0 = \hbar$ в (2.5), получаем, что гидродинамические уравнения в терминах волновой функции оказываются линейными. Они совпадают с уравнением Шредингера.

Таким образом, мы видим, что волновая функция есть метод описания любой недиссипативной жидкости, но это было обнаружено только в 1999 году [3], и этот факт не интересен гидродинамикам, потому что внутренняя энергия, зависящая от $(\nabla\rho)^2$ не используется при описании обычных жидкостей. Что касается физиков, имеющих дело с квантовой механикой, то линейное динамическое уравнение в терминах волновой функции очень привлекательно, если даже не известно, что такое волновая функция.

Но почему квантовая частица, описывается как сплошная среда, которая имеет бесконечное число степеней свободы? Квантовая частица является недетерминированной (стохастической) частицей. Для отдельной стохастической частицы не существует динамических уравнений. Чтобы описать среднее движение стохастической частицы, рассматривается инт-ансамбль (газ) стохастических частиц, т.е. множество $\mathcal{E}[S_{st}]$ из N ($N \rightarrow \infty$) тождественных стохастических частиц S_{st} . Инт-ансамбль $\mathcal{E}[S_{st}]$ представляет собой сплошную среду при $N \rightarrow \infty$, и не существует динамических уравнений для $\mathcal{E}[S_{st}]$.

Например, газ как сплошная среда является динамической системой. Молекулы газа движутся стохастически из-за столкновений. Уравнения газовой динамики описывают только среднее движение молекул. Точное движение молекул остается неизвестным при таком описании. Чтобы описать среднее движение молекул, достаточно знать среднюю энергию молекул. В случае идеального газа средняя энергия газа равна $E = \frac{3}{2}kT\rho$, где T есть температура газа, k есть постоянная Больцмана, а ρ есть плотность газа. В случае квантовой частицы средняя энергия определяется соотношением (2.10), где \mathbf{v}_{dif} есть средняя скорость диффузии. Это означает, что движение квантовой частицы отклоняется от прямолинейного движения однородно во всех направлениях. В случае газа более детальная информация о распределении скоростей молекул (распределение Максвелла) не является необходимым для описания среднего движения молекул газа. То же самое верно для описания среднего движения стохастических частиц.

Заметим, что решив уравнения газовой динамики, нельзя определить среднее значение $\langle F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \rangle$ произвольной функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ координат и скоростей молекул газа. Можно определить только $\langle f(\mathbf{x}) \rangle$, и средние значения аддитивных величин таких как импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, энергия $E = m\mathbf{v}^2/2$, и момент количества движения $\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{x}$. Для определения других средних величин, нужно знать функцию распределения $= f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, которую нельзя определить из классических уравнений газовой динамики. То же самое верно в случае квантовой механики, когда вместо уравнений газовой динамики имеется уравнение Шредингера. Формула для вычисления средних величин в квантовой механике

$$\langle F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rangle = \int \psi^*(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}, -i\hbar\nabla) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.11)$$

верна только для $f(\mathbf{x})$, \mathbf{p} , $E = \mathbf{p}^2/2m$, и $\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{x}$. Однако в соответствии с принципами квантовой механики формула (2.11) считается верной для произвольной функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Теорема фон Неймана [6] о несовместимости скрытых параметров с принципами квантовой механики основана на формуле (2.11), которая считается справедливой для произвольных функций F .

3 Статистический ансамбль и инт-ансамбль заряженных частиц

Рассмотрим статистический ансамбль $\mathcal{E} [S_d]$ детерминированных заряженных частиц S_d . Действие для $\mathcal{E} [S_d]$ имеет вид

$$\mathcal{E} [S_d] : \quad \mathcal{A} [x] = \int_{\xi_0} \int_{V_\xi} \left(-mc\sqrt{g_{lk}\dot{x}^l\dot{x}^k} - \frac{e}{c}A_l\dot{x}^l \right) d^4\xi, \quad \dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0} \quad (3.1)$$

где $\xi = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ являются независимыми переменными, а $x = \{x^0(\xi), x^1(\xi), x^2(\xi), x^3(\xi)\}$, $x = x(\xi)$ являются зависимыми переменными. Величина ξ_0 представляет эволюционный параметр вдоль мировой линии частицы. Величина A_l есть 4-потенциал электромагнитного поля. Электромагнитное поле A_l является внешним полем, и частицы ансамбля не взаимодействуют через электромагнитное поле.

Поскольку частицы детерминированные, то существуют динамические уравнения для каждой отдельной частицы. Они получаются как результат вариации по x^l

$$mc \frac{d}{d\xi_0} \frac{g_{lk}\dot{x}^k(\xi)}{\sqrt{\dot{x}_s(\xi)\dot{x}^s(\xi)}} + \frac{e}{c} (\partial_l A_k(x) - \partial_k A_l(x)) \dot{x}^k(\xi) = 0, \quad \xi = \text{const} \quad (3.2)$$

Представим себе, что частицы взаимодействуют через некоторое силовое поле κ^l , $l = 0, 1, 2, 3$, которое изменяет массу частицы m

$$m^2 \rightarrow M^2(x) = m^2 + \frac{\hbar^2}{c^2} (g_{kl}\kappa^k\kappa^l + \partial_l\kappa^l), \quad \partial_l \equiv \frac{\partial}{\partial x^l} \quad (3.3)$$

Силовое поле κ^l , $l = 0, 1, 2, 3$ действует на массу частицы m , превращая ее в эффективную массу M . Здесь κ -поле $\kappa^l = \kappa^l(x) = \{\kappa^0(x), \kappa^1(x), \kappa^2(x), \kappa^3(x)\}$.

Введение κ -поля в действие (3.1) превращает детерминированные частицы S_d в стохастические частицы S_{st} . Действие (3.1) принимает вид

$$\mathcal{E} [S_{st}] : \quad \mathcal{A} [x, \kappa] = \int_{\xi_0} \int_{V_\xi} \left(-mcK\sqrt{g_{lk}\dot{x}^l\dot{x}^k} - \frac{e}{c}A_l\dot{x}^l \right) d^4\xi, \quad \dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0} \quad (3.4)$$

$$K = \frac{M}{m} = \sqrt{1 + \lambda^2 (\kappa_l\kappa^l + \partial_l\kappa^l)}, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc}, \quad \partial_l \equiv \frac{\partial}{\partial x^l} \quad (3.5)$$

Здесь $\lambda = \frac{\hbar}{mc}$ есть комптоновская длина волны. После введения взаимодействия между частицами статистический ансамбль $\mathcal{E} [S_d]$ перестает быть статистическим ансамблем, потому что элементы (частицы) статистического ансамбля должны быть по определению независимыми. Взаимодействие частиц нарушает их независимость. Статистический ансамбль превращается в инт-ансамбль, т.е. во множество тождественных взаимодействующих частиц.

Если попытаться получить действие для отдельной частицы, убрав интегрирование по $d^3\xi$, то получим

$$S_d : \quad \mathcal{A} [x, \kappa] = \int \left(-mcK\sqrt{g_{lk}\dot{x}^l\dot{x}^k} - \frac{e}{c}A_l\dot{x}^l \right) d\xi_0, \quad \dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi_0} \quad (3.6)$$

Действие (3.6) оказывается определенным некорректно, потому что К-фактор (3.5) содержит производные от κ -поля $\kappa^l(x)$ во всех направлениях пространства-времени, тогда как действие (3.6) допускает только производные вдоль мировой линии. Это означает, что действие (3.4) не может описывать движение отдельной стохастической частицы (если $\kappa^l(x) \neq 0$). Оно может описывать только инт-ансамбль стохастических частиц. Однако, если $\kappa^l(x) \equiv 0$, К-фактор $K \equiv 1$ в (3.6), то действие (3.6) становится корректно определенным. Оно может описывать отдельную детерминированную частицу. Фактически частицы, описываемые действием (3.4), взаимодействуют между собой через κ -поле.

После введения взаимодействия между частицами ансамбля $\mathcal{E}[S_d]$ статистический ансамбль $\mathcal{E}[S_d]$ превращается в инт-ансамбль. Как мы упоминали, инт-ансамбль $\mathcal{E}[S_{st}]$ не является статистическим ансамблем, потому что частицы S_{st} инт-ансамбля $\mathcal{E}[S_{st}]$ взаимодействуют между собой. Введение взаимодействия между независимыми частицами статистического ансамбля является *методом описания стохастических частиц*. Различные силовые поля взаимодействия соответствуют различной внутренней энергии сплошной среды инт-ансамбля $\mathcal{E}[S_{st}]$.

В идеальном газе это взаимодействие описывается интегралом столкновений, определяющим столкновения между молекулами. Это взаимодействие описывает реальное взаимодействие между реальными молекулами. Если имеется только одна молекула, то ее движение будет детерминированным. В случае стохастических частиц взаимодействие частиц является фиктивным в том смысле, что движение частицы будет стохастическим даже в случае одной частицы. Причина стохастичности может быть внутренней причиной отдельной частицы, а не результатом взаимодействия с другими частицами. Тем не менее, стохастичность описывается как взаимодействие детерминированной частицы с другими частицами инт-ансамбля. Дело в том, что классическая динамика есть динамика детерминированных частиц. *Рассматривая стохастические частицы как взаимодействующие детерминированные частицы, мы можем описывать движение стохастических частиц методами классической динамики*. Сводя движение стохастических частиц к движению взаимодействующих детерминированных частиц, мы используем вид κ -поля для классификации вида стохастичности частиц. В случае динамики классического газа стохастичность представляется внутренней энергией E газа.

Сначала мы рассмотрим нерелятивистский случай действия (3.4), (3.5), когда составляющая $\kappa^0 \ll |\boldsymbol{\kappa}|$. В этом случае, разлагая радикал в (3.4), и полагая $\xi_0 = t$, получаем

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[S_{st}]}[\mathbf{x}, \boldsymbol{\kappa}] = \int_t \int_{V_{\xi}} \left(-mc^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\kappa}^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\kappa} - \frac{e}{c} A_0 - \frac{e}{c} \mathbf{A} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) dt d^3 \boldsymbol{\xi} \quad (3.7)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi}) = \{x^1, x^2, x^3\}$ and $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}(t, \mathbf{x}) = \{\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3\}$, $A_0 = A_0(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t, \mathbf{x})$.

Введем обозначения

$$\boldsymbol{\kappa}(t, \mathbf{x}) = -\frac{\hbar}{m} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \quad (3.8)$$

где \mathbf{u} означает среднюю скорость частицы в инт-ансамбле $\mathcal{E}[S_{st}]$. Положим $eA_0/c =$

$V(t, \mathbf{x})$, $A_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$. Действие (3.7) принимает вид.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] = \int_t \int_{V_\xi} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2} \nabla \mathbf{u} - V \right\} dt d\xi, \quad (3.9)$$

Первый член выражения (3.7) опущен, поскольку он не дает вклада в динамические уравнения. Переменная $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi)$ описывает регулярную составляющую скорости частицы. Переменная $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ описывает среднюю величину стохастической составляющей скорости. Первый член действия (3.9) описывает кинетическую энергию регулярного движения. Второй член в (3.9) описывает кинетическую энергию стохастической составляющей скорости. Третий член описывает взаимодействие между между стохастической составляющей скорости $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и регулярной ее составляющей $d\mathbf{x}/dt$. Оператор

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\} \quad (3.10)$$

определен в пространстве координат \mathbf{x} . Динамические уравнения для динамической системы $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ получаются в результате варьирования действия (3.9) по динамическим переменным \mathbf{x} и \mathbf{u} .

Вариация (3.9) по \mathbf{u} дает

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}] &= \int_t \int_{V_\xi} \left\{ m \mathbf{u} \delta \mathbf{u} - \frac{\hbar}{2} \nabla \delta \mathbf{u} \right\} dt d\xi \\ &= \int_t \int_{V_x} \left\{ m \mathbf{u} \delta \mathbf{u} - \frac{\hbar}{2} \nabla \delta \mathbf{u} \right\} \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} dt d\mathbf{x} \\ &= \int_t \int_{V_x} \delta \mathbf{u} \left\{ m \mathbf{u} \rho + \frac{\hbar}{2} \nabla \rho \right\} dt d\mathbf{x} - \int_t \oint \frac{\hbar}{2} \rho \delta \mathbf{u} dt d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\rho = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \left(\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right)^{-1} \quad (3.12)$$

Мы получаем следующие динамические уравнения

$$m \rho \mathbf{u} + \frac{\hbar}{2} \nabla \rho = 0, \quad (3.13)$$

Вариация действия (3.9) по \mathbf{x} дает

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \nabla \left(\frac{m}{2} \mathbf{u}^2 - \frac{\hbar}{2} \nabla \mathbf{u} \right) \quad (3.14)$$

Здесь d/dt означает субстанциональную производную по времени t

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial(F, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} \quad (3.15)$$

Разрешая (3.13) относительно \mathbf{u} , получаем уравнение

$$\mathbf{u} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla \ln \rho, \quad (3.16)$$

которое напоминает выражение для средней скорости броуновской частицы с коэффициентом диффузии $D = \hbar/2m$.

Исключая скорость \mathbf{u} из динамических уравнений (3.14) при помощи (3.16), получаем динамические уравнения для среднего движения стохастической частицы \mathcal{S}_{st}

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla V - \nabla U_B, \quad U_B = U(\rho, \nabla \rho, \nabla^2 \rho) = \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} \quad (3.17)$$

Здесь ρ рассматривается как функция от t, \mathbf{x} , и ∇ есть градиент в пространстве координат \mathbf{x} . Плотность ρ определяется с помощью (3.12). U_B есть так называемый потенциал Бома [2]. Уравнения (3.17) суть динамические уравнения в лагранжевом представлении, где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$

Чтобы преобразовать динамические уравнения к эйлерову представлению, где зависимые динамические переменные $\dot{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t, \mathbf{x})$, $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$, нужно рассмотреть якобиан преобразования

$$J = J(\xi_{i,k}) = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det \|\xi_{i,k}\|, \quad i, k = 0, 1, 2, 3, \quad \xi_{i,k} \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} \quad (3.18)$$

После преобразования следует положить $\xi_0 = t$, $x^0 = t$. Получаем

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} = \frac{\partial(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \frac{\partial(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} \quad (3.19)$$

Положив в (3.19) $\xi_0 = t$, $x^0 = t$, получаем

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} = \frac{\partial(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{\partial(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, x^1, x^2, x^3)} \quad (3.20)$$

В соответствии с (3.15) и (3.12)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial(x^\alpha, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad \rho = \frac{\partial(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(t, x^1, x^2, x^3)} = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \quad (3.21)$$

Из (3.20), (3.21) следует, что в соответствии с (3.12)

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} = \rho, \quad \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} = \rho v^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

Используя тождество

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} = \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,0}} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,\alpha}} \equiv 0 \quad (3.23)$$

и соотношения (3.22) получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.24)$$

Уравнение (3.17) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla V - \nabla U_B \quad (3.25)$$

Гидродинамическая форма (3.24), (3.25) уравнения Шредингера была получена Маделунгом [1]. Она использовалась Бомом [2] для потенциальных течений, когда $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, и уравнение (3.25) может быть записано в виде

$$\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \nabla \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} = -\nabla V - \nabla U_B \quad (3.26)$$

В случае завихренного течения уравнение (3.25) не эквивалентно уравнению Шредингера.

4 Релятивистский случай

Возвратимся к действию (3.4), (3.5) и покажем, что инт-ансамбль $\mathcal{E} [S_{st}]$ может быть описан в терминах волновой функции. Мы будем рассматривать переменные $\xi = \xi(x)$ в (3.4) как зависимые переменные, а переменные x как независимые переменные. После манипуляций с якобианом преобразования (3.18) и введением волновой функции (2.7), (2.9) получаем действие (3.4), (3.5) в виде (смотри детали в Приложении)

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \left(i\hbar \partial_k + \frac{e}{c} A_k \right) \psi^* \left(-i\hbar \partial^k + \frac{e}{c} A^k \right) \psi - m^2 c^2 \rho - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_l s_\alpha) (\partial^l s_\alpha) \rho \right\} d^4 x \quad (4.1)$$

где

$$\rho = \psi^* \psi, \quad s_\alpha = \frac{\psi^* \sigma_\alpha \psi}{\rho}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*), \quad (4.3)$$

σ_α суть 2×2 матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

Вариация по ψ^* приводит к динамическому уравнению

$$\begin{aligned} & \left(-i\hbar \partial_k + \frac{e}{c} A_k \right) \left(-i\hbar \partial^k + \frac{e}{c} A^k \right) \psi - \left(m^2 c^2 + \frac{\hbar^2}{4} (\partial_l s_\alpha) (\partial^l s_\alpha) \right) \psi \\ &= -\hbar^2 \frac{\partial_l (\rho \partial^l s_\alpha)}{2\rho} (\sigma_\alpha - s_\alpha) \psi \end{aligned} \quad (4.5)$$

Оно, вообще говоря, нелинейно. Однако, в случае, когда волновая функция однокомпонентна, или компоненты ψ_1 и ψ_2 линейно зависимы $\psi_1 = a\psi_2$, $a = \text{const}$, то $\mathbf{s} = \text{const}$ и $\partial_i s_\alpha = 0$. В этом случае нелинейные члены в (4.5) обращаются в нуль, и динамическое уравнение (4.5) переходит в уравнение Клейна-Гордона

$$\left(-i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k\right) \left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k\right) \psi - m^2c^2\psi = 0 \quad (4.6)$$

5 Обсуждение

Рассматривая динамику сплошной среды как математический инструмент для описания стохастических частиц, мы обосновываем квантовую механику и объясняем причину появления волновой функции как естественное средство описания сплошной среды.

Описывая газ с помощью классической газовой динамики, нельзя сказать что-нибудь о структуре и устройстве газа, потому что уравнения газовой динамики – это просто законы сохранения вещества и его энергии-импульса. Однако, добавляя интеграл столкновений и описывая движение газа с помощью кинетического уравнения, можно определить функцию распределения и изучить механизм движения газа. Аналогично, если определить природу κ -поля, то можно получить информацию об устройстве элементарных частиц. Аксиоматическая концепция квантовой механики не позволяет получить какую-либо информацию об устройстве элементарных частиц. Современная квантовая теория описывает элементарные частицы как *точечные объекты*, снабженные рядом квантовых чисел. В соответствии с квантовой теорией элементарные частицы не имеют внутренней структуры. Когда внутренняя структура адронов была обнаружена экспериментально, квантовая теория объяснила этот факт существованием точечных частиц (кварков), которые не могут отдельно существовать вне адрона. Однако, существование кварков только внутри адронов, указывает на то, что кварки являются элементами структуры адронов, но квантовая теория не может принять это допущение. Она рассматривает кварки как отдельные частицы.

Это напоминает ситуацию с исследованием химических элементов, где имеются два подхода: (1) эмпирический подход и (2) структурный подход. Эмпирический подход используется химиками. Их не интересует устройство атома. Их интересует только систематизация химических элементов. Химики приписывают некоторые характерные числа (атомный вес, валентность и т.п.) каждому химическому элементу и систематизируют химические элементы в соответствии с этими числами. Физики используют структурный подход, который позволяет определить устройство атомов (ядро, электронная оболочка и т.д.). Используя эмпирический подход химиков, нельзя было создать атомную энергетику и атомное вооружение.

Квантовая теория может объяснить устройство атома, но она не может объяснить устройство элементарных частиц, из-за своего эмпирического подхода. Например, квантовая механика описывает электрон с помощью уравнения Дирака. В этом представлении дираковская частица (электрон) является точечной частицей, имеющей массу m , заряд e , спин $\hbar/2$, и магнитный момент $\mu = e\hbar/2mc$. Эти квантовые числа содержат квантовую постоянную \hbar , даже при классическом подходе. Мирровая линия свободной дираковской частицы является прямой линией.

Уравнение Дирака можно рассматривать как уравнение описывающее флюид [7]. В этом случае мировая линия свободной дираковской частицы представляет собой винтовую линию с времениподобной осью. Вращение частицы вдоль окружностей винтовой линии является источником спина и магнитного момента, которые теперь не являются простыми квантовыми числами. Такая связь между квантовыми числами и структурой мировой линии частицы не может быть получена в рамках аксиоматической концепции квантовой теории.

В динамике сплошной среды формула типа (2.11) для расчета средних значений верна только для некоторых физических величин. Аксиоматическая квантовая механика распространяет действие этой формулы на все физические величины [6]. В результате возникает теорема фон Неймана о скрытых параметрах, которая не верна, потому что формула (2.11) не верна для всех величин, как это предполагается в условиях теоремы.

Линейность динамического уравнения для определенного вида флюида распространяется на все динамические уравнения квантовой механики без достаточного обоснования. В результате получается принцип линейности вместо специального случая течения флюида.

Силовое поле κ определяет свойства флюида, в терминах которого описывается движение стохастических частиц. Можно сказать, что κ -поле описывает свойства стохастических частиц. Таким образом, квантовые эффекты описываются некоторым силовым полем κ , а не квантовыми принципами и не заменой физических величин некоторыми операторами или матрицами.

Изменяя эффективную массу частицы (3.3), κ -поле может сделать M^2 отрицательной величиной. Это необходимо для рождения пар (изменение направления мировой линии во времени). Это изменение M^2 требует сильного κ -поля. κ -поле может быть достаточно сильным, если оно является внешним силовым полем, потому что внутреннее κ -поле частицы, ответственное за квантовые эффекты, слишком слабо для такого изменения массы [8]. В аксиоматической квантовой механике внутреннее κ -поле включается в волновую функцию, тогда как внешнее κ -field не используется. В результате эффект рождения пар в квантовой теории поля является следствием непоследовательности процедуры вторичного квантования в релятивистском случае [9, 10]. Ситуация со вторичным квантованием нелинейного уравнения Клейна-Гордона выглядит следующим образом. При традиционном вторичном квантовании в релятивистском случае волновая функция содержит операторы уничтожения и операторы рождения. В результате гамильтониан H совпадает с энергией E системы свободных частиц. Такое совпадение имеет место в нерелятивистском случае (например, в случае вторичного квантования уравнения Шредингера). В релятивистском случае такое совпадение имеет место только в случае отсутствия рождения пар. В случае, когда рождение пар возможно, традиционный метод вторичного квантования ведет к нестационарности вакуумного состояния. Этот факт объясняется обычно в том смысле, что вакуумное состояние не содержит частиц, но содержит виртуальные частицы. На самом деле нестационарный вакуум является следствием противоречивой постановки проблемы вторичного квантования. При непоследовательной постановке проблемы можно получить любой желаемый результат, проявив достаточно изобретательности.

Вводя в газовую динамику функцию распределения и кинетическое уравнение для нее, можно получить более подробную информацию о механизме движения газа. Аналогично рассматривая источник κ -поля, можно получить более подробную информацию об устройстве элементарной частицы [11].

6 Приложение. Преобразование действия к представлению в терминах волновой функции.

Рассмотрим переменные $\xi = \xi(x)$ в (3.4) как зависимые переменные, а переменные x как независимые переменные. Пусть якобиан (3.18)

$$J = \frac{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} = \det \|\xi_{i,k}\|, \quad \xi_{i,k} \equiv \partial_k \xi_i \equiv \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k}, \quad i, k = 0, 1, 2, 3 \quad (6.1)$$

рассматривается как полилинейная функция величин $\xi_{i,k}$. Тогда

$$d^4 \xi = J d^4 x, \quad \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{d\xi_0} \equiv \frac{\partial(x^i, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)} = J^{-1} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \quad (6.2)$$

После преобразования к зависимым переменным ξ действие (3.4) принимает вид

$$\mathcal{A}[\xi, \kappa] = \int \left\{ -mcK \sqrt{g_{ik} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,i}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}} - \frac{e}{c} A_k \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \right\} d^4 x, \quad (6.3)$$

$$K = \sqrt{1 + \lambda^2 (\kappa_l \kappa^l + \partial_l \kappa^l)}, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc}, \quad (6.4)$$

Теперь переменные ξ и κ рассматриваются как функции независимых переменных x .

Введем новые переменные

$$j^k = \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (6.5)$$

с помощью множителей Лагранжа p_k

$$\mathcal{A}[\xi, \kappa, j, p] = \int \left\{ -mcK \sqrt{g_{ik} j^i j^k} - \frac{e}{c} A_k j^k + p_k \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} - j^k \right) \right\} d^4 x, \quad (6.6)$$

Вариация по ξ_i дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \xi_i} = -\partial_l \left(p_k \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \right) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (6.7)$$

Используя тождества

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv J^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial \xi_{0,k}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} - \frac{\partial J}{\partial \xi_{0,l}} \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,k}} \right) \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} \xi_{k,l} \equiv J \delta_k^i, \quad \partial_l \frac{\partial J}{\partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \quad \partial_l \frac{\partial^2 J}{\partial \xi_{0,k} \partial \xi_{i,l}} \equiv 0 \quad (6.9)$$

можно проверить прямой подстановкой, что общее решение уравнений (6.7) имеет вид (2.5)

$$p_k = b_0 (\partial_k \varphi + g^\alpha (\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\alpha), \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (6.10)$$

где $b_0 \neq 0$ есть постоянная, $g^\alpha (\boldsymbol{\xi})$, $\alpha = 1, 2, 3$ суть произвольные функции от $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, и φ есть динамическая переменная ξ_0 , которая перестала быть фиктивной. Подставим (6.10) в (6.6). Член вида $\partial J / \partial \xi_{0,k} \partial_k \varphi$ приводится к якобиану и не дает вклада в динамические уравнения. Члены вида $\xi_{\alpha,k} \partial J / \partial \xi_{0,k}$ исчезают благодаря тождествам (6.9). Получаем

$$\mathcal{A}[\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa, j] = \int \left\{ -mcK \sqrt{g_{ik} j^i j^k} - j^k \pi_k \right\} d^4x, \quad (6.11)$$

где величины π_k определяются соотношениями

$$\pi_k = b_0 (\partial_k \varphi + g^\alpha (\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\alpha) + \frac{e}{c} A_k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (6.12)$$

Интегрирование (6.7) в виде (6.10) есть именно то интегрирование, которое позволяет ввести волновую функцию. Заметим, что коэффициенты в системе уравнений (6.7) при производных от p_k строятся из миноров якобиана (6.1). Именно это обстоятельство позволяет произвести формальное общее интегрирование.

Вариация (6.11) по κ^l дает

$$\frac{\delta \mathcal{A}}{\delta \kappa^l} = -\frac{\lambda^2 mc \sqrt{g_{ik} j^i j^k}}{K} \kappa_l + \partial_l \frac{\lambda^2 mc \sqrt{g_{ik} j^i j^k}}{2K} = 0, \quad \lambda = \frac{\hbar}{mc} \quad (6.13)$$

Это можно записать в виде

$$\kappa_l = \partial_l \kappa = \frac{1}{2} \partial_l \ln \rho, \quad e^{2\kappa} = \frac{\rho}{\rho_0} \equiv \frac{\sqrt{j_s j^s}}{\rho_0 K}, \quad \rho = \frac{\sqrt{j_s j^s}}{K} \quad (6.14)$$

где переменная κ является потенциалом κ -поля κ_i и $\rho_0 = \text{const}$ есть постоянная интегрирования. Подставляя (6.4) в (6.14), получаем динамическое уравнение для κ

$$\hbar^2 (\partial_l \kappa \cdot \partial^l \kappa + \partial_l \partial^l \kappa) = m^2 c^2 \frac{e^{-4\kappa} j_s j^s}{\rho_0^2} - m^2 c^2 \quad (6.15)$$

Вариация (6.11) по j^k дает

$$\pi_k = -\frac{mcK j_k}{\sqrt{g_{ls} j^l j^s}} \quad (6.16)$$

или

$$\pi_k g^{kl} \pi_l = m^2 c^2 K^2 \quad (6.17)$$

Подставляя $\sqrt{j_s j^s} / K$ из второго уравнения (6.14) в (6.16), получаем

$$j_k = -\frac{\rho_0}{mc} e^{2\kappa} \pi_k, \quad (6.18)$$

Теперь исключим переменные j^k из действия (6.11), используя соотношения (6.18) и (6.14). Получаем

$$\mathcal{A}[\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa] = \int \rho_0 e^{2\kappa} \{-m^2 c^2 K^2 + \pi^k \pi_k\} d^4 x, \quad (6.19)$$

где π_k определяется соотношением (6.12). Используя выражение (3.5) для K , преобразуем первый член действия (6.19) следующим образом.

$$\begin{aligned} -m^2 c^2 e^{2\kappa} K^2 &= -m^2 c^2 e^{2\kappa} (1 + \lambda^2 (\partial_l \kappa \partial^l \kappa + \partial_l \partial^l \kappa)) \\ &= -m^2 c^2 e^{2\kappa} + \hbar^2 e^{2\kappa} \partial_l \kappa \partial^l \kappa - \frac{\hbar^2}{2} \partial_l \partial^l e^{2\kappa} \end{aligned}$$

Примем во внимание, что последний член имеет вид дивергенции. Он не дает вклада в динамические уравнения и может быть опущен. Опустив этот член получаем

$$\mathcal{A}[\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa] = \int \rho_0 e^{2\kappa} \{-m^2 c^2 + \hbar^2 \partial_l \kappa \partial^l \kappa + \pi^k \pi_k\} d^4 x, \quad (6.20)$$

Здесь π_k определяется соотношением (6.12), где постоянная интегрирования b_0 выбрана в виде $b_0 = \hbar$

$$\pi_k = \hbar (\partial_k \varphi + g^\alpha (\boldsymbol{\xi}) \partial_k \xi_\alpha) + \frac{e}{c} A_k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (6.21)$$

Вместо динамических переменных $\varphi, \boldsymbol{\xi}, \kappa$ введем n -компонентную комплексную функцию (2.7), (2.9)

$$\psi = \{\psi_\alpha\} = \{\sqrt{\rho} e^{i\varphi} w_\alpha (\boldsymbol{\xi})\} = \{\sqrt{\rho_0} e^{\kappa+i\varphi} w_\alpha (\boldsymbol{\xi})\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n \quad (6.22)$$

Здесь w_α суть функции только $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, имеющие следующие свойства

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} w_\alpha^* w_\alpha = 1, \quad -\frac{i}{2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \left(w_\alpha^* \frac{\partial w_\alpha}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial w_\alpha^*}{\partial \xi_\beta} w_\alpha \right) = g^\beta (\boldsymbol{\xi}) \quad (6.23)$$

где (*) означает комплексное сопряжение. Число компонентов волновой функции ψ зависит от функций $g^\beta (\boldsymbol{\xi})$. Число n выбирается таким образом, чтобы уравнения (6.23) имели решение. Тогда получаем

$$\psi^* \psi \equiv \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \psi_\alpha^* \psi_\alpha = \rho = \rho_0 e^{2\kappa}, \quad \partial_l \kappa = \frac{\partial_l (\psi^* \psi)}{2\psi^* \psi} \quad (6.24)$$

$$\pi_k = -\frac{i\hbar (\psi^* \partial_k \psi - \partial_k \psi^* \cdot \psi)}{2\psi^* \psi} + \frac{e}{c} A_k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad (6.25)$$

Подставляя соотношения (6.24), (6.25) в (6.20), получаем действие, записанное в терминах волновой функции ψ

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\psi, \psi^*] &= \int \left\{ \left[\frac{i\hbar (\psi^* \partial_k \psi - \partial_k \psi^* \cdot \psi)}{2\psi^* \psi} - \frac{e}{c} A_k \right] \left[\frac{i\hbar (\psi^* \partial^k \psi - \partial^k \psi^* \cdot \psi)}{2\psi^* \psi} - \frac{e}{c} A^k \right] \right. \\ &\quad \left. + \hbar^2 \frac{\partial_l (\psi^* \psi) \partial^l (\psi^* \psi)}{4(\psi^* \psi)^2} - m^2 c^2 \right\} \psi^* \psi d^4 x \end{aligned} \quad (6.26)$$

Используем тождество

$$\begin{aligned} & \frac{(\psi^* \partial_l \psi - \partial_l \psi^* \cdot \psi) (\psi^* \partial^l \psi - \partial^l \psi^* \cdot \psi)}{4\psi^* \psi} + \partial_l \psi^* \partial^l \psi \\ \equiv & \frac{\partial_l (\psi^* \psi) \partial^l (\psi^* \psi)}{4\psi^* \psi} + \frac{g^{ls}}{2} \psi^* \psi \sum_{\alpha, \beta=1}^{\alpha, \beta=n} Q_{\alpha\beta, l}^* Q_{\alpha\beta, s} \end{aligned} \quad (6.27)$$

где

$$Q_{\alpha\beta, l} = \frac{1}{\psi^* \psi} \begin{vmatrix} \psi_\alpha & \psi_\beta \\ \partial_l \psi_\alpha & \partial_l \psi_\beta \end{vmatrix}, \quad Q_{\alpha\beta, l}^* = \frac{1}{\psi^* \psi} \begin{vmatrix} \psi_\alpha^* & \psi_\beta^* \\ \partial_l \psi_\alpha^* & \partial_l \psi_\beta^* \end{vmatrix} \quad (6.28)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\psi, \psi^*] = & \int \left\{ \left(i\hbar \partial_k + \frac{e}{c} A_k \right) \psi^* \left(-i\hbar \partial^k + \frac{e}{c} A^k \right) \psi - m^2 c^2 \psi^* \psi \right. \\ & \left. + \frac{\hbar^2}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^{\alpha, \beta=n} g^{ls} Q_{\alpha\beta, l} Q_{\alpha\beta, s}^* \psi^* \psi \right\} d^4 x \end{aligned} \quad (6.29)$$

Рассмотрим случай потенциального течения, когда $g^\alpha(\boldsymbol{\xi}) = 0$. В этом случае $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, и волновая функция имеет только одну составляющую. Из (6.28) следует, что $Q_{\alpha\beta, l} = 0$. Тогда получаем вместо (6.29)

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \left(i\hbar \partial_k + \frac{e}{c} A_k \right) \psi^* \left(-i\hbar \partial^k + \frac{e}{c} A^k \right) \psi - m^2 c^2 \psi^* \psi \right\} d^4 x \quad (6.30)$$

Вариация действия (6.30) по ψ^* порождает уравнение Клейна-Гордона

$$\left(-i\hbar \partial_k + \frac{e}{c} A_k \right) \left(-i\hbar \partial^k + \frac{e}{c} A^k \right) \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \quad (6.31)$$

Таким образом, описание в терминах уравнения Клейна-Гордона есть частный случай описания стохастических частиц с помощью действия (3.4), (3.5).

В случае, когда течение флюида завихренное, и волновая функция ψ двухкомпонентна, тождество (6.27) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{(\psi^* \partial_l \psi - \partial_l \psi^* \cdot \psi) (\psi^* \partial^l \psi - \partial^l \psi^* \cdot \psi)}{4\rho} - \frac{(\partial_l \rho) (\partial^l \rho)}{4\rho} \\ \equiv & -\partial_l \psi^* \partial^l \psi + \frac{1}{4} (\partial_l s_\alpha) (\partial^l s_\alpha) \rho \end{aligned} \quad (6.32)$$

где 3-vector $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ определяется соотношениями

$$\rho = \psi^* \psi, \quad s_\alpha = \frac{\psi^* \sigma_\alpha \psi}{\rho}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (6.33)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*), \quad (6.34)$$

и матрицы Паули $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ имеют вид (4.4). Заметим, что 3-векторы \mathbf{s} and $\boldsymbol{\sigma}$ являются 3-векторами в пространстве V_ξ потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Они преобразуются как векторы при преобразованиях

$$\xi_\alpha \rightarrow \tilde{\xi}_\alpha = \tilde{\xi}_\alpha(\boldsymbol{\xi}), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \frac{\partial(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \neq 0 \quad (6.35)$$

Вообще, преобразования потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$ и преобразования координат \mathbf{x} являются независимыми. Однако, действие (6.26) не содержит ссылки на потенциалы Клебша $\boldsymbol{\xi}$ и их преобразования (6.35). Если рассматривать только линейные преобразования пространственных координат \mathbf{x}

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = b^\alpha + \omega^\alpha_\beta x^\beta, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (6.36)$$

то ничто не мешает сопровождать каждое преобразование (6.36) аналогичным преобразованием

$$\xi_\alpha \rightarrow \tilde{\xi}_\alpha = b^\alpha + \omega^\alpha_\beta \xi_\beta, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (6.37)$$

потенциалов Клебша $\boldsymbol{\xi}$. Формулы для линейных преобразований векторов и спиноров в V_x не содержат явно координат \mathbf{x} , и можно рассматривать векторы и спиноры в V_ξ как векторы и спиноры в V_x , при условии, что мы рассматриваем всегда вместе преобразования (6.36) и (6.37).

Используя тождество (6.32), получаем из (6.26)

$$\mathcal{A}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \left(i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k \right) \psi^* \left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k \right) \psi - m^2c^2\rho - \frac{\hbar^2}{4} (\partial_l s_\alpha) (\partial^l s_\alpha) \rho \right\} d^4x \quad (6.38)$$

Динамическое уравнение, порожденное действием (6.38), имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(-i\hbar\partial_k + \frac{e}{c}A_k \right) \left(-i\hbar\partial^k + \frac{e}{c}A^k \right) \psi - \left(m^2c^2 + \frac{\hbar^2}{4} (\partial_l s_\alpha) (\partial^l s_\alpha) \right) \psi \\ &= -\hbar^2 \frac{\partial_l (\rho \partial^l s_\alpha)}{2\rho} (\sigma_\alpha - s_\alpha) \psi \end{aligned} \quad (6.39)$$

Градиент единичного 3-вектора $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ описывает вращательную составляющую течения флюида. Если $\mathbf{s} = \text{const}$, то динамическое уравнение (6.39) превращается в уравнение Клейна-Гордона (6.31).

Список литературы

- [1] E. Madelung, *Z.Phys.* **40**, 322, (1926).
- [2] D. Bohm, On possibility of the quantum mechanics interpretation on basis of representation on hidden variables, *Phys.Rev.* **85**, 166,(1952), 180,(1952).
- [3] Yu.A. Rylov, Spin and wave function as attributes of ideal fluid. *Journ. Math. Phys.* **40**, pp. 256 - 278, (1999).

- [4] A. Clebsch, Über eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **54** , 293-312 (1857).
- [5] A. Clebsch, Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, *J. reine angew. Math.* **56** , 1-10, (1859).
- [6] J. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, 1932.
- [7] Yu.A. Rylov, Dirac equation in terms of hydrodynamic variables. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **5**, pp 1-40, (1995)) See also *e-print /1101.5868*
- [8] Yu.A. Rylov, Mechanism of pair production in classical dynamics, *submitted to EJTP (2015)*.
- [9] Ю.А. Рылов, О связи между вектором энергии - количества движения и каноническим импульсом, *Теоретическая и математическая физика* **2**, 333-337.(1970)
- [10] Yu.A. Rylov, On quantization of non-linear relativistic field without recourse to perturbation theory. *Int. J. Theor. Phys.* **6**, 181-204, (1972).
- [11] Yu. A. Rylov, The way to skeleton conception of elementary particles. *Global J. of Science Frontier Research*, vol. **14**, iss. 7, ver.1, 43-100, (2014).